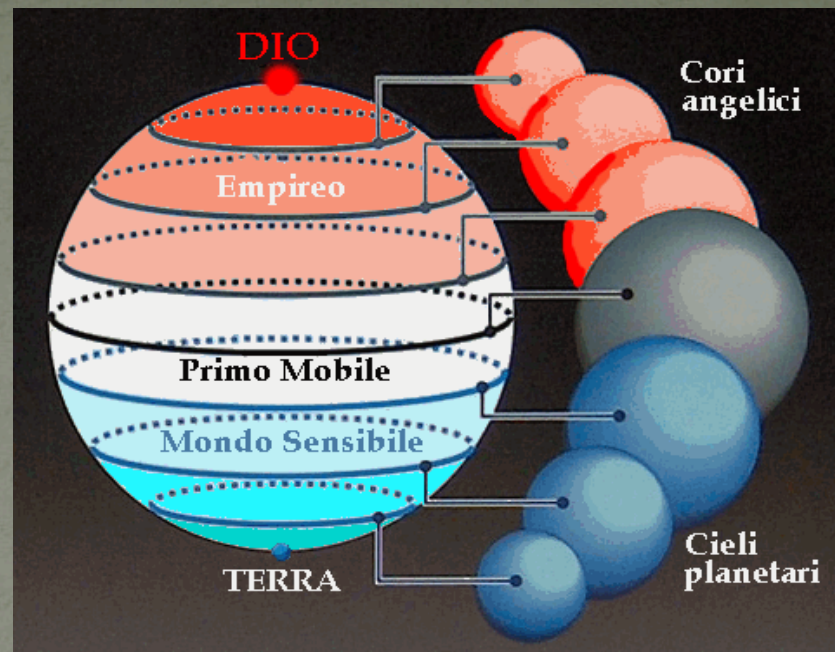


“... parendo inchiuso da quel ch’elli ‘nchiude”
(Par. XXX, 12)



Matematica, Fisica e Letteratura

Una nuova visione della
cosmologia dantesca

Indice

- ☐ Introduzione
- ☐ La cosmologia medievale
- ☐ La cosmologia dantesca tradizionale
- ☐ Le geometrie non euclidee
- ☐ La nuova cosmologia dantesca
- ☐ Conclusioni
- ☐ Bibliografia

Introduzione



La nuova cosmologia dantesca non si riferisce al sistema geocentrico aristotelico-tolemaico che rappresenta la struttura del sistema solare, ma all'idea stessa di spazio che aveva Dante.

*“parendo inchiuso da quel ch'elli 'nchiude,
a poco a poco al mio veder si stinse”*

(Par. XXX, 10-13)

Alla luce degli ultimi studi sulla struttura geometrica del paradiso dantesco, probabilmente dovremo abbandonare la visione classica che da secoli ci è stata tramandata.

La tesi emergente è che la struttura dei cieli del Paradiso non segue la geometria euclidea tridimensionale, per intenderci quella che usiamo nella vita di tutti i giorni, ma quella non euclidea che anticipa di secoli la visione di uno spazio curvo quadrimensionale adottata poi da Einstein per descrivere l'universo nel quale viviamo.

In questo modo tutto torna in maniera elegante e soprattutto coerente con i versi che Dante utilizza per descrivere il Paradiso.

Come ha potuto Dante anticipare Einstein di sei secoli?

Innanzitutto l'immaginazione spaziale di Dante, nel tardo medioevo, non era ancora ingabbiata nel rigido immaginario newtoniano per il quale lo spazio fisico è euclideo, infinito ed assoluto.

Per Dante, come per Aristotele, lo spazio è solo la struttura della relazione tra le cose, e una tale struttura può avere forme peculiari.

In secondo luogo, Dante è uomo non solo di grandissima cultura, ma anche di straordinaria intelligenza, anche matematico-scientifica. Poesia e scienza sono entrambe creazioni dello spirito che creano nuovi modi di pensare il mondo, per farcelo meglio capire.

La grande scienza e la grande poesia sono entrambe visionarie, e talvolta possono arrivare alle stesse intuizioni, per cui la straordinaria immaginazione e intuizione di Dante, associata alla sua non ortodossia scientifica, hanno saputo trovare una soluzione consistente all'antico problema di conciliare l'idea di un mondo finito con l'idea dell'assenza del "bordo del mondo".

Per evitare esagerazioni o fraintendimenti, va detto che Dante non è uno scienziato, nel senso moderno del termine, e non possedeva la matematica di quel che descrive; ma tutto ciò valorizza ulteriormente la sua figura e la rende ancora più interessante, anche agli occhi di un uomo di scienza moderno.

La cosmologia medievale

La cultura medievale fa suo il modello di universo dell'antica Grecia, il modello geocentrico aristotelico.

L'universo fisico, è, secondo Aristotele, unico, chiuso su stesso, limitato nello spazio e illimitato nel tempo (sempre esistito ed eterno).

Tale universo è diviso in due regioni obbedienti a leggi fisiche diverse:

- 1) i cieli formati dall'etere, inalterabili e incorruttibili, soggetti al moto circolare, il più perfetto dei moti, che ubbidiscono ad una fisica celeste.

La causa della regolarità e dell'eternità del moto degli astri va ricercata nel primo motore immobile che imprime il moto a tutte le sfere in cui sono incastonati gli astri e dove il Sole, le stelle, i pianeti, composti della quintessenza, splendono perché il moto delle loro sfere produce attrito con l'aria, quindi luce e calore.

2) Il mondo sublunare, il mondo del divenire, formato dai quattro elementi (terra, acqua, fuoco, aria), nel quale le cose nascono, si corrompono e periscono e dove il moto degli oggetti è rettilineo o violento. Questo mondo è soggetto alla fisica terrestre.

Poiché nessuna cosa reale può essere infinita perché ogni cosa esiste in uno spazio, e ogni spazio ha un centro, un basso, un alto e un limite estremo, allora nessuna realtà fisica è realmente infinita.



La sfera delle stelle fisse segna i limiti dell'universo, limiti al di là dei quali non c'è spazio, per cui non possono esistere altri mondi al di là del nostro. Esso è costituito da una serie di sfere concentriche, con la Terra al centro.

La sfera più esterna, il “primo mobile”, è fissa, mentre le sfere interne sono mosse dal “primo mobile”.

Il sistema aristotelico, nel corso dei secoli, subì importanti modifiche, fino alla definitiva sistemazione di Tolomeo.

Questo modello viene ripreso dai Padri della Chiesa, che devono però adattarlo ai principi della creazione biblica. Per la verità alcuni punti stridenti non poterono essere evitati.

1) Quello di Aristotele era un dio integrato col mondo, che poteva essere definito in modo impersonale, il “primo motore immobile”. E’ evidente la differenza nei confronti del Dio cristiano, un Dio personale, trascendente rispetto al mondo.

2) Nell'ottica cristiana il mondo non è eterno, ha avuto un suo inizio e avrà una sua fine.

Era necessario conciliare l'universo aristotelico con la presenza di un Dio ubiquo e attivo, contemporaneamente centro della creazione e ad essa trascendente.

Il mondo cristiano doveva avere due cesure in più: tra cose visibili e cose invisibili (corporeo e incorporeo) e tra creato e increato (creatura e Creatore).

Oltre il Primo Mobile, che Aristotele aveva posto come origine del tempo e del movimento, la cultura cristiana medievale aveva aggiunto un cielo ulteriore, non fisico, l'Empireo, rappresentato geometricamente da un'ultima sfera che circonda tutto l'universo.

Dio è l'orizzonte ultimo di tutta la realtà, abbraccia tutto il cosmo.

L'Empireo era concepito infinito ed illimitato, privo affatto di dimensioni fisiche, e non costituito da materia, neppure dalla purissima quintessenza, come si credeva fossero gli altri cieli. Era una realtà di puro spirito, fuori dal tempo e dallo spazio, e mentre i nove cieli erano in perpetuo movimento, come una sorta di orologio cosmico, l'Empireo era eternamente immobile ed immutabile.

