

Matematica

Equazioni di 1° grado

Autore: prof. **Pappalardo Vincenzo**
docente di **Matematica e Fisica**



1. DEFINIZIONE DI EQUAZIONE

The diagram shows the equation $10x = 20$ with labels and arrows identifying its parts:

- Coefficiente dell'incognita**: Points to the 10 in $10x$.
- Incognita**: Points to the x in $10x$.
- Termine noto**: Points to the 20 on the right side.
- Primo membro**: Points to the $10x$ term.
- Secondo membro**: Points to the 20 term.

Domanda: qual è quel numero x che moltiplicato per 10 dà 20 ?

Risposta: 2 **Perché:** $10 \cdot 2 = 20$

CONCLUSIONE:

- Un'equazione è una uguaglianza tra due membri che è verificata quando l'incognita x assume solo un particolare valore.

❑ Risolvere un'equazione significa trovare il valore dell'incognita tale da rendere il primo membro uguale al secondo.

Sia data la seguente espressione:

$$5x - 1 = 3x + 2x - 1 \quad (1)$$

Domanda: qual è il valore dell'incognita x che rende il primo membro uguale al secondo?

Risposta: tutti i numeri

Verifichiamo:

$$x = 1 \implies 5 \cdot 1 - 1 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 \implies 4 = 4 \text{ uguaglianza verificata}$$

$$x = 2 \implies 5 \cdot 2 - 1 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 1 \implies 9 = 9 \text{ uguaglianza verificata}$$

$$x = -3 \implies 5 \cdot (-3) - 1 = 3 \cdot (-3) + 2 \cdot (-3) - 1 \implies -16 = -16 \text{ uguaglianza verificata}$$

CONCLUSIONE: se effettuiamo le verifiche per tutti i numeri, l'uguaglianza sarà sempre verificata, per cui l'espressione (1) si chiama identità.

DEFINIZIONE - Si definisce identità un'uguaglianza che è sempre verificata, qualunque sia il valore che viene attribuito all'incognita x .

ESEMPI

Applicando il concetto di equazione, verificare se i numeri a fianco indicati sono soluzioni delle equazioni:

Esempio N.1

$$3x - 2 = x \quad x = 1; x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Procedura: Sostituiamo i valori } x = 1 \text{ e } x = 0 \text{ nell'equazione:}$$

$$3 \cdot 1 - 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1 \quad \text{l'equazione è soddisfatta per cui } x = 1 \text{ è la soluzione}$$

$$3 \cdot 0 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 = 0 \quad \text{l'equazione non è soddisfatta per cui } x = 0 \text{ non è la soluzione}$$

Esempio N.2

$$x^2 - 7x = -10 \quad x = 1; x = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{Procedura: Sostituiamo i valori } x = 1 \text{ e } x = 2 \text{ nell'equazione:}$$

$$(1)^2 - 7 \cdot 1 = -10 \quad \Rightarrow \quad -6 = -10 \quad \text{l'equazione non è soddisfatta per cui } x = 1 \text{ non è la soluzione}$$

$$(2)^2 - 7 \cdot 2 = -10 \quad \Rightarrow \quad -10 = -10 \quad \text{l'equazione è soddisfatta per cui } x = 2 \text{ è la soluzione}$$

2. CLASSIFICAZIONE DELLE EQUAZIONI

Esaminiamo solo i tipi di equazioni che affronteremo:

Equazioni algebriche: equazioni nelle quali compaiono le quattro operazioni elementari e le potenze.

Se in queste equazioni le incognite non compaiono mai a denominatore, l'equazione si dice *intera*.

Esempi:

$$5x - 3 + 4x = -3x + 1 + 5x$$

$$\frac{3}{2}x - 1 + \frac{4}{5} = 3x - \frac{2}{3}x + 3$$

Se l'incognita compare al denominatore l'equazione si chiama fratta o frazionaria.

Esempio:

$$\frac{x-3}{5x+1} - \frac{3}{2} + 2x = \frac{2x-3}{10x+2} + 2$$

3. EQUAZIONI EQUIVALENTI

Siano date le seguenti due equazioni:

$$3x + 1 = x + 5$$

$$6x + 2 = 2x + 10$$

DOMANDA: cosa hanno in comune queste due equazioni?

Risposta: la stessa soluzione $x \approx 2$

Verifichiamo:

1^a equazione $\Rightarrow 3 \cdot 2 + 1 = 2 + 5 \Rightarrow 7 = 7$ uguaglianza verificata

2^a equazione $\Rightarrow 6 \cdot 2 + 2 = 2 \cdot 2 + 10 \Rightarrow 14 = 14$ uguaglianza verificata

CONCLUSIONE:

Equazioni che ammettono la stessa soluzione si chiamano **equazioni equivalenti**.

ESEMPI

La seguente equazione:

$$2x + 1 = -4x + 4 \quad \text{ammette come soluzione} \quad x = \frac{1}{2}$$

Individuare, attraverso la verifica, quale tra le seguenti equazioni è equivalente a quella data:

$$\boxed{4x - 3 = 2x - 1} \quad \longrightarrow \quad 4 \cdot \frac{1}{2} - 3 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 \quad \longrightarrow \quad -1 = -1$$

L'equazione è soddisfatta per cui è equivalente a quella data in quanto ammette la stessa soluzione.

$$\boxed{\frac{1}{4}x - 5 = x + 3} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - 5 = \frac{1}{2} + 3 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{8} - 5 = \frac{1}{2} + 3 \quad \longrightarrow \quad \frac{1 - 40}{8} = \frac{1 + 6}{2}$$
$$\quad \quad \quad \longrightarrow \quad -\frac{39}{8} = \frac{7}{2}$$

L'equazione non è soddisfatta per cui non è equivalente a quella data in quanto non ammette la stessa soluzione.

4. PROCEDURA RISOLUTIVA DI UN' EQUAZIONE DI 1° GRADO

Il procedimento generale per risolvere un' equazione di 1° grado si basa su due teoremi detti principi di equivalenza.

PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA – Addizionando o sottraendo una stessa quantità ad entrambi i membri di un' equazione, si ottiene un' equazione equivalente a quella data (ossia l' equazione non cambia).

ESEMPIO:

$$(1) \quad 4x - 27 = -6x + 3 \quad \text{ammette come soluzione } x = 3$$

Verifichiamo: $4 \cdot 3 - 27 = -6 \cdot 3 + 3 \implies -15 = -15$ uguaglianza verificata

Applichiamo il primo principio di equivalenza all' equazione (1), addizionando ad entrambi i membri la quantità 10. Si ottiene la seguente equazione:

$$4x - 27 + 10 = -6x + 3 + 10 \quad \text{E' equivalente alla (1), ossia ammette la stessa soluzione } x = 3.$$

Verifichiamo: $4 \cdot 3 - 27 + 10 = -6 \cdot 3 + 3 + 10 \implies -5 = -5$ uguaglianza verificata

Lo stesso discorso vale se sottraiamo una stessa quantità.

SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA – Moltiplicando o dividendo per una stessa quantità entrambi i membri di un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente a quella data (ossia l'equazione non cambia).

Esempio:

$$(2) \quad 2x - 5 = -4x + 7 \quad \text{ammette come soluzione } x = 2$$

Verifichiamo: $2 \cdot 2 - 5 = -4 \cdot 2 + 7 \implies -1 = -1$ uguaglianza verificata

Applichiamo il secondo principio di equivalenza all'equazione (2), moltiplicando entrambi i membri per la quantità 5. Si ottiene la seguente equazione:

$$5 \cdot (2x - 5) = 5 \cdot (-4x + 7) \quad \text{E' equivalente alla (2), ossia ammette la stessa soluzione } x = 2.$$

Verifichiamo:

$$5 \cdot (2 \cdot 2 - 5) = 5 \cdot (-4 \cdot 2 + 7) \implies -5 = -5 \quad \text{uguaglianza verificata}$$

Lo stesso discorso vale se dividiamo per una stessa quantità.

PROCEDURA RISOLUTIVA DI UN' EQUAZIONE INTERA

ESEMPIO N. 1

Per risolvere la seguente equazione algebrica intera:

$$7x - 6 + 2x + 5 = 2x - 15 + 5x$$

si deve procedere come segue.

1. Si portano tutti i termini contenente l' incognita al primo membro e tutti i termini noti al secondo membro. Nel passaggio da un membro all' altro si cambia segno (conseguenza del 1° principio di equivalenza), mentre per i termini che rimangono al loro posto i segni rimangono invariati:

$$7x + 2x - 2x - 5x = 6 - 5 - 15$$

2. Si riducono, secondo le regole del calcolo algebrico, i termini simili:

$$2x = - 14$$

3. Si dividono entrambi i membri dell'equazione per il coefficiente dell'incognita (conseguenza del 2° principio di equivalenza):

$$\frac{2x}{2} = -\frac{14}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = -7$$

VERIFICA

Per verificare se la soluzione trovata è esatta, bisogna sostituirla al posto della x nell'equazione di partenza ed ottenere l'uguaglianza tra primo e secondo membro:

$$7 \cdot (-7) - 6 + 2 \cdot (-7) + 5 = 2 \cdot (-7) - 15 + 5 \cdot (-7) \quad \Longrightarrow \quad -49 - 6 - 14 + 5 = -14 - 15 - 35$$

$$-64 = -64 \quad \text{uguaglianza verificata}$$

Se l'uguaglianza non è verificata, c'è un errore o nella risoluzione dell'equazione, o nella verifica.

ESEMPIO N. 2

Per risolvere la seguente equazione algebrica:

$$(5x+1)^2 - 5(2x+3) = (5x-2)(5x+2) - 2x \quad \text{si deve procedere come segue.}$$

1. Si applicano le regole del calcolo algebrico per eliminare le parentesi e sviluppare i prodotti notevoli:

$$25x^2 + 1 + 10x - 10x - 15 = 25x^2 - 4 - 2x$$

2. Si portano tutti i termini contenente l'incognita al primo membro e tutti i termini noti al secondo membro. Nel passaggio da un membro all'altro si cambia segno (conseguenza del 1° principio di equivalenza), mentre per i termini che rimangono al loro posto i segni rimangono invariati:

$$25x^2 + 10x - 10x - 25x^2 + 2x = -1 + 15 - 4$$

3. Si riducono, secondo le regole del calcolo algebrico, i termini simili:

$$2x = 10$$

4. Si dividono entrambi i membri dell'equazione per il coefficiente dell'incognita (conseguenza del 2° principio di equivalenza):

$$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad \Longrightarrow \quad x = 5$$

VERIFICA

Per verificare se la soluzione trovata è esatta, bisogna sostituirla al posto della x nell'equazione di partenza ed ottenere l'uguaglianza tra primo e secondo membro:

$$(5x+1)^2 - 5(2x+3) = (5x-2)(5x+2) - 2x$$

$$(5 \cdot 5 + 1)^2 - 5(2 \cdot 5 + 3) = (5 \cdot 5 - 2)(5 \cdot 5 + 2) - 2 \cdot 5$$

$$676 - 65 = 621 - 10$$

$$611 = 611 \quad \text{uguaglianza verificata}$$

Se l'uguaglianza non è verificata, c'è un errore o nella risoluzione dell'equazione, o nella verifica.

ESEMPIO N. 3

Per risolvere la seguente equazione algebrica intera:

$$\frac{3}{2}x - 3 + \frac{5}{4}x = \frac{3}{8} - \frac{1}{4}x + 4$$

si deve procedere come segue.

1. Si effettua il mcm di tutti i denominatori e le conseguenti operazioni:

$$\frac{12x - 24 + 10x}{8} = \frac{3 - 2x + 32}{8}$$

2. Si elimina il mcm moltiplicando entrambi i membri per il mcm (conseguenza del 2° principio di equivalenza):

$$8 \cdot \frac{12x - 24 + 10x}{8} = \frac{3 - 2x + 32}{8} \cdot 8$$

3. Si portano tutti i termini contenente l'incognita al primo membro e tutti i termini noti al secondo membro. Nel passaggio da un membro all'altro si cambia segno (conseguenza del 1° principio di equivalenza), mentre per i termini che rimangono al loro posto i segni rimangono invariati:

$$12x + 10x + 2x = 24 + 3 + 32$$

4. Si riducono, secondo le regole del calcolo algebrico, i termini simili:

$$24x = 59$$

5. Si dividono entrambi i membri dell'equazione per il coefficiente dell'incognita (conseguenza del 2° principio di equivalenza):

$$\frac{24x}{24} = \frac{59}{24} \implies x = \frac{59}{24}$$

VERIFICA

Per verificare se la soluzione trovata è esatta, bisogna sostituirla al posto della x nell'equazione di partenza ed ottenere l'uguaglianza tra primo e secondo membro:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{59}{24} - 3 + \frac{5}{4} \cdot \frac{59}{24} = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{59}{24} + 4 \implies \frac{177}{48} - 3 + \frac{295}{96} = \frac{3}{8} - \frac{59}{96} + 4$$

$$\frac{354 - 288 + 295}{96} = \frac{36 - 59 + 384}{96} \implies 361 = 361 \text{ uguaglianza verificata}$$

Se l'uguaglianza non è verificata, c'è un errore o nella risoluzione dell'equazione, o nella verifica.

