

FISICA

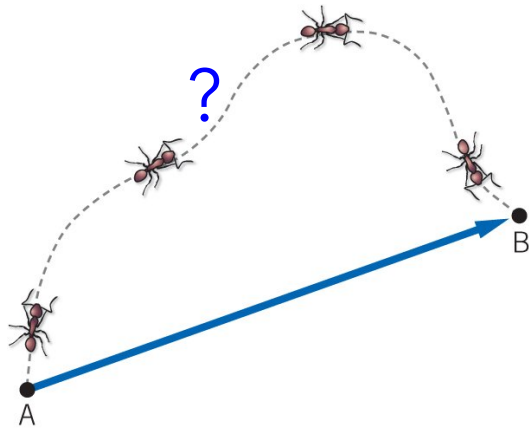
MECCANICA: La Cinematica bidimensionale

Autore: prof. Pappalardo Vincenzo
docente di Matematica e Fisica



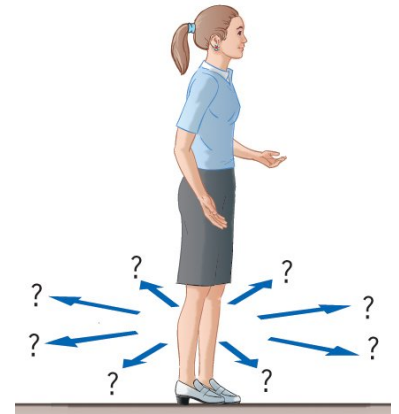
Il moto nel piano

I moti possono svolgersi anche su un piano, in due dimensioni (oltre che nello spazio, tre dimensioni).



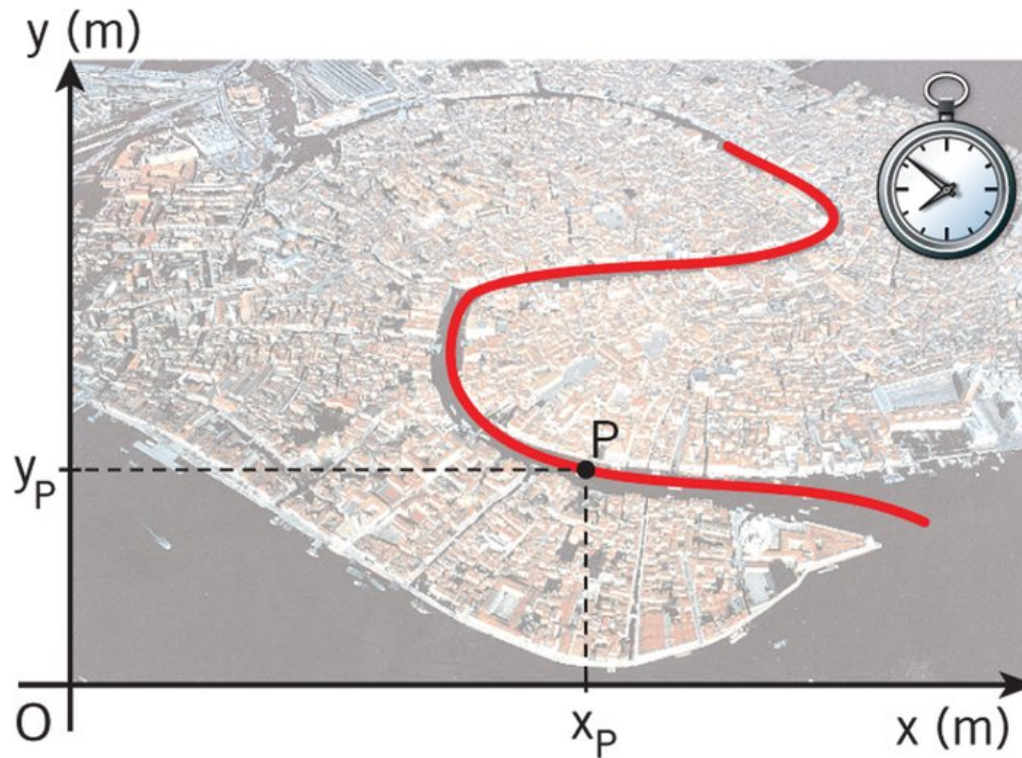
Se lasciamo una formica nella posizione A, dopo un certo tempo la ritroveremo nella posizione B. Si è spostata da A a B (AB vettore spostamento) ma non sappiamo la traiettoria che ha seguito.

Se chiediamo alla ragazza di spostarsi, ci chiederà da che parte dirigersi. Per descrivere il moto della ragazza è necessario dare anche la direzione.

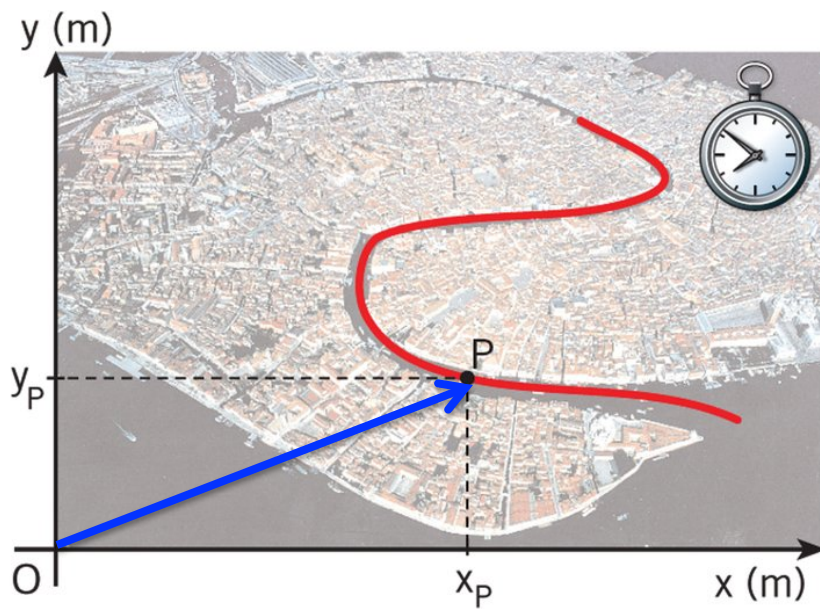


Per descrivere i moti nel piano (o nello spazio) è necessario conoscere **I VETTORI** e la loro algebra.

VETTORE POSIZIONE E VETTORE SPOSTAMENTO



Il moto di una barca P (considerata come un punto materiale) in un canale è un moto nel piano. Per descrivere il moto della barca usiamo un sistema di riferimento cartesiano (un sistema di assi cartesiani (X,Y) per determinare la posizione $P(x_p, y_p)$ e un orologio per determinare il tempo quando si trova in P).

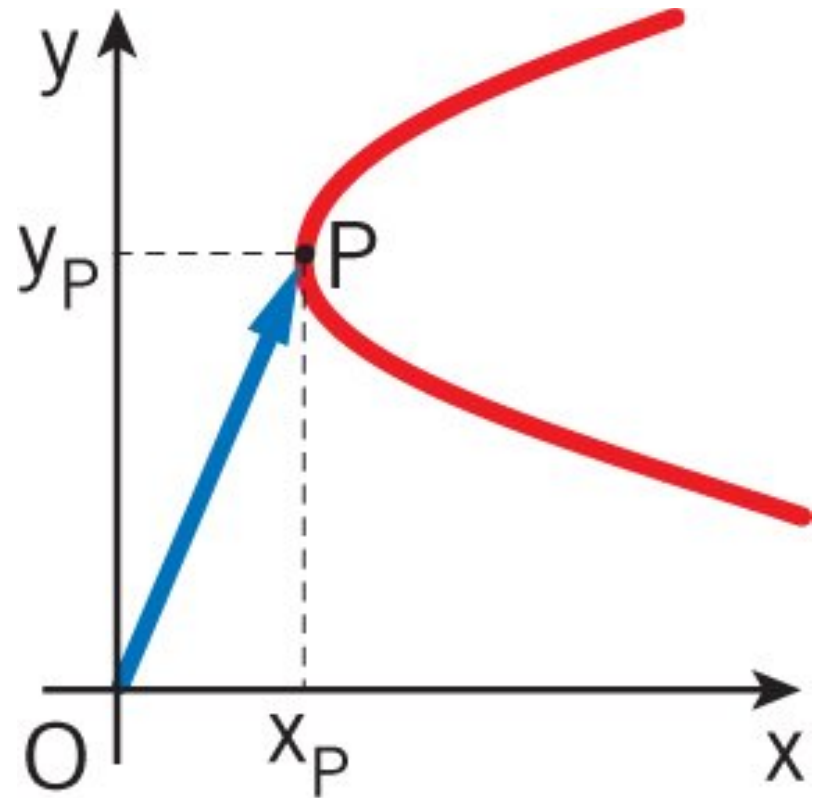


LA TRAIETTORIA della barca
è la linea (rossa) formata
da tutti i punti P occupati al
trascorrere del tempo.

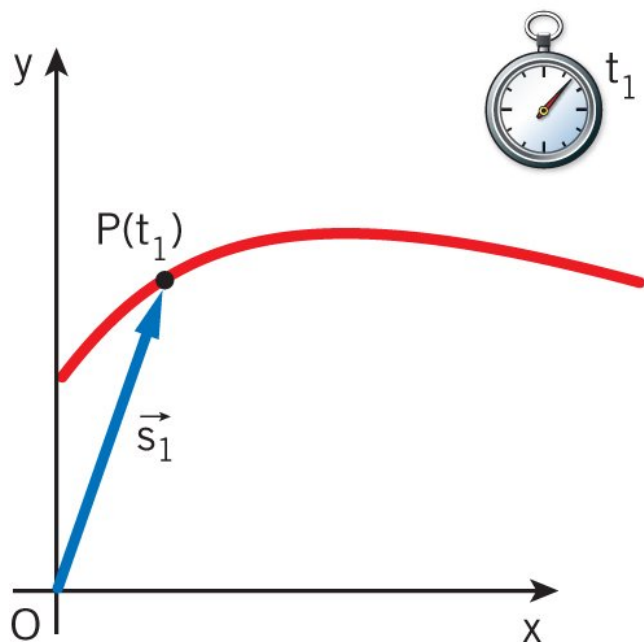
Per individuare la posizione di P
rispetto all'origine del sistema
di riferimento, si usa il vettore
posizione di P rispetto ad O .

IL VETTORE POSIZIONE

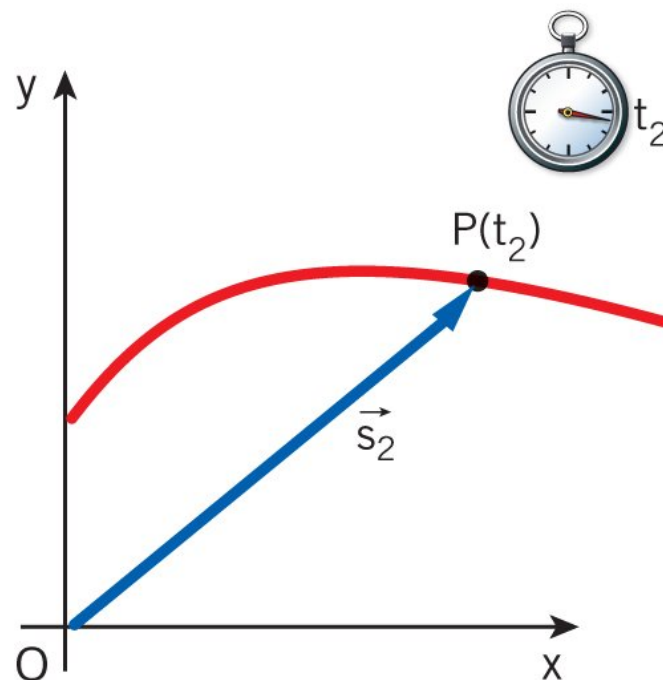
individua il punto P in cui si
trova un oggetto puntiforme.