Abbiamo nel Medioevo questo modello geocentrico, eredità dell'antica Grecia. A differenza di quanto accadeva per i greci, viene identificato, percepito, e accolto come una creatura che è la creazione di Dio.

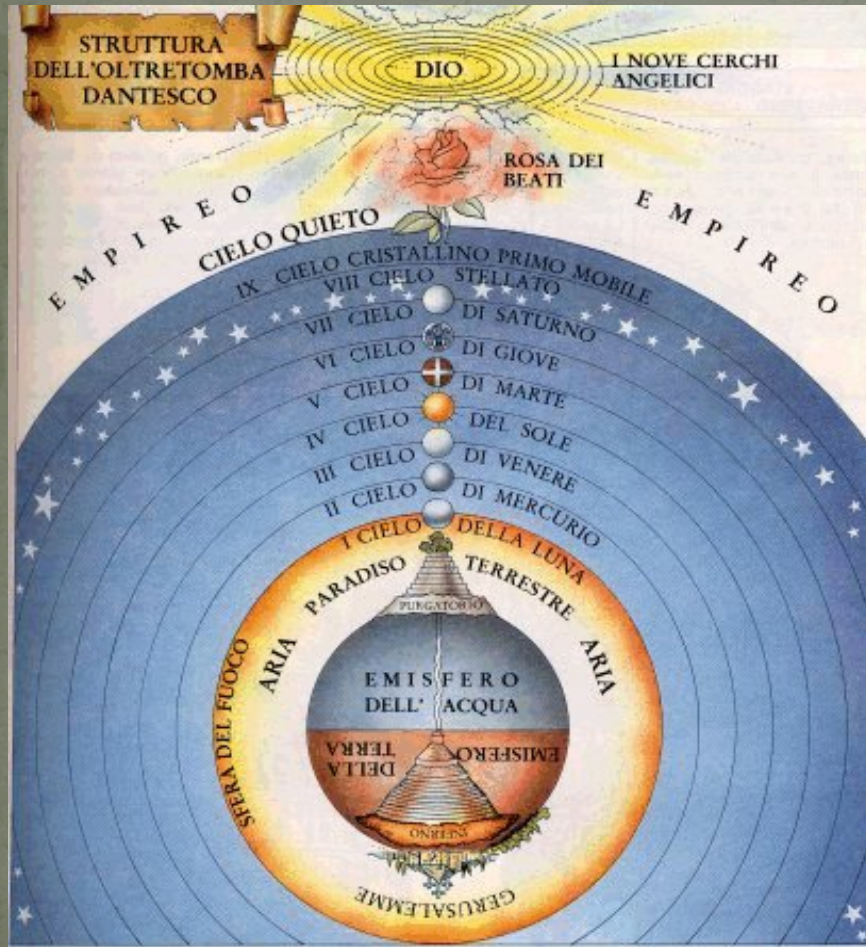
La cosmologia dantesca tradizionale

L'Empireo (dal greco *infuocato*), il più alto dei cieli, luogo della presenza di Dio, degli angeli e delle anime beate, non poteva che coincidere con il Paradiso. La sua origine va ricercata nella Bibbia, dove è usata l'espressione semitica "*Cieli dei Cieli*" per indicare il più alto degli spazi, dove risiede il Signore Dio in persona.

Dante viaggia attraverso il Paradiso negli ultimi quattro canti della Divina Commedia.

Ma andiamo per ordine.

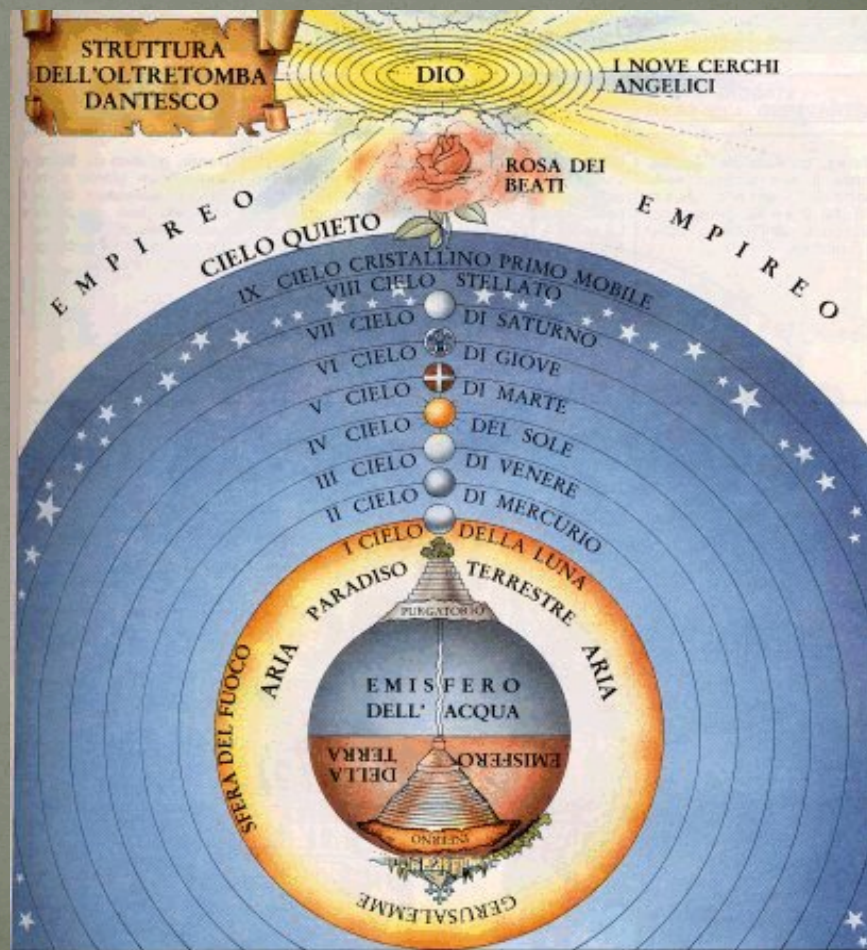
In cima alla montagna del Purgatorio si trova il Paradiso Terrestre, che non è più sottomesso alla fisica sublunare.



Dopo che Dante è stato purificato può ascendere al Paradiso Celeste. E' così che Dante supera la prima grande cesura dell'Universo, quella che separa la zona sublunare da quella celeste. Qui il tempo è il tempo dell'eternità. Siamo ancora nella zona delle cose visibili e corporee, ma non più sottoposte all'alterazione del tempo.

I cieli che si susseguono a questo punto sono disposti secondo la visione aristotelica-tolemaica, concentrici e tutti di raggio maggiore, l'ultimo comprendente tutti quelli sottostanti con al centro la Terra.

Se nell'ottavo cielo Dante si trovava in un punto ancora ben definito, la costellazione dei Gemelli, ora lo spazio è tanto omogeneo e uniforme da non poter più trovare nessun punto di riferimento spaziale per orientarsi.



E in effetti, come spiega immediatamente Beatrice, “*questo cielo non ha altro dove che la mente divina*”. E’ nel Cielo Cristallino che hanno origine il movimento e il tempo. Tutti i movimenti infatti “*son mensurati da questo ...*”.

