

Matematica

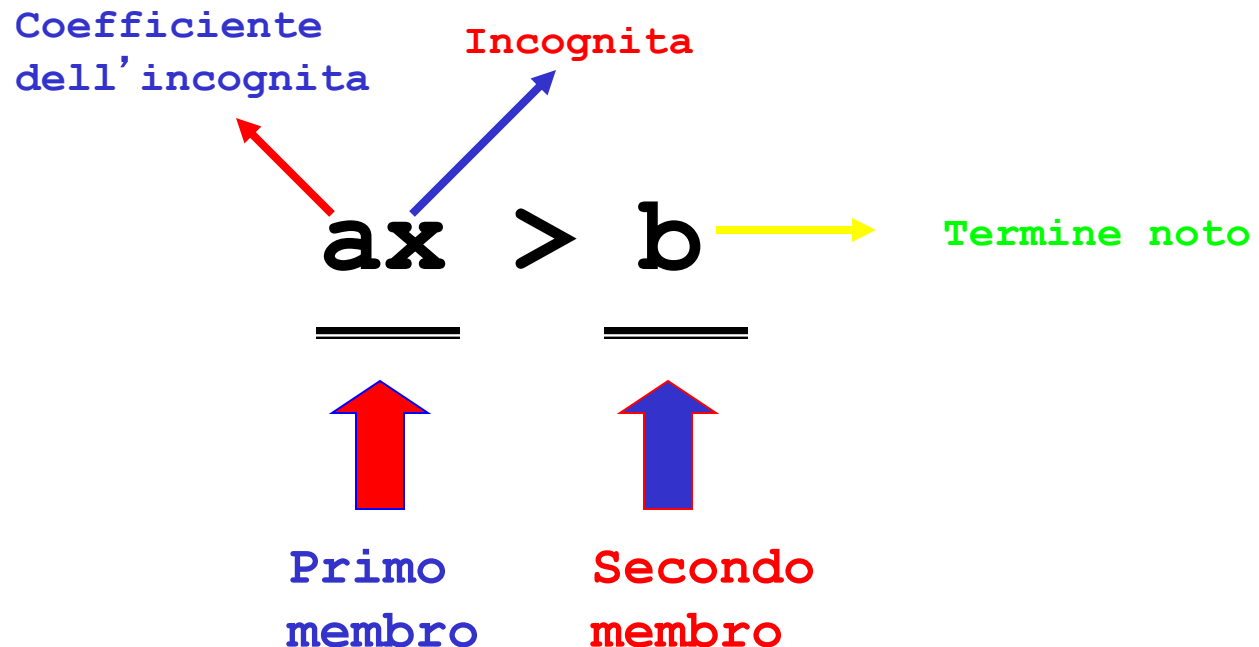
Disequazioni di 1° grado

Autore: **Prof. Pappalardo Vincenzo**
docente di **Matematica e Fisica**



1. DEFINIZIONI

Si dice disequazione di 1° grado un'espressione algebrica nella quale compare il segno di $>$ (maggiore) o $<$ (minore), tra due membri, e l'incognita ha come esponente uno.



La stessa nomenclatura vale per la disequazione

$$ax < b$$

Come le equazioni, anche le disequazioni possono essere classificate in base alle loro caratteristiche:

❑ **Disequazione algebrica:** disequazione nella quale compaiono le quattro operazioni e l'elevamento ad una potenza razionale.

❑ **Disequazione intera:** disequazione nella quale l'incognita compare solo al numeratore.

❑ **Disequazione frazionaria:** disequazione in cui l'incognita compare anche al denominatore.

❑ **Disequazione razionale:** disequazione in cui l'incognita non compare mai sotto il segno di radice.

❑ **Disequazione irrazionale:** disequazione in cui l'incognita compare anche sotto il segno di radice.

ESEMPI

$$\frac{3}{2}x - 4x > -\frac{1}{2} + 2x$$

**Disequazione algebrica,
razionale, intera**

$$\frac{x-1}{2x+4} - \frac{4}{5} < \frac{x-5}{4x+16} - 2x$$

**Disequazione algebrica,
razionale, fratta**

$$\sqrt{3x} - 4x + 1 > \sqrt{2x} - 1$$

**Disequazione algebrica,
Irrazionale, intera**

$$4x - \frac{2x+1}{x-1} + 4 > \sqrt{7x} - 3$$

**Disequazione algebrica,
irrazionale, fratta**

2. DISEQUAZIONI INTERE DI 1° GRADO

Il procedimento generale per risolvere una disequazione di 1° grado si basa su due teoremi detti **principi di equivalenza**, che hanno lo scopo di trasformare una disequazione in altre più semplici, ossia **equivalenti**, cioè che ammettono la stessa soluzione.

PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA – Aggiungendo o sottraendo una stessa quantità ad entrambi i membri della disequazione, si ottiene una disequazione equivalente a quella data (ossia la disequazione non cambia).

SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA – Moltiplicando o dividendo per una stessa quantità entrambi i membri della disequazione, si ottiene una disequazione equivalente a quella data (ossia la disequazione non cambia).

IMPORTANTE – L'applicazione di questi principi è sostanzialmente identica a quella delle equazioni di 1° grado

ESEMPIO

Risolvere la seguente equazione algebrica intera:

$$7x - 6 + 2x + 5 > 2x - 15 + 5x$$

1. Si portano tutti i termini contenente l'incognita al primo membro e tutti i termini noti al secondo membro. Nel passaggio da un membro all'altro si cambia segno (conseguenza del 1° principio di equivalenza), mentre per i termini che rimangono al loro posto i segni rimangono invariati:

$$7x + 2x - 2x - 5x > 6 - 5 - 15$$

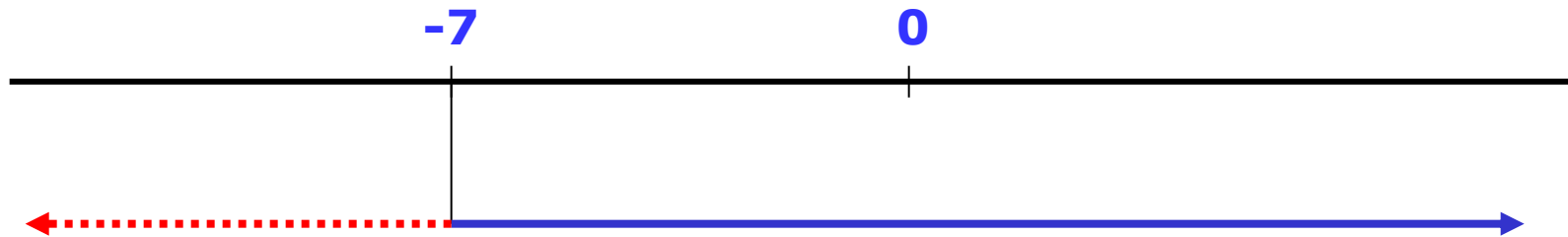
2. Si riducono, secondo le regole del calcolo algebrico, i termini simili:

$$2x > -14$$

3. Si dividono entrambi i membri dell'equazione per il coefficiente dell'incognita (conseguenza del 2° principio di equivalenza):

$$\frac{2x}{2} > -\frac{14}{2} \implies x > -7$$

Rappresentazione grafica della soluzione



Significato

- ❖ La disequazione è soddisfatta, ossia primo membro $>$ secondo membro, solo se l'incognita assume qualunque valore più grande di -7, (freccia continua blu)
- ❖ La disequazione non è soddisfatta, ossia primo membro $>$ secondo membro, per tutti i valori più piccoli di -7 (freccia tratteggiata rossa)

Importante—Nelle disequazioni, a differenza delle equazioni, la soluzione non è un singolo valore, ma tutto un intervallo di valori. Pertanto la soluzione dell'esercizio precedente va scritta anche nei seguenti modi:

$$S = (-7; +\infty)$$

Si legge: la soluzione è l'intervallo di valori compresi tra -7 e $+\infty$

La parentesi tonda significa che gli estremi -7 e $+\infty$ non appartengono all'intervallo, ossia non fanno parte della soluzione. Questo intervallo si chiama **intervallo illimitato aperto a sinistra**. Illimitato perché un estremo è l'infinito e aperto a sinistra perché l'estremo sinistro non fa parte dell'intervallo.

$$S = \{\forall x \in \mathbb{R} | x > -7\}$$

Si legge: la soluzione è qualsiasi valore di x appartenente all'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ tali che x sia maggiore di -7 .

Conclusione — Risolvere una disequazione significa trovare l'insieme S delle soluzioni, ossia l'intervallo di valori che, attribuiti all'incognita, soddisfanno la disequazione, ossia rendono vera la disuguaglianza tra primo e secondo membro.