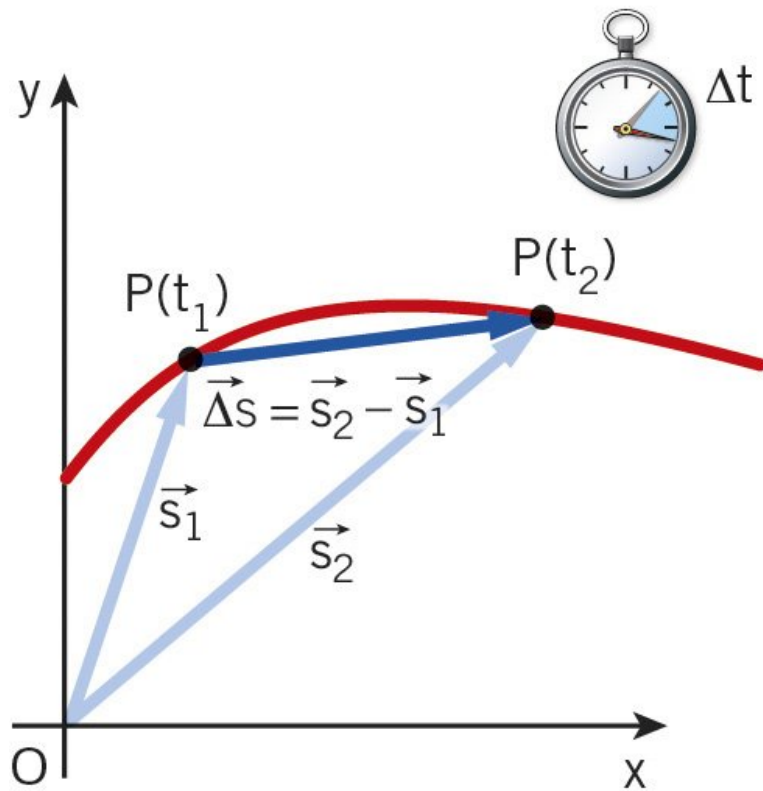
All'istante t_1 la posizione di P sulla traiettoria è descritta dal vettore posizione $\vec{s}_1$.



A un istante successivo t_2 , P occupa una nuova posizione individuata dal vettore posizione $\vec{s}_2$.



Come rappresentiamo lo spostamento $\Delta \vec{s}$ tra i due istanti?
Abbiamo bisogno dell'algebra vettoriale.



Lo spostamento del punto materiale P tra i due istanti è dato dal vettore spostamento $\Delta \mathbf{s}$ definito come la variazione del vettore posizione :

$$\Delta \vec{s} = \vec{s}_2 - \vec{s}_1$$

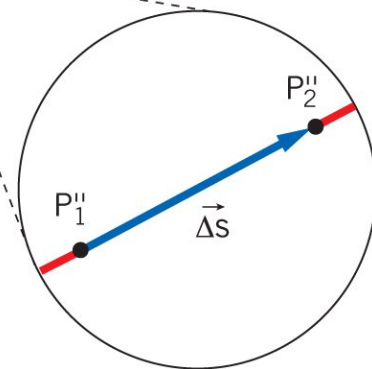
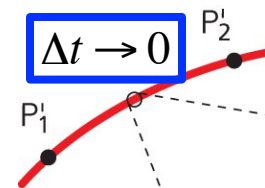
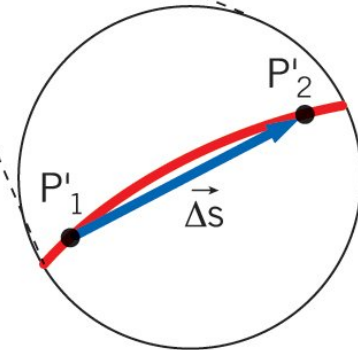
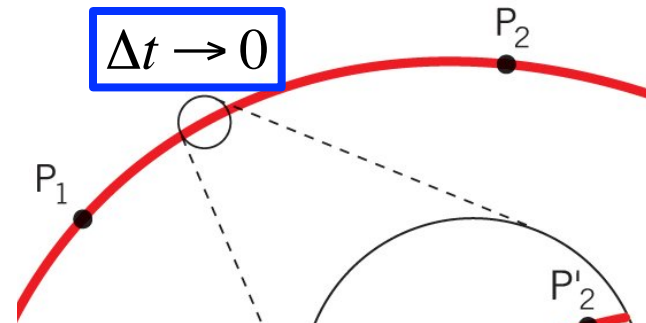
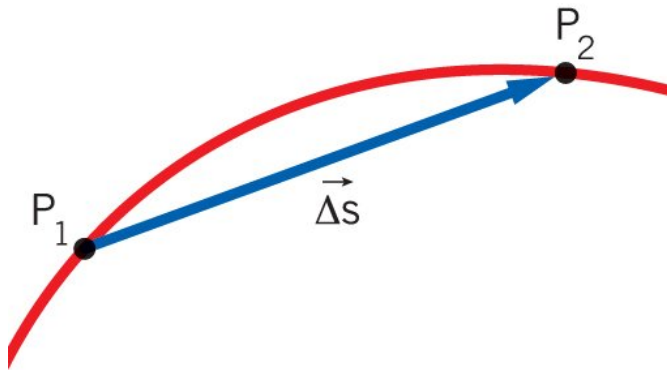
$\Delta \mathbf{s}$ = differenza vettoriale tra i vettori $\mathbf{s}_2$ e $\mathbf{s}_1$.

Il vettore spostamento $\Delta \mathbf{s}$ da le seguenti informazioni:

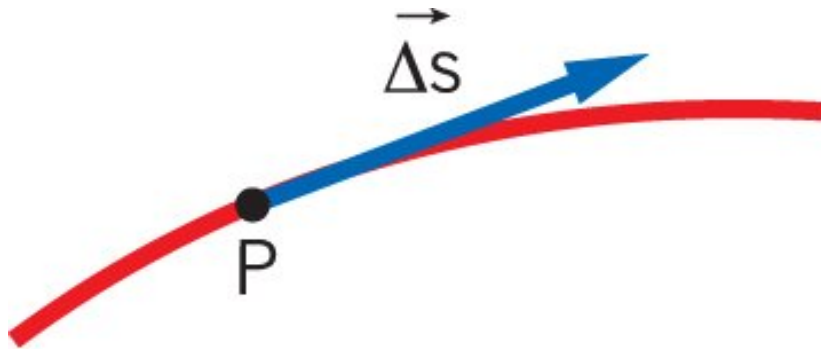
- lungo quale retta è avvenuto lo spostamento di P (direzione di $\Delta \mathbf{s}$);
- qual è il verso del moto (verso di $\Delta \mathbf{s}$);
- quanto è lungo lo spostamento di P (modulo di $\Delta \mathbf{s}$).

Cosa succede al vettore spostamento $\Delta \mathbf{s}$ se l'intervallo di tempo Δt diventa piccolo ($\Delta t \rightarrow 0$) ?

Consideriamo il vettore spostamento $\Delta \mathbf{s}$ di P in un certo intervallo di tempo Δt .



Quando Δt è molto piccolo ($\Delta t \rightarrow 0$), lo spostamento $\Delta \mathbf{s}$ coincide praticamente con la traiettoria.



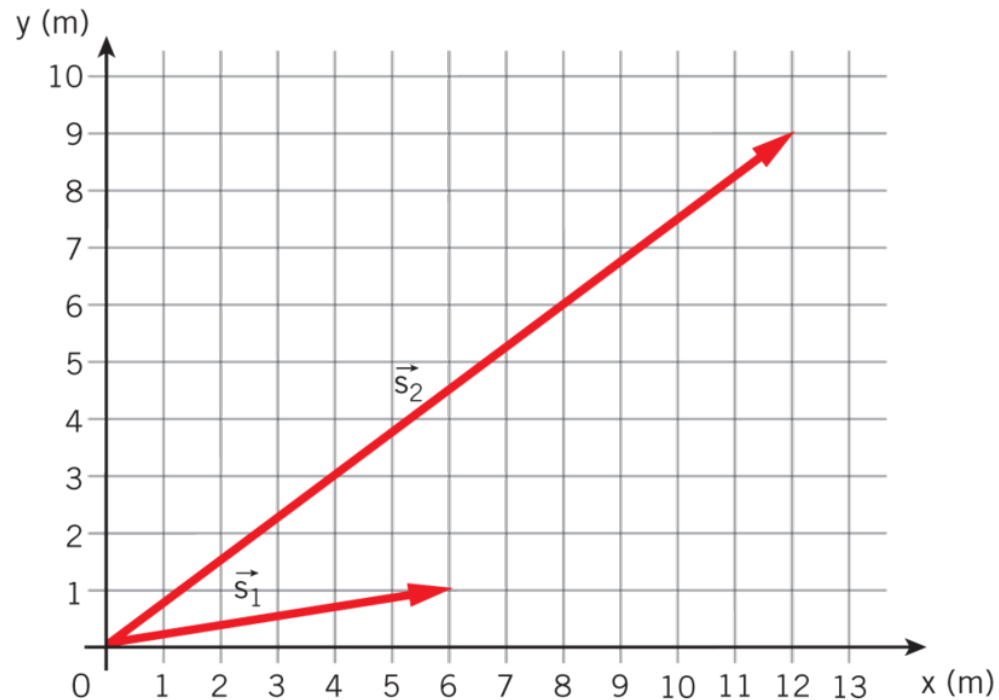
Lo spostamento di un punto materiale P durante un intervallo di tempo molto breve è tangente alla traiettoria nel punto occupato da P.