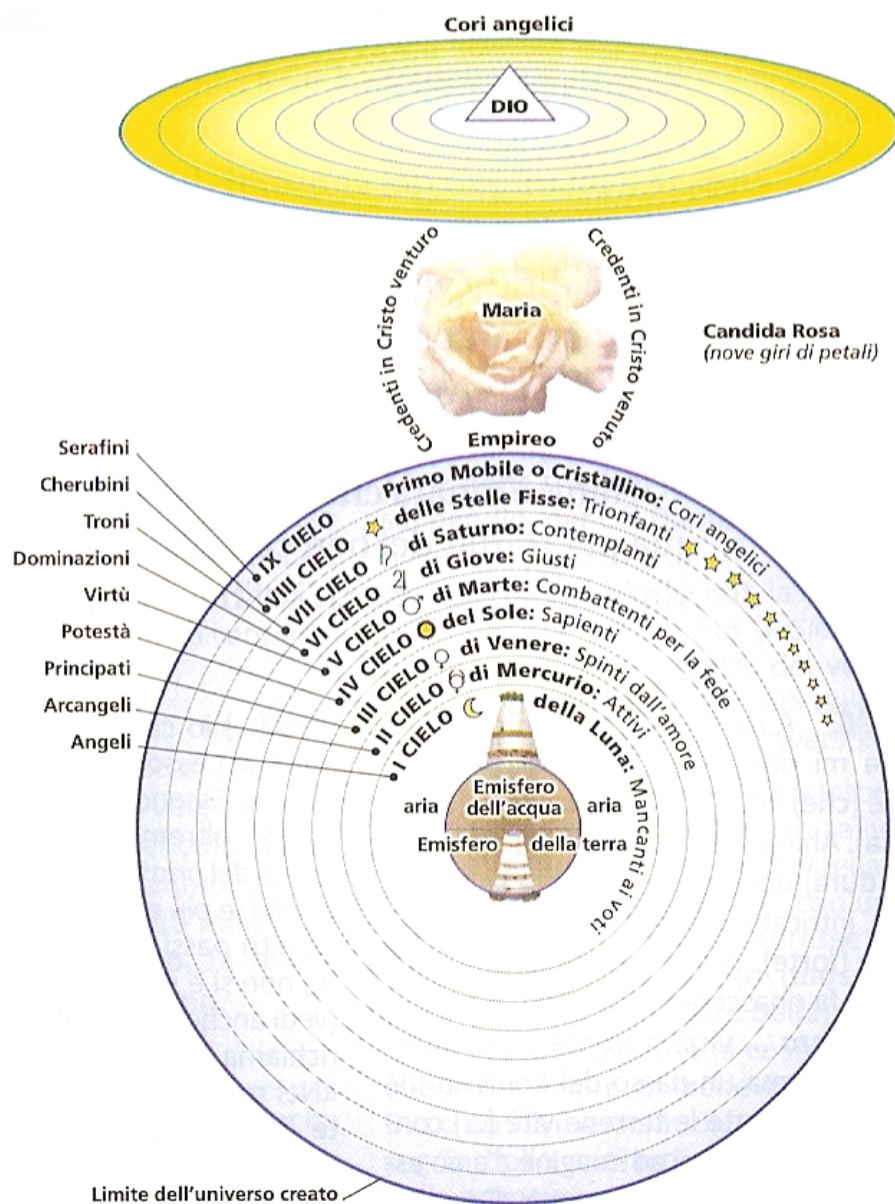
Più interessante a questi fini è però l’immagine del tempo: un albero, metaforicamente, che affonda le sue radici nel cristallino e sviluppa le proprie fronde negli altri cieli. Un albero, dunque, capovolto. Pare che ci stiamo apprestando a un nuovo cambiamento di prospettiva, a un nuovo centro gravitazionale dell’universo.

Ma nel canto XXVII Beatrice ci dà anche un'altra importante indicazione riguardo a ciò che aspetta Dante oltre il nono cielo: l'Empireo:

*“Luce ed amor d'un cerchio lui comprende,
sì come questo li altri”*
(Par. XXVII 112-113)

L'Empireo, cinge il Cristallino così come il Cristallino cinge gli altri cieli. L'Empireo è compreso solo dalla mente divina ed è il luogo della seconda cesura dell'Universo dantesco, quella che separa le cose corporee e visibili da quelle incorporee e invisibili.

La terza cesura, tra creatura e creatore, non potrà essere attraversata razionalmente dalla vista di Dante, che dovrà affidarsi all'illuminazione della grazia divina.



Le tribune su cui siedono i Beati appaiono a Dante disposte lungo una "candida rosa". Nell'Empireo inoltre il nostro poeta ha modo di contemplare le gerarchie degli angeli, disposte su nove cerchi concentrici, ad immagine dei nove cieli; e al centro di questi nove cerchi, un punto luminosissimo che rappresenta la Divinità.

Quest'ultimo infatti è composto da nove cieli materiali che circondano la Terra; l'Empireo a sua volta è formato da nove cieli, stavolta spirituali, che convergono loro pure in un punto.

Beatrice si rivolge a Dante dicendo: “*Luce ed amor d'un cerchio lui comprende sì come questo li altri*”. L'Empireo sembra circondare il Primo Mobile e quindi il mondo sensibile. Cioè: il cerchio di luce e d'amore che è l'Empireo contiene il Primo Mobile, così come quest'ultimo comprende tutti i cieli precedenti; e solo colui che lo avvolge, cioè Dio, intende cosa sia e in che modo operi.

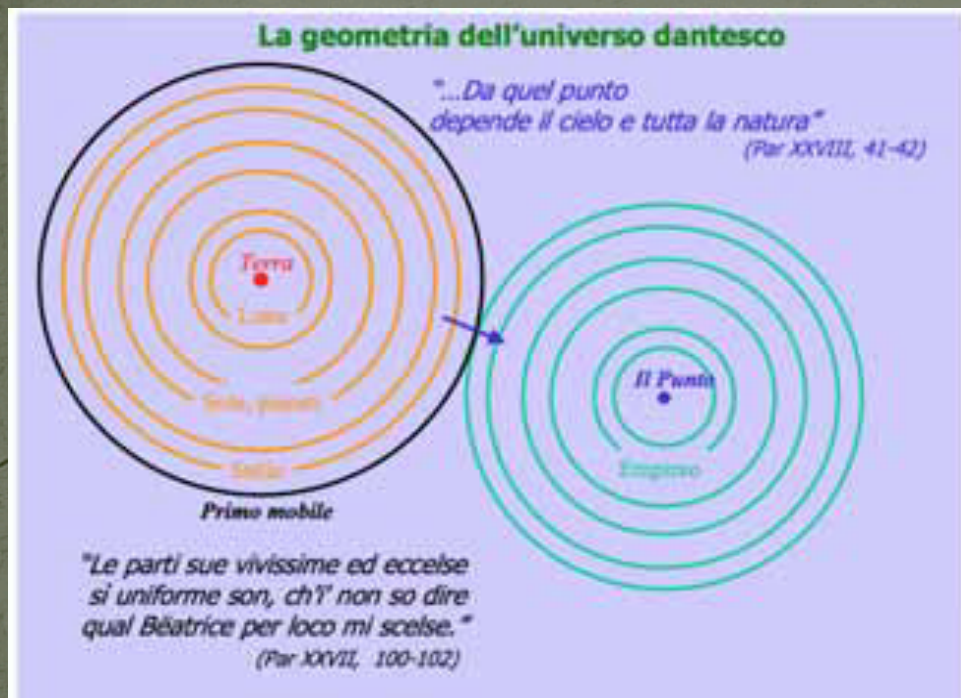
Appena un canto dopo, invece, l'Empireo sembra piuttosto "richiudersi su se stesso", come se esso non fosse lo spazio esterno ad una sfera (il Primo Mobile), ma piuttosto lo spazio interno ad essa:

*“Distante intorno al punto un cerchio d'igne
sì girava sì ratto, ch'avria vinto
quel moto che più tosto il mondo cigne;
e questo era d'un altro circumcinto,
e quel dal terzo, e 'l terzo poi dal quarto,
dal quinto il quarto, e poi dal sesto il quinto.
Sopra seguiva il settimo sì sparto
già di larghezza, che 'l messo di Iuno
intero a contenerlo sarebbe arto.
Così l'ottavo e 'l nono; e chiascheduno
più tardo si movea, secondo ch'era
in numero distante più da l'uno;
e quello avea la fiamma più sincera
cui men distava la favilla pura,
credo, però che più di lei s'invera.
La donna mia, che mi vedëa in cura
forte sospeso, disse: "Da quel punto
depende il cielo e tutta la natura."*

(Par. XXVIII, 25-42)

Dante sta osservando il punto luminosissimo nel quale riconoscerà Dio, e vicino ad esso vede girare un cerchio di fuoco ("*d'igne*"), tanto veloce da superare anche il moto di quel cielo (il Primo Mobile) che più rapidamente si volge intorno alla Terra. Questo primo alone è circondato da un secondo, e questo da un terzo, e via seguitando. Il settimo è così esteso che persino "*il messo di Iuno*", cioè l'arcobaleno, se anche fosse un circolo intero e non un arco, sarebbe troppo stretto per contenerlo. Ed ognuno si muove con velocità decrescente, in proporzione del numero d'ordine di ciascuno in rapporto all'unità: il secondo ha velocità angolare pari alla metà del primo, il terzo la ha pari a un terzo del primo, e così via, proprio come il Cielo della Luna è più veloce di quello di Mercurio, questo di quello di Venere, e così via, potenziando la simmetria tra mondo materiale ed Empireo.