ESEMPIO

Risolvere la seguente disequazione algebrica:

$$(5x + 1)^2 - 5(2x + 3) \geq (5x - 2)(5x + 2) + 2x$$

1. Si applicano le regole del calcolo algebrico per eliminare le parentesi e sviluppare i **prodotti notevoli**:

$$25x^2 + 1 + 10x - 10x - 15 \geq 25x^2 - 4 + 2x$$

2. Si portano tutti i termini contenente l'incognita al primo membro e tutti i termini noti al secondo membro. Nel passaggio da un membro all'altro si cambia segno (**conseguenza del 1° principio di equivalenza**), mentre per i termini che rimangono al loro posto i segni rimangono invariati:

$$25x^2 + 10x - 10x - 25x^2 - 2x \geq -1 + 15 - 4$$

3. Si riducono, secondo le regole del calcolo algebrico, i termini simili:

$$-2x \geq 10$$

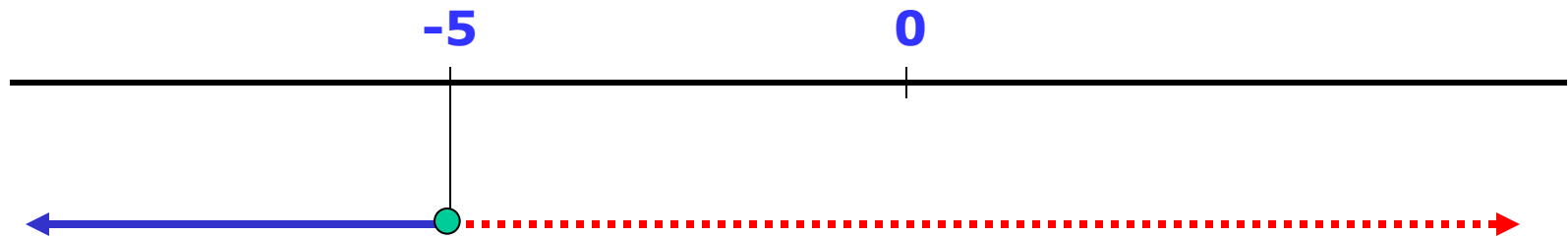
4. **Attenzione**: si cambia segno all'incognita (solo quando il segno è negativo), e ciò comporta il cambiamento del segno di disuguaglianza e del secondo membro:

$$2x \leq -10$$

5. Si dividono entrambi i membri della disequazione per il coefficiente dell'incognita (conseguenza del 2° principio di equivalenza):

$$\frac{2x}{2} \leq -\frac{10}{2} = -5 \quad \Longrightarrow \quad x \leq -5$$

Rappresentazione grafica della soluzione



Significato

- ❖ La disequazione è soddisfatta, ossia primo membro $\geq$ secondo membro, solo se l'incognita assume qualunque valore più piccolo di -5 (freccia continua blu), compreso -5, evidenziato dalla pallina.
- ❖ La disequazione non è soddisfatta, ossia primo membro $<$ secondo membro, per tutti i valori più grandi -5 (freccia tratteggiata rossa).

La soluzione va scritta anche nei seguenti modi:

Si legge: la soluzione è l'intervallo di valori compresi tra $-\infty$ e -5 .

$$S = (-\infty; -5]$$

La parentesi tonda significa che l'estremo $-\infty$ non appartiene all'intervallo, ossia non fa parte della soluzione, mentre la parentesi quadra indica che l'estremo -5 fa parte dell'intervallo di valori che rappresentano la soluzione. Questo intervallo si chiama **intervallo illimitato chiuso a destra**. Illimitato perché un estremo è l'infinito e chiuso a destra perché l'estremo destro fa parte dell'intervallo.

$$S = \{\forall x \in \mathbb{R} | x \leq -5\}$$

Si legge: la soluzione è qualsiasi valore di x appartenente all'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ tali che x sia minore o uguale a -5 .

Conclusione – Risolvere una disequazione significa trovare l'insieme S delle soluzioni, ossia l'intervallo di valori che, attribuiti all'incognita, soddisfanno la disequazione, ossia rendono vera la disuguaglianza tra primo e secondo membro.

ESEMPIO

Risolvere la seguente disequazione algebrica intera:

$$\frac{3}{2}x - 3 + \frac{5}{4}x < \frac{3}{8} - \frac{1}{4}x + 4$$

1. Si effettua il mcm di tutti i denominatori e le conseguenti operazioni:

$$\frac{12x - 24 + 10x}{8} < \frac{3 - 2x + 32}{8}$$

2. Si elimina il mcm (conseguenza del 2° principio di equivalenza):

$$\frac{12x - 24 + 10x}{8} < \frac{3 - 2x + 32}{8} \Rightarrow 12x - 24 + 10x < 3 - 2x + 32$$

3. Si portano tutti i termini contenente l'incognita al primo membro e tutti i termini noti al secondo membro. Nel passaggio da un membro all'altro si cambia segno (conseguenza del 1° principio di equivalenza), mentre per i termini che rimangono al loro posto i segni rimangono invariati:

$$12x + 10x + 2x < 24 + 3 + 32$$

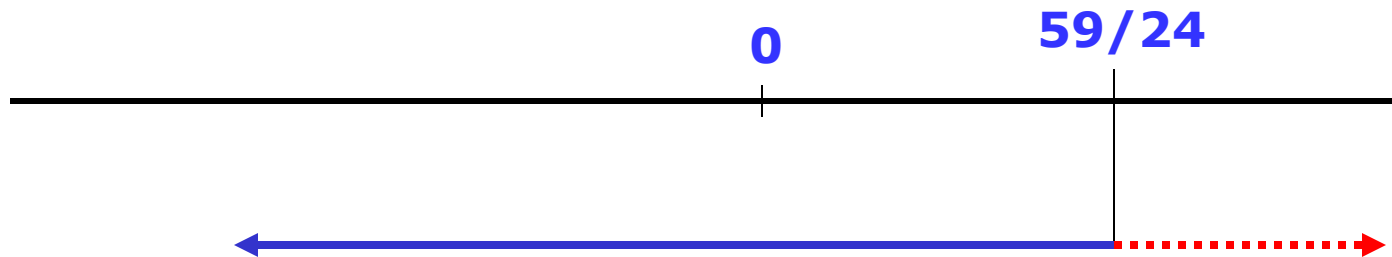
4. Si riducono, secondo le regole del calcolo algebrico, i termini simili:

$$24x < 59$$

5. Si dividono entrambi i membri dell'equazione per il coefficiente dell'incognita (conseguenza del 2° principio di equivalenza):

$$\frac{24x}{24} < \frac{59}{24} \implies x < \frac{59}{24}$$

Rappresentazione grafica della soluzione



Significato

- ❖ La disequazione è soddisfatta, ossia primo membro < secondo membro, solo se l'incognita assume qualunque valore più piccolo di $59/24$ (freccia continua blu).
- ❖ La disequazione non è soddisfatta, ossia primo membro < secondo membro, per tutti i valori più grandi $59/24$ (freccia tratteggiata rossa).

La soluzione va scritta anche nei seguenti modi:

$$S = \left(-\infty; \frac{59}{24} \right)$$

Si legge: la soluzione è l'intervallo di valori compresi tra $-\infty$ e $59/24$.

Le parentesi tonde indicano che gli estremi dell'intervallo non fanno parte della soluzione. Questo intervallo si chiama **intervallo illimitato aperto a destra**. Illimitato perché un estremo è l'infinito e aperto a destra perché l'estremo destro non fa parte dell'intervallo.

$$S = \left\{ \forall x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{59}{24} \right\}$$

Si legge: la soluzione è qualsiasi valore di x appartenente all'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ tali che x sia minore a $59/24$.

Conclusione – Risolvere una disequazione significa trovare l'insieme S delle soluzioni, ossia l'intervallo di valori che, attribuiti all'incognita, soddisfino la disequazione, ossia rendono vera la disuguaglianza tra primo e secondo membro.

3. DISEQUAZIONI FRATTE

In una **disequazione frazionaria** l'incognita compare anche al denominatore. Studieremo quelle disequazioni frazionarie nelle quali al numeratore ed al denominatore compaiono polinomi di 1° grado.

PROCEDURA RISOLUTIVA

ESEMPIO

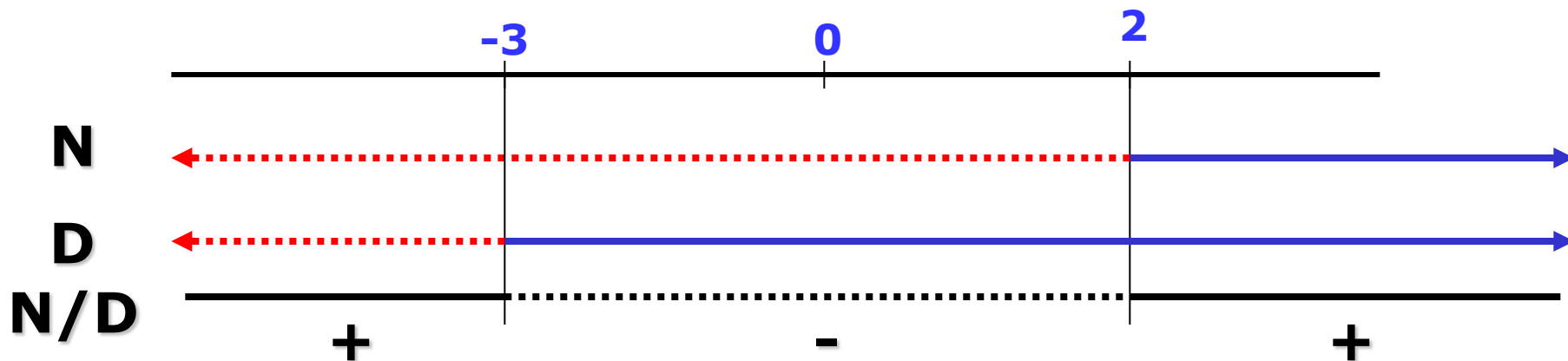
Risolvere la seguente disequazione fratta: $\frac{3x-6}{5x+15} > 0$

1. Si impone sia il numeratore che il denominatore maggiori di zero e si risolvono separatamente le due disequazioni:

$$N \Rightarrow 3x - 6 > 0 \Rightarrow 3x > 6 \Rightarrow x > \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow x > 2$$

$$D \Rightarrow 5x + 15 > 0 \Rightarrow 5x > -15 \Rightarrow x > -\frac{15}{5} = -3 \Rightarrow x > -3$$