PROCEDURA RISOLUTIVA DI UN' EQUAZIONE FRATTA

ESEMPIO N. 1

Per risolvere la seguente equazione algebrica fratta:

$$\frac{3x-1}{2x+2} + \frac{5x}{3x+3} = \frac{7x-1}{6x+6}$$

si deve procedere come segue:

1. Si effettua la scomposizione dei denominatori di tutte le frazioni che compongono l'equazione:

$$\frac{3x-1}{2 \cdot (x+1)} + \frac{5x}{3 \cdot (x+1)} = \frac{7x-1}{6 \cdot (x+1)}$$

2. Si calcola il mcm di tutti i denominatori che abbiamo scomposto, e si eseguono le normali operazioni del caso:

$$\frac{3 \cdot (3x-1) + 10x}{6 \cdot (x+1)} = \frac{7x-1}{6 \cdot (x+1)}$$

3. Si studia il dominio dell'equazione, ossia bisogna cercare quei valori dell'incognita che annullano il mcm, perché tali valori rendono priva di significato l'equazione:

$$6 \cdot (x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

pertanto il valore $x = -1$ non dovrà essere accettato come soluzione dell'equazione, e quindi non farà parte del dominio dell'equazione:

$$D = \mathbb{R} - \{-1\}$$

DEFINIZIONE DOMINIO: si chiama dominio D di una equazione l'insieme dei valori che possono essere assunti dall'incognita.

4. Si elimina il mcm (conseguenza del 2° principio di equivalenza):

$$\frac{3 \cdot (3x-1) + 10x}{\cancel{6 \cdot (x+1)}} = \frac{7x-1}{\cancel{6 \cdot (x+1)}} \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot (3x-1) + 10x = 7x-1$$

5. Si risolve l'equazione intera ottenuta:

$$9x - 3 + 10x = 7x - 1 \quad \Rightarrow \quad 9x + 10x - 7x = 3 - 1 \quad \Rightarrow \quad 12x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

6. Si verifica l'appartenenza del risultato trovato al dominio D :

$$x = \frac{1}{6}$$

APPARTIENE AL DOMINIO D DELL'EQUAZIONE PER CUI PUÒ
ESSERE ACCETTATA COME SOLUZIONE

ESEMPIO N. 2

Per risolvere la seguente equazione algebrica fratta:

$$\frac{x+2}{x-1} = \frac{2x+1}{x-1} - 1 \quad \text{si deve procedere come segue:}$$

1. Si calcola il mcm di tutti i denominatori, dato che non c'è niente da scomporre, e si eseguono le normali operazioni del caso:

$$\frac{x+2}{x-1} = \frac{2x+1-1 \cdot (x-1)}{x-1}$$

2. Si studia il dominio dell'equazione:

$$x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=1$$

pertanto il valore $x=1$ non dovrà essere accettato come soluzione dell'equazione, e quindi non fa parte del dominio dell'equazione:

$$D = \mathbb{R} - \{1\}$$

3. Si elimina il mcm :

$$\frac{x+2}{\cancel{x-1}} = \frac{2x+1-1 \cdot (x-1)}{\cancel{x-1}} \quad \Rightarrow \quad x+2 = 2x+1-x+1$$

4. Si risolve l'equazione intera ottenuta:

$$0x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Soluzione indeterminata}$$

ESEMPIO N. 3

Per risolvere la seguente equazione algebrica fratta:

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{x+3} = \frac{6}{x^2 + 3x}$$

si deve procedere come segue:

1. Si effettua la scomposizione dei denominatori di tutte le frazioni che compongono l'equazione:

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{x+3} = \frac{6}{x \cdot (x+3)}$$

2. Si calcola il mcm di tutti i denominatori che abbiamo scomposto, e si eseguono le normali operazioni del caso:

$$\frac{x+3-2x}{x \cdot (x+3)} = \frac{6}{x \cdot (x+3)}$$

3. Si studia il dominio dell'equazione:

$$x \cdot (x + 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad x = -3$$

pertanto i valori $x = 0$ e $x = -3$ non dovranno essere accettati come soluzioni dell'equazione, e quindi non fanno parte del dominio dell'equazione:

$$D = \mathbb{R} - \{-3; 0\}$$

4. Si elimina il mcm :

$$\frac{x + 3 - 2x}{\cancel{x \cdot (x + 3)}} = \frac{6}{\cancel{x \cdot (x + 3)}} \quad \Rightarrow \quad x + 3 - 2x = 6$$

5. Si risolve l'equazione intera ottenuta:

$$-x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = -3$$

6. Si verifica l'appartenenza del risultato trovato al dominio D:

$x = -3$ NON APPARTIENE AL DOMINIO D DELL'EQUAZIONE PER CUI NON
PUÒ ESSERE ACCETTATA COME SOLUZIONE, E QUINDI
L'EQUAZIONE NON AMMETTE SOLUZIONE

ESEMPIO N. 4

Per risolvere la seguente equazione algebrica fratta:

$$\frac{2}{x^2 - 3x + 2} - \frac{3}{x^2 - x} = \frac{4}{x^2 - 2x}$$

si deve procedere come segue:

1. Si effettua la scomposizione dei denominatori di tutte le frazioni che compongono l'equazione:

$$\frac{2}{(x-1) \cdot (x-2)} - \frac{3}{x \cdot (x-1)} = \frac{4}{x \cdot (x-2)}$$

2. Si calcola il mcm di tutti i denominatori che abbiamo scomposto, e si eseguono le normali operazioni del caso:

$$\frac{2x - 3 \cdot (x-2)}{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)} = \frac{4 \cdot (x-1)}{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}$$

3. Si studia il dominio dell'equazione:

$$x \cdot (x-1) \cdot (x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \quad x-1=0 \quad x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \quad x=1 \quad x=2$$

pertanto i valori $x = 0$ e $x = 1$ e $x = 2$ non dovranno essere accettati come soluzioni dell'equazione, e quindi non fanno parte del dominio dell'equazione:

$$D = \mathbb{R} - \{0;1;2\}$$

4. Si elimina il mcm :

$$\frac{2x - 3 \cdot (x-2)}{\cancel{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}} = \frac{4 \cdot (x-1)}{\cancel{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}} \quad \Rightarrow \quad 2x - 3 \cdot (x-2) = 4 \cdot (x-1)$$

5. Si risolve l'equazione intera ottenuta:

$$2x - 3x + 6 = 4x - 4 \quad \Rightarrow \quad -5x = -10 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

6. Si verifica l'appartenenza del risultato trovato al dominio D:

$x = 2$ NON APPARTIENE AL DOMINIO D DELL'EQUAZIONE PER CUI NON
PUÒ ESSERE ACCETTATA COME SOLUZIONE, E QUINDI
L'EQUAZIONE NON AMMETTE SOLUZIONE

5. POSSIBILI SOLUZIONI DI UN' EQUAZIONE

ESEMPIO N.1

$$4(x + 1) - 2x = 3(2x + 5) \implies 4x + 4 - 2x = 6x + 15 \implies 4x - 2x - 6x = -4 + 15$$

$$-4x = 11 \implies 4x = -11 \implies \frac{4x}{4} = -\frac{11}{4} \Rightarrow x = -\frac{11}{4}$$

Soluzione determinata

Quando l'equazione ammette una soluzione ben precisa, la soluzione si chiama determinata.

ESEMPIO N. 2

$$2(1 - 2x) + 4 = 3(1 - 2x) + 2(x + 3) \implies 2 - 4x + 4 = 3 - 6x + 2x + 6$$

$$-4x + 6x - 2x = -2 - 4 + 3 + 6 \implies 0x = 3$$

Soluzione impossibile

Poiché non esiste nessun numero x che moltiplicato per 0 dia 3, allora in questo caso diremo che la soluzione non esiste e la chiameremo soluzione impossibile.

ESEMPIO N. 3

$$2(1 - x) + 3 = 2x - 3 + 4(2 - x) \quad \Longrightarrow \quad 2 - 2x + 3 = 2x - 3 + 8 - 4x$$

$$-2x - 2x + 4x = -2 - 3 - 3 + 8 \quad \Longrightarrow \quad 0x = 0$$

Soluzione indeterminata

Poiché tutti i numeri x moltiplicati per 0 danno 0, allora le soluzioni sono infinite, per cui la **soluzione é indeterminata**. L'equazione in esame è una **un' identità**.

Esercizi di riepilogo

1. Stabilire quali delle seguenti uguaglianze sono identità e quali equazioni:

$$2x+1=x+x+3-2$$

$$3x-11=-5x-1$$

Soluzione

$$2x+1=x+x+3-2 \implies 2x-x-x=-1+3-2 \implies 0x=0$$

Poiché tutti i numeri x moltiplicati per 0 danno 0, allora diremo che le soluzioni sono infinite, per cui l'uguaglianza in esame è un'identità.

$$3x-11=-5x-1 \implies 3x+5x=11-1 \implies 8x=10 \implies \frac{8}{8}x=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

Poiché abbiamo trovato una soluzione ben precisa, l'uguaglianza in esame è un'equazione.

2. Verificare se i numeri a fianco indicati sono soluzioni delle equazioni:

$$5x - 4 = x$$

$$x = 1$$

$$x = 2$$

Soluzione

Sostituiamo prima il valore $x = 1$ e poi $x = 2$ nella prima equazione al posto della x :

$$5x - 4 = x \quad \Longrightarrow \quad 5 \cdot 1 - 4 = 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 = 1$$

$$5x - 4 = x \quad \Longrightarrow \quad 5 \cdot 2 - 4 = 2 \quad \Longrightarrow \quad 6 = 2$$

Poiché l'uguaglianza tra primo e secondo membro si verifica solo nel primo caso, concludiamo dicendo che solo $x = 1$ è soluzione dell'equazione.

3. Risolvere la seguente equazione numerica intera e fare la verifica:

$$10 \cdot (x+1) + 2x - 2 = 11x + 7 + 2 \cdot (x-1)$$

Soluzione

$$10 \cdot (x+1) + 2x - 2 = 11x + 7 + 2 \cdot (x-1) \implies 10x + 10 + 2x - 2 = 11x + 7 + 2x - 2$$

$$10x + 2x - 11x - 2x = -10 + 7 + 2 - 2 \implies -x = -3 \implies x = 3$$

Verifica

La verifica dell'esattezza della soluzione si effettua sostituendo nell'equazione di partenza al posto della x la soluzione trovata e verificare l'uguaglianza tra i due membri:

$$10 \cdot (x+1) + 2x - 2 = 11x + 7 + 2 \cdot (x-1) \implies 10 \cdot (3+1) + 2 \cdot 3 - 2 = 11 \cdot 3 + 7 + 2 \cdot (3-1) \implies$$

$$40 + 6 - 2 = 33 + 7 + 4 \implies 44 = 44$$

Poiché l'uguaglianza tra primo e secondo membro si è verificata, concludiamo dicendo che $x = 3$ è la soluzione dell'equazione.