In sintesi: il Primo Mobile è un cielo la cui struttura fisica non è dissimile da quella degli altri cieli, cioè una sfera esterna e concentrica a quelle planetarie e stellari, immersa nell'infinità dell'Empireo, che delimita l'intero universo visibile. Lo stesso Empireo viene raffigurato come un'altra serie di sfere concentriche, costituite dai vari ordini di angeli che ruotano a loro volta attorno ad un punto centrale che è Dio stesso.



Guardando dal Primo Mobile verso l'esterno, cio  verso l'Empireo,   come se ci trovassimo a contemplare un secondo universo, simmetrico rispetto al mondo sensibile, con nove cieli intorno a un fulcro di rotazione che resta immobile.

Dante sottolinea come non vi sia alcuna indicazione che si debba scegliere un punto particolare sul Primo Mobile per avere questa visione; anzi, Dante ci ha gi  avvisati che il Primo Mobile   cos  omogeneo ed isotropo (cio  sempre uguale a se stesso in ogni punto e in ogni direzione) che non riesce a stabilire con certezza neppure da che parte vi   entrato:

*“Le parti sue vivissime ed eccelse
sì uniforme son, ch'i' non so dire
qual Bëatrice per loco mi scelse.”*

(Par. XXVII, 100-102)

Con questa terzina, l'Alighieri vuole dirci che avremmo la stessa visione dell'interno dell'Empireo guardando "fuori" da qualsiasi punto del Primo Mobile.



In altri termini l'Empireo è un cielo che circonda l'universo sensibile, e allo stesso tempo è a sua volta richiuso a mo' di sfera intorno ad un punto.

Questo spazio geometrico descritto da Dante è impossibile rappresentarlo attraverso la geometria euclidea utilizzata per descrivere l'Inferno e il Purgatorio.

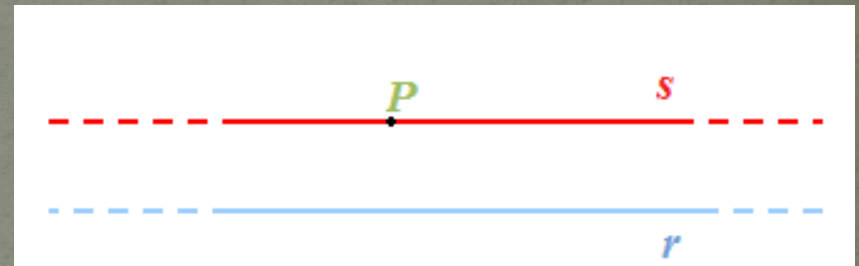
E allora?

Allora dobbiamo rappresentare lo spazio dantesco in altro modo, basato sulla geometria non euclidea.

Le geometrie non euclidee

La geometria euclidea è la geometria che si basa sui postulati di Euclide e in particolar modo sul quinto postulato:

Data una qualsiasi retta r ed un punto P non appartenente ad essa, è possibile tracciare per P una ed una sola retta s parallela alla retta r data.

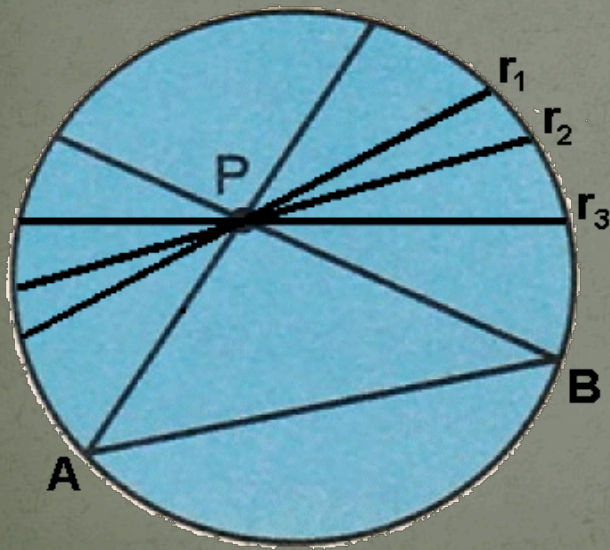


Le geometrie che si basano su postulati diversi da quelli elencati da Euclide sono dette *geometrie non euclidee*.

Il postulato sul quale si basano una di queste geometrie (Lobacevskij-Bolyai) è:

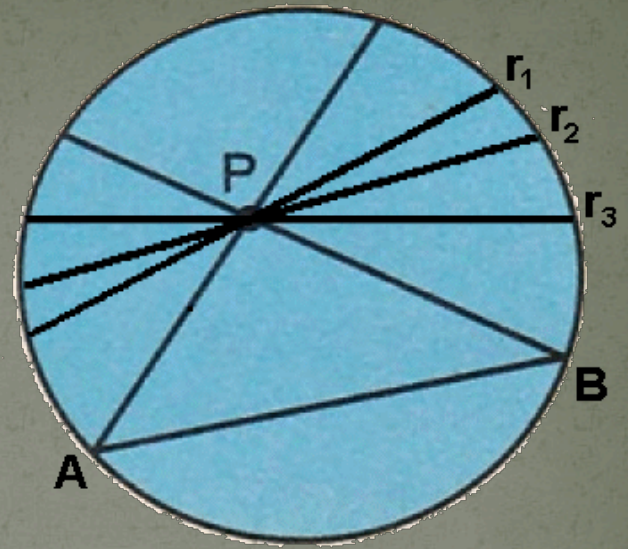
Per un punto fuori di una retta passano infinite rette parallele ad una retta data.

Come realizzare in pratica questa strana geometria?

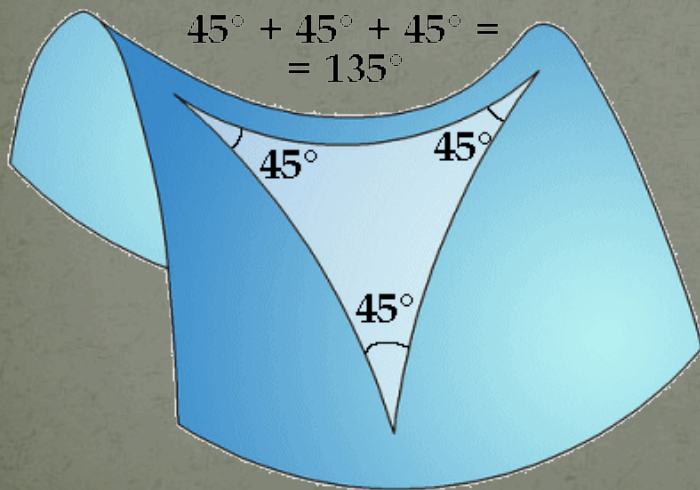


Basta chiamare "piano" quello che per Euclide è un cerchio, e "retta" ogni corda dello stesso cerchio (estremi esclusi). In questo modo non vale il V postulato di Euclide. Infatti:

il punto P non appartiene alla "retta" AB, ma come si vede ci sono infinite "rette" passanti per P che non intersecano AB, e quindi ad esse "parallele".