2. Si riportano su uno stesso grafico le due soluzioni, e si analizza il segno di ogni intervallo, prendendolo positivo laddove **N e D sono concordi** (stesso segno) e negativo laddove **N e D sono discordi** (segno opposto). Per convenzione la freccia tratteggiata verrà considerata negativa e quella continua positiva:



Dall'esame del grafico discende che il rapporto tra N e D è:

- Positivo nell'intervallo $(-\infty; -3)$ e nell'intervallo $(2; +\infty)$
- ❖ Negativo nell'intervallo $(-3; 2)$

Poiché la nostra disequazione chiedeva che il rapporto tra N e D fosse positivo, allora la soluzione si ha per:

$$x < -3 \quad \text{e} \quad x > 2 \quad \text{ossia} \quad \Longrightarrow \quad S = (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$$

Dove il simbolo U indica l'unione dei due intervalli

ESEMPIO N.2

Per risolvere la seguente disequazione fratta:

$$\frac{6-3x}{4x-16} < 0$$

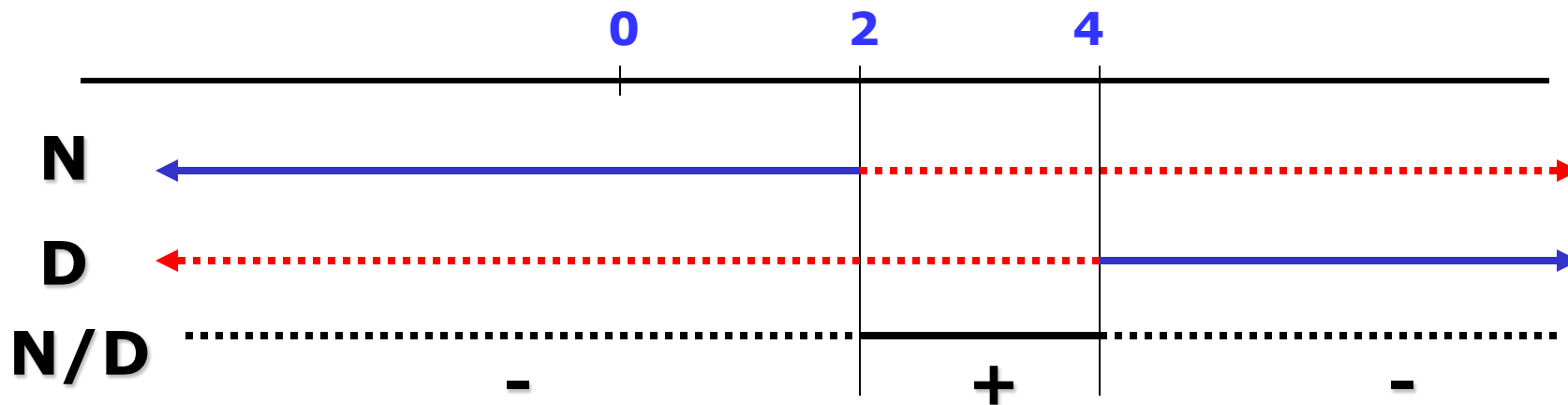
si deve procedere come segue:

1. Si impone sia il numeratore che il denominatore maggiori di zero e si risolvono separatamente le due disequazioni:

$$N \Rightarrow 6 - 3x > 0 \Rightarrow -3x > -6 \Rightarrow 3x < 6 \Rightarrow x < 2$$

$$D \Rightarrow 4x - 16 > 0 \Rightarrow 4x > 16 \Rightarrow x > 4$$

2. Si riportano su uno stesso grafico le due soluzioni, e si analizza il segno di ogni intervallo, prendendolo positivo laddove **N e D sono concordi** (stesso segno) e negativo laddove **N e D sono discordi** (segno opposto). Per convenzione la freccia tratteggiata verrà considerata negativa e quella continua positiva:



Dall' esame del grafico discende che il rapporto tra N e D è:

□ **Positivo nell'intervallo** $(2; 4)$

❖ **Negativo nell'intervallo** $(-\infty ; 2)$ **e nell'intervallo** $(4; +\infty)$

Poiché la nostra disequazione chiedeva che il rapporto tra N e D fosse negativo, allora la soluzione si ha per:

$$x < 2 \quad \mathbf{e} \quad x > 4 \quad \mathbf{ossia} \quad \Longrightarrow \quad S = (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$$

Dove il simbolo $\cup$ indica l'unione dei due intervalli

ESEMPIO

Risolvere la seguente disequazione fratta:

$$\frac{6-3x}{4x-16} - \frac{1}{2} > \frac{3}{x-4}$$

1. Si portano al primo membro tutti i termini del secondo membro cambiati di segno:

$$\frac{6-3x}{4x-16} - \frac{1}{2} - \frac{3}{x-4} > 0$$

2. Si effettua la scomposizione dei denominatori:

$$\frac{6-3x}{4 \cdot (x-4)} - \frac{1}{2} - \frac{3}{x-4} > 0$$

3. Si effettua il mcm ed i relativi calcoli algebrici:

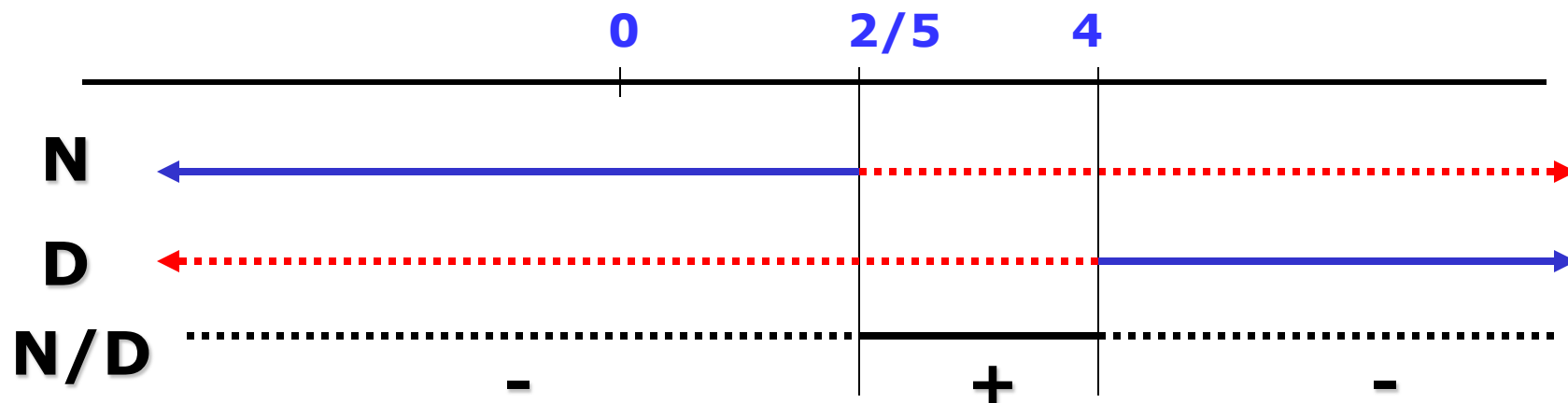
$$\frac{6-3x-2 \cdot (x-4)-12}{4 \cdot (x-4)} > 0 \Rightarrow \frac{6-3x-2x+8-12}{4 \cdot (x-4)} > 0 \Rightarrow \frac{-5x+2}{4x-16} > 0$$

4. Si impone sia il numeratore che il denominatore maggiori di zero e si risolvono separatamente le due disequazioni:

$$N \Rightarrow -5x + 2 > 0 \Rightarrow 5x - 2 < 0 \Rightarrow 5x < 2 \Rightarrow x < \frac{2}{5}$$

$$D \Rightarrow 4x - 16 > 0 \Rightarrow 4x > 16 \Rightarrow x > \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow x > 4$$

5. Si riportano su uno stesso grafico le due soluzioni, e si analizza il segno di ogni intervallo, prendendolo positivo laddove **N e D sono concordi** (stesso segno) e negativo laddove **N e D sono discordi** (segno opposto). Per convenzione la freccia tratteggiata verrà considerata negativa e quella continua positiva:



6. La soluzione che rende **$N/D > 0$** , come richiesto dall'esercizio, è:

$$\frac{2}{5} < x < 4 \quad \text{ossia} \quad \Longrightarrow \quad S = \left(\frac{2}{5}; 4 \right)$$

4. SISTEMI DI DISEQUAZIONI

Un sistema di disequazioni è formato da due o più disequazioni che possono essere intere o fratte. Affinché sia risolto il sistema, devono essere risolte *contemporaneamente* tutte le disequazioni che lo compongono.