ESEMPIO

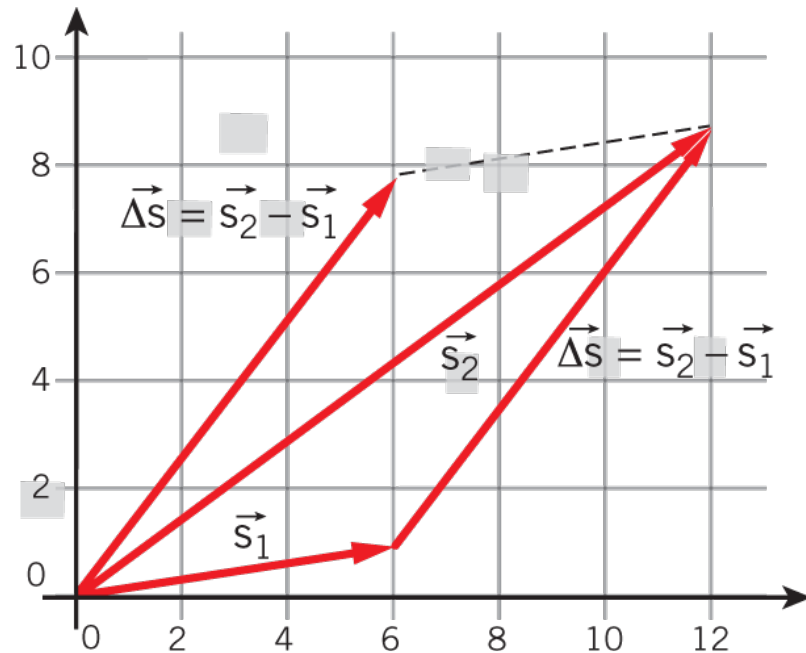
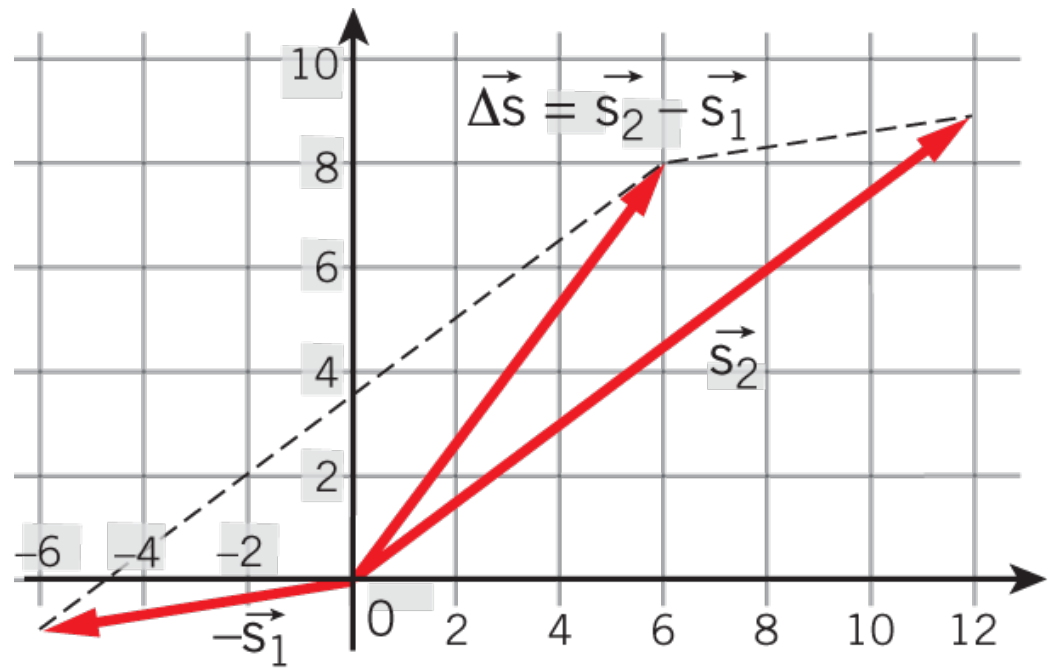
Siano dati i vettori posizione $\mathbf{s}_1 = (6; 1)$ e $\mathbf{s}_2 = (12; 9)$.

1) Disegnare il vettore spostamento $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1$.

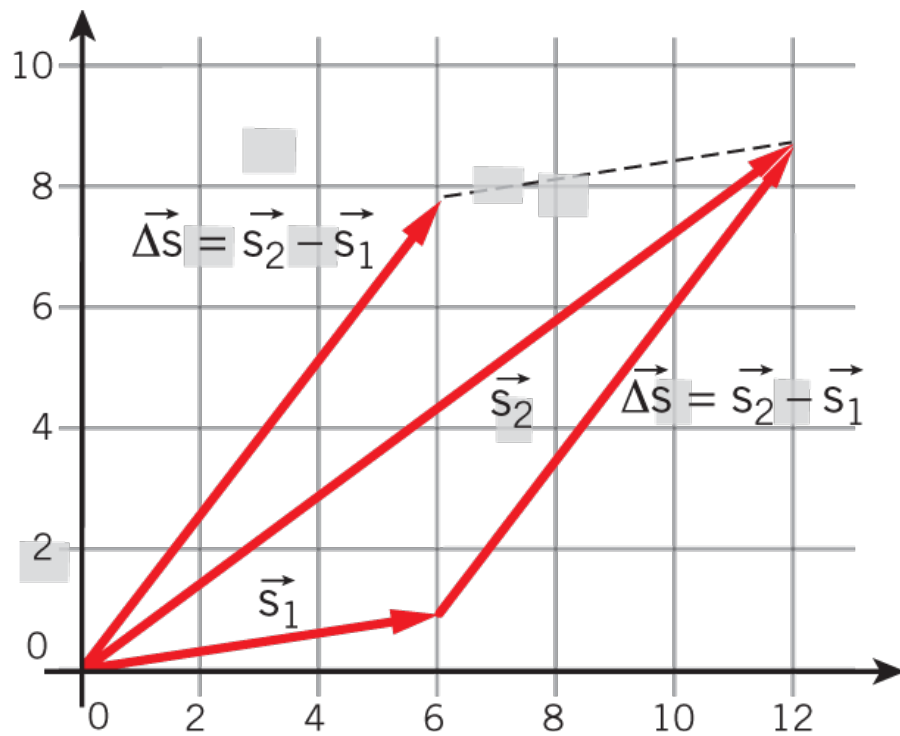
2) Calcolare il modulo di tale vettore?



Applichiamo l'algebra
vettoriale per
disegnare il vettore
spostamento $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1$



In maniera equivalente



Le componenti di $\Delta \mathbf{s}$ sono:

$$\Delta s_x = 12 - 6 = 6 \quad \Delta s_y = 9 - 1 = 8$$

Modulo e angolo:

$$\Delta s = \sqrt{\Delta s_x^2 + \Delta s_y^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta s_y}{\Delta s_x} = \frac{8}{6} = 1,33 \xrightarrow{\text{calcolatrice}} \alpha = 53^\circ$$

Nei moti nel piano, la velocità, essendo un vettore come lo spostamento, è descritta dalle seguenti caratteristiche: *direzione, verso, modulo*.

IL VETTORE VELOCITA' è definito come il rapporto tra il vettore spostamento $\Delta \vec{s}$ e l'intervallo di tempo Δt durante il quale è avvenuto:

$$\Delta \vec{s} = \vec{s}_2 - \vec{s}_1$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$$

vettore spostamento (m)

vettore velocità (m/s)

tempo impiegato (s)

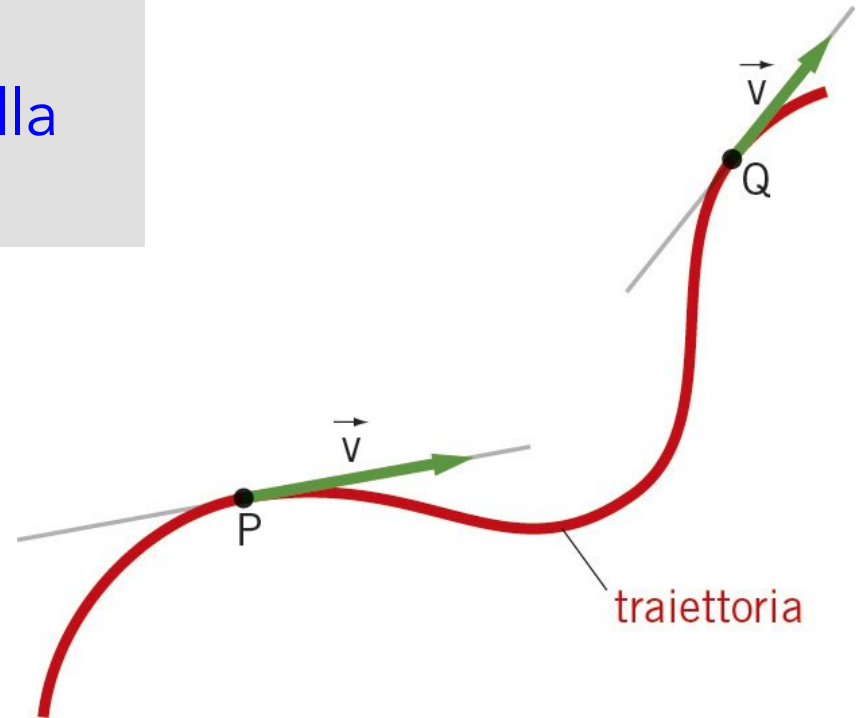
Se Δt è un intervallo di tempo finito, parliamo di velocità media.

Se Δt è un intervallo di tempo infinitesimo ($\Delta t \rightarrow 0$), parliamo di velocità istantanea.

Il vettore velocità $\mathbf{v}$ ha sempre la direzione e il verso del vettore spostamento $\Delta \mathbf{s}$

In particolare:

Il vettore velocità istantanea di un oggetto in un punto P della traiettoria è sempre tangente alla traiettoria in quel punto.

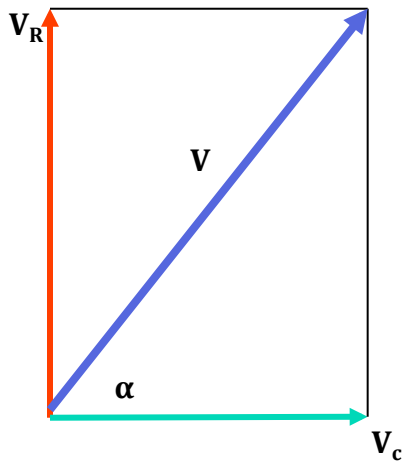


Esempio

Un ragazzo attraversa un fiume con velocità $v_R=5$ km/h. Se la corrente del fiume ha velocità $v_C=3$ km/h, quale sarà la velocità effettiva del ragazzo?

Soluzione

Rappresentiamo il problema dal punto di vista vettoriale.



Il ragazzo si muoverà con una velocità effettiva V che è la risultante tra le velocità V_R e V_C . Il modulo e argomento del vettore V sono dati da:

$$V = \sqrt{V_R^2 + V_C^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = 5,83 \text{ km / h}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_R}{V_C} = \frac{5}{3} = 1,67 \xrightarrow{\text{calcolatrice}} \alpha = 59^\circ$$

VETTORE ACCELERAZIONE

Nei moti nel piano, l'accelerazione, al pari della velocità e dello spostamento, è un vettore, e come tale è descritta da: *direzione, verso, modulo*.