4. Risolvere la seguente equazione numerica intera:

$$(x+1)^2 - 4 = 2x + (x-2) \cdot (x+2) + 1$$

Soluzione

$$(x+1)^2 - 4 = 2x + (x-2) \cdot (x+2) + 1 \implies x^2 + 1 + 2x - 4 = 2x + x^2 - 4 + 1 \implies$$

$$x^2 + 2x - 2x - x^2 = -1 + 4 - 4 + 1 \implies 0x = 0 \implies \text{Soluzione indeterminata}$$

Formule prodotti notevoli

Quadrato di un binomio $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

Prodotto di due binomi $(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$

5. Risolvere la seguente equazione numerica intera:

$$(x+1)^3 - x^2 \cdot (x+3) = 2 \cdot (x+1)$$

Soluzione

$$(x+1)^3 - x^2 \cdot (x+3) = 2 \cdot (x+1) \implies x^3 + 1 + 3x^2 + 3x - x^3 - 3x^2 = 2x + 2$$

$$\cancel{x^3} + \cancel{3x^2} + 3x - \cancel{x^3} - \cancel{3x^2} - 2x = 2 - 1 \implies x = 1$$

Formule prodotti notevoli

Cubo di un binomio $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$$

6. Risolvere la seguente equazione numerica intera:

$$\frac{3x-1}{4} + \frac{5-x}{2} = x+2 - \frac{1+2x}{4} + \frac{1}{2}$$

Soluzione

$$\frac{3x-1}{4} + \frac{5-x}{2} = x+2 - \frac{1+2x}{4} + \frac{1}{2} \implies \frac{3x-1+10-2x}{4} = \frac{4x+8-1-2x+2}{4}$$

$$3x-1+10-2x = 4x+8-1-2x+2 \implies 3x-2x-4x+2x = 1-10+8-1+2$$

$$-x = 0 \implies x = 0$$

7. Risolvere la seguente equazione numerica intera:

$$2 \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2} \right) + 5 \cdot \left(\frac{x}{5} - \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{8} + x$$

Soluzione

$$2 \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2} \right) + 5 \cdot \left(\frac{x}{5} - \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{8} + x \quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{3}x - \frac{2}{2} + \frac{5}{5}x - \frac{5}{3} = \frac{5}{8} + x$$

$$\frac{2}{3}x - 1 + x - \frac{5}{3} = \frac{5}{8} + x \quad \Longrightarrow \quad \frac{16x - 24 + 24x - 40}{24} = \frac{15 + 24x}{24}$$

$$16x - 24 + 24x - 40 = 15 + 24x \quad \Longrightarrow \quad 16x + 24x - 24x = 15 + 24 + 40$$

$$16x = 79 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{79}{16}$$

8. Risolvere la seguente equazione algebrica fratta:

$$\frac{6}{x^2 - 4} = \frac{4}{x^2 + 4x + 4}$$

$$\frac{6}{(x-2) \cdot (x+2)} = \frac{4}{(x+2)^2}$$

$$\frac{6 \cdot (x+2)}{(x-2) \cdot (x+2)^2} = \frac{4 \cdot (x-2)}{(x-2) \cdot (x+2)^2}$$

$$\frac{6 \cdot (x+2)}{\cancel{(x-2)} \cdot (x+2)^2} = \frac{4 \cdot (x-2)}{\cancel{(x-2)} \cdot (x+2)^2}$$

$$6 \cdot (x+2) = 4 \cdot (x-2) \quad \Rightarrow \quad 6x + 12 = 4x - 8 \quad \Rightarrow \quad 2x = -20 \quad \Rightarrow \quad x = -10$$

Domínio dell'equazione:

$$(x-2) \cdot (x+2)^2 = 0$$

$$x-2=0 \quad x+2=0$$

$$x=2 \quad x=-2$$

$$D = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$$

**IL VALORE $x = -10$ APPARTIENE AL DOMINIO D DELL'EQUAZIONE
PER CUI PUÒ ESSERE ACCETTATA COME SOLUZIONE**

PROBLEMI DI 1° GRADO

PROCEDURA

1. Leggere attentamente il problema, individuandone l'obiettivo;
2. Individuare i dati e l'incognita;
3. Indicare con x l'incognita ed esprimere altre grandezze incognite correlate ad x mediante espressioni algebriche nella variabile x ;
4. Trasformare il problema nell'equazione risolvente;
5. Risolvere l'equazione;
6. Verificare la soluzione trovata.

PROBLEMA N.1

DETERMINARE UN NUMERO SAPENDO CHE IL SUO TRIPLO, AGGIUNTO ALLA SUA METÀ, È UGUALE AL DOPPIO DEL NUMERO STESSO AUMENTATO DI 12.

Indicando con **x il numero da trovare**, l'equazione risolvente del problema è la seguente:

$$\begin{array}{ccccc} \xrightarrow{\text{TRIPLO DI X}} & \boxed{3x} & + & \boxed{\frac{x}{2}} & = & \boxed{2x + 12} & \xleftarrow{\text{DOPPIO DI DI X AUMENTATO DI 12}} \\ & & & \uparrow & & & \\ & & & \text{METÀ DI X} & & & \end{array}$$

La soluzione dell'equazione risolvente ci darà il numero cercato:

$$\frac{6x + x}{2} = \frac{4x + 24}{2} \quad \Rightarrow \quad 3x = 24 \quad \Rightarrow \quad x = 8$$

PROBLEMA N.2

DETERMINARE DUE NUMERI NATURALI CONSECUTIVI TALI CHE I $\frac{6}{5}$ DEL PRIMO AUMENTATI DEI $\frac{5}{6}$ DEL SECONDO DIANO 11.

Poniamo:

x = numero naturale

$x + 1$ = numero naturale consecutivo

L'equazione risolvente sarà:

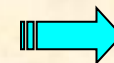
$$\frac{6}{5}x + \frac{5}{6}(x + 1) = 11$$

La soluzione dell'equazione risolvente ci darà il numero cercato e quindi il suo consecutivo:

$$\frac{36x + 25 \cdot (x + 1)}{\cancel{30}} = \frac{330}{\cancel{30}}$$

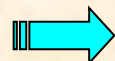


$$36x + 25x + 25 = 330$$



$$61x = 305$$

$$x = 5$$



$$x + 1 = 6$$

PROBLEMA N.3

POLICRATE, TIRANNO DI SAMO, AVENDO CHIESTO A PITAGORA QUANTI ALUNNI AVESSE, EBBE QUESTA RISPOSTA: "UNA METÀ STUDIA MATEMATICA, $\frac{1}{4}$ STUDIA I MISTERI DELLA NATURA E $\frac{1}{7}$ MEDITA NEL SILENZIO; INOLTRE VI SONO TRE DONNE".

Poniamo:

x = numero totale degli studenti

L'equazione risolvibile sarà:

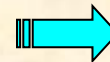
$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3 = x$$

La soluzione dell'equazione risolvibile ci darà il numero totale degli studenti:

$$\frac{14x + 7x + 4x + 84}{\cancel{28}} = \frac{28x}{\cancel{28}}$$



$$-3x = -84$$



$$x = 28$$

PROBLEMA N.4

DETERMINARE DUE NUMERI DISPARI CONSECUTIVI TALI CHE LA METÀ DEL PIÙ PICCOLO AGGIUNTA AI 4/5 DEL PIÙ GRANDE È UGUALE ALLA DIFFERENZA TRA IL QUADRATO DEL PIÙ GRANDE ED IL QUADRATO DEL PIÙ PICCOLO.

Poniamo:

x = numero dispari

$x + 2$ = numero dispari consecutivo

L'equazione risolvibile sarà:

$$\frac{1}{2}x + \frac{4}{5}(x+2) = (x+2)^2 - x^2$$

La soluzione dell'equazione risolvibile ci darà il numero cercato e quindi il suo consecutivo:

$$\frac{1}{2}x + \frac{4}{5}x + \frac{8}{5} = \cancel{x^2} + 2 + 4x - \cancel{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{5x + 8x + 16}{10} = \frac{20 + 40x}{10} \quad \Rightarrow \quad -27x = -4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{27}$$

Poiché la soluzione non è un numero dispari, il problema non ammette soluzione.

PROBLEMA N.5

Determinare gli angoli di un triangolo sapendo che il primo è $\frac{5}{4}$ del secondo e che il terzo supera di 15° la metà del secondo.

DATI DEL PROBLEMA:

$$\alpha = \frac{5}{4} \cdot \beta$$

$$\gamma = \frac{\beta}{2} + 15^\circ$$

L'equazione risolvibile del problema è la seguente



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Scelta dell'incognita



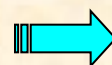
$$x = \beta$$

perché dai dati del problema α e γ sono espressi in funzione di β , e quindi l'equazione risolvibile in questo modo conterrà una sola incognita, cioè β :

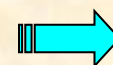
$$\frac{5}{4}x + x + \frac{x}{2} + 15 = 180$$



$$\frac{5x + 4x + 2x + 60}{4} = \frac{720}{4}$$



$$11x = 660$$



$$x = 60^\circ$$

In definitiva:

$$\beta = 60^\circ$$

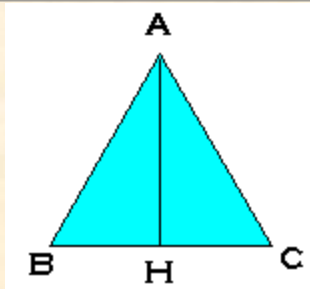
$$\alpha = \frac{5}{4} \cdot 60 = 75^\circ$$

$$\gamma = \frac{60^\circ}{2} + 15^\circ = 45^\circ$$

PROBLEMA N.6

Nel triangolo isoscele ABC, la base BC supera di 22 cm l'altezza AH.
Determinare il perimetro sapendo che:

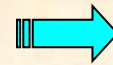
$$\frac{4}{5}BC + \frac{7}{4}AH = 38$$



DATI DEL PROBLEMA:

$$BC = AH + 22$$

L'equazione risolvente del problema è la seguente



$$\frac{4}{5}BC + \frac{7}{4}AH = 38$$

Scelta dell'incognita



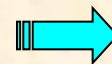
$$x = AH$$

Sfruttando i dati del problema, l'equazione risolvente diventa:

$$\frac{4}{5} \cdot (x + 22) + \frac{7}{4}x = 38$$



$$\frac{16 \cdot (x + 22) + 35x}{\cancel{20}} = \frac{760}{\cancel{20}}$$



$$16x + 352 + 35x = 760$$

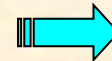
$$51x = 408$$



$$x = 8$$

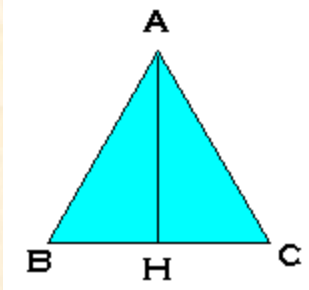


$$AH = 8\text{cm}$$



$$BC = 30\text{cm}$$

Per calcolare il lato AC applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AHC, dove il lato HC è la metà della base BC:



$$AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17\text{cm}$$

In definitiva il perimetro del triangolo sarà:

$$P = AB + BC + AC = 17 + 30 + 17 = 64\text{cm}$$

PROBLEMA N.6

UN AEREO DECOLLA ALLE ORE 14.30 E VOLA CON VELOCITÀ $v = 575$ KM/H. IN SEGUITO AD UN' AVARIA, SI RENDE NECESSARIO EFFETTUARE IN QUOTA UN RIFORNIMENTO DI CARBURANTE, PORTATO DA UN AEREO CHE DECOLLA ALLE 16.00 E VIAGGIA ALLA VELOCITÀ DI 800 KM/H. SE IL PILOTA DEL PRIMO AEREO HA STIMATO CHE IL PROPRIO CARBURANTE È SUFFICIENTE PER VOLARE FINO ALLE ORE 20.30, RIUSCIRÀ IL VELIVOLO DI SOCCORSO A RAGGIUNGERE IN TEMPO QUELLO IN DIFFICOLTÀ?

1. Obiettivo: a che ora il secondo aereo raggiungerà il primo.
2. Dati: velocità e orari di partenza degli aerei; incognita: tempo di incontro tra i due aerei
3. Tempo = x
4. Equazione risolvente: quando i due aerei s' incontreranno, avranno percorso lo stesso tragitto, che in fisica è dato dal prodotto della velocità e del tempo.

$$\text{Tragitto primo aereo} = \text{Tragitto secondo aereo} \implies 575x = 800 \cdot (x - 1,5)$$

$$575x = 800x - 1200 \implies 575x - 800x = -1200 \implies -225x = -1200$$

$$225x = 1200 \implies \frac{225}{225}x = \frac{1200}{225} = 5,3$$

Verifica della soluzione:

Poiché il secondo aereo incontra il primo dopo 5,3 ore dopo il decollo, ossia intorno alle ore 19.50, farà in tempo a soccorrerlo.

