

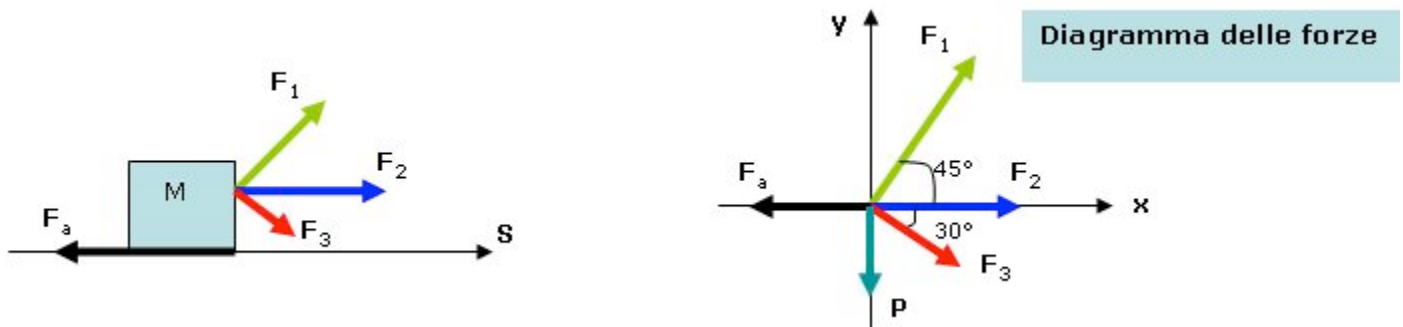
# Problemi di Fisica

## Principio conservazione energia meccanica

## PROBLEMA

Su un corpo di massa  $M=10\text{kg}$  agiscono una serie di forze  $F_1=10\text{N}$   $F_2=5\text{N}$   $F_3=7\text{N}$   $F_a=2\text{N}$  (forza di attrito), secondo le direzioni indicate in figura, che lo spostano di  $10\text{m}$ . Supponendo che il corpo inizialmente è fermo, calcolare la velocità finale.

## SOLUZIONE



Applichiamo il teorema dell'energia cinetica:

$$(1) \quad L_T = \Delta E_C = E_{CF} - E_{CI} = \frac{1}{2} M v_F^2 - \frac{1}{2} M v_I^2 \quad \text{dove: } L_T = \sum L_i = L_1 + L_2 + L_3 + L_a$$

e risolvendo la (1) rispetto alla velocità, sapendo che inizialmente il corpo è fermo, si ottiene:

$$(2) \quad v = \sqrt{\frac{2L_T}{M}}$$

Il problema adesso è calcolare il lavoro totale prodotto dalle forze che agiscono sul corpo. Si può procedere in due modi:

- 1) Calcolare la forza totale e quindi applicare la definizione di lavoro:

$$L_T = \vec{F}_T \cdot \vec{s} = F_T \cdot s \cdot \cos \alpha = 161\text{J}$$

dove:

$$F_{Tx} = \sum F_x = F_{1x} + F_2 + F_{3x} - F_a = F_1 \cos 45^\circ + F_2 + F_3 \cos 30^\circ - F_a = 16.1\text{N}$$

$$F_{Ty} = \sum F_y = F_{1y} - F_{2y} + N - P = F_1 \sin 45^\circ - F_3 \sin 30^\circ = 3.6\text{N}$$

$$F_T = \sqrt{F_{Tx}^2 + F_{Ty}^2} = 16.5\text{N}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{F_{Ty}}{F_{Tx}} = 0.22 \Rightarrow \alpha = 12.6^\circ$$

Pertanto dall'applicazione della (2) si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{2L_T}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 161}{10}} = 5.7\text{m/s}$$