IL VETTORE ACCELERAZIONE è definito come il rapporto tra il vettore variazione di velocità $\Delta \vec{v}$ e l'intervallo di tempo Δt durante il quale avviene tale variazione:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

variazione di velocità (m/s)

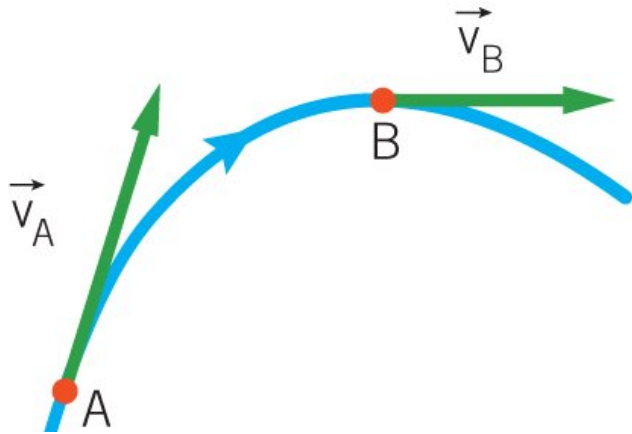
vettore accelerazione (m/s²)

tempo impiegato (s)

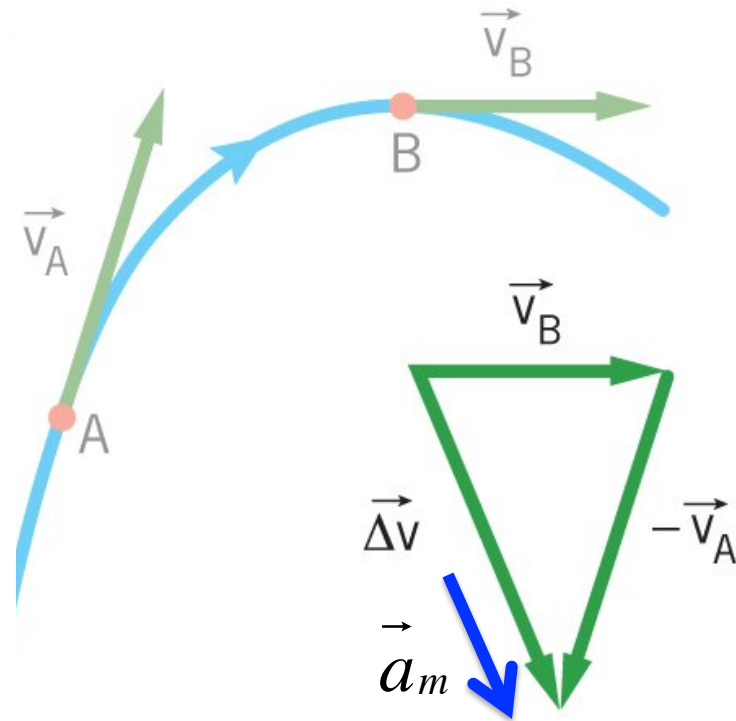
Se Δt è un intervallo di tempo finito, parliamo di accelerazione media.

Se Δt è un intervallo di tempo infinitesimo ($\Delta t \rightarrow 0$), parliamo di accelerazione istantanea.

Con l'aiuto dei vettori, determiniamo la direzione del vettore accelerazione.

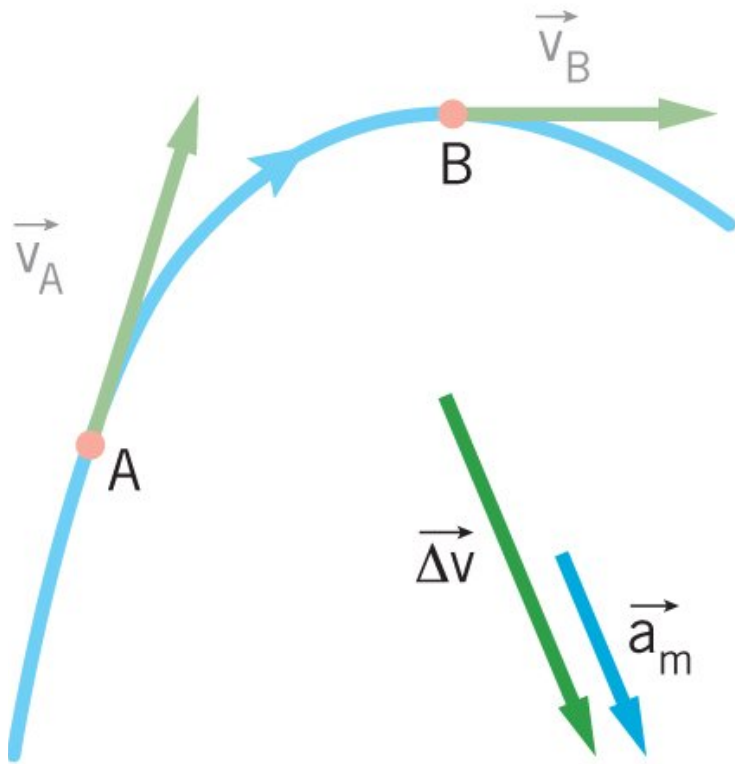


Passando dalla posizione A alla posizione B, la velocità passa da $\mathbf{v}_A$ a $\mathbf{v}_B$.



La variazione di velocità $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$ nel tratto AB è data dalla differenza vettoriale tra i vettori $\mathbf{v}_B$ a $\mathbf{v}_A$

Il vettore accelerazione media $\mathbf{a}_m$ ha sempre la direzione e il verso del vettore $\Delta \mathbf{v}$.



In un moto su una traiettoria curvilinea, il vettore accelerazione è sempre diretto verso l'interno della curva.

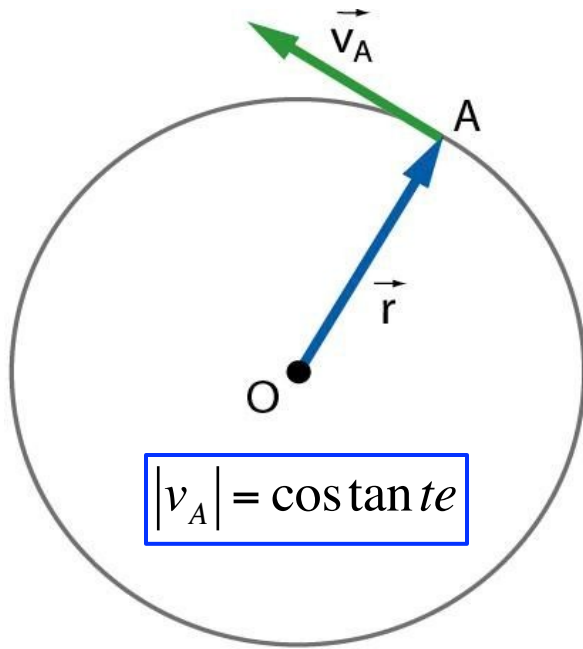
Importante – In un moto curvilineo esiste sempre un'accelerazione, anche quando il modulo della velocità è costante.

Infatti, l'accelerazione è una variazione del vettore velocità, il quale cambia continuamente direzione e verso essendo tangente alla traiettoria curvilinea in ogni suo punto.

C'è una accelerazione tutte le volte che cambia il vettore velocità (perché cambia il suo modulo, la sua direzione o il suo verso).

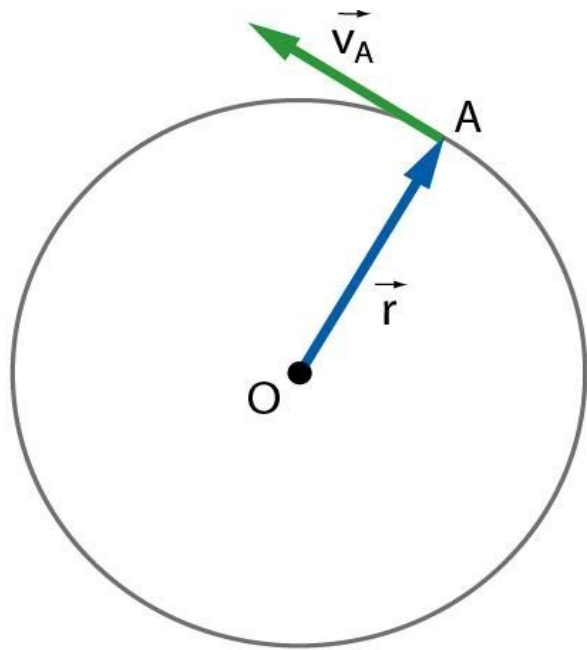
MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Un particolare tipo di moto nel piano è il moto circolare uniforme.



Si chiama **moto circolare uniforme** un moto che avviene su una traiettoria circolare in cui il modulo del vettore velocità rimane costante.

Ossia: il punto materiale percorre archi di circonferenza che sono direttamente proporzionali agli intervalli di tempo impiegati (archi uguali in tempi uguali).



Il moto circolare uniforme è un esempio di moto periodico. Quindi è caratterizzato dalle seguenti grandezze fisiche:

periodo T: il tempo che impiega il punto materiale P per fare un giro completo.

frequenza f: il numero di giri completi che P compie in un secondo.

periodo (s)

$$T = \frac{1}{f}$$

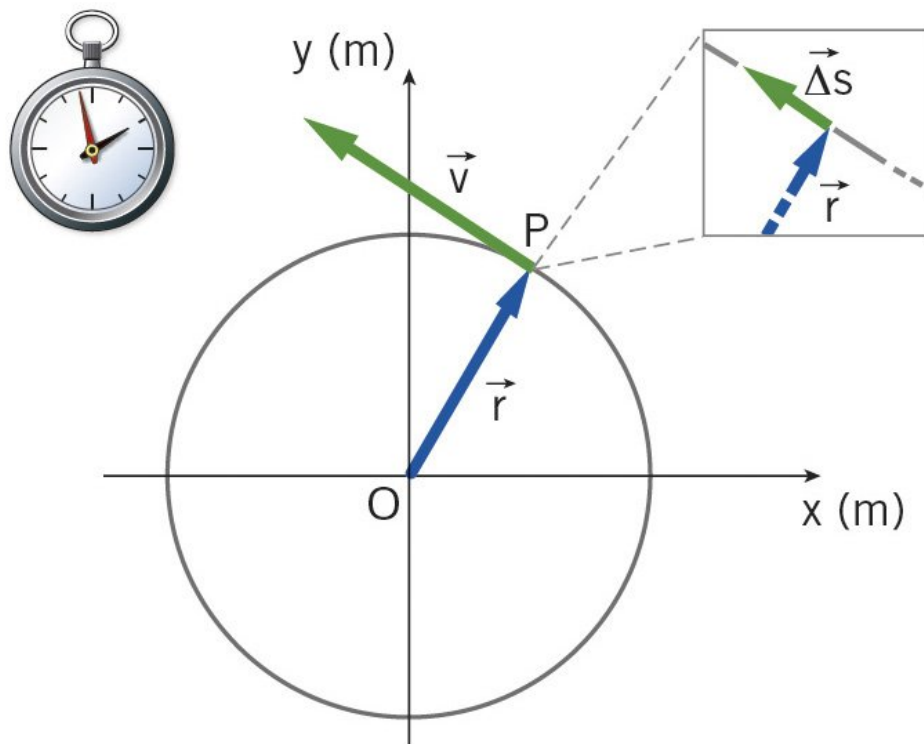
frequenza (Hz oppure s^{-1})

frequenza (Hz oppure s^{-1})

$$f = \frac{1}{T}$$

periodo (s)

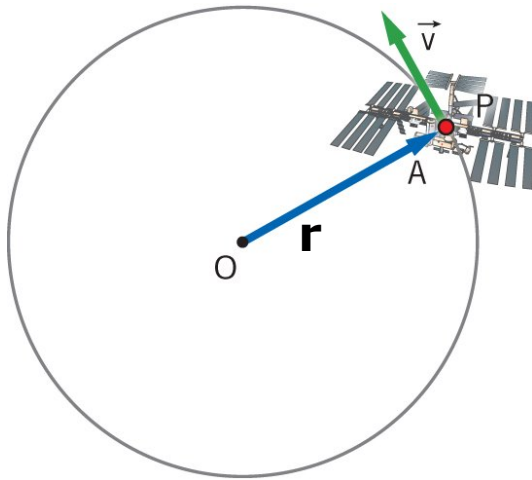
Per descrivere il moto circolare uniforme, scegliamo il seguente sistema di riferimento:



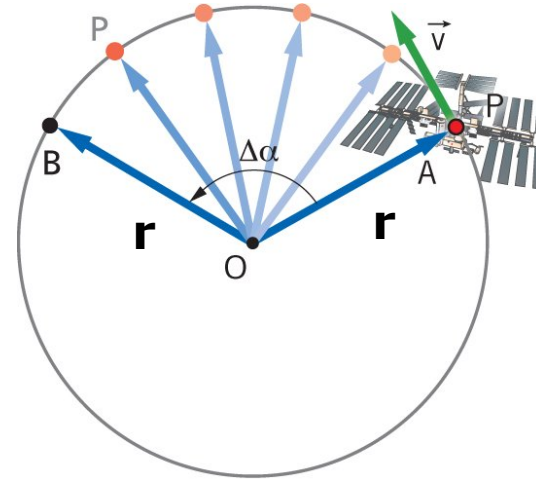
Nel moto circolare uniforme
il vettore velocità
istantanea $\mathbf{v}$ è sempre
tangente alla traiettoria e
perpendicolare al vettore
posizione $\mathbf{r}$. Mentre il suo
modulo è dato da:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{lunghezza circonferenza}}{\text{periodo}} = \frac{2\pi r}{T}$$

Un satellite ruota intorno alla Terra. La sua posizione è individuata dal raggio vettore $\mathbf{r}$ (vettore posizione).