PROCEDURA RISOLUTIVA

1. Obiettivo: a che ora il secondo aereo raggiungerà il primo.
2. Dati: velocità e orari di partenza degli aerei; incognita: tempo di incontro tra i due aerei
3. Tempo = x
4. Equazione risolvente: quando i due aerei s' incontreranno, avranno percorso lo stesso tragitto, che in fisica è dato dal prodotto della velocità e del tempo.

$$\text{Tragitto primo aereo} = \text{Tragitto secondo aereo} \implies 575x = 800 \cdot (x - 1,5)$$

$$575x = 800x - 1200 \implies 575x - 800x = -1200 \implies -225x = -1200$$

$$225x = 1200 \implies \frac{225}{225}x = \frac{1200}{225} = 5,3$$

Verifica della soluzione:

Poiché il secondo aereo incontra il primo dopo 5,3 ore dopo il decollo, ossia intorno alle ore 19.50, farà in tempo a soccorrerlo.

7. MANIPOLAZIONE DELLE FORMULE

Qualsiasi formula può essere pensata come un'equazione, ossia come un'espressione contenente un'incognita che bisogna trovare. In sostanza trovare le cosiddette formule inverse significa risolvere un'equazione rispetto alla variabile scelta come incognita.

ESEMPIO N. 1

$$S_{\text{Finale}} = S_{\text{Iniziale}} + V \cdot t$$



Legge del moto rettilineo
uniforme

RisolviAMO rispetto a t , ossia t è l'incognita e tutte le altre variabili vanno considerate come numeri, cioè quantità note:

$$V \cdot t = S_F - S_I$$



$$\frac{v \cdot t}{v} = \frac{S_F - S_I}{v}$$



$$t = \frac{S_F - S_I}{v}$$

ESEMPIO N. 2

$$a = \frac{V_{\text{Finale}} - V_{\text{Iniziale}}}{t}$$



Definizione di accelerazione

RisolviAMO rispetto a V_{iniziale} , ossia V_{iniziale} è l'incognita e tutte le altre variabili vanno considerate come numeri, cioè quantità note:

$$\frac{a \cdot t}{t} = \frac{V_F - V_I}{t}$$



$$\frac{a \cdot t}{t} = \frac{V_F - V_I}{t}$$

$$a \cdot t = V_F - V_I$$



$$V_I = V_F - a \cdot t$$

ESEMPIO N. 3

$$F = G \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{d^2}$$



Legge della gravitazione universale

Risolviāmo rispetto a d , ossia d è l'incognita e tutte le altre variābili vanno considerate come numeri, cioè quantità note:

$$\frac{F \cdot d^2}{d^2} = \frac{G \cdot M_1 \cdot M_2}{d^2} \Rightarrow \frac{F \cdot d^2}{d^2} = \frac{G \cdot M_1 \cdot M_2}{d^2} \Rightarrow F \cdot d^2 = G \cdot M_1 \cdot M_2$$

$$\frac{F \cdot d^2}{F} = \frac{G \cdot M_1 \cdot M_2}{F} \Rightarrow d^2 = \frac{G \cdot M_1 \cdot M_2}{F}$$

$$d = \sqrt{\frac{G \cdot M_1 \cdot M_2}{F}}$$

Matematica

Sistemi di equazioni di 1° grado

Autore: prof. **Pappalardo Vincenzo**
docente di **Matematica e Fisica**



1. Definizioni

 Un sistema di equazioni lineari è un insieme di due o più equazioni di 1° grado con altrettante incognite.

In particolare ci occuperemo di sistemi lineari di due equazioni nelle incognite x e y che hanno la seguente forma, chiamata forma normale:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} y = m_1x + q_1 \\ y = m_2x + q_2 \end{cases}$$

Esempio:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 4x - 5y = -1 \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \\ y = -3x + 6 \end{cases}$$

● Per soluzione di un sistema di equazioni intendiamo la coppia di valori $(x; y)$ che soddisfino contemporaneamente le equazioni del sistema.

Esempio N. 1:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 4x - 5y = -1 \end{cases}$$

Ammette come soluzione

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \end{cases}$$

Verifica:

Sostituiamo le soluzioni trovate al posto della x e della y nel sistema:

$$\begin{cases} 3 \cdot 6 - 2 \cdot 5 = 8 \\ 4 \cdot 6 - 5 \cdot 5 = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} 18 - 10 = 8 \\ 24 - 25 = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} 8 = 8 \\ -1 = -1 \end{cases}$$

Poiché le equazioni che formano il sistema sono contemporaneamente soddisfatte, la coppia di valori $(6; 5)$ rappresenta la soluzione del sistema.

Esempio N. 2:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \\ y = -3x + 6 \end{cases}$$

Ammette come soluzione

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Verifica:

Sostituiamo le soluzioni trovate al posto della x e della y nel sistema:

$$\begin{cases} 3 = -\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{7}{2} \\ 3 = -3 \cdot 1 + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} \\ 3 = -3 + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = \frac{-1+7}{2} \\ 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 3 \\ 3 = 3 \end{cases}$$

Poiché le equazioni che formano il sistema sono contemporaneamente soddisfatte, la coppia di valori $(1 ; 3)$ rappresenta la soluzione del sistema.

2. Risoluzione algebrica di sistemi lineari

1° Metodo: metodo di sostituzione

1. Applicando le regole del calcolo algebrico si riduce il sistema a forma normale :

$$\begin{cases} 2x + y(y - 2) = (y + 3)^2 \\ 4x + 8y = 2(x - 1) + 5y \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + y^2 - 2y = y^2 + 9 + 6y \\ 4x + 8y = 2x - 2 + 5y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y^2 - 2y - y^2 - 6y = 9 \\ 4x + 8y - 2x - 5y = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x - 8y = 9 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$$

2. Si sceglie a piacere una delle due equazioni (per esempio la prima) e la si risolve rispetto a una delle due incognite (per esempio la x) :

$$\begin{cases} 2x - 8y = 9 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{2x}{2} = \frac{9 + 8y}{2} \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$$

3. Si sostituisce la x trovata al posto della x nella seconda equazione, ottenendo così un'equazione di 1° grado nell'incognita y :

$$2 \cdot \left(\frac{9 + 8y}{2} \right) + 3y = -2$$

4. Si risolve l'equazione:

$$2 \cdot \left(\frac{9 + 8y}{2} \right) + 3y = -2 \implies 9 + 8y + 3y = -2 \implies 11y = -11$$

$$\frac{11}{11}y = -\frac{11}{11} \implies y = -1$$

5. Si sostituisce il valore trovato al posto della y nell'equazione al punto 2, determinando così la seconda incognita:

$$x = \frac{9+8y}{2} = \frac{9+8 \cdot (-1)}{2} = \frac{9-8}{2} = \frac{1}{2}$$

6. In definitiva la soluzione del sistema sarà data dalla coppia :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$$

Verifica:

Sostituiamo le soluzioni trovate al posto della x e della y nel sistema di partenza:

$$\begin{cases} 2x + y(y-2) = (y+3)^2 \\ 4x + 8y = 2(x-1) + 5y \end{cases} \implies \begin{cases} 2 \cdot \frac{1}{2} + (-1)(-1-2) = (-1+3)^2 \\ 4 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot (-1) = 2(\frac{1}{2}-1) + 5 \cdot (-1) \end{cases} \implies \begin{cases} 4 = 4 \\ -6 = -6 \end{cases}$$

Poiché le equazioni che formano il sistema sono contemporaneamente soddisfatte, la coppia di valori $(1/2; -1)$ rappresenta la soluzione del sistema.

2° Metodo: metodo del confronto

1. Il metodo del confronto si applica quando il sistema si presenta nella seguente forma :

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 4 \\ y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

2. Uguagliando tra loro i secondi membri delle equazioni, si ottiene un'equazione di 1° grado, la cui risoluzione consente di ricavare la prima delle due incognite, ossia la x:

$$\frac{3}{2}x - 4 = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{6x - 16}{4} = \frac{-5x + 6}{4} \quad \Longrightarrow \quad 6x - 16 = -5x + 6$$

$$6x + 5x = 16 + 6 \quad \Longrightarrow \quad \frac{11}{11}x = \frac{22}{11} \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$

3. Si inserisce il valore trovato della x in una delle due equazioni del sistema (per esempio la prima), ottenendo così un'equazione di 1° grado la cui risoluzione consente di ricavare il valore dell'altra incognita, ossia la y :

$$y = \frac{3}{2} \cdot 2 - 4 = -1$$

4. In definitiva la soluzione del sistema sarà data dalla coppia :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Verifica:

Sostituiamo le soluzioni trovate al posto della x e della y nel sistema di partenza:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 4 \\ y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} -1 = \frac{3}{2} \cdot 2 - 4 \\ -1 = -\frac{5}{4} \cdot 2 + \frac{3}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} -1 = -1 \\ -1 = -1 \end{cases}$$

Poiché le equazioni che formano il sistema sono contemporaneamente soddisfatte, la coppia di valori (2; -1) rappresenta la soluzione del sistema.

3° Metodo: metodo di riduzione (addizione e sottrazione)

1. Risolvere il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -5x + 2y = 1 \end{cases}$$

2. Si decide quale delle due incognite (per esempio la x) si vuole eliminare, e si opera in modo da rendere tra loro opposti i coefficienti (moltiplicando per 5 la prima equazione e per 2 la seconda equazione):

$$\begin{array}{l} 5 \cdot \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -5x + 2y = 1 \end{cases} \\ 2 \cdot \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} 10x - 15y = 25 \\ -10x + 4y = 2 \end{cases}$$

3. Si addizionano membro a membro le due equazioni, ottenendo così un' equazione di 1° grado la cui risoluzione consente di ricavare il valore dell' incognita y :

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 10x - 15y = 25 \\ -10x + 4y = 2 \end{cases} \\ \hline -11y = 27 \end{array} \Longrightarrow 11y = -27 \Longrightarrow \frac{11}{11}y = -\frac{27}{11}$$

4. Si inserisce il valore trovato della y in una delle due equazioni del sistema di partenza (per esempio la prima), ottenendo così un'equazione di 1° grado la cui risoluzione consente di ricavare il valore dell'altra incognita, ossia la x :

$$\begin{array}{llll} 2x - 3 \cdot \left(-\frac{27}{11}\right) = 5 & \Longrightarrow & 2x + \frac{81}{11} = 5 & \Longrightarrow & \frac{22x + 81}{11} = \frac{55}{11} \\ 22x + 81 = 55 & \Longrightarrow & \frac{22}{22}x = -\frac{26}{22} & \Longrightarrow & x = -\frac{13}{11} \end{array}$$

Oppure si ripete il punto 2 eliminando l'incognita y :

$$\begin{array}{ll} 2 \bullet \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3 \bullet \begin{cases} -5x + 2y = 1 \end{cases} \end{cases} & \Longrightarrow & \begin{cases} 4x - 6y = 10 \\ -15x + 6y = 3 \end{cases} \\ & & \hline & & -11x = 13 & \Longrightarrow & x = -\frac{13}{11} \end{array}$$

5. In definitiva la soluzione del sistema sarà data dalla coppia :

$$\begin{cases} x = -\frac{13}{11} \\ y = -\frac{27}{11} \end{cases}$$

Verifica:

Sostituiamo le soluzioni trovate al posto della x e della y nel sistema di partenza:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -5x + 2y = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 2 \cdot \left(-\frac{13}{11}\right) - 3 \cdot \left(-\frac{27}{11}\right) = 5 \\ -5 \cdot \left(-\frac{13}{11}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{27}{11}\right) = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} -\frac{26}{11} + \frac{81}{11} = 5 \\ \frac{65}{11} - \frac{54}{11} = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{55}{11} = 5 \\ \frac{11}{11} = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 5 = 5 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Poiché le equazioni che formano il sistema sono contemporaneamente soddisfatte, la coppia di valori $(-13/11; -27/11)$ rappresenta la soluzione del sistema.