- 2) Calcolare il lavoro prodotto dalle singole forze attraverso l'applicazione della definizione di lavoro e quindi sommarli algebricamente:

$$L_T = \sum L_i = L_1 + L_2 + L_3 - L_a + L_N + L_p = 161 \text{ J}$$

dove:

$$L_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{s} = F_1 \cdot s \cdot \cos 45^\circ = 70.7 \text{ N}$$

$$L_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{s} = F_2 \cdot s \cdot \cos 0^\circ = 50 \text{ N}$$

$$L_3 = \vec{F}_3 \cdot \vec{s} = F_3 \cdot s \cdot \cos 30^\circ = 60.6 \text{ N}$$

$$L_a = \vec{F}_a \cdot \vec{s} = F_a \cdot s \cdot \cos 180^\circ = -20 \text{ N}$$

$$L_N = \vec{N} \cdot \vec{s} = N \cdot s \cdot \cos 90^\circ = 0 \text{ N}$$

$$L_p = \vec{P} \cdot \vec{s} = P \cdot s \cdot \cos 270^\circ = 0 \text{ N}$$

Pertanto dall'applicazione della (2) si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{2L_T}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 161}{10}} = 5,7 \text{ m/s}$$

## PROBLEMA

Un treno viaggia su un binario orizzontale alla velocità costante di 36 km/h. Supponendo che la locomotiva sviluppi una potenza di 200 kW per mantenere costante la velocità, determinare la forza dovuta agli attriti e alla resistenza dell'aria che si oppone al moto.

## SOLUZIONE

Poiché la locomotiva si muove a velocità costante, significa che la somma vettoriale di tutte le forze che agiscono su di essa è nulla e quindi il lavoro totale è nullo; ossia la forza resistente (attrito e resistenza dell'aria) è uguale alla forza motrice sviluppata dal motore del treno, e quindi il lavoro resistente è uguale a quello motore. Pertanto, partendo dalla definizione di potenza, calcoliamo la forza resistente:

$$P = \frac{L}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v \Rightarrow F = \frac{P}{v} = \frac{200 \cdot 10^3}{10} = 2 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$\text{dove } 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$$

## PROBLEMA

Un'automobile di massa 1000 kg accelera da 0 a 100 km/h in 6 s. Qual è la sua potenza, trascurando gli attriti?

In base al teorema dell'energia cinetica sappiamo che il lavoro è legato alla variazione dell'energia cinetica dalla relazione:

$$L = \Delta E_C = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Sostituendo i dati forniti dal problema e tenendo conto che l'auto parte da ferma ( $v_1 = 0$ ), operando la conversione 100 km/h  $\cong$  28 m/s, otteniamo:

$$\begin{aligned} L = \Delta E_C &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot (28 \text{ m/s})^2 = 392000 \text{ J} \end{aligned}$$

e quindi:

$$L = 3,92 \cdot 10^5 \text{ J}$$

La potenza del motore vale perciò:

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{3,92 \cdot 10^5 \text{ J}}{6 \text{ s}} \cong 65330 \text{ W} \cong 65 \text{ kW}$$

La potenza che l'auto sviluppa per raggiungere quella velocità è in realtà maggiore, perché il motore, oltre ad accelerare l'auto, deve vincere anche gli attriti, sia interni (motore, meccanismi di trasmissione, ...) sia esterni (asfalto e aria).

## PROBLEMA

Quale lavoro compiono le forze di attrito dei freni di un'automobile, durante una frenata, sapendo che l'auto ha massa uguale a 1000 kg, velocità iniziale di 30 m/s e che lo spazio di frenata è uguale a 150 m?

Quanto vale l'intensità media delle forze di attrito?

## ■ LEGGI ED EQUAZIONI

Dalla relazione:

$$L = \Delta E_C = E_{CF} - E_{CI} = \frac{1}{2}mv_F^2 - \frac{1}{2}mv_I^2$$

conoscendo la massa, la velocità iniziale e quella finale dell'auto si può ricavare il lavoro. Quindi, dalla relazione:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos \alpha$$

conoscendo il lavoro, lo spostamento e l'angolo (uguale a 180°, perché la forza di attrito è parallela allo spostamento, ma di verso opposto) si ottiene l'intensità della forza.

## ■ SOLUZIONE ALGEBRICA

Le equazioni che permettono la soluzione del problema sono dunque:

$$L = \frac{1}{2}mv_F^2 - \frac{1}{2}mv_I^2 \quad \text{e} \quad F = \frac{L}{s \cos \alpha}$$

dove  $F$  rappresenta l'intensità della forza di attrito.