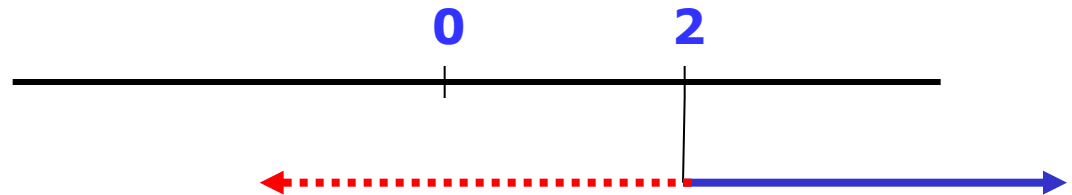
ESEMPIO

Per risolvere il seguente sistema di disequazioni:

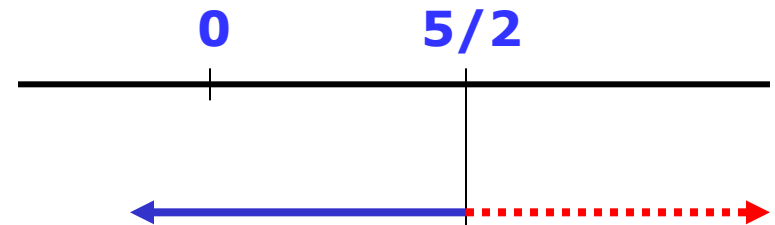
$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ 3x - 1 < 4 + x \\ 2x - 1 < x + 3 \end{cases}$$

1. Si risolvono, separatamente, le singole disequazioni che formano il sistema:

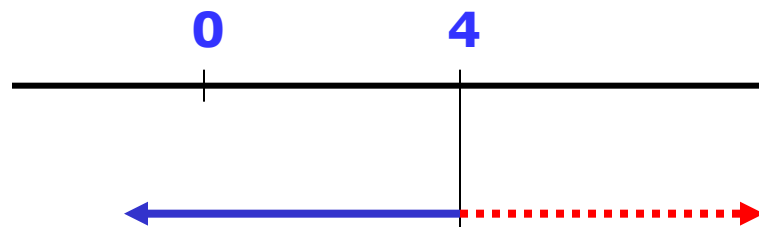
$$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$$



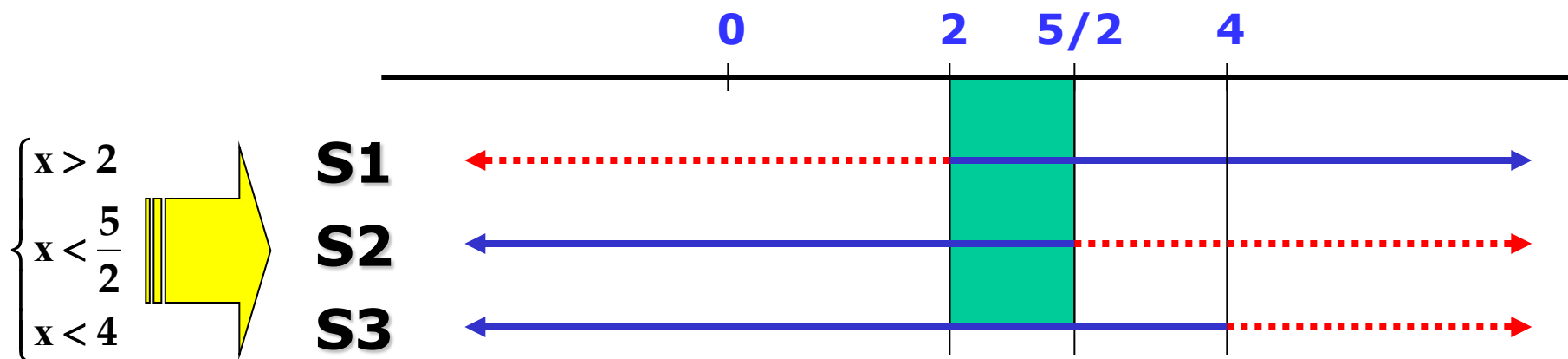
$$3x - 1 < 4 + x \Rightarrow 3x - x < 1 + 4 \Rightarrow 2x < 5 \Rightarrow x < \frac{5}{2}$$



$$2x - 1 < x + 3 \Rightarrow 2x - x < 1 + 3 \Rightarrow x < 4$$



2. Si riportano in un unico grafico le singole soluzioni:



3. La soluzione del sistema sarà data da quell'intervallo di valori che soddisfa tutte e tre le disequazioni (graficamente significa individuare la zona, quella verde, in cui tutte e tre le linee continue, cioè quelle blu, si sovrappongono):

$$S = \left(2; \frac{5}{2} \right) \quad \text{oppure} \quad S = \left\{ \forall x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < \frac{5}{2} \right\} \quad \text{o più semplicemente} \quad 2 < x < \frac{5}{2}$$

ESEMPIO

Risolvere il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \frac{6-3x}{4x-16} - \frac{1}{2} > \frac{3}{x-4} \\ 5 \cdot (x-2) < 4 \cdot (2x-3) + 2 \end{cases}$$

1. Si risolvono, separatamente, le singole disequazioni che formano il sistema:

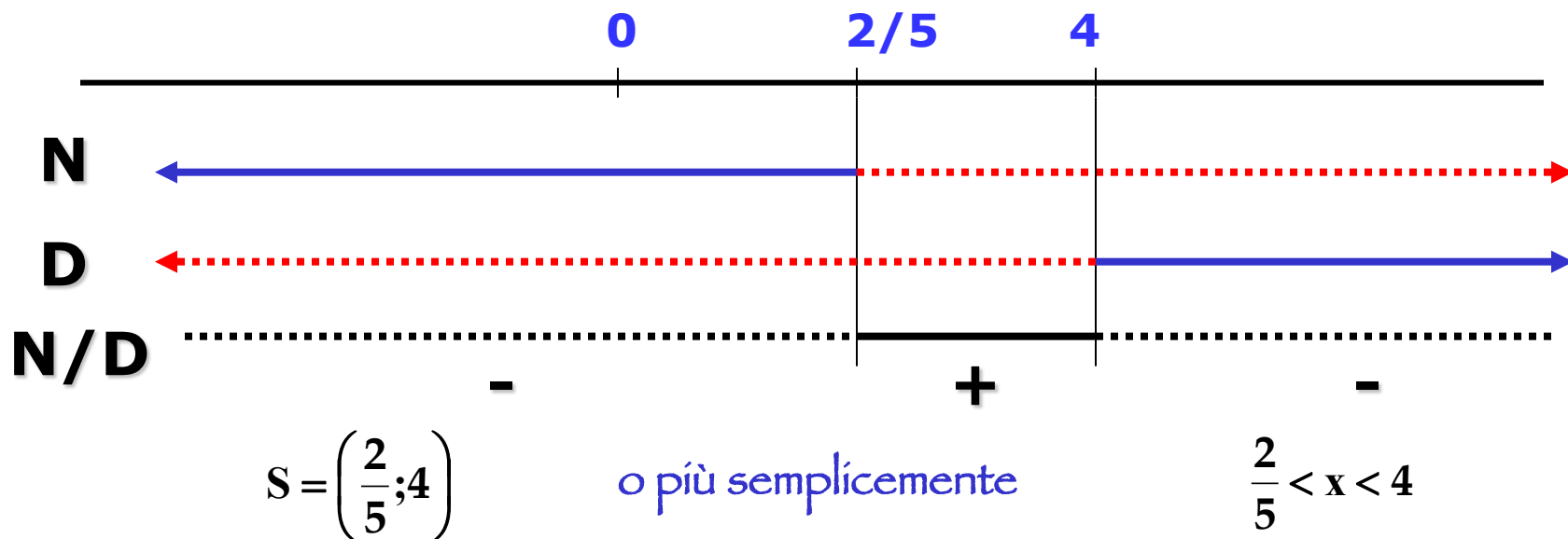
Prima equazione

$$\frac{6-3x}{4x-16} - \frac{1}{2} - \frac{3}{x-4} > 0 \Rightarrow \frac{6-3x}{4 \cdot (x-4)} - \frac{1}{2} - \frac{3}{x-4} > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{6-3x-2 \cdot (x-4)-12}{4 \cdot (x-4)} > 0 \Rightarrow \frac{6-3x-2x+8-12}{4 \cdot (x-4)} > 0 \Rightarrow \frac{-5x+2}{4x-16} > 0$$

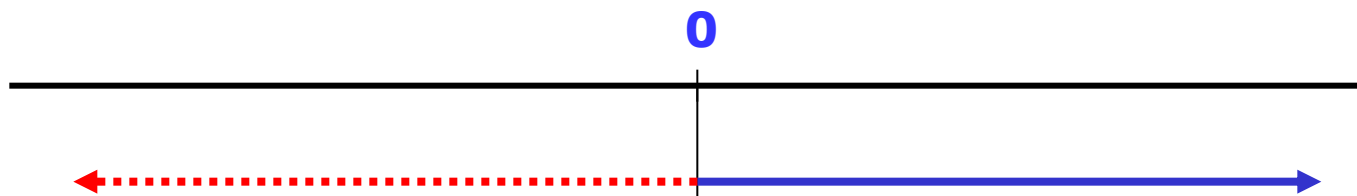
$$N \Rightarrow -5x+2 > 0 \Rightarrow 5x-2 < 0 \Rightarrow 5x < 2 \Rightarrow x < \frac{2}{5}$$

$$D \Rightarrow 4x-16 > 0 \Rightarrow 4x > 16 \Rightarrow x > \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow x > 4$$

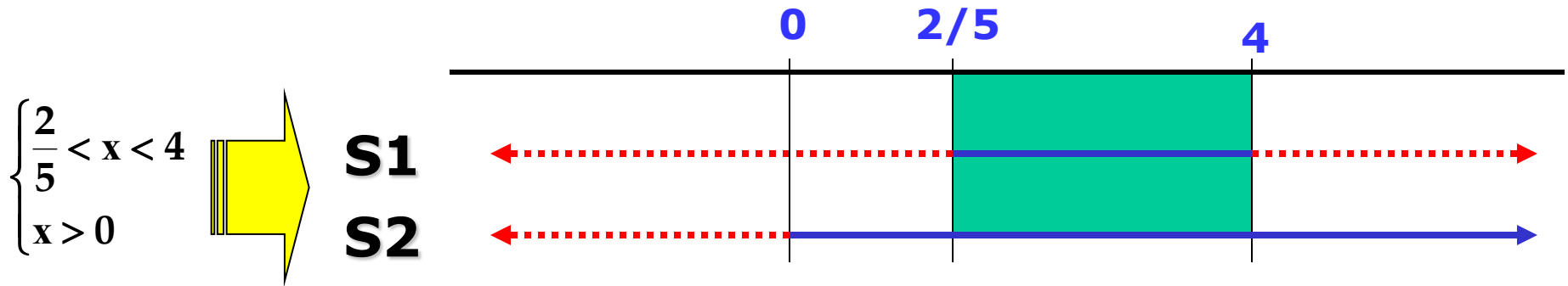


Seconda equazione

$$\begin{aligned}
 5 \cdot (x - 2) < 4 \cdot (2x - 3) + 2 &\Rightarrow 5x - 10 < 8x - 12 + 2 \Rightarrow 5x - 8x < 10 - 12 + 2 \Rightarrow \\
 -3x < 0 &\Rightarrow 3x > 0 \Rightarrow x > 0
 \end{aligned}$$