4° Metodo: metodo di Cramer

Definizioni :

Si dice matrice una tabella di numeri disposti ordinatamente in righe e colonne.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Nel caso del nostro sistema, possibili matrici sono:

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$



Tabella formata dai coefficienti delle incognite X e Y

$$M_x = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}$$



Tabella formata dai termini noti e dai coefficienti dell'incognita Y

$$M_y = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}$$



Tabella formata dai coefficienti dell'incognita X e dai termini noti

Per ciascuna matrice è possibile calcolare il **determinante**, così definito:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot c_2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_2 - c_1 \cdot a_2$$

Procedura risolutiva:

1. Si scrive il sistema in forma normale:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -5x + 2y = 1 \end{cases}$$

2. Si calcola il valore dei determinanti D , D_x , D_y :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & +2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-3) \cdot (-5) = -11$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & +2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - (-3) \cdot (1) = 13$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (5) \cdot (-5) = 27$$

3. Si calcola il valore delle incognite X e Y attraverso le seguenti formule:

$$x = \frac{D_x}{D} = -\frac{13}{11}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = -\frac{27}{11}$$

3. Risoluzione generale di un sistema lineare

Consideriamo un sistema scritto in forma normale:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

si dimostra che la soluzione generale del sistema è data da :

$$\begin{cases} x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{cases}$$

Esempio

$$\begin{cases} 2x - 8y = 9 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{3 \cdot 9 - (-8) \cdot (-2)}{2 \cdot 3 - 2 \cdot (-8)} = \frac{11}{22} = \frac{1}{2} \\ y = \frac{2 \cdot (-2) - 2 \cdot 9}{2 \cdot 3 - 2 \cdot (-8)} = \frac{-22}{22} = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$$

4. Possibili soluzioni di un sistema lineare

- **Soluzione determinata:** quando il sistema ammette come soluzione una coppia di valori $(x ; y)$, come nei casi finora esaminati.
- **Soluzione impossibile:** quando il sistema non ammette nessuna soluzione.
- **Soluzione indeterminata:** quando il sistema ammette infinite soluzioni.

Esempio N.1:

Risolviamo il seguente sistema con il metodo di riduzione:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - y = -1 \\ -2x + y = -5 \end{cases} \\ \hline 0x + 0y = -6 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{Soluzione impossibile}$$

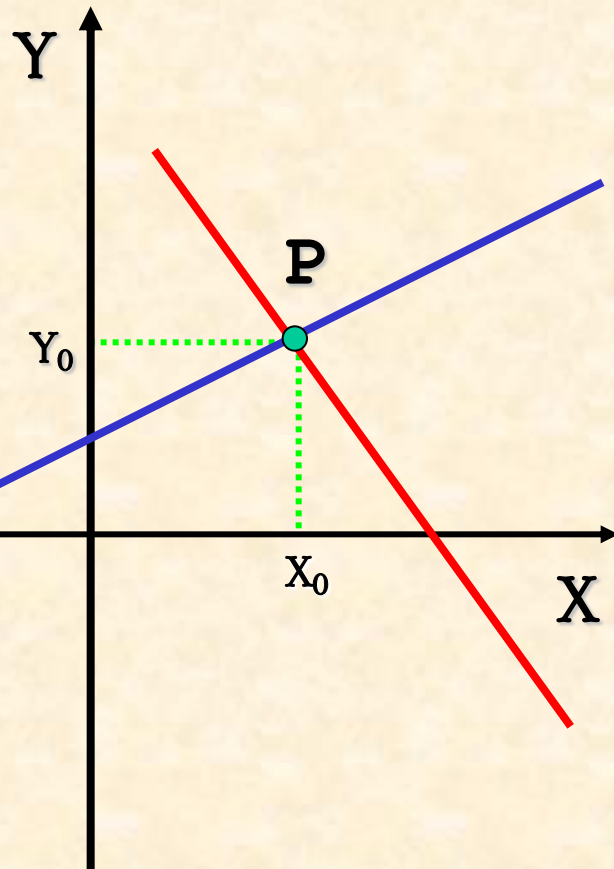
Esempio N.2:

Risolviamo il seguente sistema con il metodo di riduzione:

$$\begin{cases} 3x + 6y = 4 \\ x + 2y = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow 1 \cdot \begin{cases} 3x + 6y = 4 \\ -3 \cdot \left(x + 2y = \frac{4}{3} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} 3x + 6y = 4 \\ -3x - 6y = -4 \end{cases} \\ \hline 0x + 0y = 0 \end{array} \Rightarrow \text{Soluzione indeterminata}$$

5. Intersezione tra due rette

Per determinare il punto d'intersezione $P=(x_0; y_0)$ tra due rette bisogna risolvere il sistema formato dalle equazioni delle due rette:



$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

⇒ Dove le equazioni delle rette sono in forma implicita

$$\begin{cases} y = m_1 x + q_1 \\ y = m_2 x + q_2 \end{cases}$$

⇒ Dove le equazioni delle rette sono in forma esplicita

Esempio

Calcolare il punto d'intersezione tra le seguenti rette:

$$y = \frac{3}{2}x - 4 \qquad y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$$

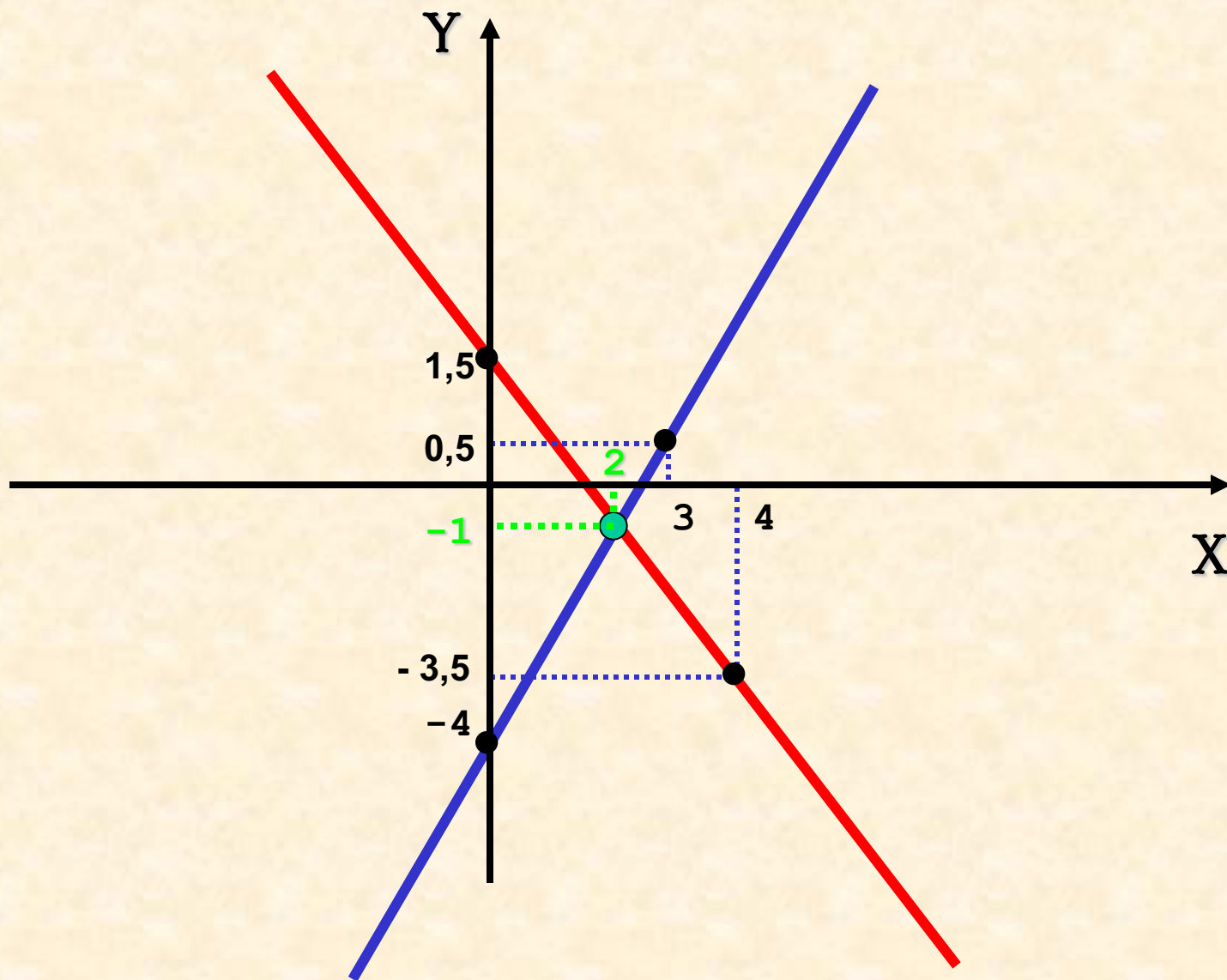
$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 4 \\ y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

Poiché le rette sono in forma esplicita, conviene applicare il metodo del confronto:

$$\frac{3}{2}x - 4 = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2} \implies \frac{6x - 16}{4} = \frac{-5x + 6}{4} \implies 6x + 5x = 16 + 6$$

$$x = 2 \implies y = \frac{3}{2} \cdot 2 - 4 = -1 \implies \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Graficamente la situazione è la seguente:



Esempio

Calcolare il punto d'intersezione tra le seguenti rette:

$$2x - 3y - 5 = 0$$

$$-5x + 2y - 1 = 0$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -5x + 2y = 1 \end{cases}$$

Le rette sono in forma implicita. Conviene applicare il metodo di Cramer (o quello di riduzione).

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & +2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-3) \cdot (-5) = -11$$

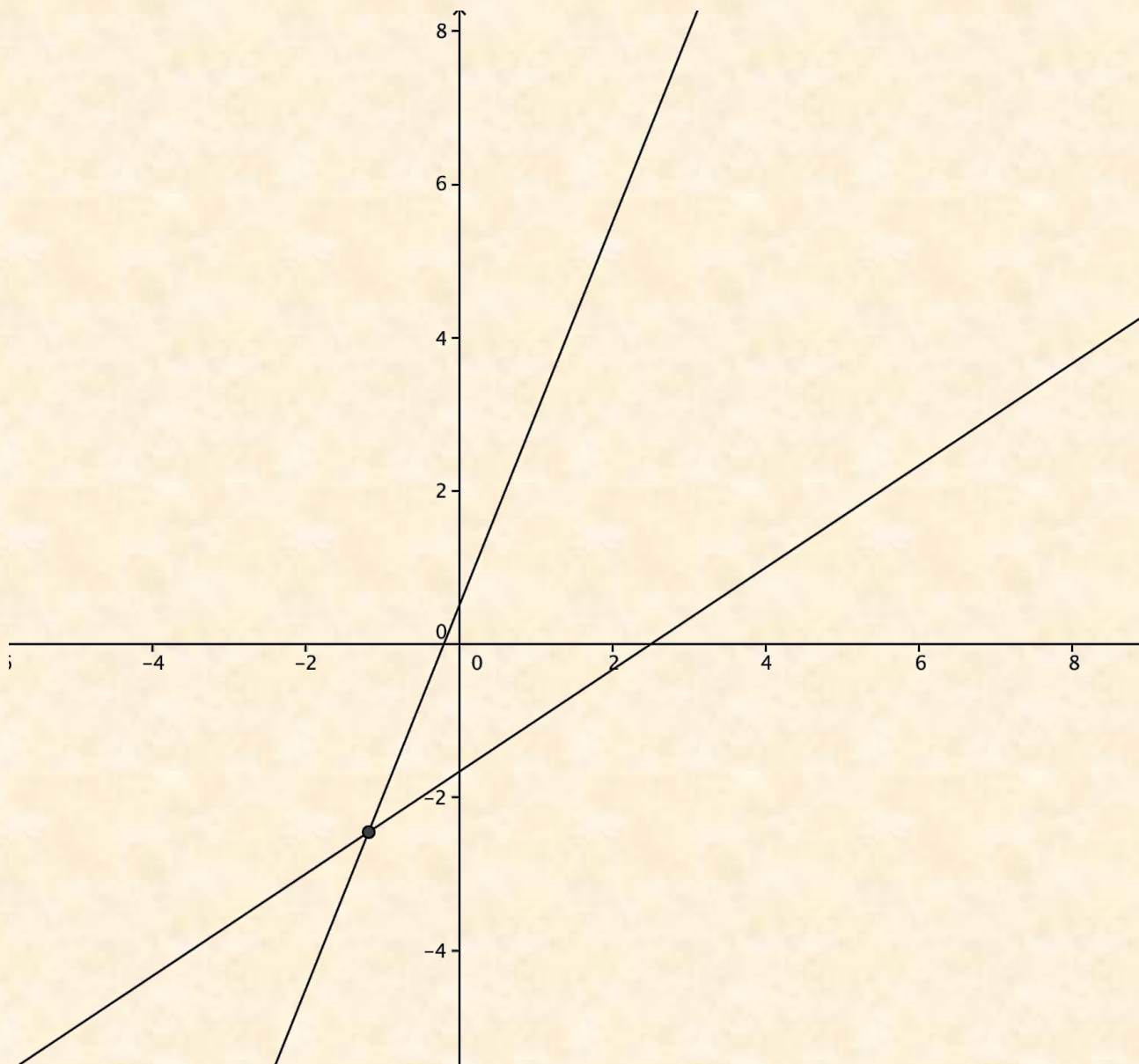
$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & +2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - (-3) \cdot (1) = 13$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (5) \cdot (-5) = 27$$

