

Docente: Vincenzo Pappalardo
Materia: Matematica

Algebra

Equazioni e Disequazioni irrazionali

Consideriamo la seguente equazione irrazionale:

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) \quad n \geq 2 \text{ intero}$$

Se n è dispari, l'equazione si risolve elevando alla potenza n -esima entrambi i membri dell'equazione:

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow A(x) = [B(x)]^n \quad \text{se } n \text{ è dispari}$$

esempio

$$\sqrt[3]{2x + x^3 + 1} = 1 + x \xleftrightarrow{n \text{ dispari}} \left(\sqrt[3]{2x + x^3 + 1} \right)^3 = (1 + x)^3$$

$$2x + x^3 + 1 = 1 + x^3 + 3x^2 + 3x \Leftrightarrow 3x^2 + x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{1}{3}$$

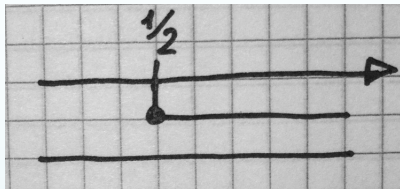
Se n è pari, l'equazione è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 & \text{condizione di esistenza del radicale} \\ B(x) \geq 0 & \text{condizione di concordanza di segno (il radicale deve essere positivo o nullo)} \\ A(x) = [B(x)]^n & \text{elevamento alla potenza } n\text{-esima di entrambi i membri dell'equazione} \end{cases}$$

esempio

$$\sqrt{2x^2 + x + 4} = 2x - 1 \xleftrightarrow{n \text{ pari}} \begin{cases} 2x^2 + x + 4 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \\ 2x^2 + x + 4 = (2x - 1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + x + 4 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$



Dovranno essere accettate solo le soluzioni che soddisfano la seguente condizione:

$$x \geq \frac{1}{2}$$

$$2x^2 + x + 4 = (2x - 1)^2 \rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} \quad x_2 = 3$$

La soluzione $x = -1/2$ non è accettabile in quanto non soddisfa la condizione del sistema.

ESERCIZIO GUIDA

Risolvi le equazioni: **a.** $\sqrt[3]{2x + x^3 + 1} = 1 + x$; **b.** $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = 2 - x$.

- a.** Poiché l'indice del radicale è dispari, la radice è sempre definita. Quindi basta elevare entrambi i membri al cubo per eliminare la radice:

$$2x + x^3 + 1 = (1 + x)^3 \rightarrow 2x + \cancel{x^3} + \cancel{1} = \cancel{1} + \cancel{x^3} + 3x^2 + 3x \rightarrow 3x^2 + x = 0 \rightarrow x(3x + 1) = 0.$$

L'equazione ha due soluzioni: $x_1 = -\frac{1}{3}$ e $x_2 = 0$.

- b.** Poiché l'indice del radicale è pari, l'equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 = (2 - x)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \vee x \geq 2 \\ x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 2 = 4 + x^2 - 4x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \vee x = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

La soluzione $x = 2$ è accettabile.

ESERCIZIO GUIDA

Risolvi l'equazione $2\sqrt{2+x} - \sqrt{x-3} = 4$.

Poniamo le condizioni di esistenza dei radicali:

$$\begin{cases} 2+x \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 3 \end{cases} \rightarrow x \geq 3.$$

Riscriviamo l'equazione nella forma $2\sqrt{2+x} = \sqrt{x-3} + 4$, per avere entrambi i membri positivi, ed eleviamo al quadrato: $4(2+x) = x-3 + 16 + 8\sqrt{x-3}$.

Isoliamo il radicale: $8\sqrt{x-3} = 3x - 5$.

Poniamo la condizione $3x - 5 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{5}{3}$, che è compresa nella condizione $x \geq 3$, per elevare di nuovo al quadrato:

$$64(x-3) = 9x^2 + 25 - 30x \rightarrow 9x^2 - 94x + 217 = 0 \rightarrow x_1 = 7, x_2 = \frac{31}{9}.$$

Entrambi i valori soddisfano la condizione $x \geq 3$, quindi sono accettabili.