Mentre il satellite si muove da A a B, il raggio vettore $\mathbf{r}$ spazza l'angolo $\Delta\alpha = \text{AOB}$.



Si definisce **velocità angolare** ω di un moto circolare uniforme il rapporto tra l'angolo al centro $\Delta\alpha$ e il tempo Δt impiegato dal raggio vettore $\mathbf{r}$ a spazzare tale angolo:

velocità angolare (rad/s)

angolo al centro (rad)

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$$

intervallo di tempo (s)

Poiché nel moto circolare uniforme gli angoli spazzati dal raggio vettore sono direttamente proporzionali ai corrispondenti intervalli di tempo, la velocità angolare assume la forma:

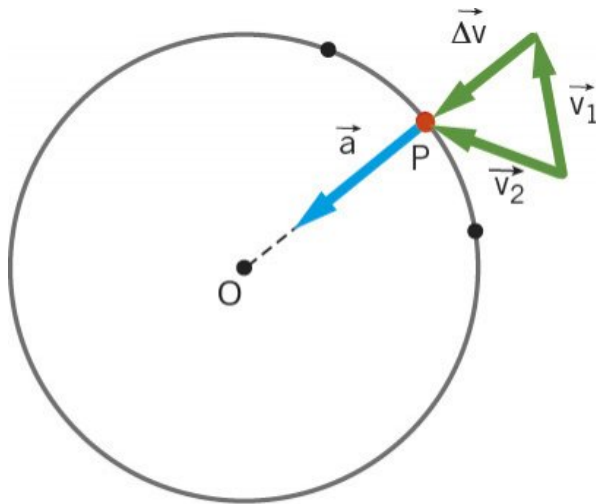
$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \text{ [rad / s]}$$

Quindi, la velocità lineare può essere scritta come:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \xrightarrow{\omega=2\pi/T} v = \omega r$$

Nel moto circolare uniforme il vettore velocità istantanea, essendo tangente alla traiettoria, varia continuamente. Benché il modulo rimanga costante, verso e direzione cambiano continuamente, per cui deve esistere una accelerazione istantanea, chiamata **accelerazione centripeta**.

Poiché l'accelerazione **a** è un vettore diretto come la variazione di velocità **$\Delta \mathbf{v}$** , possiamo affermare che:

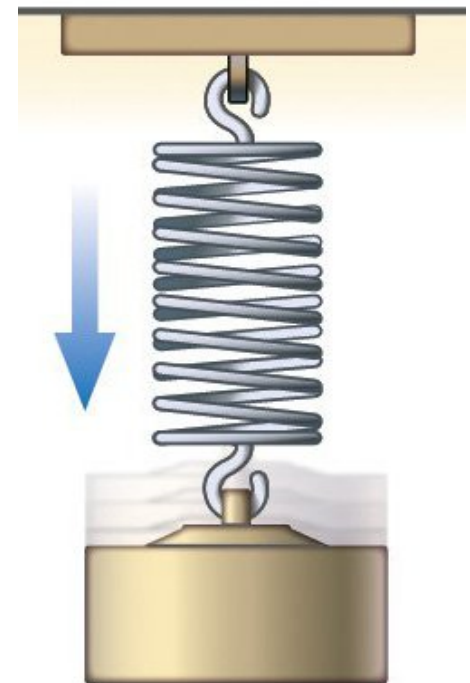
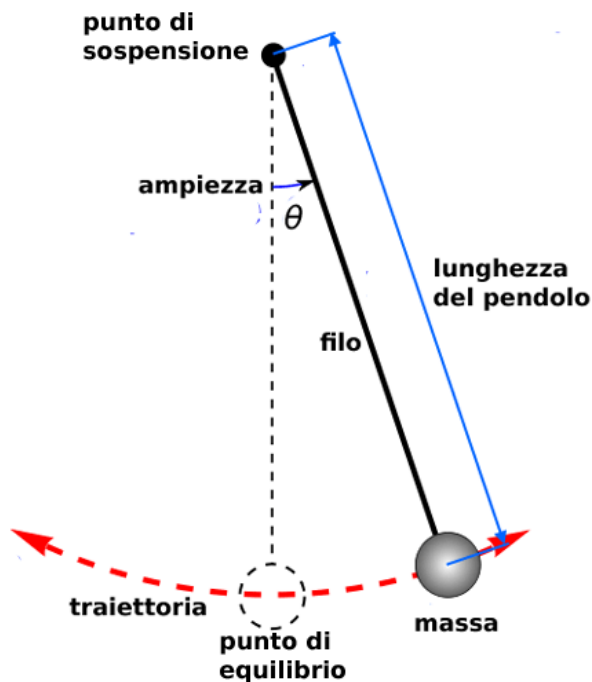


Nel moto circolare uniforme il vettore accelerazione centripeta è sempre diretto verso il centro della circonferenza. Il suo modulo vale:

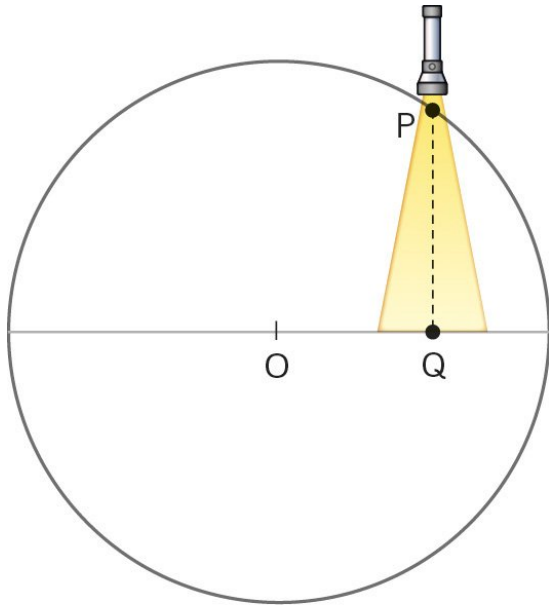
$$a = \frac{v^2}{r} \xrightarrow{v=\omega r} a = \omega^2 r$$

IL MOTO ARMONICO

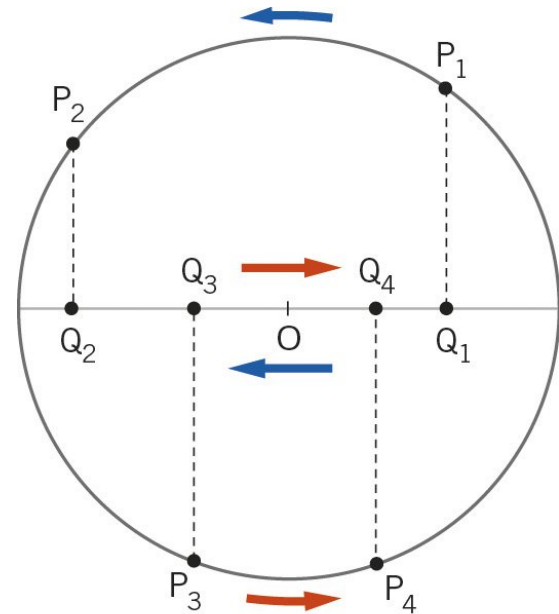
Il moto di un pendolo (o quello di un pesetto appeso a una molla, o quello degli atomi intorno alla loro posizione di equilibrio), in cui la traiettoria del moto è ripetuta diverse volte in versi opposti, è un esempio di moto armonico (è il modello più semplice di moto oscillatorio, in cui si trascurano gli effetti degli attriti che smorzano l'oscillazione).



Si chiama **moto armonico** il movimento che si ottiene proiettando su un diametro le posizioni di un punto materiale che si muove di moto circolare uniforme.



Sia Q la proiezione del punto P sull'asse delle ascisse.



Quando P si muove sulla circonferenza, Q si muove avanti e indietro (moto armonico) sul diametro della circonferenza.

Il moto armonico è caratterizzato dalle seguenti grandezze fondamentali:

AMPIEZZA – È la distanza tra il centro di oscillazione e il punto di inversione del moto.

PERIODO – È la durata di un'oscillazione completa avanti e indietro.

FREQUENZA – È il numero di oscillazioni complete effettuate in un secondo.

The diagram illustrates the relationship between the period T and frequency f of a harmonic motion. It consists of two yellow rectangular boxes. The left box contains the equation $T = \frac{1}{f}$. A line from the label 'periodo (s)' points to the T in this equation. Another line from the label 'frequenza (Hz oppure s⁻¹)' points to the f in this equation. The right box contains the equation $f = \frac{1}{T}$. A line from the label 'frequenza (Hz oppure s⁻¹)' points to the f in this equation. A line from the label 'periodo (s)' points to the T in this equation.

periodo (s)

$T = \frac{1}{f}$

frequenza (Hz oppure s⁻¹)

frequenza (Hz oppure s⁻¹)

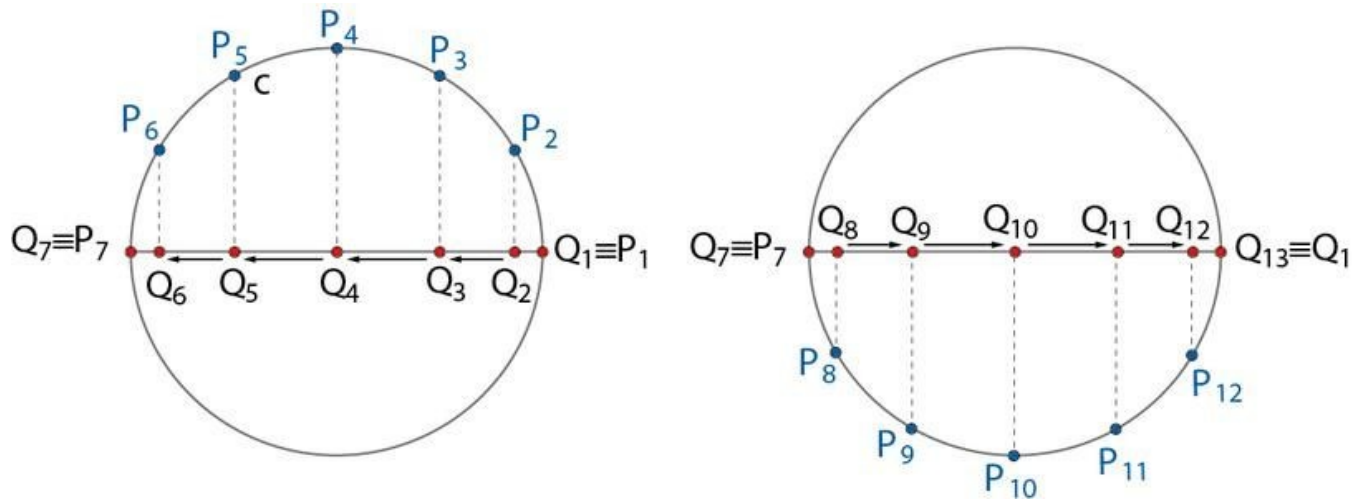
$f = \frac{1}{T}$

periodo (s)