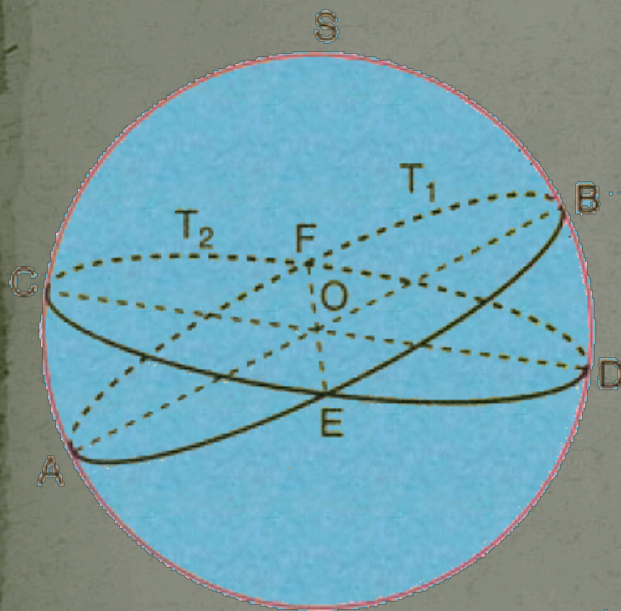


In questa nuova geometria, chiamata *geometria iperbolica*, la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di 180° .



Un altro tipo di geometria non euclidea (Riemann), detta *ellittica*, si basa sul seguente postulato:

Per un punto fuori di una retta non si può condurre alcuna retta ad essa parallela.

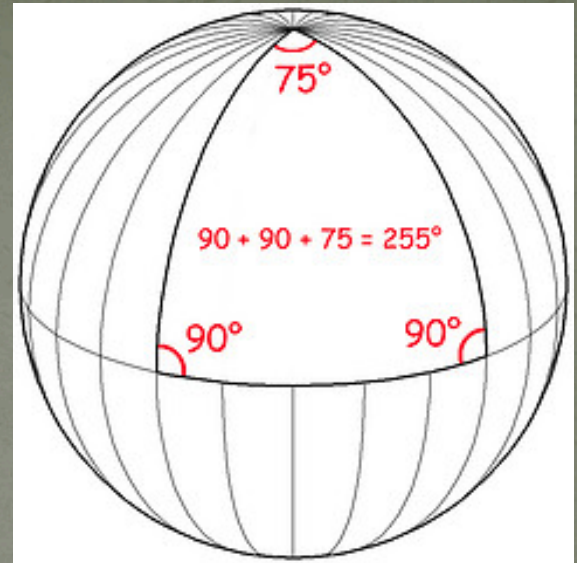


Basta chiamare "piano" quella che per Euclide è la superficie di una sfera S , e "rette" i suoi cerchi massimi (T_1 e T_2) mentre "punti" sono le coppie di punti euclidei antipodi sulla sfera (E e F).

Come si vede, nessun cerchio massimo può evitare di intersecarne un altro, e dunque le rette parallele non esistono più, in accordo con il "nuovo" postulato di Riemann.

In questa geometria la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre maggiore di 180° .

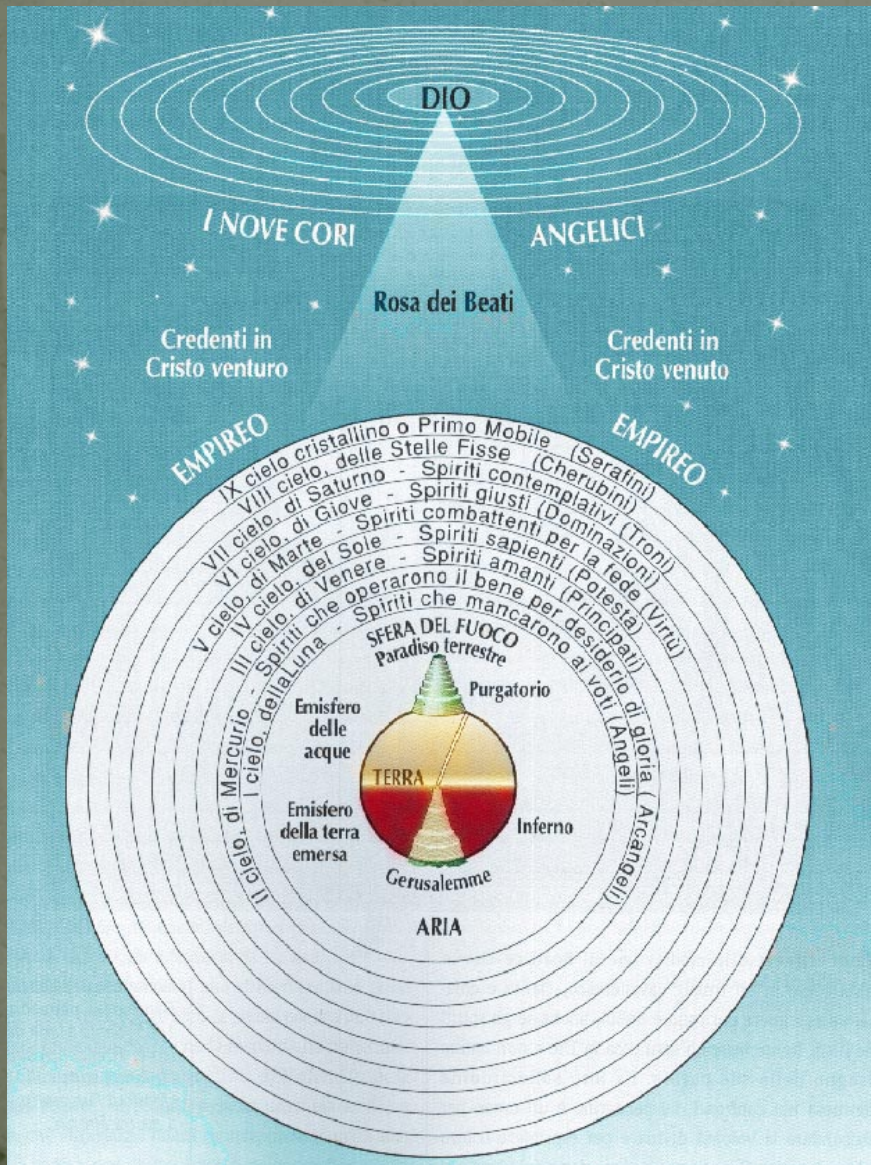
La geometria ellittica di Riemann abbandona il piano, costruendo la sua geometria su di una superficie curva.



Viene introdotto in tale modo il concetto di curvatura dello spazio.

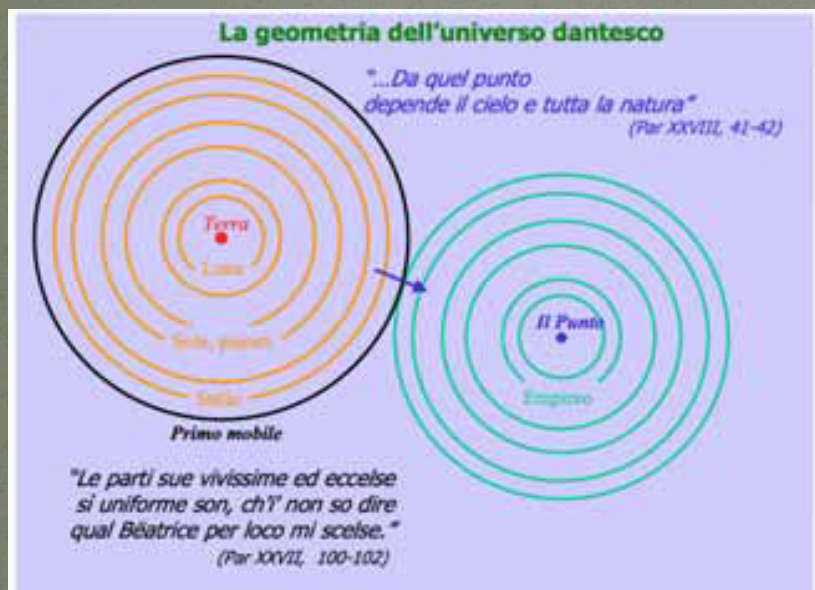
Teniamo presente questo risultato per il nostro scopo.