## ■ SOLUZIONE NUMERICA

Sostituendo i dati forniti dal problema si ottiene:

$$L = \frac{1}{2}mv_F^2 - \frac{1}{2}mv_I^2 = -\frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot (30 \text{ m/s})^2 = -450000$$

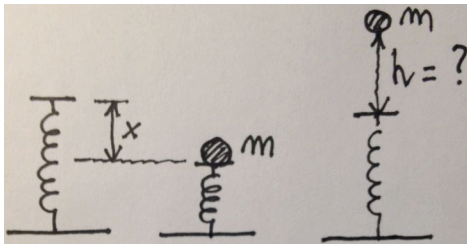
e quindi:

$$F = \frac{L}{s \cos \alpha} = \frac{-450000 \text{ J}}{150 \text{ m} \cdot (-1)} = 3000 \text{ N}$$

## PROBLEMA

Una sfera è appoggiata su una molla ( $k=950 \text{ N/m}$ ), disposta verticalmente e compressa di 14 cm. La massa della sfera è di 400 g, mentre la massa della molla è trascurabile. Calcolare l'altezza raggiunta dalla sfera quando la molla viene liberata. Calcolare la percentuale di energia meccanica dissipata se nel successivo lancio, in seguito alle forze dissipative, la sfera raggiunge la metà dell'altezza precedente.

## SOLUZIONE



PRINCIPIO CONSERVAZIONE ENERGIA MECCANICA

$$E_{M_i} = E_{M_f}$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgh \rightarrow h = \frac{kx^2}{2mg} = \frac{950 \cdot 0,14^2}{2 \cdot 0,4 \cdot 10} = 2,3 \text{ m}$$

L'energia meccanica, in assenza di forze dissipative, vale:

$$E_M = mgh = 0,4 \cdot 10 \cdot 2,3 = 9,2 \text{ J}$$

L'energia meccanica, in presenza di forze dissipative che fanno raggiungere alla sfera un'altezza metà della precedente, vale:

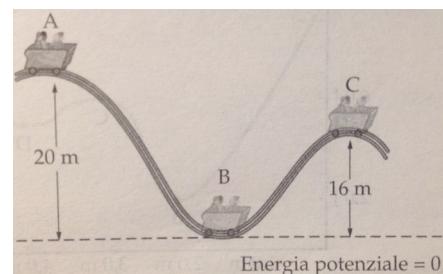
$$E_{M_i} = mg \frac{h}{2} = \frac{1}{2} E_M$$

Pertanto, la percentuale di energia meccanica dissipata è pari al 50%.

## PROBLEMA

Un vagone delle montagne russe di massa 80 kg ha una velocità di modulo 20 m/s nella posizione A. Calcolare la velocità del vagone quando è nel punto C. Si assuma  $g=10 \text{ m/s}^2$ .

## SOLUZIONE



PRINCIPIO CONSERVAZIONE ENERGIA MECCANICA

$$E_{M_A} = E_{M_C} \Rightarrow K_A + U_A = K_C + U_C$$

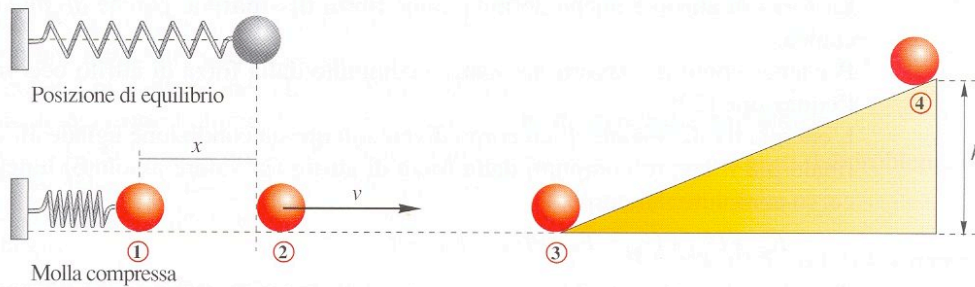
$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgh_2 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 20^2 + 10 \cdot 20 = \frac{1}{2} \cdot v_C^2 + 10 \cdot 16 \rightarrow v_C = \sqrt{480} = 21,9 \text{ m/s}$$



## PROBLEMA

Una molla compressa di 10 cm, tornando alla sua posizione di equilibrio, lancia lungo un piano orizzontale senza attrito, una pallina di massa  $m = 200$  g. Successivamente la pallina risale lungo un piano inclinato senza attrito. Sapendo che raggiunge l'altezza di 20 cm, quanto vale la costante elastica della molla?