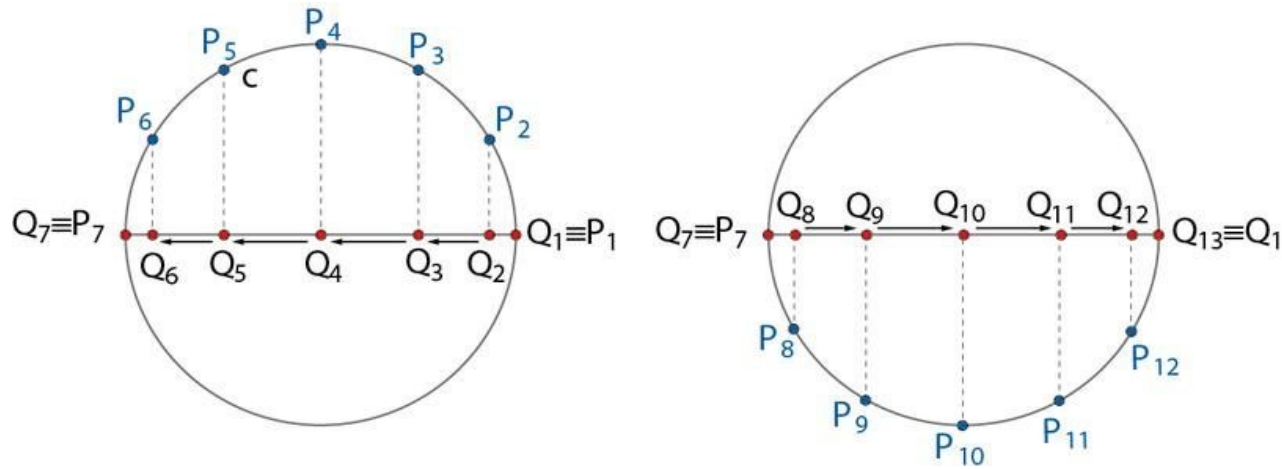
La legge del moto $s=f(t)$ che descrive il grafico spazio-tempo è la seguente:

$$s = r \cos \omega t$$

r e ω =raggio e velocità angolare del moto circolare uniforme che genera il moto armonico.



- $t=0$: il corpo è nel punto Q_1 di massimo spostamento positivo ($s=r\cos 0=r$);
- $T/4$: il corpo è nel punto centrale Q_4 ($s=r\cos \pi/2=0$);

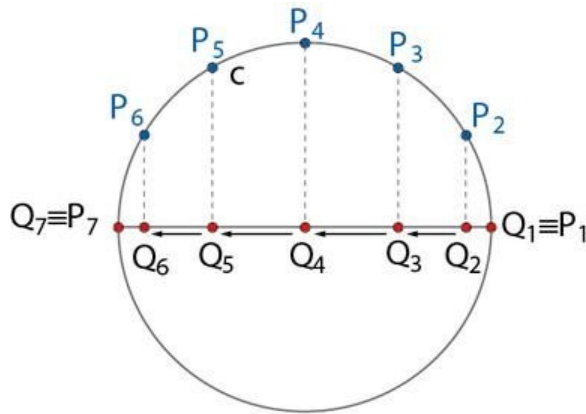


- $T/2$: il corpo è nel punto Q_7 di massimo spostamento negativo ($s = r \cos \pi = -r$);
- Dopo $T/2$ il corpo ritorna indietro;
- Dopo T il corpo è di nuovo in Q_1 ($s = r \cos 2\pi = r$) e l'oscillazione ricomincia con le stesse caratteristiche di quella precedente.

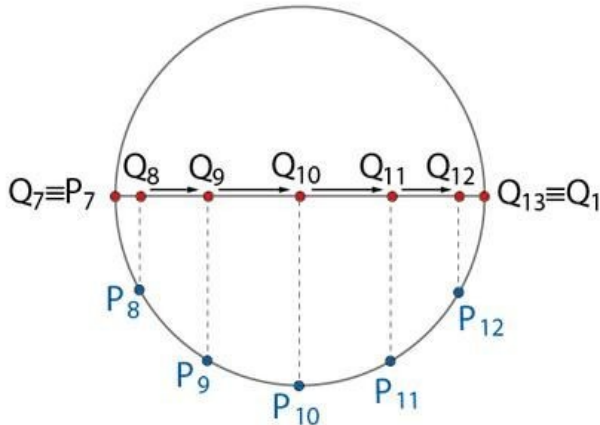
La traiettoria di un punto materiale che si muove di moto armonico è un segmento. Quindi **il moto armonico è un moto rettilineo**.

Però **non si tratta di un moto uniforme**, perché il valore della velocità cambia continuamente.

Vediamo perché:

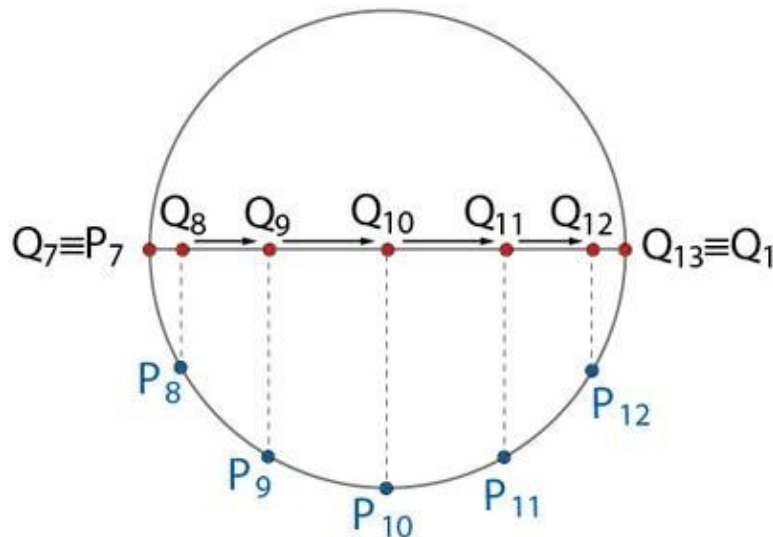
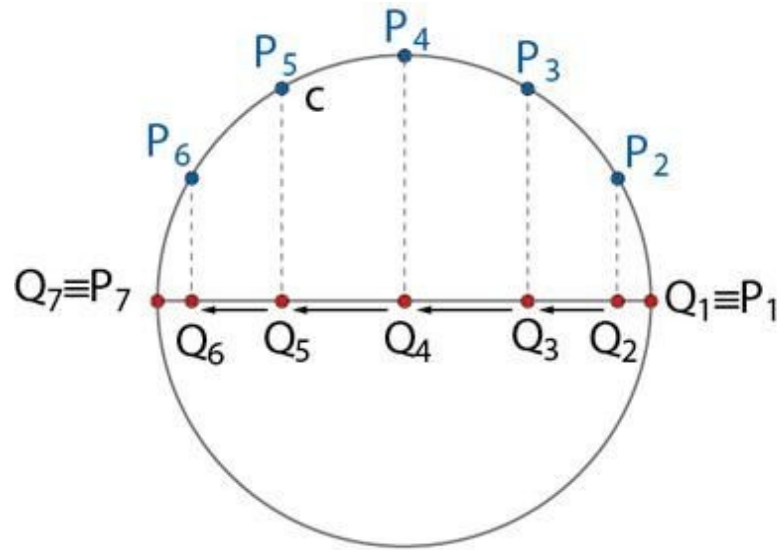


Il punto P è disegnato a intervalli di tempo uguali, durante i quali percorre archi uguali.



Invece si nota che, negli stessi intervalli di tempo, il punto Q che segue il moto armonico non percorre distanze uguali.

Per la precisione:



- 1) Nelle zone centrali il moto armonico è più rapido (velocità maggiore) e percorre distanze maggiori in tempi uguali;
- 2) Agli estremi il moto armonico è più lento (velocità minore) e percorre distanze minori negli stessi tempi;
- 3) Nei punti di inversione del moto la velocità istantanea del punto è nulla.

legge velocità istantanea

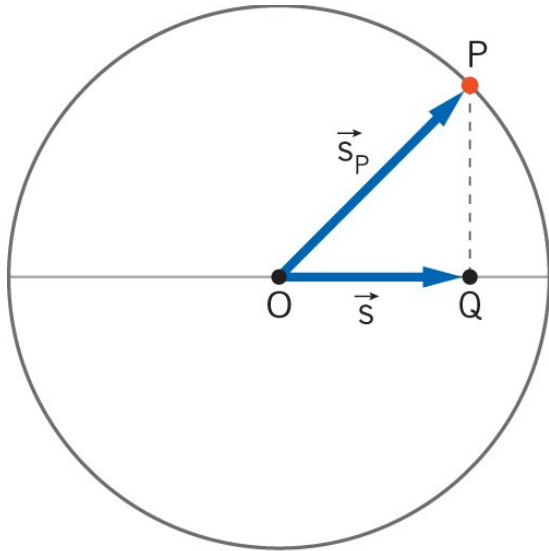
$$v = -\omega r \sin \omega t = -v_0 \sin \omega t$$

Se la velocità varia nel tempo, significa che c'è una accelerazione. Quindi:

legge accelerazione istantanea

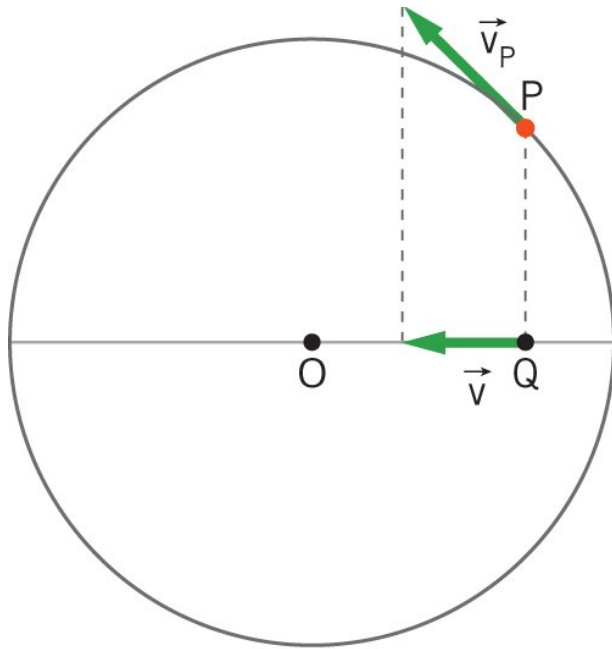
$$a = -\omega^2 r \cos \omega t \xrightarrow{s=r \cos \omega t} a = -\omega^2 s$$

Riepiloghiamo



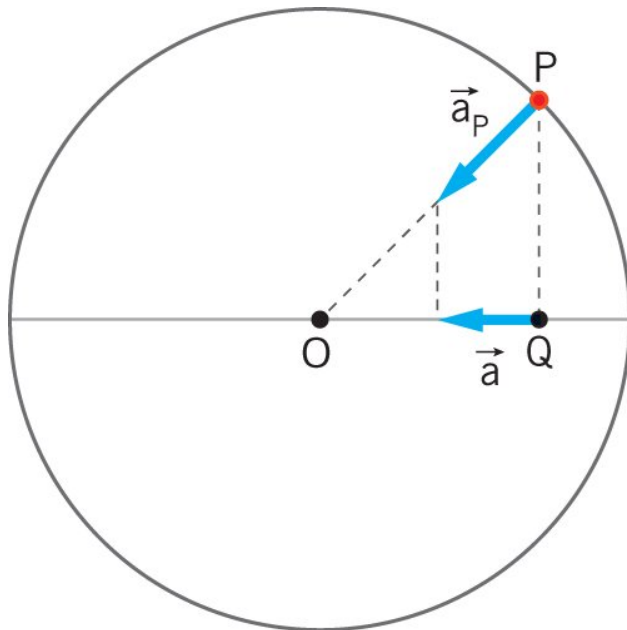
Il vettore posizione del punto Q nel moto armonico è la proiezione sul diametro del vettore posizione del punto P nel moto circolare uniforme.

$$s = r \cos \omega t$$



Il vettore velocità del punto Q nel moto armonico è la proiezione sul diametro del vettore velocità istantanea del punto P nel moto circolare uniforme.

