

Matematica

Equazioni di grado superiore al 2°

Autore: **Prof. Pappalardo Vincenzo**
docente di **Matematica e Fisica**



EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO: PRINCIPALI TIPOLOGIE

Equazioni risolubili per SCOMPOSIZIONE IN FATTORI

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$x(x+2)(x-2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$$

equazione di 3° grado → 3 soluzioni: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$

$$x^4 + x^2 - 12 = 0$$

$$(x^2 - 3)(x^2 + 4) = 0$$

$$x^2 - 3 = 0 \quad x^2 = 3 \quad x = \pm\sqrt{3}$$

$$x^2 + 4 = 0 \quad x^2 = -4 \quad \text{impossibile in } \mathbb{R}; \text{ in } \mathbb{C}, x = \pm 2i$$

equazione di 4° grado → in $\mathbb{C}$, 4 soluzioni: $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = -2i$, $x_4 = 2i$

$$4x^3 - 8x^2 - 11x - 3 = 0$$

Scomponendo con Ruffini si ottiene:

$$(x-3)(2x+1)^2 = 0$$

$$x = 3 \vee x = -\frac{1}{2} \text{ (soluz. di molteplicità 2)}$$

equazione di 3° grado $\rightarrow$ tenendo conto della molteplicità, 3 soluzioni: $x_1 = 3, x_2 = x_3 = -\frac{1}{2}$

$$6x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 = 0$$

$$x^2(6x^3 - 3x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$x^2[3x^2(2x-1) - (2x-1)] = 0$$

$$x^2(2x-1)(3x^2-1) = 0$$

$$x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \text{ (molt. 2)}$$

$$2x-1=0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$3x^2-1=0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\boxed{x^2(x^2 - 1) = 1 - 2x}$$

$$x^4 - x^2 = 1 - 2x$$

$$x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x^4 - (x - 1)^2 = 0$$

$$(x^2 + x - 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x^2 - x + 1 = 0 \text{ imposs. in } \mathbb{R} (\Delta < 0); \text{ in } \mathbb{C}, x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$8x^3 - 125 = 0$$

$$8x^3 = 125$$

$$x^3 = \frac{125}{8}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2}$$

*Risolvendo per scomposizione in fattori,
si troverebbero anche le soluzioni complesse:*

$$8x^3 - 125 = 0$$

$$(2x - 5)(4x^2 + 10x + 25) = 0$$

$$x = \frac{5}{2}; \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 100}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{-75}}{4} = \\ = \frac{-5 \pm i\sqrt{75}}{4} = \frac{-5 \pm 5i\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Equazioni BINOMIE} \quad ax^n + b = 0$$

$$128x^3 + 6 = 0$$

Semplifico innanzitutto per 2 e ottengo

$$64x^3 + 3 = 0$$

$$64x^3 = -3$$

$$x^3 = -\frac{3}{64}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{3}{64}} = -\sqrt[3]{\frac{3}{64}} = -\frac{\sqrt[3]{3}}{4}$$

$$\boxed{81x^4 - 16 = 0}$$

$$81x^4 = 16$$

$$x^4 = \frac{16}{81}$$

$$x = \pm \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \pm \frac{2}{3}$$

Scomponendo in fattori:

$$81x^4 - 16 = 0$$

$$(9x^2 + 4)(9x^2 - 4) = 0$$

$$9x^2 + 4 = 0; \quad x^2 = -\frac{4}{9} \text{ imposs. in } \mathbb{R}; \text{ in } \mathbb{C}, x = \pm \frac{2}{3}i$$