Consideriamo le seguenti disequazioni irrazionali:

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x) \quad e \quad \sqrt[n]{A(x)} > B(x) \quad n \geq 2 \text{ intero}$$

Se n è dispari, le disequazioni si risolvono elevando alla potenza n -esima entrambi i membri delle disequazioni:

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) < [B(x)]^n$$

$$\sqrt[n]{A(x)} > B(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) > [B(x)]^n$$

Risolvere la seguente disequazione irrazionale:

$$\sqrt[3]{2x + x^3 + 1} > 1 + x$$

L'indice è dispari ($n=3$), per cui eleviamo alla terza potenza entrambi i membri della disequazione:

$$\sqrt[3]{2x + x^3 + 1} > 1 + x \xleftrightarrow{\text{ndispari}} \left(\sqrt[3]{2x + x^3 + 1} \right)^3 = (1 + x)^3$$

Effettuando i calcoli, otteniamo la seguente disequazione equivalente:

$$3x^2 + x < 0$$

la cui soluzione è:

$$-\frac{1}{3} < x < 0$$

Risolvere la seguente disequazione irrazionale:

$$\sqrt[3]{-1 + 7x} \leq x - 1$$

Eleviamo al cubo i due membri e svolgiamo i calcoli:

$$\sqrt[3]{-1 + 7x} \leq x - 1 \rightarrow -1 + 7x \leq (x - 1)^3 \rightarrow x^3 - 3x^2 - 4x \geq 0.$$

Scomponiamo in fattori:

$$x^3 - 3x^2 - 4x \geq 0 \rightarrow x(x^2 - 3x - 4) \geq 0 \rightarrow x(x - 4)(x + 1) \geq 0.$$

Studiamo il segno dei tre fattori e del prodotto.

$$x > 0$$

$$x - 4 > 0 \rightarrow x > 4$$

$$x + 1 > 0 \rightarrow x > -1$$

		-1		0		4	
x	-		-	0	+		+
x - 4	-		-		-	0	+
x + 1	-	0	+		+		+
$x(x - 4)(x + 1)$	-	0	+	0	-	0	+

La disequazione è verificata per:

$$-1 \leq x \leq 0 \vee x \geq 4.$$

Risolvere la seguente disequazione irrazionale:

$$\sqrt[3]{x+6} < x$$

L'indice è dispari ($n=3$), per cui eleviamo alla terza potenza entrambi i membri della disequazione:

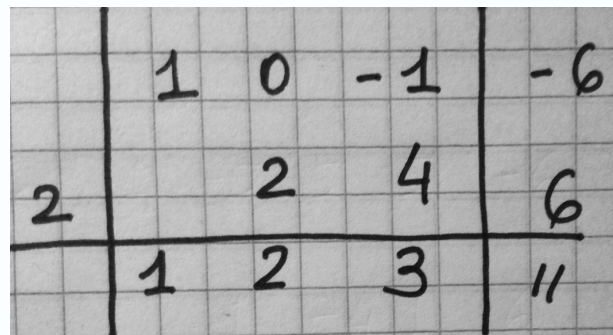
$$\sqrt[3]{x+6} < x \xleftrightarrow{n \text{ dispari}} \left(\sqrt[3]{x+6}\right)^3 < (x)^3$$

Effettuando i calcoli, otteniamo la seguente disequazione equivalente:

$$x^3 - x - 6 > 0$$

Regola di Ruffini: $x^3 - x - 6 > 0$

$$P(2) = 2^3 - 2 - 6 = 0$$



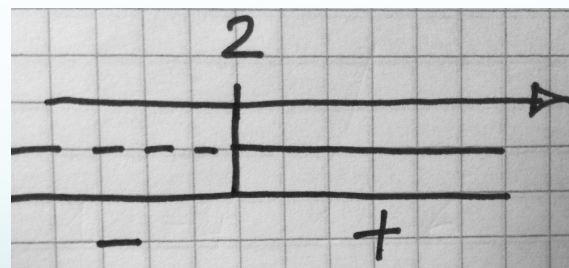
	1	0	-1	-6
2		2	4	6
	1	2	3	0

La disequazione diventa: $(x - 2)(x^2 + 2x + 3) > 0$

Risolviamola:

$$x - 2 > 0 \rightarrow x > 2$$

$$x^2 + 2x + 3 > 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$



Soluzione: $x > 2$

Consideriamo la seguente disequazione irrazionale:

$$\sqrt{A(x)} < B(x) \quad n = 2$$

La disequazione data è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 & \text{condizione di esistenza del radicale} \\ B(x) > 0 & \text{condizione affinché il radicale sia positivo o nullo} \\ A(x) < [B(x)]^2 & \text{in base al principio riportato in basso} \end{cases}$$

principio: se a e b sono due numeri reali positivi o nulli, la relazione di disuguaglianza che c'è fra i due numeri è la stessa che c'è fra i loro quadrati:

$$\forall a, b \geq 0 \Rightarrow a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo la disequazione $\sqrt{4x^2 + 5x - 6} < 4x - 3$.

La disequazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 4x^2 + 5x - 6 \geq 0 \\ 4x - 3 > 0 \\ 4x^2 + 5x - 6 < (4x - 3)^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{A(x)} < B(x) \rightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < B^2(x) \end{cases}$$

Risolviamo le disequazioni separatamente.

- Prima disequazione.

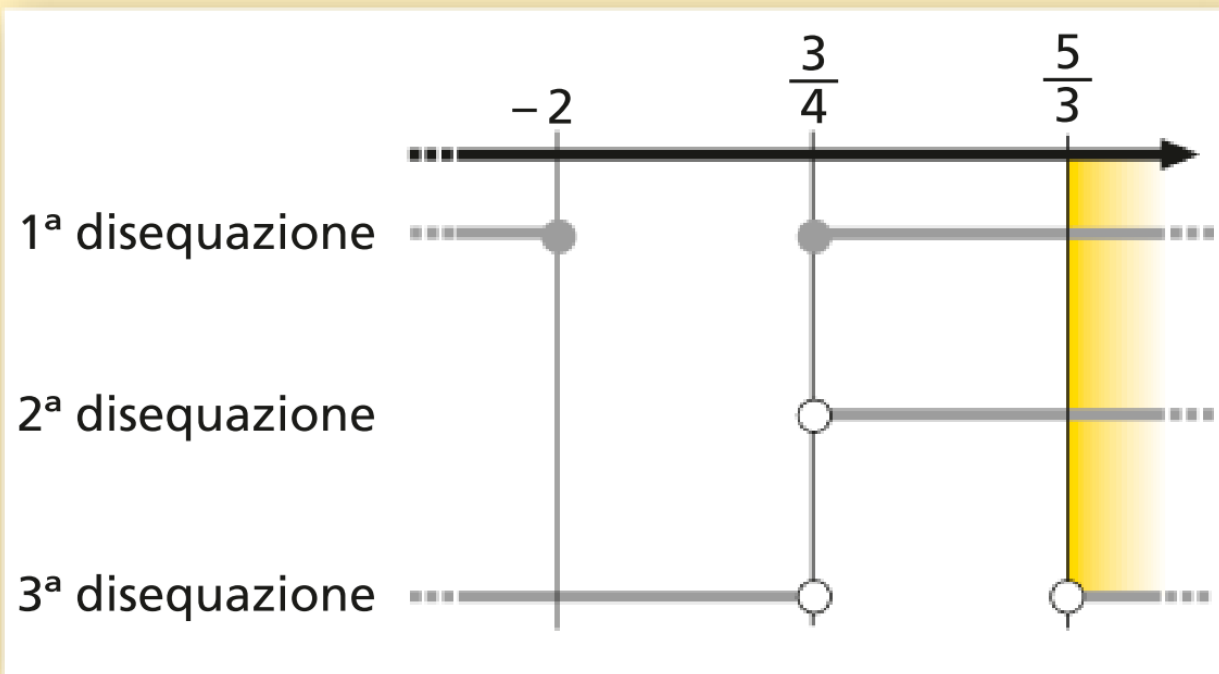
Equazione associata: $4x^2 + 5x - 6 = 0 \rightarrow \Delta = 121 \rightarrow x_1 = -2 \text{ e } x_2 = \frac{3}{4}$.