2. Si riportano in un unico grafico le singole soluzioni:



3. La soluzione del sistema sarà data da quell'intervallo di valori che soddisfano tutte e due le disequazioni (graficamente significa individuare la zona, quella verde, in cui tutte e due le linee continue, cioè quelle blu, si sovrappongono):

$$S = \left(\frac{2}{5}; 4 \right)$$

oppure

$$S = \left\{ \forall x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} < x < 4 \right\}$$

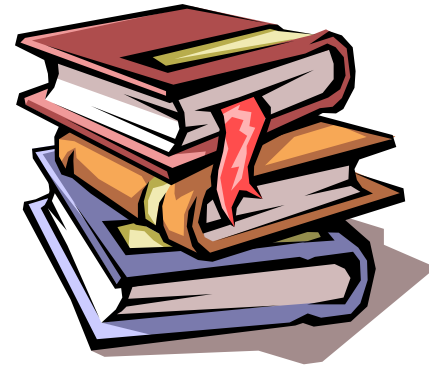
o più semplicemente

$$\frac{2}{5} < x < 4$$

Docente: Vincenzo Pappalardo
Materia: Matematica

Disequazioni 2° grado

Algebra



Un' equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

può essere vista come l' equazione risolvente il sistema

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$$

che traduce il problema di trovare le intersezioni tra una parabola e l' asse delle x .

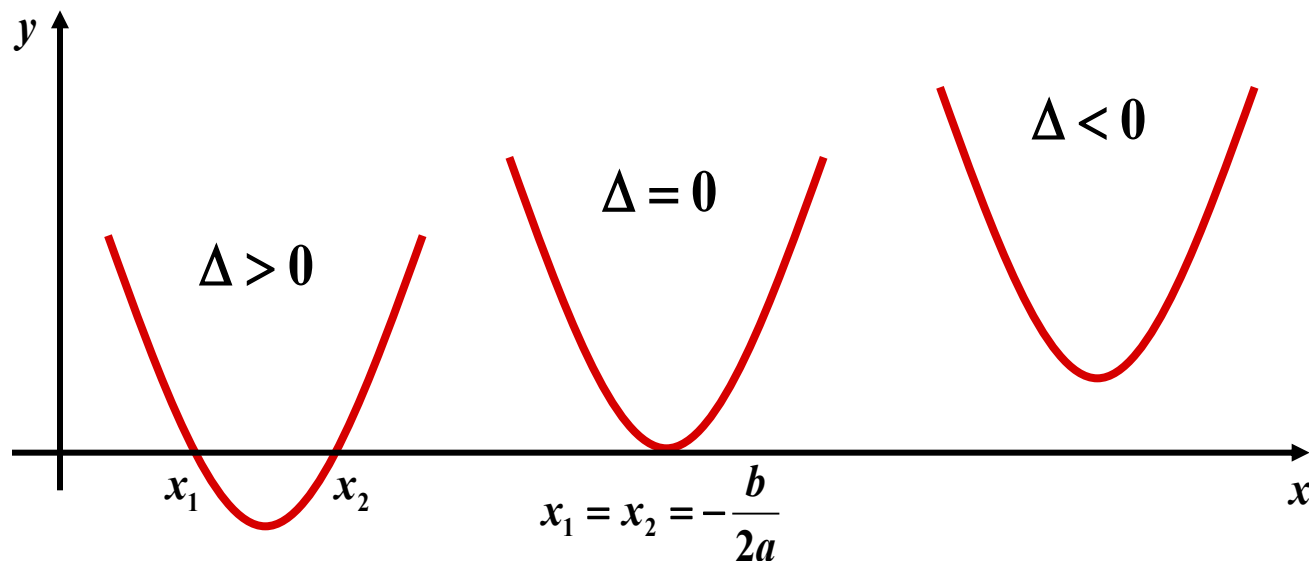
Per risolvere l' equazione si applicano le note formule

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Le soluzioni dell'equazione sono le ascisse degli eventuali punti di intersezione parabola-asse.

Graficamente



Se $\Delta > 0$ la parabola incontra l'asse in due punti

Se $\Delta = 0$ la parabola incontra l'asse in un punto

Se $\Delta < 0$ la parabola non incontra l'asse.

Nell'insieme dei numeri reali la risoluzione della disequazione di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

può essere interpretata graficamente: la disequazione data è equivalente al sistema misto

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y > 0 \end{cases}$$

Si tratta di determinare nel piano cartesiano l'intersezione tra una parabola e il semipiano formato dall'insieme dei punti che hanno ordinata positiva.

La risoluzione, invece, della disequazione di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c < 0$$

può essere interpretata graficamente con il sistema misto:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y < 0 \end{cases}$$

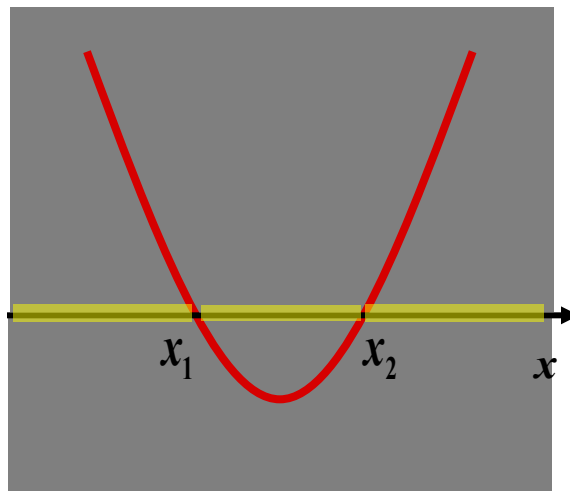
Si tratta di determinare nel piano cartesiano l'intersezione tra una parabola e il semipiano dei punti che hanno ordinata negativa.

$$a > 0$$

Se $a < 0$ basta moltiplicare entrambi i membri della disequazione per (-1) , cambiandone il verso e i segni

$$\Delta > 0$$

la parabola è
positiva
per valori esterni
alle soluzioni



la parabola è
negativa
per valori interni
alle soluzioni

$$ax^2 + bx + c > 0 \iff x < x_1 \vee x > x_2$$



$$ax^2 + bx + c < 0 \iff x_1 < x < x_2$$

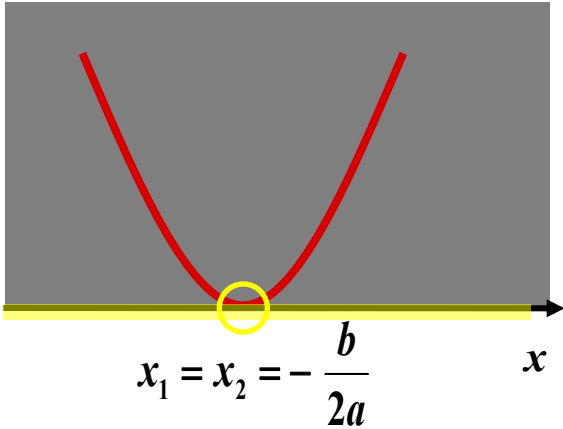


$$a > 0$$

Se $a < 0$ basta moltiplicare entrambi i membri della disequazione per (-1) , cambiandone il verso e i segni

$$\Delta = 0$$

La parabola giace tutta al di sopra dell'asse delle x ,
tranne il vertice che si trova sull'asse



la parabola non è mai negativa

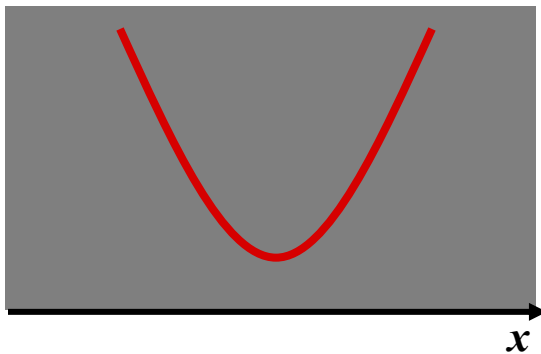
$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \longleftrightarrow \quad x \neq -\frac{b}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad \longleftrightarrow \quad \text{mai}$$

$$a > 0$$

Se $a < 0$ basta moltiplicare entrambi i membri della disequazione per (-1) , cambiandone il verso e i segni

$$\Delta < 0$$



La parabola giace
tutta al di sopra
dell'asse delle x , non
incontra mai l'asse e
non è mai negativa

$$ax^2 + bx + c > 0$$



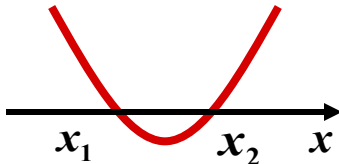
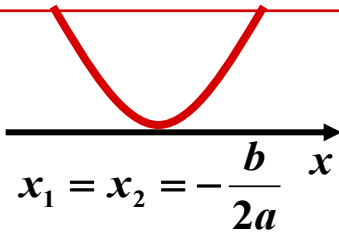
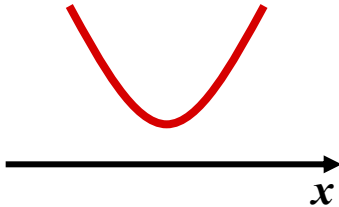
sempre

$$ax^2 + bx + c < 0$$



mai

La risoluzione delle disequazioni di secondo grado si può riassumere nella tabella

$a > 0$	parabola	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$\Delta > 0$		$x < x_1 \vee x > x_2$	$x_1 < x < x_2$
$\Delta = 0$		$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0$		$\forall x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$

Se nella disequazione da risolvere compare il segno $\geq$ o $\leq$ si dovranno considerare come soluzioni, oltre ai punti della parabola che giacciono internamente a uno dei due semipiani generati dall'asse x , anche gli eventuali punti di intersezione della parabola con l'asse x .