$$9x^2 - 4 = 0; \quad x^2 = \frac{4}{9} \quad x = \pm \frac{2}{3}$$

$$\boxed{81x^4 + 16 = 0} \quad \text{impossibile in } \mathbb{R}$$

$$\boxed{x^5 - 32 = 0}$$

$$x^5 = 32$$

$$x = \sqrt[5]{32} = 2$$

$$\boxed{x^5 + 32 = 0}$$

$$x^5 = -32$$

$$x = \sqrt[5]{-32} = -2$$

$$x^6 - 1 = 0$$

$$x^6 = 1$$

$$x = \pm \sqrt[6]{1} = \pm 1$$

$$x^6 + 1 = 0$$

$$x^6 = -1$$

impossibile in $\mathbb{R}$

$$x^7 + 5x^4 = 0$$

$$x^4 (x^3 + 5) = 0$$

$$x^4 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$x^3 + 5 = 0 \rightarrow x^3 = -5 \rightarrow x = \sqrt[3]{-5} = -\sqrt[3]{5}$$

Eq. TRINOMIE

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

e, in particolare, BIQUADRATICHE

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

$$8 \frac{x^6}{(x^3)^2} - 7x^3 - 1 = 0$$

$$x^3 = t$$

$$8t^2 - 7t - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{16} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{16} = \frac{7 \pm 9}{16} = \left\langle \begin{array}{l} -\frac{1}{8} \\ 1 \end{array} \right.$$

$$t = -\frac{1}{8} \vee t = 1, \text{ da cui:}$$

$$x^3 = -\frac{1}{8} \rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

$$x^3 = 1 \rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$\boxed{4x^4 - 11x^2 - 3 = 0} \quad \text{EQUAZIONE BIQUADRATICA (cioè, trinomia con } n = 2\text{)}$$

$$(x^2)_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{8} = \frac{11 \pm \sqrt{169}}{8} = \frac{11 \pm 13}{8} = \left\langle \begin{array}{l} -\frac{1}{4} \\ 3 \end{array} \right.$$

$$x^2 = -\frac{1}{4} \text{ impossibile in } \mathbb{R}$$

$$x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$\boxed{x^4 - 11x^2 + 18 = 0}$$

Come prima, oppure per scomposizione in fattori:

$$(x^2 - 9)(x^2 - 2) = 0$$

$$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9; x = \pm 3$$

$$x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = 2; x = \pm\sqrt{2}$$

Equazioni risolubili con ARTIFICI (= posizioni)

$$\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^4 + \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 = 2$$

$$\frac{x-1}{x-2} = t$$

$$t^4 + t^2 = 2; \quad t^4 + t^2 - 2 = 0; \quad (t^2)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$t^2 = -2 \text{ imposs. in } \mathbb{R}; \quad t^2 = 1 \rightarrow \boxed{t = \pm 1}$$

$$\frac{x-1}{x-2} = \boxed{-1} \rightarrow x-1 = -x+2 \quad (x \neq 2); \quad 2x = 3; \quad \boxed{x = 3/2}$$

$$\frac{x-1}{x-2} = \boxed{1} \rightarrow \cancel{x}-1 = \cancel{x}-2 \quad (x \neq 2) \text{ impossibile}$$

$$\boxed{(x^2 + 3x + 1)^3 = (x^2 + 3x + 1)^2 + x^2 + 3x}$$

Converrà aggiungere 1 ad ambo i membri,
per ottenere:

$$(x^2 + 3x + 1)^3 + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2 + x^2 + 3x + 1$$

dopodiché:

$$x^2 + 3x + 1 = z$$

$$z^3 + 1 = z^2 + z; \quad z^3 - z^2 - z + 1 = 0; \quad z^2(z-1) - (z-1) = 0;$$

$$(z-1)(z^2-1) = 0; \quad (z-1)(z+1)(z-1) = 0; \quad (z-1)^2(z+1) = 0; \quad z = 1 \vee z = -1$$

$$x^2 + 3x + 1 = 1; \quad x(x+3) = 0; \quad x = 0 \vee x = -3$$

$$x^2 + 3x + 1 = -1; \quad x^2 + 3x + 2 = 0; \quad \dots \quad x = -1 \vee x = -2$$