La disequazione è verificata per $x \leq -2 \vee x \geq \frac{3}{4}$.

- Seconda disequazione: $4x - 3 > 0 \rightarrow x > \frac{3}{4}$.

- Terza disequazione: $4x^2 + 5x - 6 < (4x - 3)^2 \rightarrow 4x^2 + 5x - 6 < 16x^2 + 9 - 24x \rightarrow 12x^2 - 29x + 15 > 0$.

Compiliamo il quadro delle soluzioni.



Le soluzioni del sistema, e quindi della disequazione iniziale, sono: $x > \frac{5}{3}$

Risolvere la seguente disequazione irrazionale:

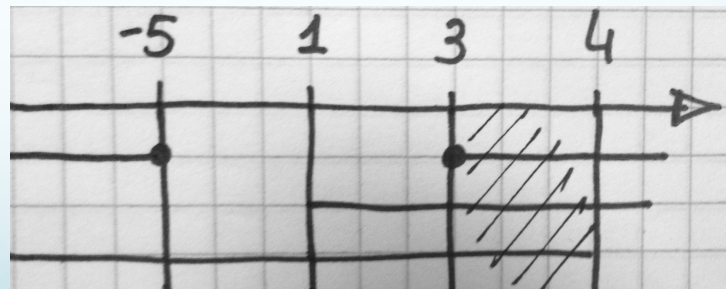
$$\sqrt{x^2 + 2x - 15} < x - 1$$

L'indice è $n=2$, per cui la disequazione è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 15 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \\ x^2 + 2x - 15 < (x - 1)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 15 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \\ 4x - 16 < 0 \end{cases}$$

RisolviAMO il sistema:

$$\begin{cases} x \leq -5 \cup x \geq 3 \\ x > 1 \\ x < 4 \end{cases}$$



Soluzione: $3 \leq x < 4$

Risolvere la seguente disequazione irrazionale:

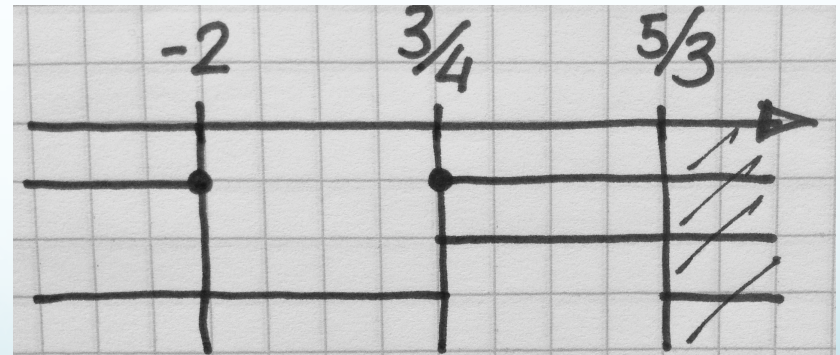
$$\sqrt{4x^2 + 5x - 6} < 4x - 3$$

L'indice è $n=2$, per cui la disequazione è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} 4x^2 + 5x - 6 \geq 0 \\ 4x - 3 > 0 \\ 4x^2 + 5x - 6 < (4x - 3)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x^2 + 5x - 6 \geq 0 \\ 4x - 3 > 0 \\ 12x^2 - 29x + 15 > 0 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x \leq -2 \cup x \geq \frac{3}{4} \\ x > \frac{3}{4} \\ x < \frac{3}{4} \cup x > \frac{5}{3} \end{cases}$$



Soluzione: $x > \frac{5}{3}$ oppure $\left[\frac{5}{3}; +\infty\right[$

Consideriamo la seguente disequazione irrazionale:

$$\sqrt{A(x)} > B(x) \quad n = 2$$

La soluzione della disequazione data è data dall'unione delle soluzioni dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$$

Il primo sistema $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \rightarrow$ *condizione esistenza radicale*
contiene una parte delle soluzioni: $\rightarrow$ *condizione affinché la disequazione sia soddisfatta*

Il secondo sistema $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases} \rightarrow$ $\left(\begin{array}{l} \text{se } B(x) \geq 0, \text{ entrambi i membri della disequazione} \\ \text{sono positivi o nulli, quindi, elevando al quadrato} \\ \text{otteniamo una disuguaglianza con lo stesso verso} \end{array} \right)$

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo la disequazione $\sqrt{x^2 - 4x - 21} > x - 3$.