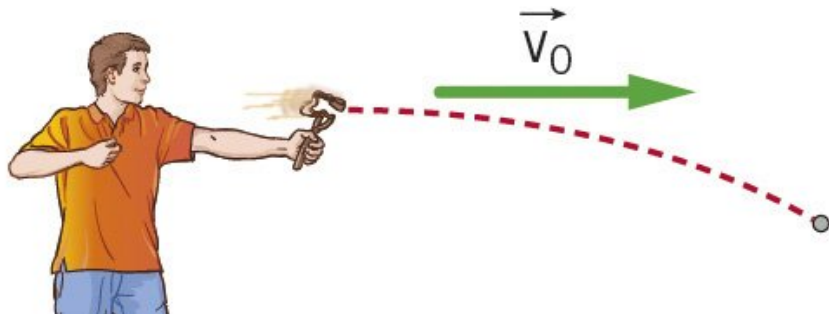
$$v = -\omega r \sin \omega t$$



Il vettore accelerazione del punto Q nel moto armonico è la proiezione sul diametro del vettore accelerazione centripeta del punto P nel moto circolare uniforme.

$$a = -\omega^2 s$$

IL MOTO DEI PROIETTILI



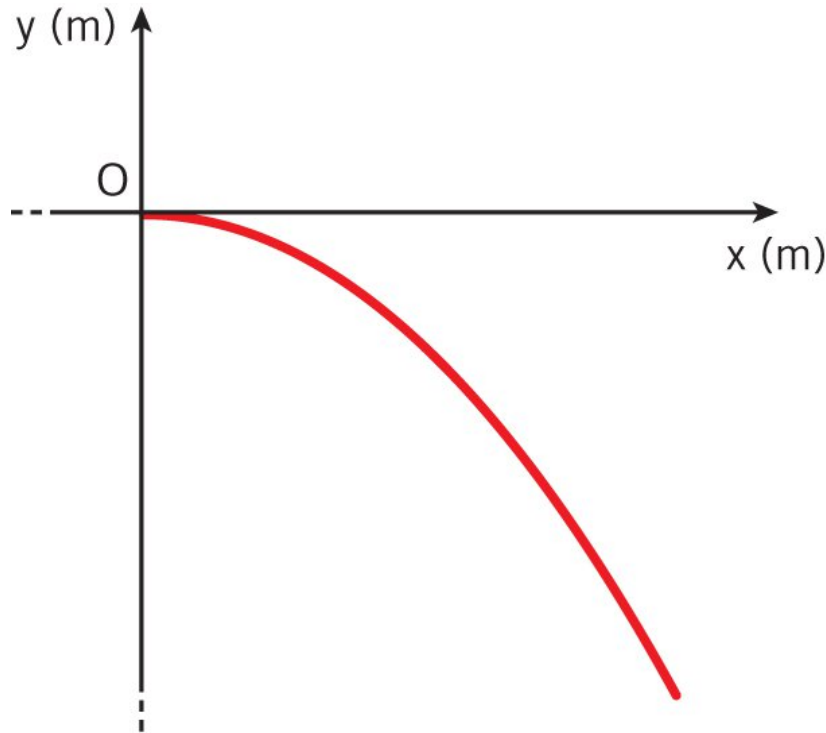
Studiamo il moto di una pallina, ossia la sua traiettoria, quando viene lanciata in orizzontale con velocità iniziale v_0 .

Trascurando l'attrito con l'aria, l'unica forza che agisce sulla pallina è il suo peso $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$. Quindi, mentre si muove in avanti di moto rettilineo uniforme con velocità v_0 , cade con accelerazione costante $\mathbf{g}$ (moto rettilineo uniformemente accelerato). Da questa osservazione si deduce che:

Il moto di un oggetto lanciato in orizzontale è la sovrapposizione di due moti che agiscono simultaneamente e indipendentemente tra di loro:

- un moto rettilineo uniforme orizzontale;
- un moto rettilineo uniformemente accelerato verticale.

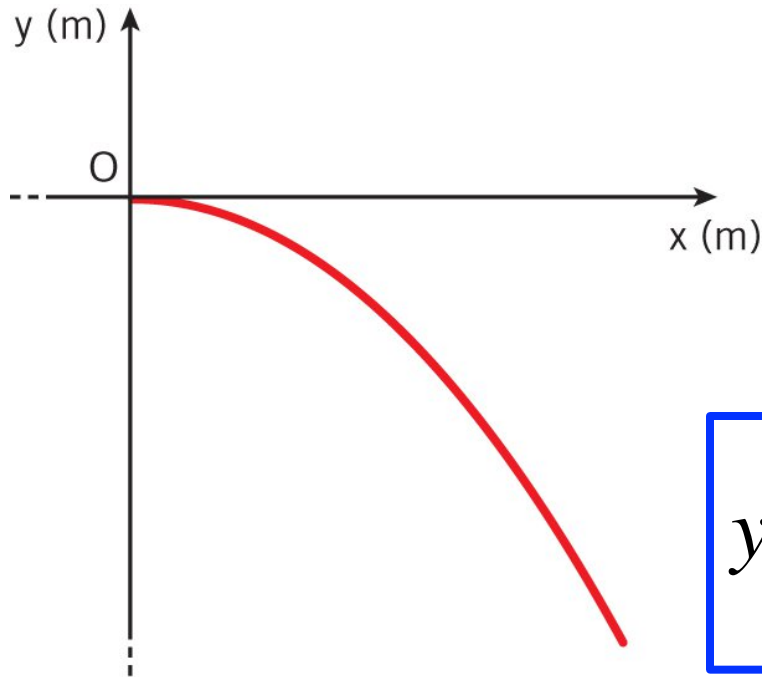
Ma quale sarà la traiettoria descritta dalla pallina durante il suo moto?



Scegliamo il punto di partenza della pallina come origine degli assi cartesiani e come istante $t=0$ quello in cui inizia il moto. Allora le leggi del moto applicate alla pallina sono:

$$\begin{cases} x = v_0 t \rightarrow \text{moto rettilineo uniforme orizzontale} \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 \rightarrow \text{moto rettilineo uniformemente accelerato verticale} \end{cases}$$

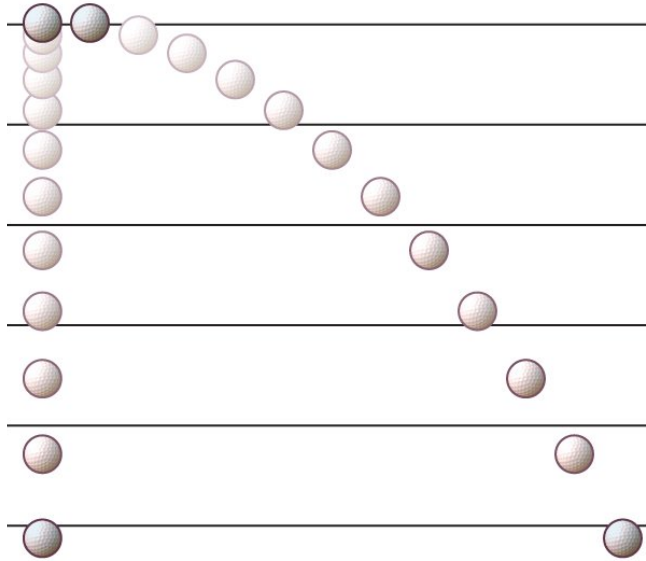
$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{v_0} \\ y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 \end{cases} \quad \text{ossia :}$$



La traiettoria di un oggetto lanciato in orizzontale è una parabola:

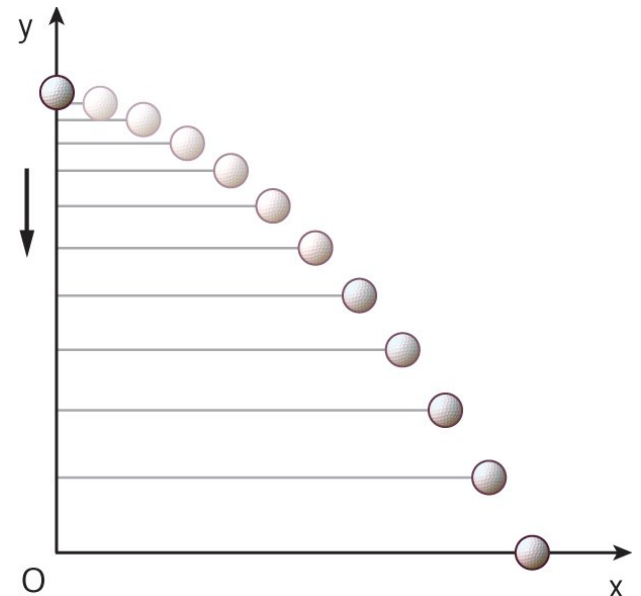
$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 \xrightarrow{a = -g/2v_0^2} y = ax^2$$

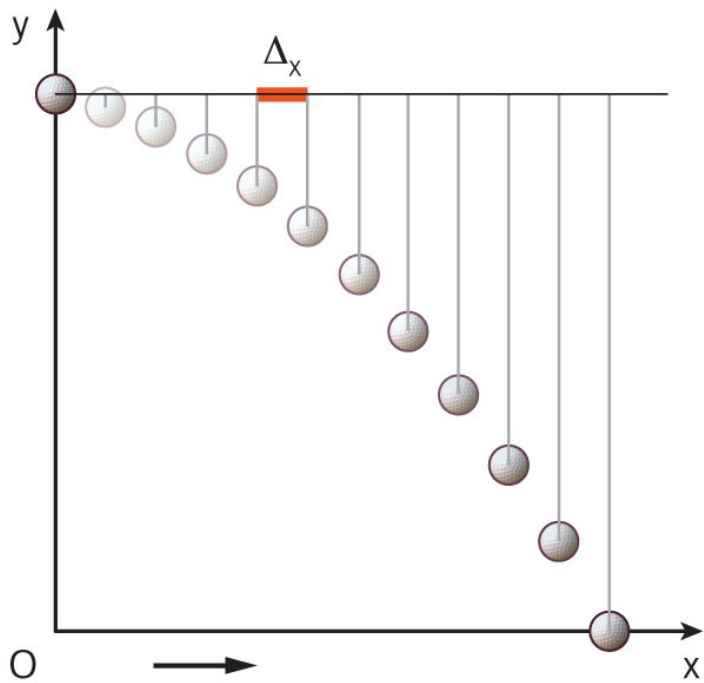
Un esperimento ci permette di controllare se questa previsione è corretta.