La soluzione è data dalle seguenti formule

$$x = \frac{D_x}{D} = -\frac{13}{11}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = -\frac{27}{11}$$

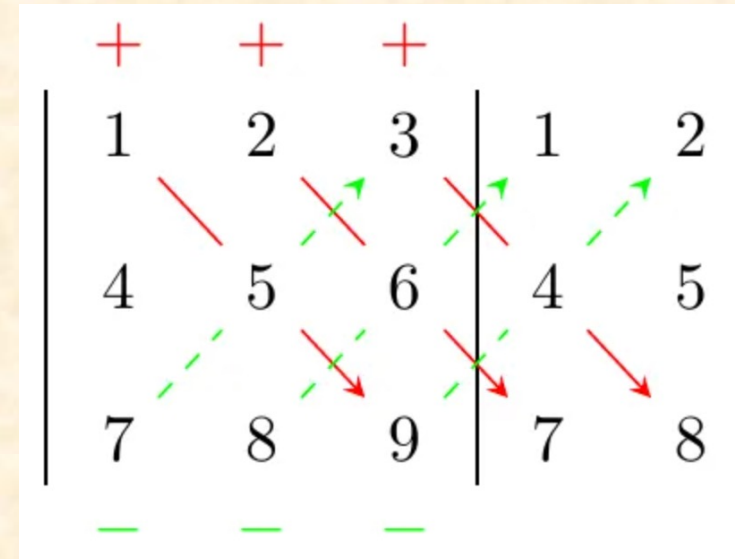


REGOLA DI SARRUS

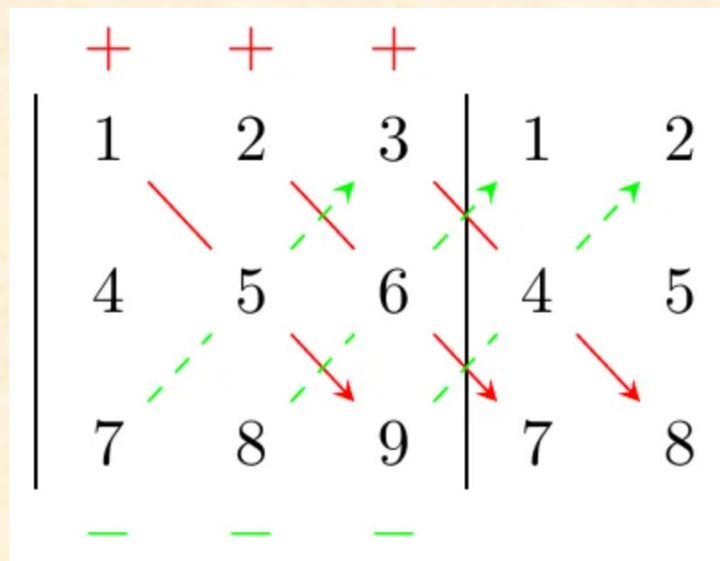
Si applica quando vogliamo calcolare
un determinante 3x3:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Si aggiungono le prime
due colonne:



e si fa la seguente operazione:



$$D = (45 + 84 + 96) - (105 + 48 + 72) = \\ = 225 - 225 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Si aggiungono le prime due colonne:

$$\begin{array}{cccc} + & + & + & \\ \begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} & 4 & 5 & \\ - & - & - & \end{array} =$$

e si fa la seguente operazione:

$$\begin{aligned} &= (4 \cdot 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \cdot 3) - ((-1) \cdot 2 \cdot 0 + 4 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \cdot (-1)) = \\ &= (-8 + 0 - 3) - (0 + 48 - 5) = -11 - 43 = -64 \end{aligned}$$

SISTEMA TRE EQUAZIONI IN TRE INCOGNITE

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

Calcolare il determinante D:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (2 + 6 + 6) - (9 - 1 - 8) = 14 \neq 0$$

Poiché $D \neq 0$, il sistema è determinato.

Calcolare i determinanti D_x , D_y , D_z :

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (10 + 2 + 6) - (3 - 5 - 8) = 18 + 10 = 28$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-4 + 15 - 6) - (-18 + 1 - 20) = 5 + 37 = 42$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1 + 12 - 10) - (-15 - 2 + 4) = 1 + 13 = 14$$

Soluzione:

$$x = \frac{28}{14} = 2 \quad y = \frac{42}{14} = 3 \quad z = \frac{14}{14} = 1$$

$$\begin{cases} x - y + 2z = -2 \\ x + y + 2z = 0 \\ 5x - y + 5z = 4 \end{cases}$$

Calcolare il determinante D:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = (5 - 10 - 2) - (10 - 2 - 5) = -7 - 3 = -10 \neq 0$$

Poiché $D \neq 0$, il sistema è determinato.

Calcolare i determinanti D_x , D_y , D_z :

$$D_x = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (-10 - 8 + 0) - (8 + 4) = -18 - 12 = -30$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (0 - 20 + 8) - (0 + 8 - 10) = -12 + 2 = -10$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = (4 + 0 + 2) - (-10 + 0 - 4) = 6 + 14 = 20$$

Soluzione:

$$x = \frac{-30}{-10} = 3 \quad y = \frac{-10}{-10} = 1 \quad z = -\frac{20}{10} = -2$$

Matematica

Equazioni di 2° grado

Autore: prof. **Pappalardo Vincenzo**
docente di **Matematica e Fisica**



EQUAZIONI COMPLETE

La forma normale di un'equazione di 2° grado completa è:

$$a x^2 + b x + c = 0$$

con a, b, c numeri reali e $a \neq 0$

FORMULA RISOLUTIVA

Per risolvere un'equazione di secondo grado completa si applica la formula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

L'espressione che appare sotto il segno di radice

$$b^2 - 4ac$$

si chiama discriminante dell'equazione e si indica con la lettera greca Δ (delta).

SIGNIFICATO DEL DISCRIMINANTE

Il segno di Δ determina le soluzioni di un'equazione di secondo grado:



Se $\Delta > 0$
l'equazione
ammette
due soluzioni reali
e distinte

Se $\Delta = 0$
l'equazione
ammette
due soluzioni reali
e coincidenti

Se $\Delta < 0$
L'equazione
non ammette
soluzioni

ESEMPIO 1

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$a = 1, b = -4, c = 3$$

$$\Delta > 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 3$$

DUE SOLUZIONI REALI E DISTINTE

ESEMPIO 2

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$a = 1, b = 6, c = 9$$

$$\Delta = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 2$$

DUE SOLUZIONI REALI E COINCIDENTI

ESEMPIO 3

$$x^2 + x + 5 = 0$$

$$a = 1, b = 1, c = 5$$

$$\Delta < 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2}$$

EQUAZIONE IMPOSSIBILE

Esercizio guidato 1

$$8x^2 - 10x + 3 = 0$$

Si applica la formula risolutiva:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{16} =$$

Le soluzioni sono:

$$x_1 =$$

$$x_2 =$$

Esercizio guidato 2

$$3x^2 + 4x + 5 = 0$$

Si applica la formula risolutiva:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 60}}{6} =$$

Le soluzioni sono:

Esercizio guidato 3

$$4x^2 - 28x + 49 = 0$$

Si applica la formula risolutiva:

$$x = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 784}}{8} =$$

Le soluzioni sono:

EQUAZIONI INCOMPLETE

Se $b = 0$

l'equazione
diventa

$$a x^2 + c = 0$$

e si chiama

equazione PURA

Se $c = 0$

l'equazione
diventa

$$a x^2 + bx = 0$$

e si chiama

equazione SPURIA

EQUAZIONI PURE

Le equazioni pure si risolvono isolando il termine con l'incognita:

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c$$

$$x = \pm \sqrt{-c/a}$$

ESEMPI

ESEMPI di equazioni pure

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

$$25x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4/25$$

$$x = \pm 2/5$$

$$x^2 + 9 = 0$$

$$x^2 = -9$$

$$x = \pm \sqrt{-9}$$

*Equazione
impossibile*

Le soluzioni di un'equazione pura, se esistono, sono numeri opposti.

Esercizi guidati equazioni pure

1. $2x^2 - 18 = 0$ $2x^2 = 18$ $x^2 = 9$ $x =$

2. $x^2 - 16 = 0$ $x^2 =$ $x =$

3. $4x^2 - 25 = 0$ $4x^2 =$ $x^2 =$ $x =$

4. $x^2 + 25 = 0$ $x^2 =$ l'equazione è

Soluzioni esercizi guidati

equazioni pure

1. $x = \pm 3$
2. $x = \pm 4$
3. $x = \pm 5/2$
4. impossibile

EQUAZIONI SPURIE

Le equazioni spurie si risolvono raccogliendo x ed applicando la legge di annullamento del prodotto, secondo la quale il prodotto di due fattori è zero se almeno uno di essi è zero.

$$\begin{array}{lcl} x(ax + b) = 0 & \begin{array}{c} \text{↔} \\ \text{↔} \end{array} & \begin{array}{l} ax^2 + bx = 0 \\ x = 0 \end{array} \\ & & \begin{array}{l} ax + b = 0 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{→} \end{array} \quad \begin{array}{l} x = -b/a \end{array}$$

ESEMPI

ESEMPI di equazioni spurie

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0 \begin{cases} \rightarrow x_1 = 0 \\ \rightarrow x - 4 = 0 \rightarrow x_2 = 4 \end{cases}$$

L'equazione spuria ha due soluzioni reali una delle quali sempre uguale a zero

$$3x^2 + 5x = 0$$

$$x(3x + 5) = 0 \begin{cases} \rightarrow x_1 = 0 \\ \rightarrow 3x + 5 = 0 \rightarrow x_2 = -5/3 \end{cases}$$

Esercizi guidati equazioni spurie

1. $7x^2 + 4x = 0$

$x (7x + 4) = 0$

$x = 0$

$7x + 4 = 0$

$\xrightarrow{\quad} x =$

2. $5x^2 - x = 0$

$x (\quad) = 0$

Soluzioni esercizi guidati

equazioni spurie

1. $x = 0$ $x = -4/7$

2. $x = 0$ $x = 1/5$

IN SINTESI

$$ax^2 + bx + c = 0$$

	<i>Nome equazione</i>	<i>Soluzioni</i>	<i>Tipo di soluzioni</i>
$b \neq 0, c \neq 0$	<i>completa</i>	$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	<i>Se $\Delta > 0$ reali distinte Se $\Delta = 0$ reali coincidenti Se $\Delta < 0$ nessuna soluzione</i>
$b = 0, c \neq 0$	<i>pura</i>	$x = \pm \sqrt{-c/a}$	<i>Se esistono, sono opposte</i>
$b \neq 0, c = 0$	<i>spuria</i>	$x_1 = 0$ $x_2 = -b/a$	<i>Reali distinte</i>

VERIFICA

test

- Riconosci , tra le seguenti espressioni, l' equazione di II grado

a) $x + 1 = 2x^2$

b) $x - 2x + 1 = 0$

c) $3x^2 - 4x + 2$

d) $4x^3 - 5x^2 + 3 = 0$

- Riconosci, tra le seguenti, l' equazione di II grado completa

a) $3x^2 - x = 0$

b) $x^2 - x - 3 = 0$

c) $x^2 - 9 = 0$

d) $5x^2 = 0$

- Riconosci, tra le seguenti, l' equazione di II grado spuria

a) $3x^2 - x = 0$

b) $x^2 - x - 3 = 0$

c) $x^2 - 9 = 0$

d) $5x^2 = 0$

test

- Riconosci, tra le seguenti, l'equazione di II grado pura

a) $3x^2 - x = 0$

b) $x^2 - x - 3 = 0$

c) $x^2 - 9 = 0$

d) $5x^2 = 0$

- Riconosci l'equazione di II grado completa ridotta a forma normale

a) $3x^2 = x - 5$

b) $4x^2 + 7x - 2x + 3 = 0$

c) $4x^2 + 3x - 1 = 0$

- Individua i coefficienti a, b e c delle seguenti equazioni

a) $4x^2 - 8x + 3 = 0$ a = b = c =

b) $3x^2 - 1 + 8x = 0$ a = b = c =

c) $2x - 3x^2 + 1 = 0$ a = b = c =

test

- La formula risolutiva dell'equazione completa di II grado è:

$$a) x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{-2a}$$

$$b) x = \frac{b \pm \sqrt{-b^2 - 4ac}}{-2a}$$

$$c) x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{-2c}$$

$$d) x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

VERIFICA

domande aperte

- Data l'equazione $2x^2 - 3x + 5 = 0$, applica la formula risolutiva

- Risolvi le equazioni

$$3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x^2 - 27 = 0$$

- Scrivi la formula del Δ

- Completa le seguenti frasi

Se risulta $\Delta \dots 0$, l'equazione ha

Se risulta $\Delta \dots 0$, l'equazione ha

Se risulta $\Delta \dots 0$, l'equazione ha

Docente: Vincenzo Pappalardo

Materia: Matematica

Sistemi equazioni 2° grado

Algebra

1. GRADO DI UN SISTEMA

Il grado di un sistema si calcola moltiplicando i gradi delle equazioni componenti.

$$\begin{cases} x^3 + y^4 = 9 \\ x^2 - y = 1 \end{cases}$$

E' di ottavo grado: $4 \cdot 2 = 8$

La sua soluzione dipende dalla soluzione di un'equazione di grado 8 ed avrà 8 soluzioni (reali distinte, reali coincidenti o complesse coniugate).