$a > 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
$\Delta > 0$	$x \leq x_1 \vee x \geq x_2$	$x_1 \leq x \leq x_2$
$\Delta = 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$x = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$

Risolvere la seguente disequazione: $-10x - 8x^2 - 3 > 0$

Poiché non è ordinata, la riscriviamo:

$$-8x^2 - 10x - 3 > 0.$$

Poiché il coefficiente di x^2 è $-8 < 0$, moltiplichiamo i due membri per -1 e *cambiamo il verso della disequazione*:

$$8x^2 + 10x + 3 < 0.$$

Risolviamo l'equazione associata:

$$8x^2 + 10x + 3 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = (+5)^2 - 8 \cdot 3 = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{-5 \pm 1}{8} = \begin{cases} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Applichiamo la regola: se l'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

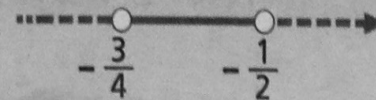
(con $a > 0$) ha $\Delta > 0$, la disequazione

$$ax^2 + bx + c < 0$$

è verificata dai valori interni all'intervallo delle radici dell'equazione.

L'intervallo delle soluzioni di $8x^2 + 10x + 3 < 0$ è:

$$-\frac{3}{4} < x < -\frac{1}{2}, \text{ ossia } \left] -\frac{3}{4}; -\frac{1}{2} \right[.$$



Risolvere le seguenti disequazioni:

a) $4x^2 - 12x + 9 \geq 0$ b) $3x^2 - 2x + 1 < 0$

a) Calcoliamo il discriminante dell'equazione associata:

$$\frac{\Delta}{4} = 6^2 - 4 \cdot 9 = 36 - 36 = 0.$$

L'equazione ha dunque una radice reale doppia:

$$x = \frac{3}{2}.$$

Possiamo riscrivere la disequazione così:

$$4 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0.$$

La disequazione è verificata per ogni valore di x :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{oppure} \quad] - \infty; + \infty[.$$

Avremmo potuto dedurre la soluzione senza fare calcoli, riconoscendo che $4x^2 - 12x + 9$ è il quadrato del binomio $2x - 3$ e ricordando che un quadrato non può essere negativo.

b) Calcoliamo il discriminante dell'equazione associata:

$$3x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - 3 = -2 < 0.$$

Poiché il coefficiente di x^2 , $a = 3$, è positivo e $\Delta < 0$, la disequazione non è mai verificata.

Scriviamo pertanto:

$$\nexists x \in \mathbb{R}.$$

Risolviamo la disequazione $3x^2 - x - 2 < 0$

L'equazione associata è $3x^2 - x - 2 = 0$, con $\Delta = 25 > 0$; le sue radici sono:

$$x_1 = -\frac{2}{3}; \quad x_2 = 1.$$

Il trinomio ha segno concorde con il coefficiente 3 di x^2 per valori esterni all'intervallo $\left[-\frac{2}{3}; 1\right]$, ha segno discorde per valori interni.

La disequazione chiede che il trinomio sia negativo, quindi le soluzioni sono:

$$-\frac{2}{3} < x < 1.$$

Risolvi la disequazione $x^2 - 4x + 4 > 0$

L'equazione associata $x^2 - 4x + 4 = 0$ ha $\Delta = 0$, con due soluzioni coincidenti:

$$x_1 = x_2 = 2.$$

Il trinomio ha segno concorde con il coefficiente 1 di x^2 per qualunque valore diverso da 2.

La disequazione chiede che il trinomio sia positivo, quindi le soluzioni sono:

$$x \neq 2.$$

Risolviamo la disequazione $2x^2 - x + 1 < 0$

L'equazione associata $2x^2 - x + 1 = 0$ ha $\Delta < 0$.

Il trinomio ha segno concorde con il coefficiente 2 di x^2 per qualsiasi valore di x .

La disequazione chiede che il trinomio sia negativo, quindi non è mai verificata.

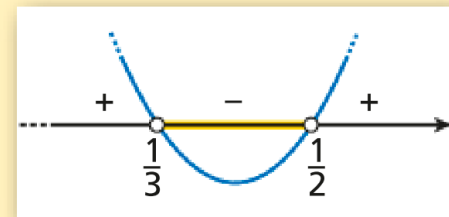
ESERCIZIO GUIDA Risolviamo la disequazione

$$5x(x - 1) + x^2 + 1 < 0.$$

Sviluppiamo i calcoli e otteniamo: $6x^2 - 5x + 1 < 0$.

Risolviamo l'equazione associata $6x^2 - 5x + 1 = 0$.

$$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm 1}{12} \rightarrow x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{2}$$



Il trinomio è negativo per valori interni all'intervallo delle radici, pertanto la disequazione è verificata per $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$.

ESERCIZIO GUIDA Risolviamo la disequazione $9 + 8x(3 + 2x) \leq 0$.

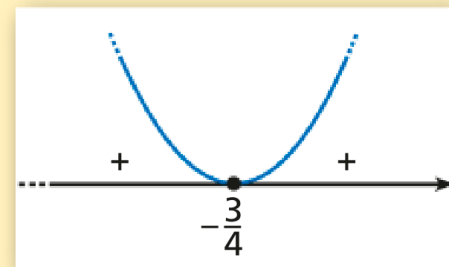
Svolgiamo i calcoli e otteniamo: $16x^2 + 24x + 9 > 0$.

Risolviamo l'equazione associata $16x^2 + 24x + 9 = 0$:

$$\frac{\Delta}{4} = 144 - 144 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4}.$$

Il trinomio è positivo per ogni valore di $x \neq -\frac{3}{4}$ e si annulla per $x = -\frac{3}{4}$.

Pertanto l'unica soluzione della disequazione è $x = -\frac{3}{4}$.



ESERCIZIO GUIDA

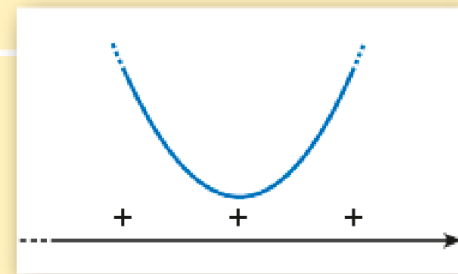
Risolviamo la disequazione $5(2x + 7) < -x^2$.

Sviluppiamo i calcoli e otteniamo: $x^2 + 10x + 35 < 0$.

Risolviamo l'equazione associata $x^2 + 10x + 35 = 0$:

$$\frac{\Delta}{4} = 25 - 35 = -10 < 0 \rightarrow \text{equazione impossibile.}$$

Il trinomio è sempre positivo, pertanto la disequazione è impossibile.



ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo la seguente disequazione nell'incognita x , discutendo al variare di $a \in \mathbb{R}$:

$$ax^2 + (a^2 - 1)x - a > 0.$$

Discussione

Se $a = 0$, la disequazione è di primo grado: $-x > 0 \rightarrow x < 0$.

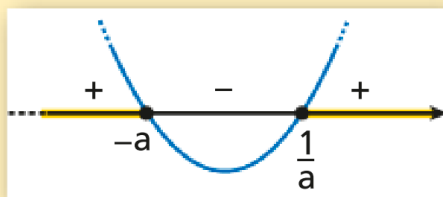
Se $a \neq 0$: $\Delta = a^4 - 2a^2 + 1 + 4a^2 = a^4 + 2a^2 + 1 = (a^2 + 1)^2 > 0$.

Soluzioni dell'equazione associata: $x = \frac{-a^2 + 1 \pm (a^2 + 1)}{2a} \rightarrow x_1 = \frac{1}{a}, x_2 = -a$.

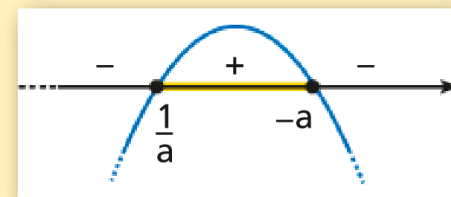
Confrontiamo le soluzioni al variare di a :

$$x_1 > x_2 \text{ se } \frac{1}{a} > -a \rightarrow$$

$$\frac{1 + a^2}{a} > 0 \rightarrow a > 0;$$



$$x_2 > x_1 \text{ se } a < 0.$$



In conclusione:

- se $a > 0$, il coefficiente di x^2 è positivo e le soluzioni sono i valori esterni all'intervallo delle radici:

$$x < -a \vee x > \frac{1}{a};$$

- se $a < 0$, il coefficiente di x^2 è negativo e le soluzioni sono i valori interni all'intervallo delle radici:

$$\frac{1}{a} < x < -a.$$

Risolvere graficamente le seguenti disequazioni:

a) $x^2 + 3x + 2 > 0$

b) $x^2 - 2x + 1 > 0$

c) $x^2 + 1 < 0$

a) Associamo la disequazione alla parabola di equazione:

$$y = x^2 + 3x + 2.$$

La parabola ha vertice in $V\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$, la concavità rivolta verso l'alto (il coefficiente a è positivo) e interseca l'asse y nel punto $P(0; 2)$.