Facciamo partire due palline nello stesso istante: la prima cade da ferma, la seconda è lanciata in orizzontale. Ad ogni istante, le due palline si trovano alla stessa quota verticale. Ossia: le due palline arrivano a terra nello stesso istante.

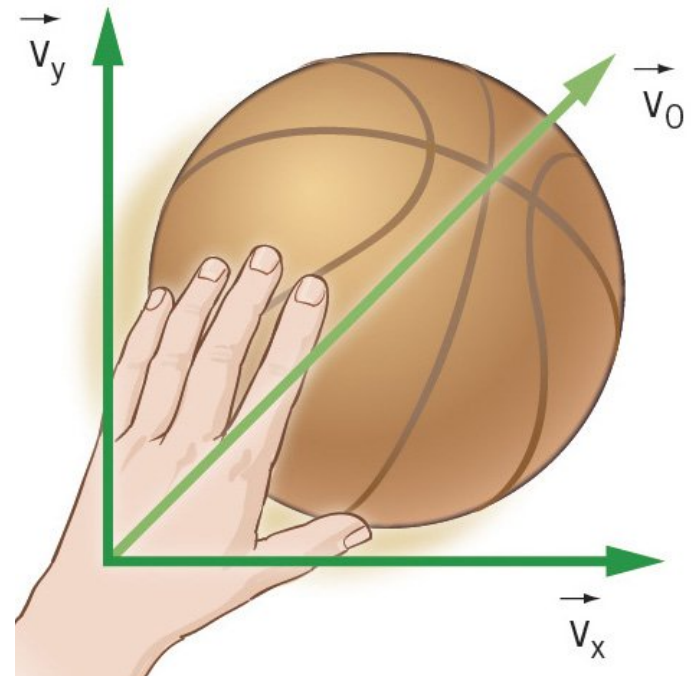
Il moto della coordinata y della seconda pallina è uguale al moto della pallina lasciata cadere, cioè è un **moto uniformemente accelerato con accelerazione g** .

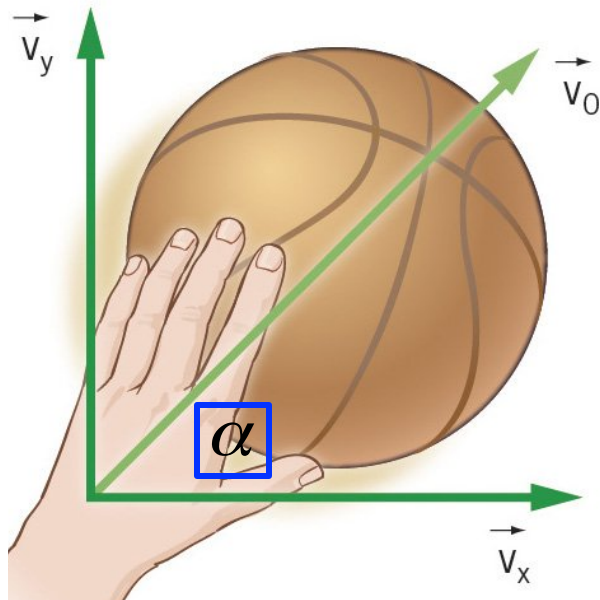




In intervalli di tempo uguali, la coordinata x della seconda pallina aumenta di Δx uguali. Cioè, come previsto, compie un moto rettilineo uniforme orizzontale.

Studiamo, adesso, il moto di un corpo, quando viene lanciato con velocità iniziale obliqua $\mathbf{v}_0$





Essendo la velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ obliqua, in base al calcolo vettoriale otteniamo:

$$v_x = v_0 \cos \alpha \quad v_y = v_0 \sin \alpha$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

Il moto è ancora la sovrapposizione di un moto rettilineo uniforme in orizzontale e di un moto rettilineo uniformemente accelerato in verticale:

$$\begin{cases} x = v_x t \\ y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

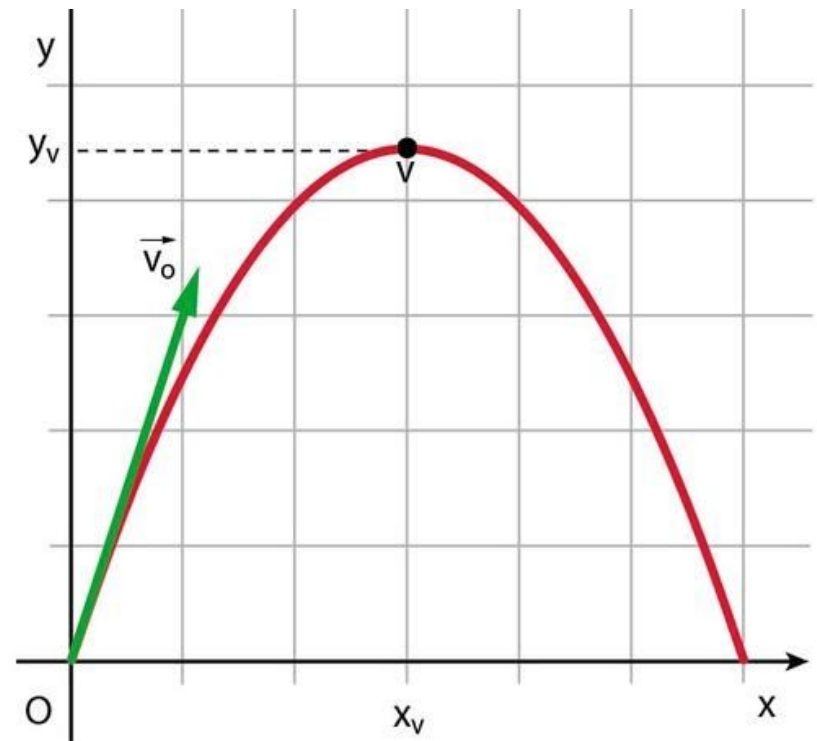
Eseguendo gli stessi passaggi algebrici di prima, otteniamo:

La traiettoria (in assenza di attrito dell'aria) di un oggetto lanciato con velocità iniziale v_0 in direzione obliqua è una **parabola**.

La sua equazione è:

$$y = \frac{v_y}{v_x} x - \frac{g}{2v_x^2} x^2 = ax^2 + bx$$

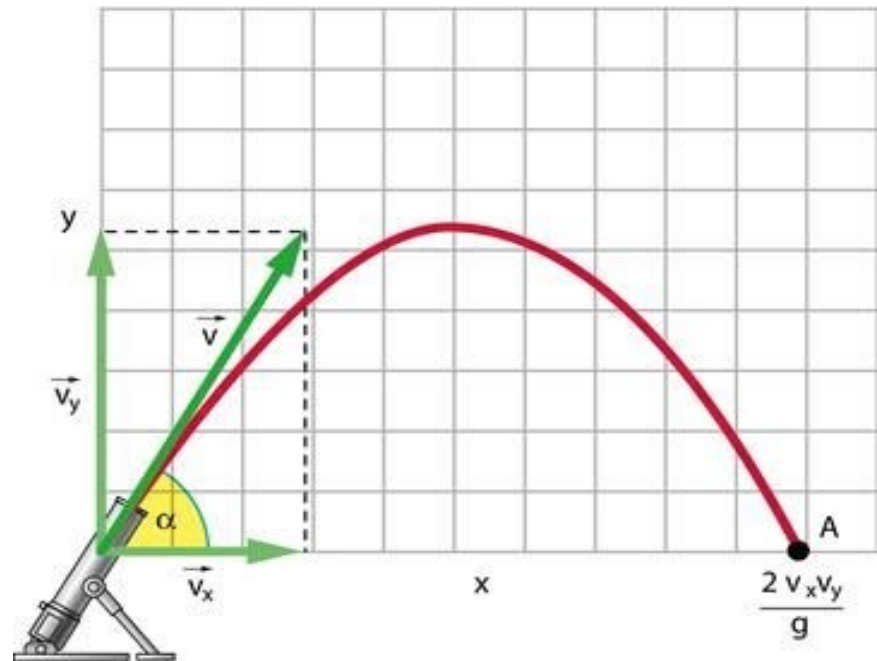
$$a = -\frac{g}{2v_x^2} \quad b = \frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg} \alpha$$



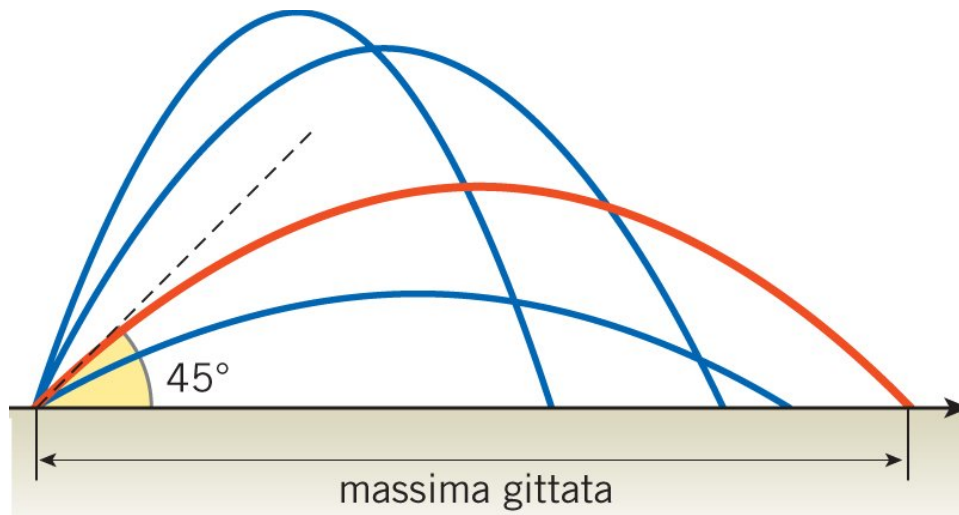
In presenza di attrito dell'aria, la traiettoria seguita da un corpo è molto diversa da una parabola.

Analizziamo alcuni elementi caratteristici del moto parabolico.

Si chiama **gittata** la distanza che separa il punto di partenza di un corpo lanciato in direzione obliqua, verso l'alto, dal punto in cui esso torna al suolo. Si calcola come:



$$G = \frac{2v_x v_y}{g} \xrightarrow[\substack{v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_y = v_0 \sin \alpha}]{\quad} G = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$



Al crescere dell'angolo di lancio, la gittata aumenta fino a raggiungere un valore massimo, per poi diminuire quando l'angolo di lancio aumenta ancora.

Se l'attrito con l'aria è trascurabile, la gittata massima si ha quando la velocità iniziale del corpo lanciato forma un angolo di 45° rispetto al terreno. Infatti:

$$G = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \xrightarrow[\text{quando } \alpha = 45^\circ]{\sin 2\alpha = 1} G_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$