La nuova cosmologia dantesca

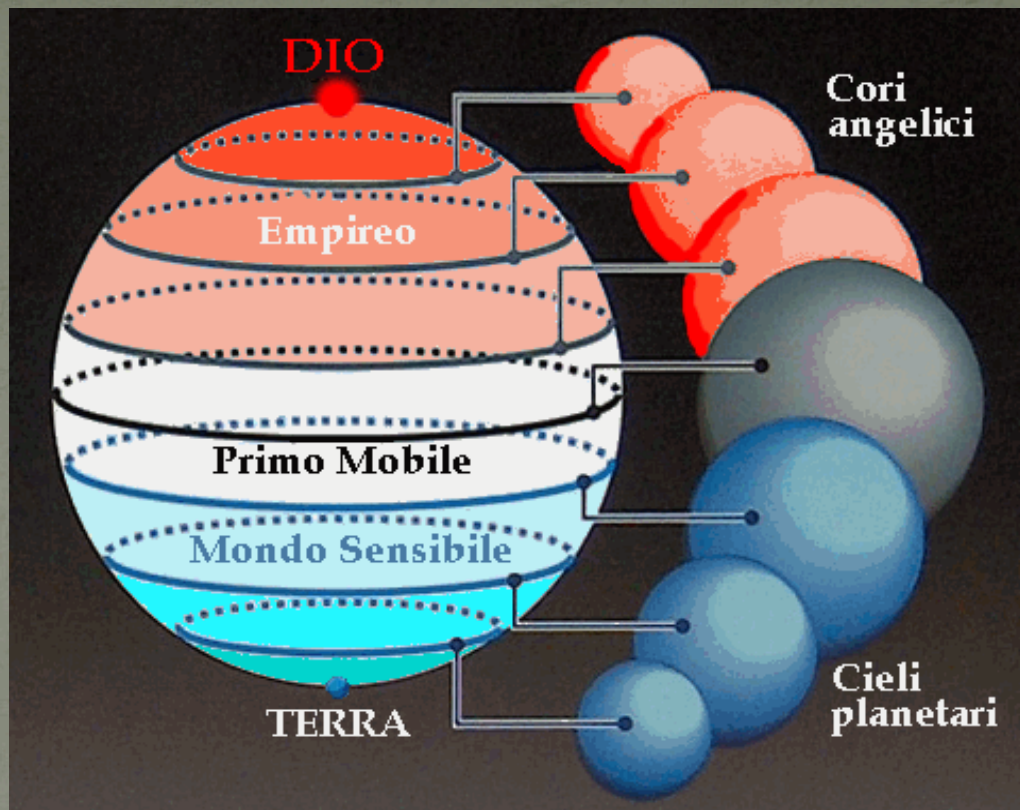


Ricapitoliamo: secondo l'immagine tradizionale al centro si vedono la Terra e il percorso dantesco dall'imbuto infernale al monte del Purgatorio. Intorno alla Terra, quali sfere concentriche, si susseguono correttamente i nove cieli materiali. Fino a qui la rappresentazione è fuori discussione.

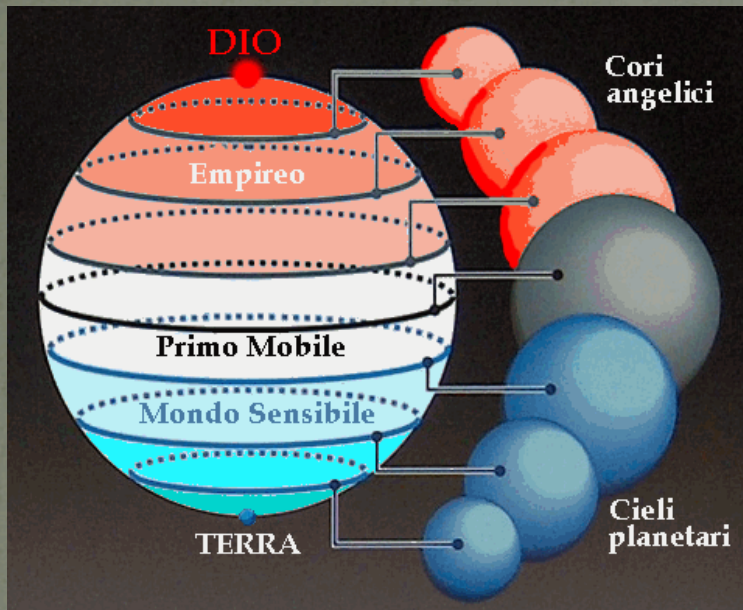
Il completamento dell'universo dantesco, vale a dire la rappresentazione dei nove cori angelici concentrici che racchiudono Dio, lascia più di un dubbio.



I due nuclei di sfere concentriche (quella sensibile e angelica, simmetriche e in stretta corrispondenza) risultano separati e dislocati casualmente in uno spazio male definito, un modello cosmologico quanto meno improbabile, che fa a pugni con la tensione, la bellezza e l'armonia della descrizione dantesca.



Dante, dunque, invece di descrivere uno spazio piatto, incompatibile con la geometria euclidea e quindi con le rappresentazioni tradizionali del Paradiso, ha immaginato uno spazio curvo.



L'universo dantesco è fatto da sfere concentriche, sempre più grandi via via che ci allontaniamo dalla Terra, le quali però oltrepassato un certo limite (il Primo Mobile) incominciano a diventare sempre più piccole fino a convergere intorno a un altro punto, che non è la Terra.

Nello spazio tridimensionale tutto ciò pare impossibile, ma in uno spazio pluri-dimensionale questa struttura è geometricamente non solo esistente, ma di perfetta armonia come la sfera nella nostra concezione. Questa struttura si chiama **Ipersfera** (sfera a 4 dimensioni).

Una conferma di questa straordinaria visione quadridimensionale dell'universo è offerta dallo stesso Dante quando, appena entrato nell'Empireo oltrepassando il Primo Mobile, l'ultima frontiera dell'universo materiale, afferma:

*“Non altrimenti il triunfo che lude
sempre dintorno al punto che mi vinse,
parendo inchiuso da quel ch'elli 'nchiude,
a poco a poco al mio veder si stinse”*

(Par. XXX, 10-13)

*Il punto di luce e le sfere di angeli circondano
l'universo sensibile, e insieme sono circondati
dall'Universo stesso.*

L'immagine di due insiemi di sfere concentriche ciascuno dei quali "inchiude" l'altro è solo un'oscura immagine poetica. I libri sulla Divina Commedia disegnano il punto di luce e le sfere di angeli semplicemente fuori dall'universo aristotelico.

Ma per un matematico o un cosmologo, la descrizione della forma dell'Universo data da Dante è perfettamente trasparente, e l'oggetto descritto da Dante è inconfondibile.

Si tratta di una *ipersfera*, la forma che nel 1917 *Einstein* ha ipotizzato essere la forma del nostro universo, e che oggi resta compatibile con le più recenti misure cosmologiche.

L'ipotesi non è così fantasiosa come potrebbe sembrare a prima vista, dato che Dante aveva più familiarità con la geometria sferica, legata alle osservazioni astronomiche, che con la geometria euclidea. Forse fu questo a favorire la sua arditissima intuizione di una geometria "diversa".

Se la forma dell'Universo di Dante è un'ipersfera, allora di quale forma geometrica stiamo parlando?

L'ipersfera è una sfera avente più di tre dimensioni: nel nostro caso quattro. È una struttura matematica, una figura geometrica, che non è facilissima da concepire.

La difficoltà sta nel fatto che non la si può disegnare dentro lo spazio a cui siamo abituati, per lo stesso motivo per cui la superficie della Terra non può essere disegnata su una carta geografica piana.