Le soluzioni sono, in definitiva:

$$\boxed{x = -3, x = -2, x = -1, x = 0}$$

In alternativa:

$$(x^2 + 3x + 1)^3 = (x^2 + 3x + 1)^2 + x^2 + 3x + 1 - 1$$

$$x^2 + 3x + 1 = z, \text{ ecc.}$$

$$x^6 - 5x^2 + 2 = 0$$

Laschiando così, non si riesce a scomporre; ponendo invece $x^2 = t$ si ha $t^3 - 5t + 2 = 0$ ed è possibile scomporre con Ruffini in quanto si osserva che $P(2) = 0$. Si ottiene:

$$(t - 2)(t^2 + 2t - 1) = 0$$

$$t = 2 \rightarrow x^2 = 2; \boxed{x = \pm\sqrt{2}}$$

$$t = -1 - \sqrt{2} \rightarrow x^2 = -1 - \sqrt{2} < 0 \text{ impossibile in } \mathbb{R}$$

$$t = -1 + \sqrt{2} \rightarrow x^2 = -1 + \sqrt{2}; \boxed{x = \pm\sqrt{\sqrt{2} - 1}}$$

Casi particolari

Esempio:

$$(3x - 6)(x^2 - x + 1) = x^2 - 4$$

$$3(\cancel{x - 2})(x^2 - x + 1) = (x + 2)(\cancel{x - 2})$$

$$3x^2 - 3x + 3 = x + 2$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 3}}{3} = \left\langle \begin{array}{l} \boxed{1/3} \\ \boxed{1} \end{array} \right.$$

Riepilogo soluzioni : $x = 2, x = 1/3, x = 1$

**Quando, in un'equazione,
càpita di poter semplificare per un'espressione contenente l'incognita,
la semplificazione si può effettuare, ma a patto di tener conto che
i valori dell'incognita, i quali annullano l'espressione per cui si semplifica,
sono soluzioni dell'equazione!**
(infatti, se sostituiti in essa, la trasformerebbero nell'uguaglianza vera $0 = 0$)

Matematica

Risoluzione grafica di equazioni

Autore: **Prof. Pappalardo Vincenzo**
docente di **Matematica e Fisica**



$$x^3 - 7x - 6 = 0$$

L'equazione può essere scritta come:

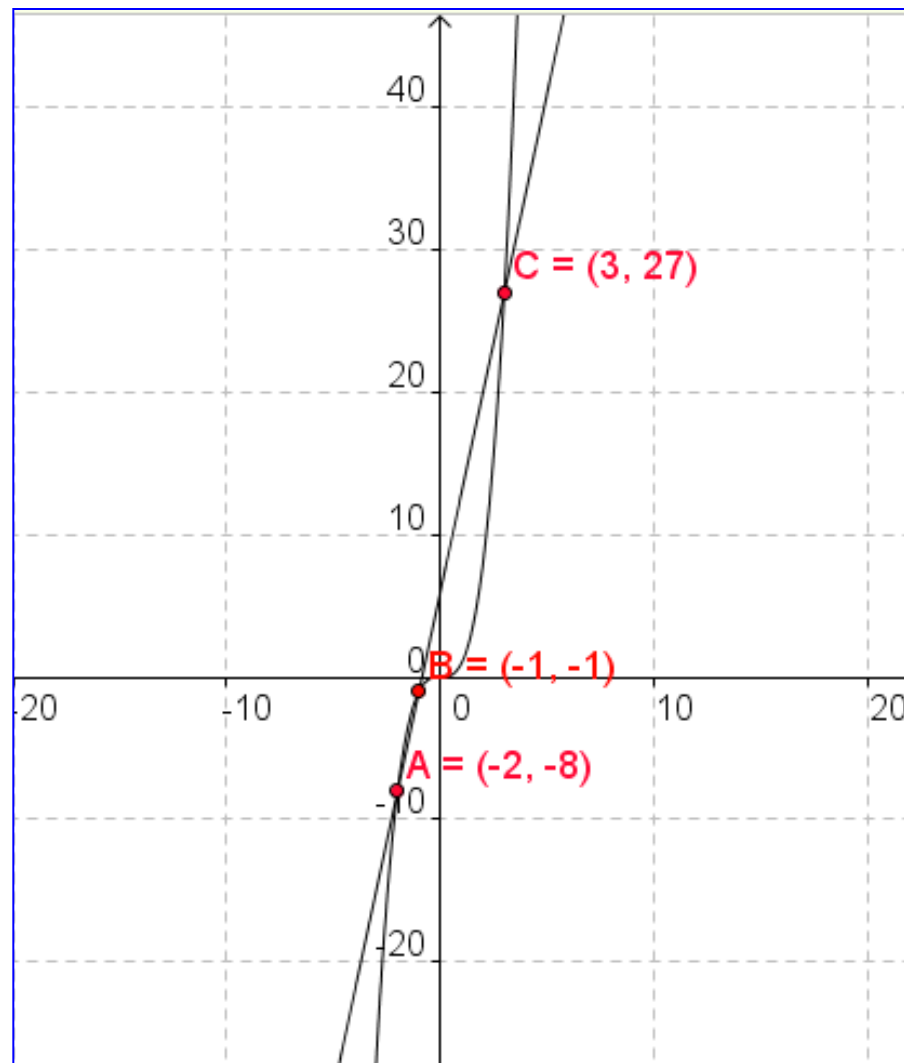
$$x^3 = 7x + 6$$

Poniamo:

$$y_1 = x^3 \quad y_2 = 7x + 6$$

e disegniamo i grafici delle due funzioni.

Le ascisse dei punti d'intersezione dei grafici, se ci sono, rappresentano le soluzioni dell'equazione.



$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

L'equazione può essere scritta come:

$$x^3 = 3x + 2$$

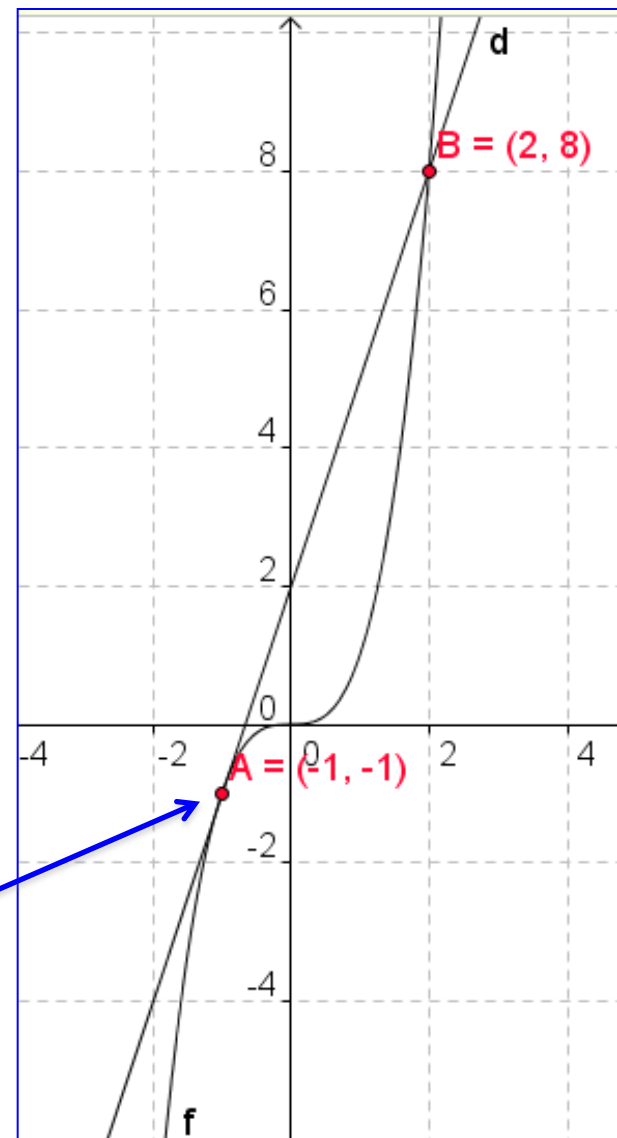
Poniamo:

$$y_1 = x^3 \quad y_2 = 3x + 2$$

e disegniamo i grafici delle due funzioni.

Le ascisse dei punti d'intersezione dei grafici, se ci sono, rappresentano le soluzioni dell'equazione.

Radice doppia perché punto di tangenza



$$x^2 - 1 - \frac{1}{x} = 0$$

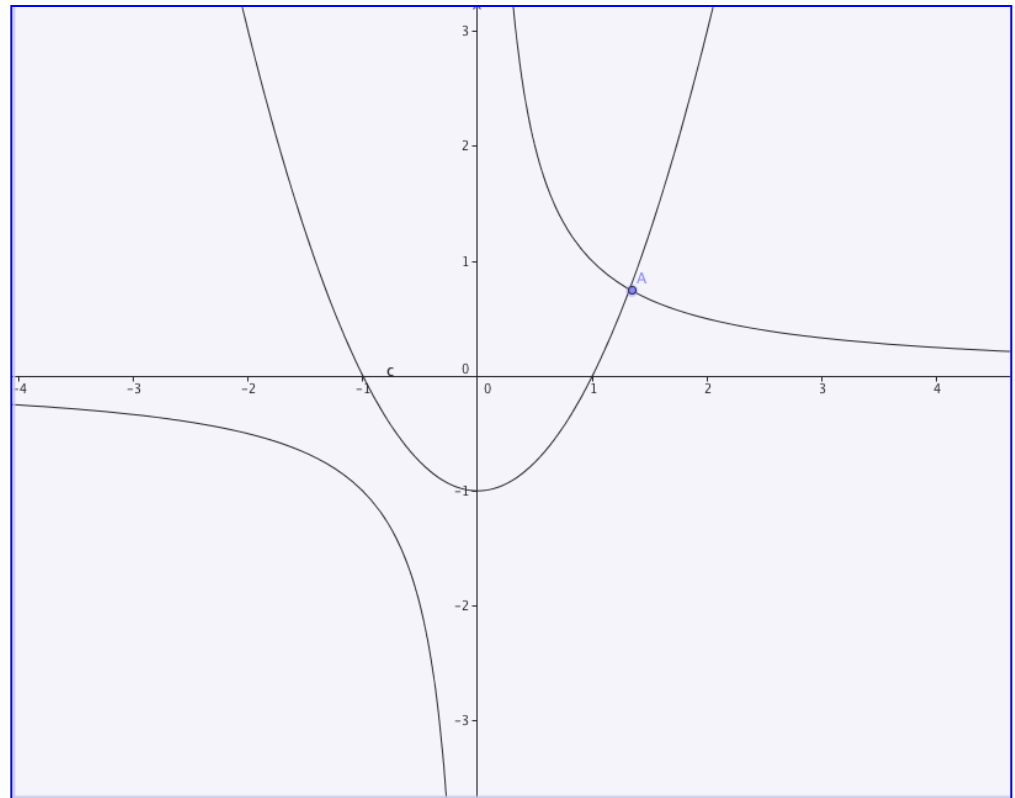
L'equazione può essere scritta come:

$$x^2 - 1 = \frac{1}{x}$$

Poniamo:

$$y_1 = x^2 - 1 \quad y_2 = \frac{1}{x}$$

e disegniamo i grafici delle due funzioni.



Le ascisse dei punti d'intersezione dei grafici, se ci sono, rappresentano le soluzioni dell'equazione.