Le ascisse dei punti di intersezione con l'asse x sono le soluzioni dell'equazione:

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

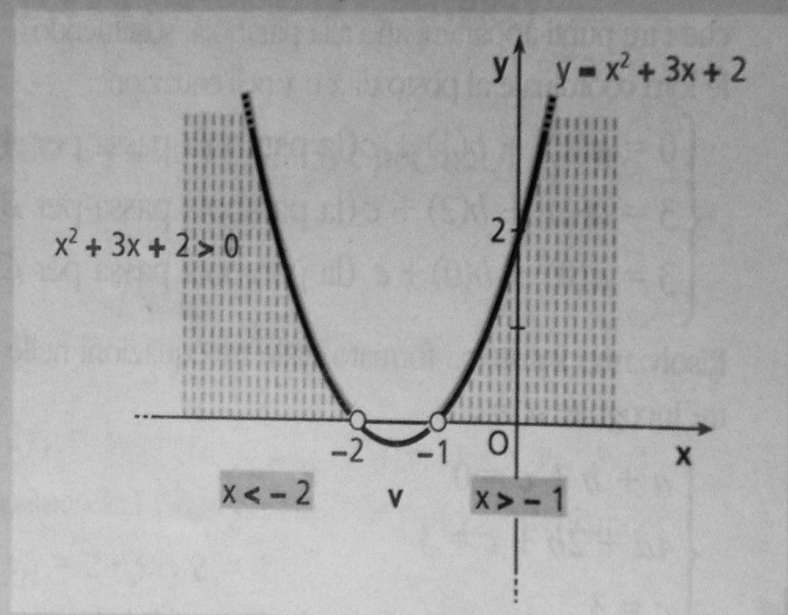
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$$

ossia $x_1 = -2$, $x_2 = -1$.

I punti della parabola che hanno ordinata positiva

sono quelli disposti «sopra l'asse x », sono cioè quelli che hanno ascissa minore di -2 o maggiore di -1 .

Le soluzioni della disequazione sono $x < -2 \vee x > -1$.



Disequazioni intere

b) Associamo la disequazione alla parabola di equazione:

$$y = x^2 - 2x + 1.$$

La parabola ha vertice in $V(1; 0)$, la concavità rivolta verso l'alto (il coefficiente a è positivo) e interseca l'asse y nel punto $P(0; 1)$.

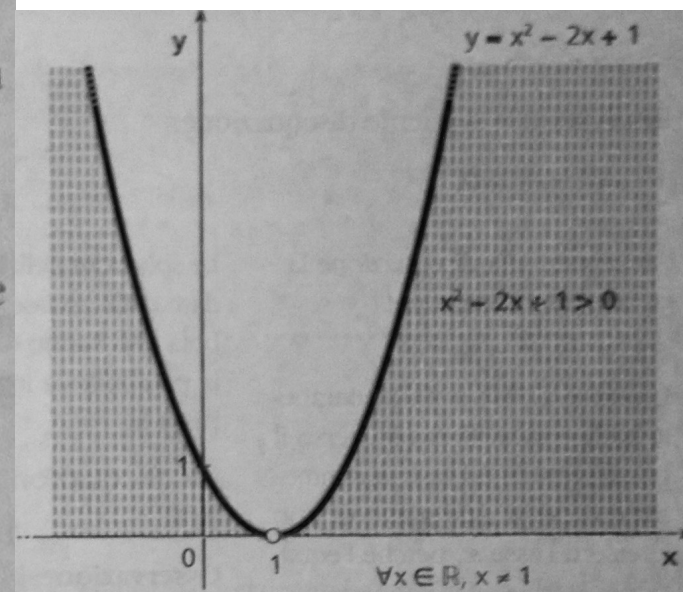
La parabola è quindi tangente all'asse x nel vertice e si trova interamente «al di sopra» di esso: per ogni valore di x diverso da 1 le ordinate dei punti della parabola sono positive. Per convincerci di questo, eseguiamo i calcoli:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x = 1.$$

La disequazione è soddisfatta $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1$.



Risolviamo la disequazione $2x^2 - x + 1 < 0$

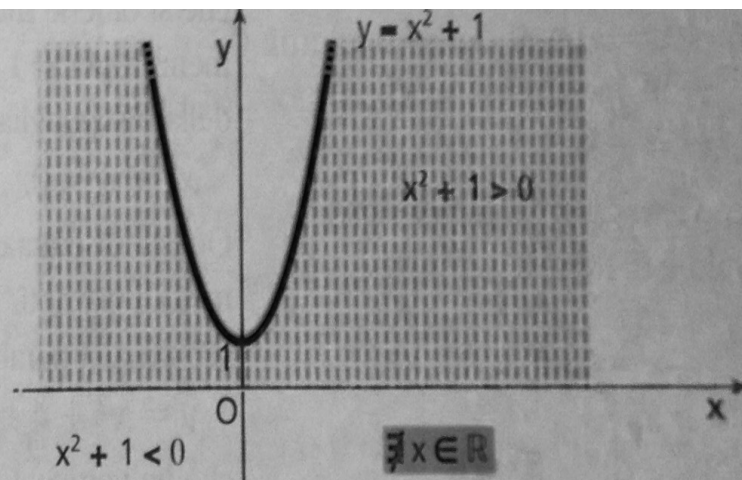
c) Associamo la disequazione alla parabola di equazione:

$$y = x^2 + 1.$$

Tale parabola ha vertice in $V(0; 1)$, che appartiene all'asse y : l'asse della parabola coincide con l'asse y . Inoltre, essa ha la concavità rivolta verso l'alto e, poiché l'ordinata del vertice è 1, non interseca l'asse x in alcun punto.

La parabola si trova interamente «al di sopra» dell'asse x , quindi tutti i suoi punti hanno ordinata positiva: non c'è alcun punto della parabola che abbia ordinata negativa, pertanto la disequazione non è mai verificata per alcun valore reale di x .

Non esistono soluzioni reali della disequazione.



Risolvere la seguente disequazione fratta:

$$\frac{9x^2 + 2}{x^2 - 5x + 6} < 0$$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

- $9x^2 + 2 > 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $x^2 - 5x + 6 > 0$.

Equazione associata:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

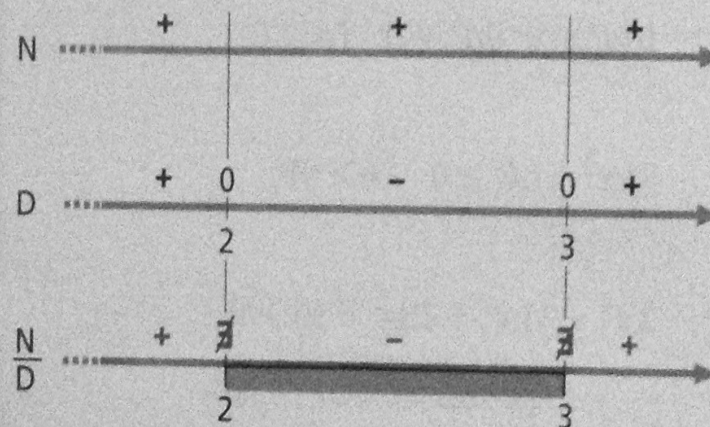
$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

La disequazione è verificata per valori esterni a 2 e 3:

$$x < 2 \vee x > 3.$$

Compiliamo il quadro dei segni:



La disequazione fratta è soddisfatta per:

$$2 < x < 3,$$

ossia nell'intervallo:

$$]2; 3[.$$

ESERCIZIO GUIDA

Risolvi la disequazione $\frac{x^2 - 10x + 24}{2x^2 - 7x - 15} > 0$.

- Studiamo il segno del numeratore:

$$x^2 - 10x + 24 > 0.$$

Equazione associata:

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 25 - 24 = 1 \rightarrow x = 5 \pm 1 \begin{cases} 6, \\ 4. \end{cases}$$

Il numeratore è positivo per valori esterni all'intervallo di estremi 4 e 6:

$$x < 4 \vee x > 6.$$

- Studiamo il segno del denominatore:

$$2x^2 - 7x - 15 > 0.$$

Equazione associata:

$$2x^2 - 7x - 15 = 0$$

$$\Delta = 49 + 120 = 169 \rightarrow x = \frac{7 \pm 13}{4} \begin{cases} 5, \\ -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Il denominatore è positivo per valori esterni all'intervallo di estremi $-\frac{3}{2}$ e 5:

$$x < -\frac{3}{2} \vee x > 5.$$

- Compiliamo il quadro dei segni.

La disequazione è verificata per:

$$x < -\frac{3}{2} \vee 4 < x < 5 \vee x > 6.$$

Osservazione. Per brevità, non abbiamo scritto la condizione di esistenza, segnando direttamente nel quadro i valori per cui la frazione non esiste.