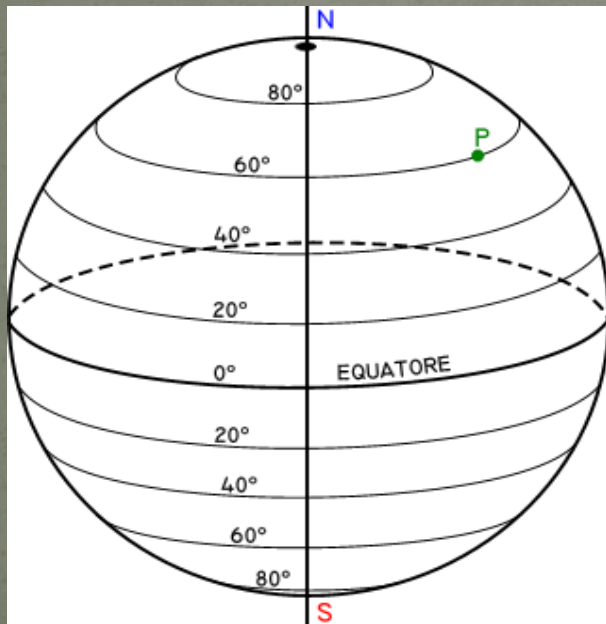
Per capire, consideriamo il seguente esempio:

Se camminiamo sulla Terra sempre nella stessa direzione, dopo avere fatto il giro della Terra, torniamo al punto di partenza. Questo perché la Terra è una “sfera”, precisamente è una “due-sfera” (“due”, perché sulla Terra si può camminare in due direzioni principali: nord-sud, o est-ovest).

Poniamo la stessa domanda per l'universo in cui siamo: immaginiamo di poter viaggiare su un'astronave velocissima sempre nella stessa direzione. Dopo avere fatto il giro intero dell'Universo, ritorneremo al punto di partenza, sulla Terra. Questo è ciò che avviene se l'Universo è una tre-sfera.

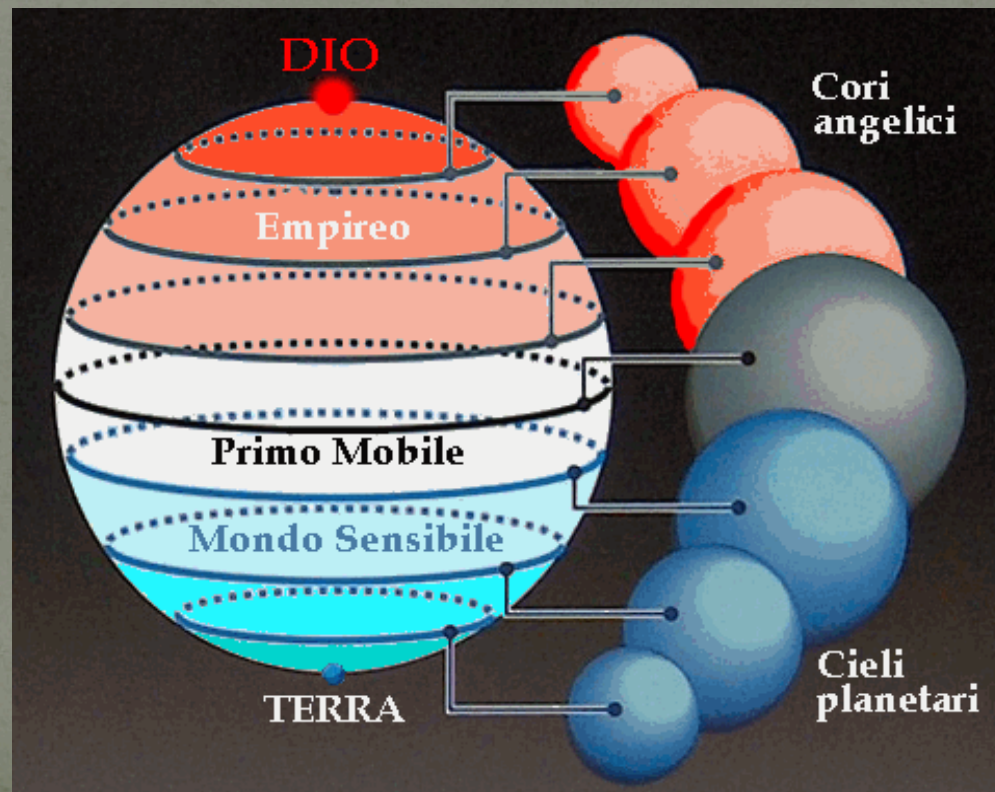
Ma come possiamo rappresentarci una ipersfera?

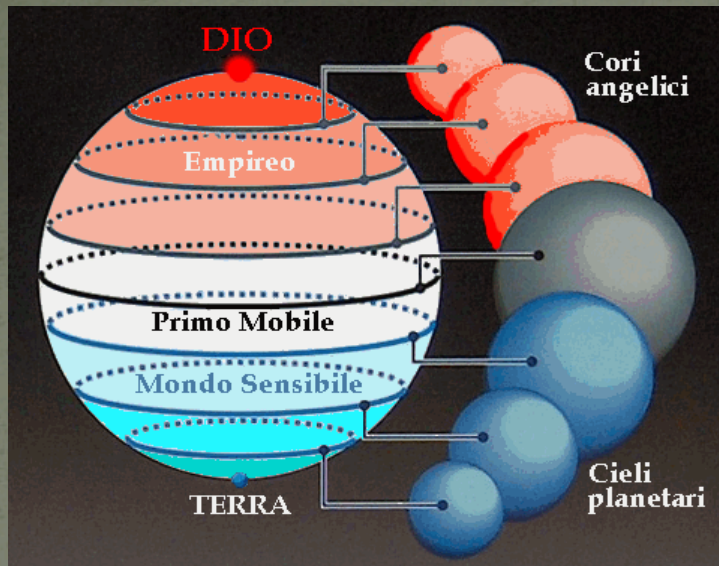
Il nostro cervello è incapace di figurarsi oggetti con più di tre dimensioni, ma possiamo avere un'idea se procediamo per analogia con quanto avviene nello spazio euclideo ordinario.



Se consideriamo una comune sfera tridimensionale, partendo dal polo sud verso l'equatore notiamo che i paralleli su di essa si allargano sempre più. Poi, man mano che procediamo verso il polo nord, rimpiccioliscono di nuovo fino a ridursi ad un punto. Tutti i paralleli presi globalmente costituiscono la due-sfera.

Analogamente, se a partire da un punto prendiamo una serie di sfere di raggio crescente, fino ad arrivare ad un valore massimo dopo il quale esse cominciano a ridursi sino a ridursi nuovamente un punto, potremo dire che tutte queste sfere hanno costruito una tre-sfera, cioè una sfera quadridimensionale con una superficie a tre dimensioni.





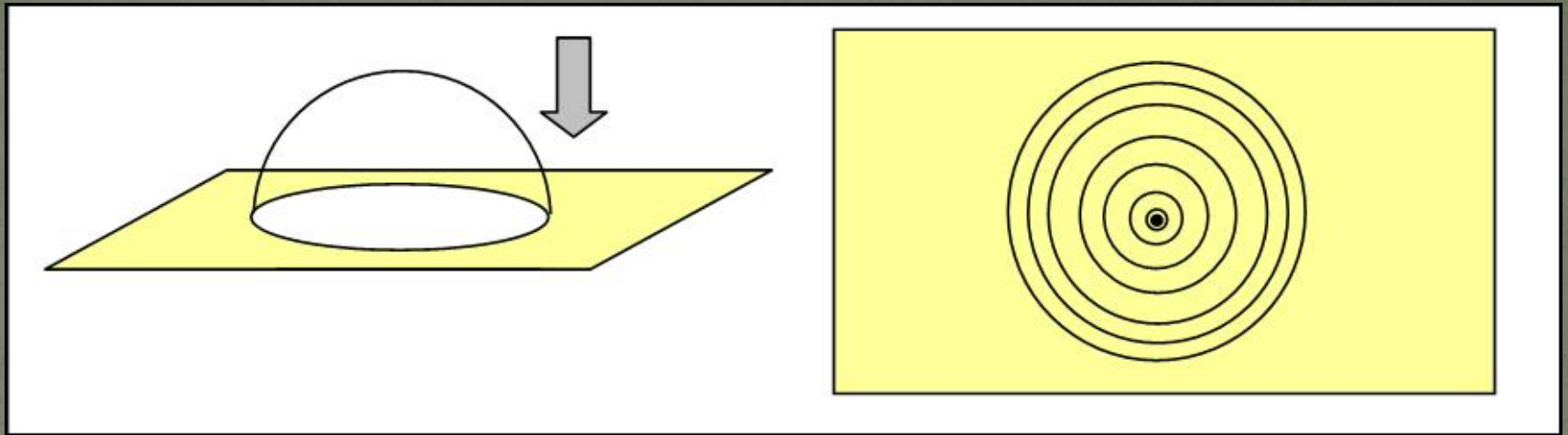
Il punto da cui partiamo è la Terra; le sfere di dimensione crescente sono le sfere dei quattro elementi e poi le sfere celesti fatte di etere, cioè il mondo sensibile.