2. SISTEMA DI 2° GRADO

E' il sistema fra un'equazione di 2° grado e una di 1° grado:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Metodo utilizzato: *metodo di sostituzione*

Soluzione:

$$\text{prima soluzione: } \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = -2 \end{cases} \quad \text{seconda soluzione: } \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

Procedura risolutiva

Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Metodo di sostituzione

Ricavo la x dalla seconda equazione e sostituisco il valore trovato nella prima equazione:

$$\begin{cases} (y+1)^2 + y^2 = 5 \\ x = y+1 \end{cases} \xrightarrow{\text{eseguo i calcoli}} \begin{cases} y^2 + 2y + 1 + y^2 = 5 \\ x = y+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^2 + y - 2 = 0 \\ x = y+1 \end{cases}$$

Risolvo l'equazione di 2° grado e ottengo:

$$y_1 = 1 \quad y_2 = -2$$

Ora devo sostituire i valori trovati uno alla volta al posto della y in una delle due equazioni del sistema (per semplicità nella seconda) e calcolare le x corrispondenti:

$$\textit{prima soluzione:} \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = -2 \end{cases}$$

$$\textit{seconda soluzione:} \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{3x-4}{2x+1} + \frac{5}{y-2} + 2 = 0 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

Effettuiamo il mcm nella prima equazione:

$$\begin{cases} \frac{(3x-4)(y-2) + 5(2x+1) + 2(2x+1)(y-2)}{(2x+1)(y-2)} = 0 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

Si studia il *dominio dell'equazione*, ossia bisogna imporre la condizione $(2x+1)(y-2) \neq 0$ affinché l'equazione, e quindi il sistema, non perda significato:

$$(2x+1)(y-2) \neq 0 \rightarrow x \neq -\frac{1}{2} \cup y \neq 2$$

Pertanto i valori $x=-1/2$ e $y=2$ non dovranno essere accettati come soluzioni del sistema, e quindi non faranno parte del dominio:

$$D = \Re - \left\{ x = -\frac{1}{2}; y = 2 \right\}$$

A questo punto possiamo eliminare il denominatore e, svolgendo le opportune operazioni, il sistema viene ridotto a forma normale e pronto per essere risolto:

$$\begin{cases} 7xy - 4x - 2y + 9 = 0 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7xy - 4x - 2y + 9 = 0 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{metodo di sostituzione}} \begin{cases} 7\left(\frac{5+2y}{3}\right)y - 4\left(\frac{5+2y}{3}\right) - 2y + 9 = 0 \\ x = \frac{5+2y}{3} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2y^2 + 3y + 1 = 0 \\ x = \frac{5+2y}{3} \end{cases}$$

RisolviAMO l'equazione di secondo grado nella sola variabile y :

$$y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{-4}{4} = -1 \\ y = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Andiamo a sostituire i valori delle y così trovati nella seconda equazione per trovare i corrispondenti valori delle x :

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = \frac{5+2y}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = \frac{5-2}{3} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{5+2y}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{5-1}{3} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Verifichiamo se le soluzioni trovate rispettano la condizione imposta, ossia il dominio: entrambe le soluzioni sono accettabili:

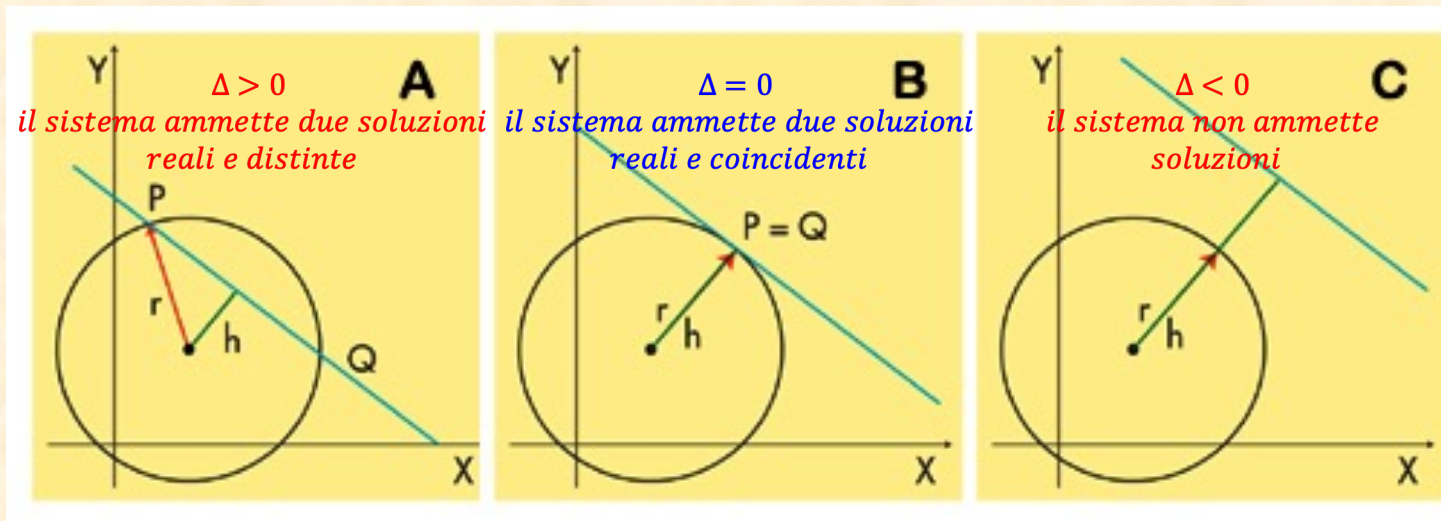
$$\text{prima soluzione: } \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -1 \end{cases}$$

$$\text{seconda soluzione: } \begin{cases} x_2 = 4/3 \\ y_2 = -1/2 \end{cases}$$

3. POSIZIONE RETTA RISPETTO A CIRCONFERENZA

Per studiare la posizione di una retta rispetto a una circonferenza, dobbiamo determinare quante sono le soluzioni del seguente sistema (metodo di sostituzione):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = mx + q \end{cases}$$



ESERCIZI

Determinare gli eventuali punti di intersezione tra la circonferenza di equazione: $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ e la retta di equazione: $x-2y-1=0$.

Per determinare gli eventuali punti d'intersezione tra la retta e la circonferenza, dobbiamo risolvere il seguente sistema di 2° grado:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

Metodo di sostituzione: ricaviamo la x dalla seconda equazione e sostituiamola nella prima:

$$\begin{cases} x = 2y + 1 \\ (2y + 1)^2 + y^2 - 2(2y + 1) - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Effettuiamo le dovute operazioni:

$$\begin{cases} x = 2y + 1 \\ 4y^2 + 4y + 1 + y^2 - 4y - 2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ 5y^2 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ y(5y - 2) = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene

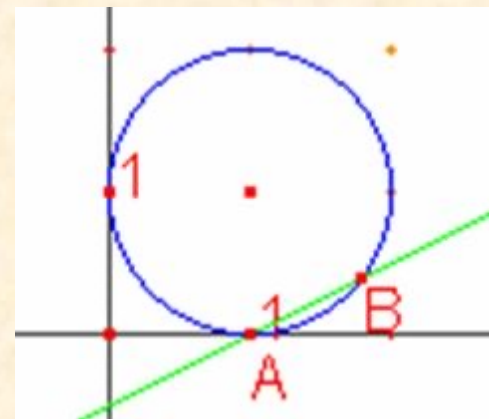
$$\begin{cases} x = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

A(1;0) e

$$\begin{cases} x = 2y + 1 \\ 5y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \cdot \frac{2}{5} + 1 = \frac{4}{5} + 1 = \frac{9}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$$

B $\left(\frac{9}{5}; \frac{2}{5}\right)$

La retta è secante alla circonferenza
nei punti: A=(1;0) e B=(9/5;2/5)



Determinare gli eventuali punti di intersezione tra la circonferenza di equazione: $x^2 + y^2 = 1$ e la retta di equazione: $y = -x + 5$.

Il sistema da risolvere è il seguente:

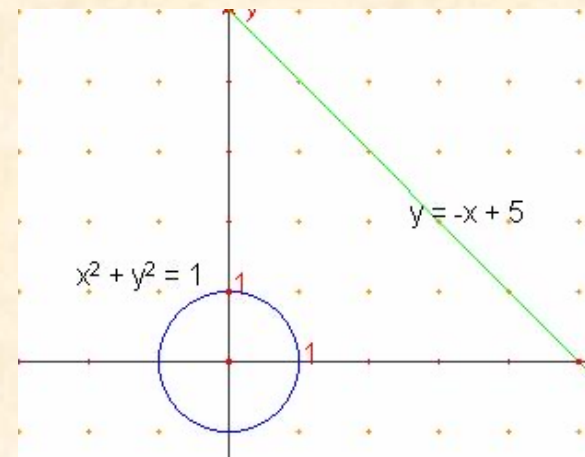
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = -x + 5 \end{cases}$$

Metodo di sostituzione: $\begin{cases} y = -x + 5 \\ x^2 + (-x + 5)^2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -x + 5 \\ x^2 + x^2 - 10x + 25 = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ x^2 - 5x + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta < 0$$

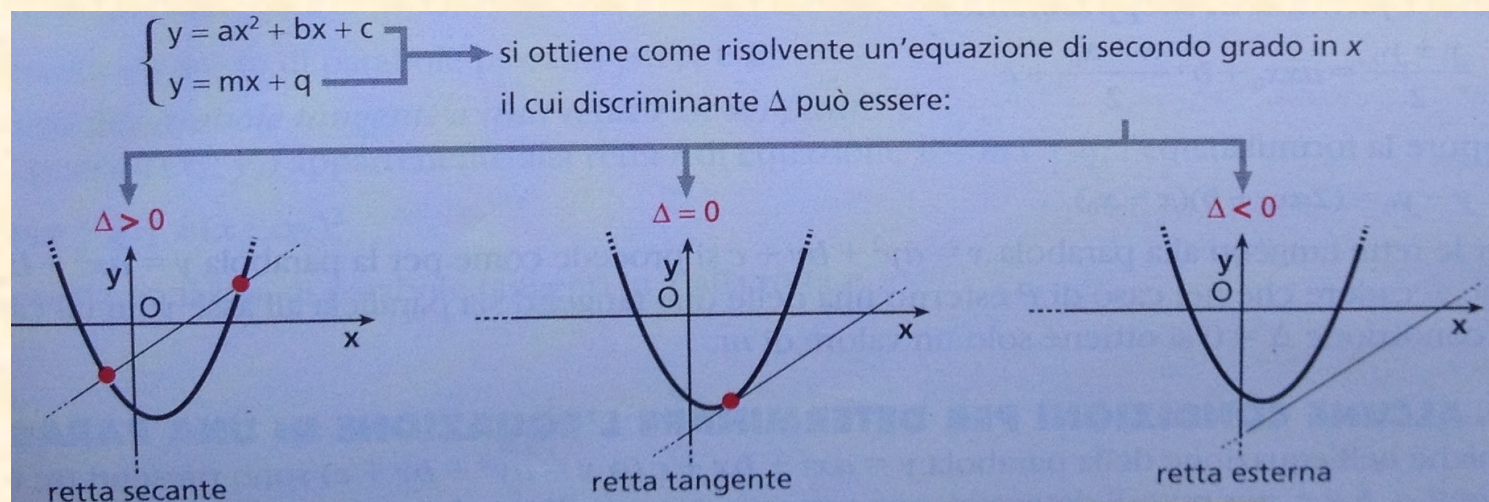
*il sistema non ammette soluzioni
la retta è esterna*



4. POSIZIONE RETTA RISPETTO A PARABOLA

Per studiare la posizione di una retta rispetto a una parabola, dobbiamo determinare quante sono le soluzioni del seguente sistema (metodo di sostituzione):

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}$$



ESERCIZI

Trovare le intersezioni della parabola di equazione:

$$y = -x^2 + 2x \quad \text{con la retta di equazione: } y = 2x + 3.$$

Dal sistema:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x \\ y = 2x + 3, \end{cases} \quad \text{si ha l'equazione: } x^2 + 3 = 0,$$

che non ha soluzioni reali. Pertanto la retta è **esterna** alla parabola (fig. 11.23).