	$-\frac{3}{2}$		4		5		6		
N	+		+	0	-		-	0	+
D	+	0	-		-	0	+		+
$\frac{N}{D}$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Risolvere la seguente disequazione
fratta:

$$\frac{5x - x^2 - 4}{x^2 + 2x} > 0$$

$$N > 0 \Rightarrow 5x - x^2 - 4 > 0 \Rightarrow \{1 < x < 4\}$$

$$D > 0 \Rightarrow x^2 + 2x > 0 \Rightarrow \{x < -2\} \cup \{x > 0\}$$

--	--	--	++	--
++	--	++	++	++

-	-2	0	1	4	-
⊖	⊕	⊖	⊕	⊖	

$$\Rightarrow S = \{-2 < x < 0\} \cup \{1 < x < 4\}$$

Risolvere la seguente disequazione
fratta:

$$\frac{x^2 + 1}{2x - x^2 - 2} > 0$$

$$N > 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

$$D > 0 \Rightarrow 2x - x^2 - 2 > 0 \Rightarrow \text{MAI VERIF.}$$

$$\begin{array}{c} + + + + + + + \\ - - - - - \\ \hline \ominus \end{array} \Rightarrow S = \{\emptyset\} \quad (\text{NON ci sono soluzioni})$$

$$\text{Risolvi la disequazione } \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 7x - 4} \geq 0$$

Il denominatore deve essere non nullo, perciò:

$$\text{C.E.: } 2x^2 - 7x - 4 \neq 0 \rightarrow x \neq -\frac{1}{2} \wedge x \neq 4.$$

Studiamo il segno del numeratore:

$$x^2 - 1 > 0 \rightarrow x < -1 \vee x > 1.$$

Studiamo il segno del denominatore.

Le radici dell'equazione associata sono $-\frac{1}{2}$ e 4, quindi:

$$2x^2 - 7x - 4 > 0 \rightarrow x < -\frac{1}{2} \vee x > 4.$$

La frazione è uguale a 0 quando lo è il suo numeratore, mentre se il denominatore è uguale a 0 la frazione non esiste. In questo caso, nello schema, utilizziamo il simbolo $\nexists$.

	-1		$-\frac{1}{2}$		1		4	
$x^2 - 1$	+	0	-		-	0	+	
$2x^2 - 7x - 4$	+		+	0	-		-	0
$\frac{x^2 - 1}{2x^2 - 7x - 4}$	+	0	-	0	+	0	-	0

La disequazione fratta è verificata per:

$$x \leq -1 \quad \vee \quad -\frac{1}{2} < x \leq 1 \quad \vee \quad x > 4.$$

La stessa procedura utilizzata per le disequazioni fratte vale anche per lo studio del segno di un prodotto

ESERCIZIO GUIDA

Risolvi la disequazione $-\frac{1}{2}x(x-2)(4-x) \geq 0$.

Studiamo il segno di ognuno dei fattori, cercando i valori di x per i quali ciascun fattore è positivo:

$$-\frac{1}{2}x > 0 \rightarrow x < 0$$

$$x - 2 > 0 \rightarrow x > 2$$

$$4 - x > 0 \rightarrow x < 4.$$

Compiliamo il quadro dei segni.

Poiché si richiede che il prodotto sia positivo o nullo, le soluzioni della disequazione sono:

$$0 \leq x \leq 2 \vee x \geq 4.$$

	0	2	4
$-\frac{1}{2}x$	+	-	-
$x-2$	-	0	+
$4-x$	+	+	0
$-\frac{1}{2}x(x-2)(4-x)$	-	0	+



Risolvere il seguente sistema di disequazioni:



$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ 2x - x^2 \geq 0 \end{cases}$$

Per risolverlo dobbiamo:

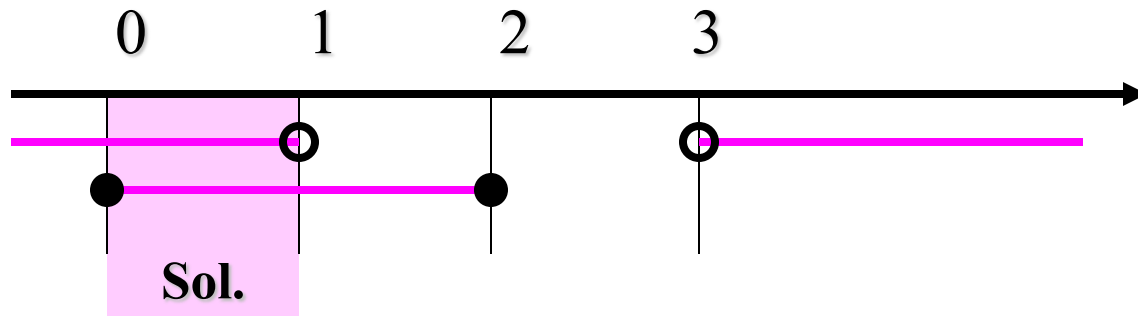
1. Risolvere ciascuna disequazione

$$x^2 - 4x + 3 > 0 \quad \text{soluzione} \quad x < 1 \vee x > 3$$

$$2x - x^2 \geq 0 \quad \text{soluzione} \quad 0 \leq x \leq 2$$

Sistemi di disequazioni

2. Riportare le soluzioni trovate sul grafico indicandole con una linea **continua**



3. Prendere come soluzione del sistema, gli intervalli di soluzioni comuni **a tutte** le disequazioni:

$$0 \leq x < 1$$

Sistemi di disequazioni

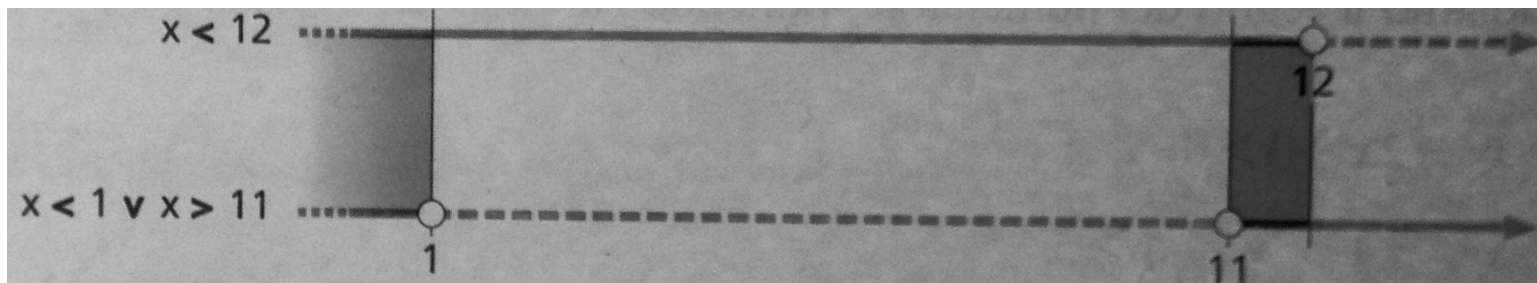
Risolvere il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 2x - 24 < 0 \\ x^2 - 12x + 11 > 0 \end{cases}$$

RisolviAMO le singole disequazioni che formano il sistema:

$$\begin{cases} x < 12 \\ x < 1 \cup x > 11 \end{cases}$$

Rappresentiamo graficamente le singole soluzioni sulla retta orientata:



La soluzione del sistema è data dalla parte colorata:

$$x < 1 \cup 11 < x < 12 \quad \text{oppure} \\]-\infty; 1[\cup]11; 12[$$

Risolvi il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - x > 0 \\ 3x - 21 \leq 0 \\ x^2 - 4 < 0 \end{cases}$$

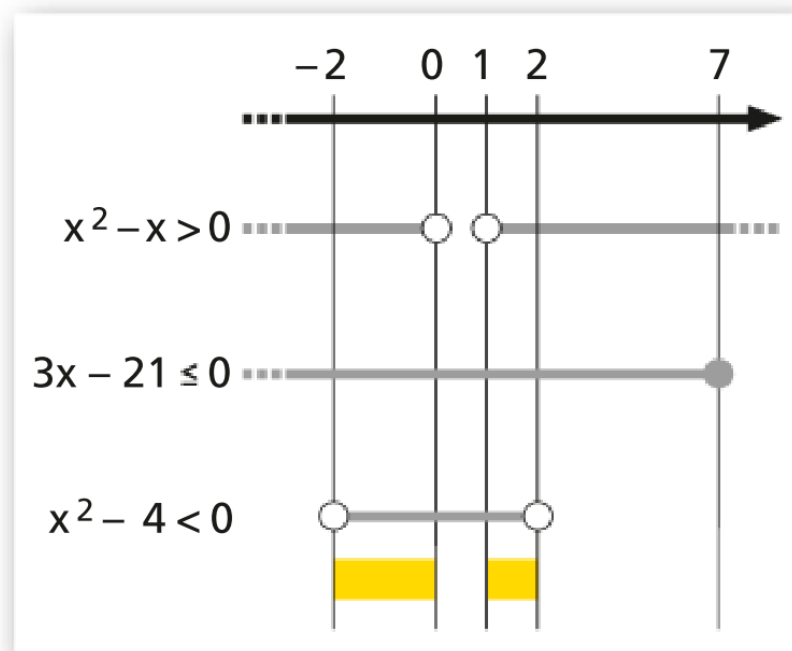
Risolviendo separatamente le disequazioni, otteniamo:

$$x^2 - x > 0 \quad \rightarrow \quad x < 0 \quad \vee \quad x > 1;$$

$$3x - 21 \leq 0 \quad \rightarrow \quad x \leq 7;$$

$$x^2 - 4 < 0 \quad \rightarrow \quad -2 < x < 2.$$

Rappresentiamo su una retta orientata gli intervalli delle soluzioni. Un pallino pieno indica che il relativo valore è una soluzione, un pallino vuoto che il valore non è una soluzione. Coloriamo la parte che rappresenta le soluzioni comuni alle tre disequazioni.



Le soluzioni del sistema sono $-2 < x < 0 \vee 1 < x < 2$.