L'equatore della tre-sfera è costituita dal Primo Mobile; le successive sfere decrescenti sono i cori angelici, che costituiscono l'Empireo; il punto di arrivo è Dio.

Il punto ultimo, dove si trova Dio, che prima era effettivamente un punto, è ora diventato un'ultima sfera che circonda tutto l'universo: la divinità è sia centro assoluto che contenitore assoluto della creazione.

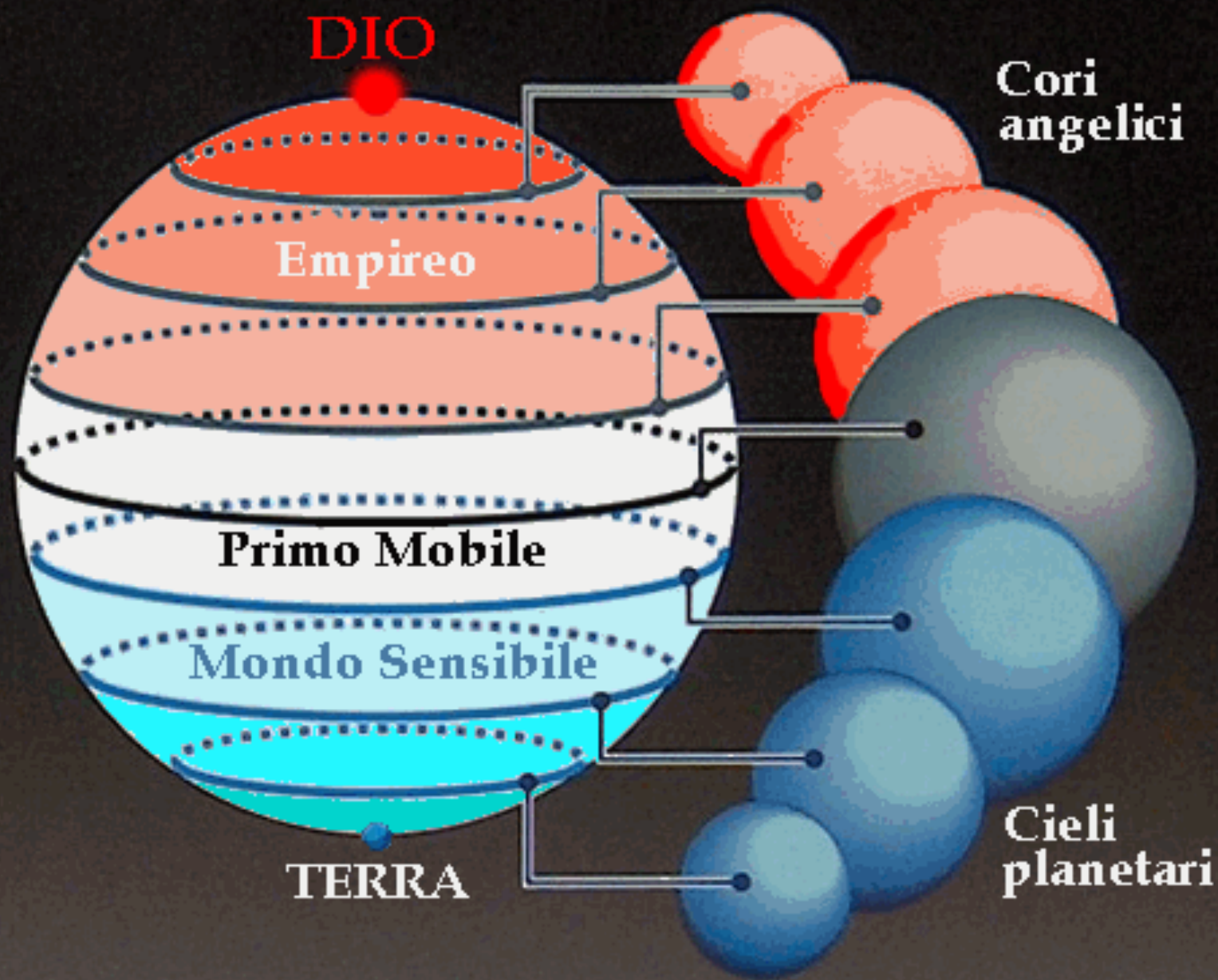
Un altro modo per rappresentarci un'ipersfera nel nostro mondo tridimensionale, è il seguente.

Immaginiamo un universo abitato da esseri bidimensionali, per esempio quadrati. Ebbene, tali esseri avrebbero la facoltà di percepire solo ciò che è alla propria destra o sinistra, mentre per loro non avrebbero senso l'alto o il basso. Una sfera, abitante nello spazio tridimensionale, che attraversasse questo piano abitato da quadrati come sarebbe percepita?



Sarebbe percepita come un punto che si allarga piano piano fino a diventare un cerchio, il quale poi si restringe fino a diventare di nuovo un punto per poi sparire (immaginate un piano che interseca una sfera: l'intersezione è un cerchio).

Adesso consideriamo il nostro spazio tridimensionale che venga attraversato da una ipersfera che vive nello spazio quadridimensionale. L'ipersfera come sarebbe percepita? Per analogia con gli esseri quadrati, sarebbe percepita come una sfera che appare prima come un punto, che si gonfia fino ad un raggio massimo per poi rimpicciolirsi di nuovo fino ad un punto per poi sparire (per analogia con il caso precedente adesso lo spazio intersecato con l'ipersfera da origine alla sfera).



Conclusioni

L'Inferno e il Purgatorio sono luoghi presenti sulla Terra, soggetti alla fisica terrestre e quindi ad un inevitabile divenire, ad una corruzione, non solo morale, ma anche fisica. In sostanza sono mondi fisici collocati in uno spazio geometrico, quello euclideo, che può essere indagato dall'uomo.

Il Paradiso, e quindi Dio, invece, non poteva essere collocato in uno spazio geometrico consueto, per intenderci quello euclideo, che l'uomo usa quotidianamente per collocare le cose del mondo fisico.

Se il Paradiso è il luogo oltre il tempo e lo spazio, doveva essere collocato in una dimensione ultraterrena, una dimensione oltre lo spazio euclideo.

E questa dimensione per essere descritta aveva bisogno di una geniale rappresentazione, di una fervida immaginazione che superasse il recinto della geometria euclidea. E Dante trova lo spazio ideale del Paradiso nella forma dell'ipersfera, una struttura geometrica che non è possibile rappresentarci attraverso la geometria euclidea, ma soprattutto, non è possibile rappresentarla visivamente nel nostro consueto spazio geometrico "umano".

Dante, attraverso il potente potere visionario della poesia, è riuscito non solo a cogliere, almeno intuitivamente, questa nuova dimensione dello spazio, ma l'ha descritta in maniera affascinante e sublime al punto di trascinare noi stessi in un viaggio oltre il tempo e lo spazio, un viaggio in un altro universo, in un'altra dimensione.

FINE

Bibliografia

- www.fmboschetto.it
- www.brera.unimi.it/sisfa/atti/Manuguerra.pdf
- www.filosofico.net
- www.wikipedia.org
- Gian Italo Bischi – Matematica per la letteratura, letteratura per la matematica
- Piergiorgio Odifreddi – Le scienze – ottobre 2011
- Articolo La Stampa del 29/10/2010
- Dante e Einstein nella tre-sfera di Carlo Rovelli – Il sole 24 ore del 20/10/2010
- <http://proooof.blogspot.com/>
- www.euresis.org
- Vincenzo Pappalardo – Storia della fisica e del pensiero scientifico
- Horia-Roman Patapievici – Gli occhi di Beatrice – Bruno Mondadori
- Francesca Zanichelli – Tesina – Esame di Stato 2006/07
- Bruno D'Amore – La matematica nella Divina Commedia