### ■ MODELLO FISICO



Possiamo distinguere due diverse *trasformazioni di energia*:

- nella prima l'energia potenziale elastica della molla compressa (1) si trasforma in energia cinetica della pallina che si muove lungo il piano orizzontale (2) con velocità  $v$ ;
- nella seconda l'energia cinetica della pallina si trasforma, risalendo il piano inclinato (3), in energia potenziale gravitazionale (4).

### ■ LEGGI ED EQUAZIONI

In base alla legge generale di conservazione dell'energia meccanica possiamo scrivere:

$$E_C + U_G + U_E = \text{costante}$$

e applicarla separatamente alle due trasformazioni di energia.

Poiché tuttavia il problema ci chiede solamente di determinare la costante elastica della molla (e quindi l'energia potenziale elastica iniziale) conoscendo

l'altezza finale raggiunta dalla pallina (e quindi l'energia potenziale gravitazionale finale) possiamo scrivere semplicemente:

$$\frac{1}{2} kx^2 = mgh$$

poiché inizialmente l'energia è solamente elastica, mentre alla fine è solo gravitazionale.

### ■ RISOLUZIONE ALGEBRICA

Dalla precedente equazione si può ricavare la costante elastica  $k$ :

$$k = \frac{2mgh}{x^2}$$

### ■ RISOLUZIONE NUMERICA

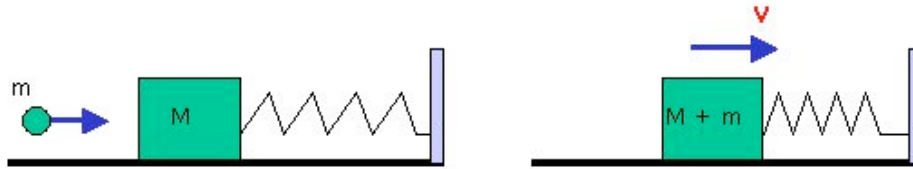
Sostituendo i dati forniti dal problema si ottiene:

$$k = \frac{2mgh}{x^2} = \frac{2 \cdot 0,2 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 0,2 \text{ m}}{(0,1 \text{ m})^2} \cong 78 \text{ N/m}$$

## PROBLEMA

Una pallottola di massa 10 g, sparata contro un blocco di massa 990 g poggiato sopra una superficie priva di attrito e fissato ad una molla di massa trascurabile e  $k=100 \text{ N/m}$ , viene incorporata dal blocco. Se in seguito all'urto la molla subisce una compressione massima di 10 cm, calcolare l'energia potenziale massima della molla e la velocità del blocco subito dopo l'urto.

## SOLUZIONE



L'energia potenziale massima viene calcolata attraverso la sua definizione:

$$U_e = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 0,1^2 = 0,5 \text{ J}$$

Applichiamo il principio di conservazione dell'energia meccanica (tutta l'energia cinetica del blocco viene trasferita alla molla sotto forma di energia potenziale elastica) per calcolare la velocità del blocco:

$$E_c = U_e \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (M+m) \cdot V^2 = U_e \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2 \cdot U_e}{M+m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,5}{0,9+01}} = 1 \text{ m/s}$$

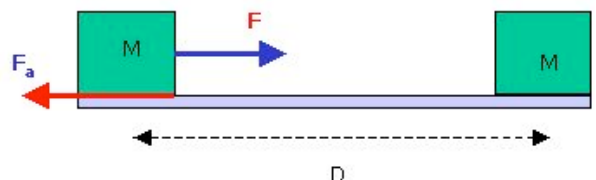
## PROBLEMA

Una cassa avente la massa di 20 kg viene trascinata per una distanza di 5,0 m sopra una superficie orizzontale con coefficiente d'attrito 0,40 da una forza costante di 200 N nella direzione del moto. Calcolare:

- ❑ il lavoro compiuto dalla forza applicata e dalla forza d'attrito
- ❑ la velocità finale della cassa nell'ipotesi che la velocità iniziale sia nulla

## SOLUZIONE

- ❑ Il lavoro compiuto dalla forza  $F$  è un lavoro motore, quindi positivo; mentre il lavoro compiuto dalla forza  $F_a$  è un lavoro resistente, quindi negativo. Pertanto:



$$L = F \cdot D = 200 \cdot 5 = 1000 \text{ J} \quad L_a = -F_a \cdot D = -\mu \cdot M \cdot g \cdot D = -0,40 \cdot 20 \cdot 9,8 \cdot 5 = -392 \text{ J}$$

- ❑ Il lavoro totale compiuto dalle forze che agiscono sul corpo è:

$$L_T = \sum L_i = L - L_a = 1000 - 392 = 608J$$

Utilizzando il teorema dell'energia cinetica siamo in grado di calcolare la velocità finale della cassa:

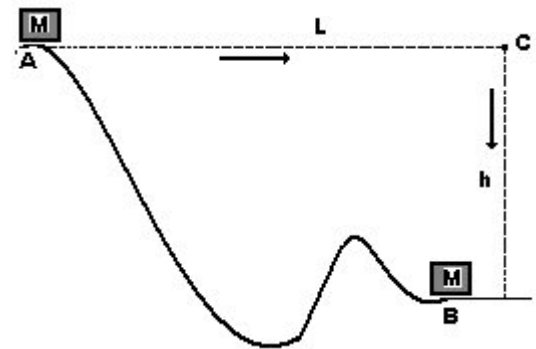
$$L_T = \Delta E_C = E_{C_F} - E_{C_i} = \frac{1}{2}MV^2 - 0 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2L_T}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 608}{20}} = 7,8m/s$$

## PROBLEMA

La figura mostra un corpo di massa  $M=2kg$  scivola su una superficie priva di attrito dal punto A al punto B, mentre il dislivello verticale è  $h=0.80m$ . Quanto lavoro compie il peso di M?

## SOLUZIONE

Dall'analisi del problema appare subito evidente la difficoltà nel risolverlo in quanto non conosciamo l'esatta forma del percorso seguito. E anche se la conoscessimo, il calcolo sarebbe comunque complicato dal fatto che l'angolo, che entra nella formula del lavoro, varia continuamente lungo il percorso seguito dal corpo M.



Ma, grazie al fatto che la forza peso  $P$  è conservativa, possiamo scegliere un altro percorso tra A e B che faciliti i calcoli. A tal proposito scegliamo il percorso ACB, e su di esso calcoliamo il lavoro svolto da  $P$ .

$$L_{AC} = \vec{P} \cdot \vec{L} = Mg \cdot L \cdot \cos 90^\circ = 0$$

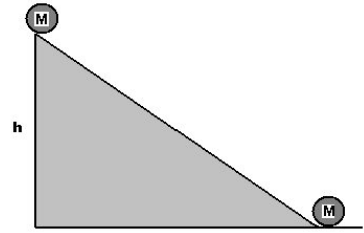
$$L_{CB} = \vec{P} \cdot \vec{h} = Mg \cdot h \cdot \cos 0^\circ = 15.7J$$

$$L_{TOT} = L_{AC} + L_{CB} = 15.7J$$



## PROBLEMA

Nella figura una pallina di massa  $m$  è lasciata andare, da fermo, dalla cima di uno scivolo alto  $h=8.5\text{m}$ . A che velocità la pallina arriverà a terra, supponendo che l'attrito sia nullo?



## SOLUZIONE

Principio di conservazione dell'energia:

$$E_{Mi} = E_{Mf} \Rightarrow E_{Ci} + E_{Pi} = E_{Cf} + E_{Pf} \Rightarrow 0 + Mgh = \frac{1}{2} Mv_f^2 + 0 \Rightarrow v_f = \sqrt{2gh} = 13 \text{ m/s}$$

### Considerazioni:

- La velocità calcolata è la stessa che avrebbe raggiunto la pallina se fosse caduta lungo la verticale  $h$
- La risoluzione di questo problema con le sole leggi della dinamica sarebbe stata più laboriosa.