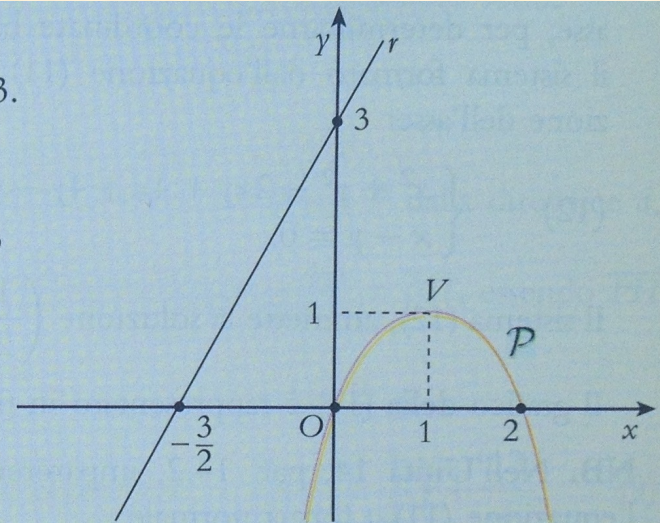


Figura 11.23

ESERCIZIO GUIDA

102 Stabiliamo se le rette di equazioni $y = x - 2$ e $y = x - 1$ sono secanti, tangenti o esterne alla parabola di equazione $y = x^2 + 3x - 1$ e rappresentiamo graficamente la parabola e le rette.

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = x^2 + 3x - 1 \end{cases}$$

Per confronto, otteniamo:

$$x^2 + 3x - 1 = x - 2$$

$$x^2 + 3x - 1 - x + 2 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - 1 = 0$$

e quindi l'unica soluzione è:
 $x = -1$.

Poiché $\Delta = 0$, la retta è tangente alla parabola. Il punto di tangenza ha ascissa $x = -1$ e la rispettiva ordinata è $y = -3$.

Il punto di tangenza è $T(-1; -3)$.

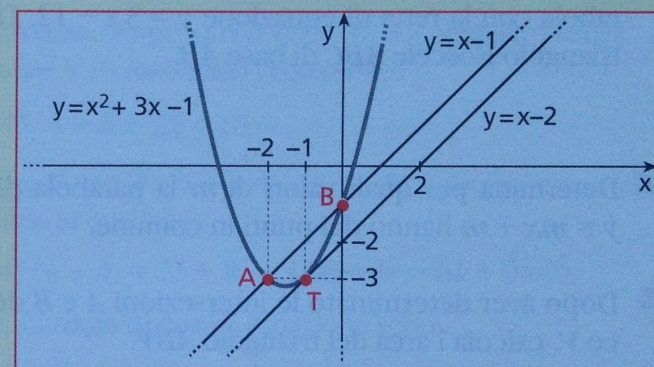
Risolviamo ora il sistema:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x^2 + 3x - 1 \end{cases}$$

Si ha $x - 1 = x^2 + 3x - 1$, da cui $x^2 + 2x = 0$.

L'equazione ha $\Delta > 0$, quindi si hanno due soluzioni $x_1 = -2$ e $x_2 = 0$. La retta $y = x - 1$ è quindi secante la parabola nei punti $A(-2; -3)$ e $B(0; -1)$.

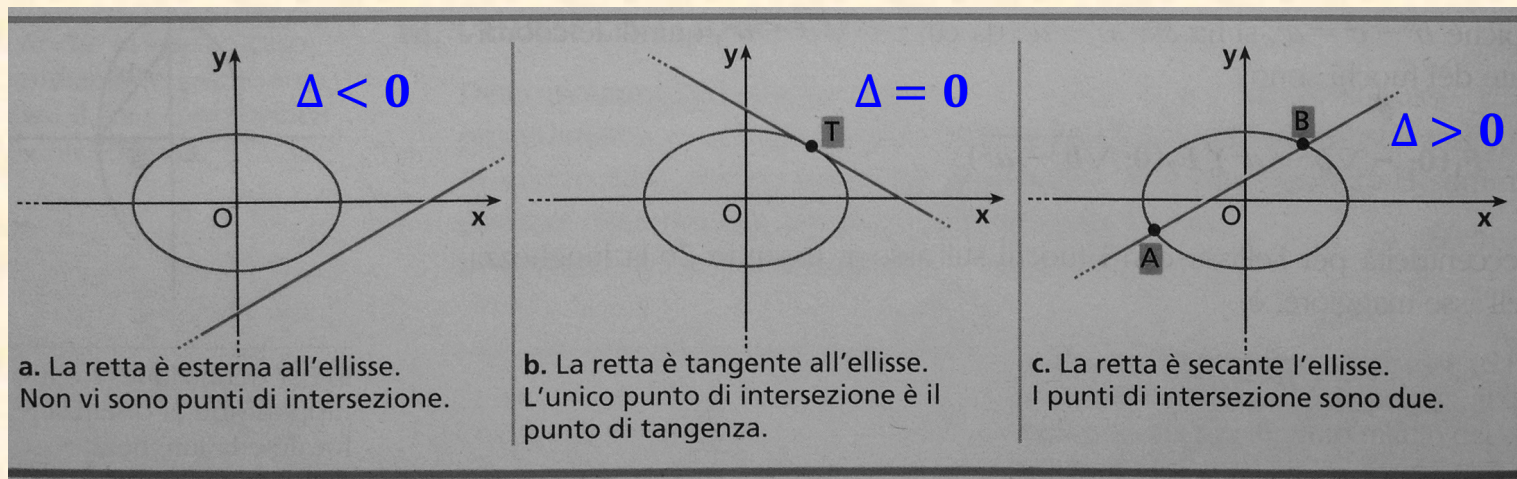
Rappresentiamo il grafico della parabola e delle due rette.



5. POSIZIONE RETTA RISPETTO ALL'ELLISSE

Per studiare la posizione di una retta rispetto a un'ellisse, dobbiamo determinare quante sono le soluzioni del seguente sistema (metodo di sostituzione):

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx + q \end{cases}$$



ESERCIZI

Determinare gli eventuali punti di intersezione tra la retta di equazione: $x+2y-6=0$ e l'ellisse di equazione: $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

Metodo di sostituzione - Ricaviamo la x dalla seconda equazione: $x=-2y+6$ e sostituiamola nella prima. L'equazione risolvente che si ottiene è:

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

Il discriminante dell'equazione è:

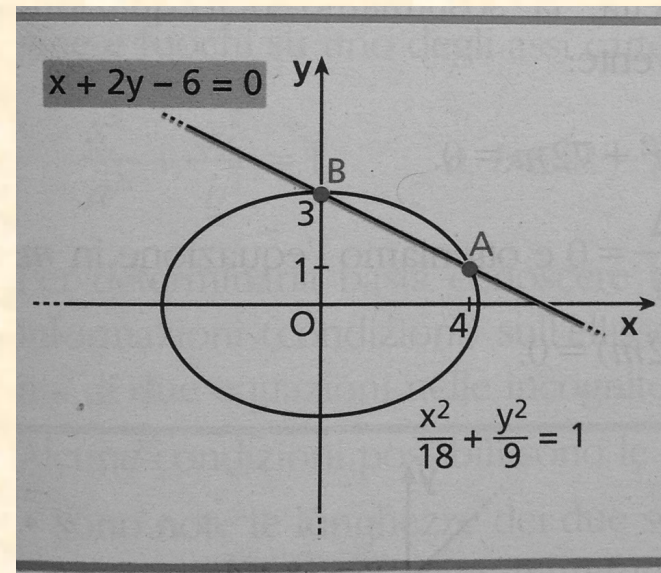
$$\Delta = 4 > 0$$

L'equazione ammette due soluzioni reali e distinte:

$$y_1 = 1 \quad y_2 = 3$$

In definitiva:

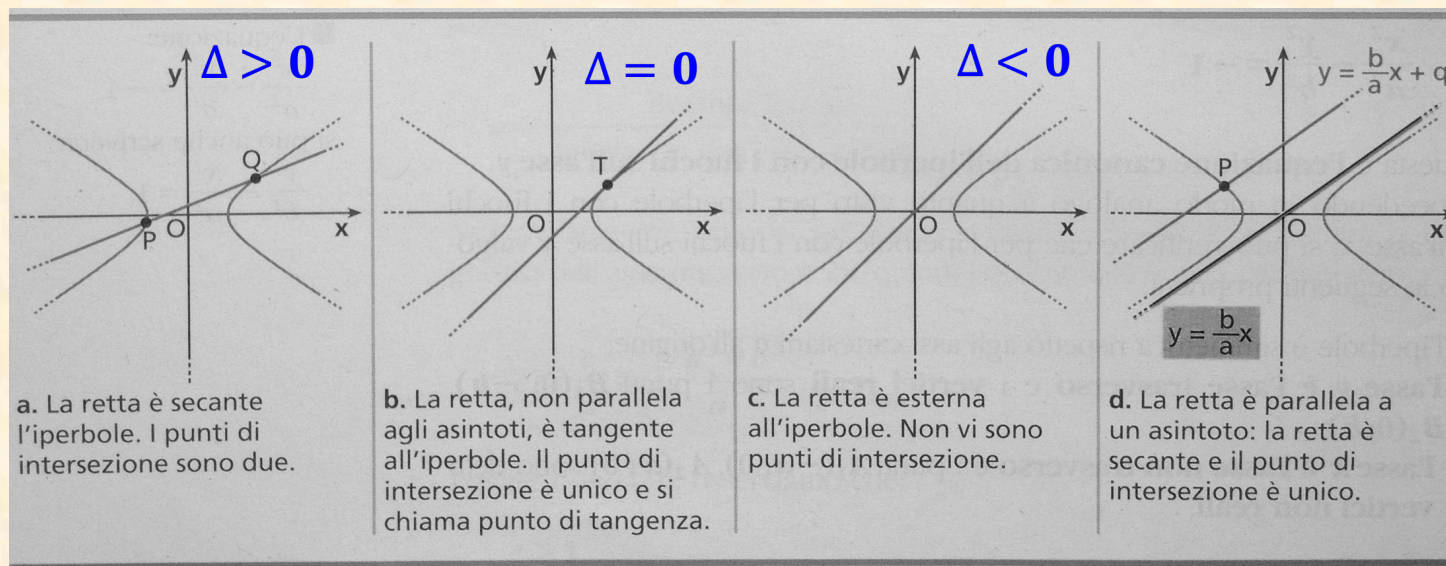
La retta interseca l'ellisse in due punti: $A=(4;1)$ e $B=(0;3)$



6. POSIZIONE RETTA RISPETTO ALL'IPERBOLE

Per studiare la posizione di una retta rispetto all'iperbole, dobbiamo determinare quante sono le soluzioni del seguente sistema (metodo di sostituzione):

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx + q \end{cases}$$



ESERCIZI

Determinare gli eventuali punti di intersezione tra la retta di equazione: $2x+3y-4=0$ e l'iperbole di equazione: $x^2/9 - y^2/4 = 1$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Metodo di sostituzione - Ricaviamo la x dalla seconda equazione: $x=-y+1$ e sostituiamola nella prima. L'equazione risolvente che si ottiene è:

$$y^2 + 6y + 9 = 0$$

Il discriminante dell'equazione è:

$$\Delta = 0$$

L'equazione ammette due soluzioni reali e coincidenti:

$$y_1 = y_2 = -3$$

In definitiva:

*La retta è tangente
all'iperbole nel punto
 $P=(4;-3)$*