Dobbiamo risolvere i seguenti sistemi e fare l'unione delle loro soluzioni.

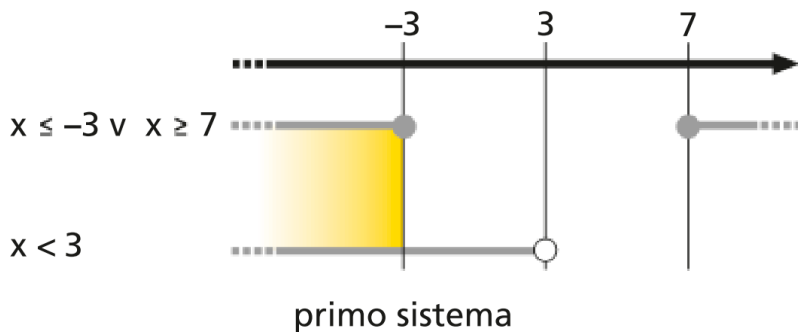
$$\sqrt{A(x)} > B(x) \rightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > B^2(x) \end{cases}$$

Primo sistema

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 21 \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}$$

La prima disequazione è soddisfatta per $x \leq -3 \vee x \geq 7$.

$$\begin{cases} x \leq -3 \vee x \geq 7 \\ x < 3 \end{cases}$$



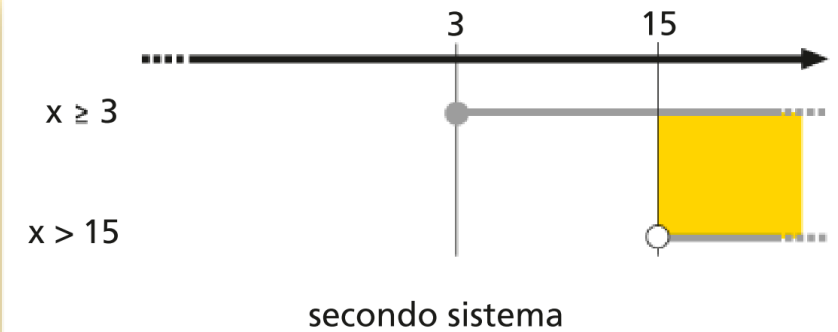
Il primo sistema è verificato per $x \leq -3$.

Secondo sistema

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x - 21 > (x - 3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ \cancel{x^2} - 4x - 21 > \cancel{x^2} + 9 - 6x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ 2x > 30 \rightarrow x > 15 \end{cases}$$



Il secondo sistema è verificato per $x > 15$.

Risolvere la seguente disequazione irrazionale:

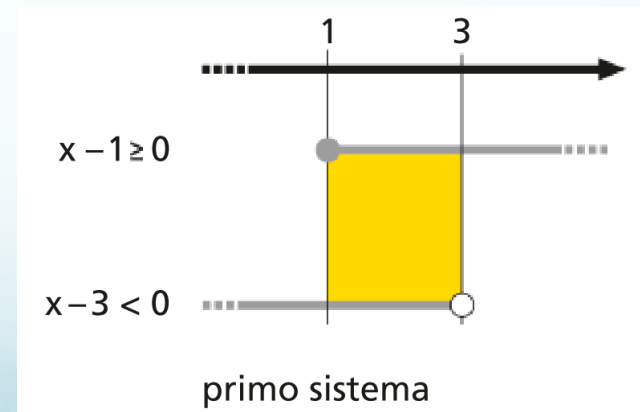
$$\sqrt{x-1} > x-3$$

La soluzione della disequazione data è data dall'unione delle soluzioni dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-1 > (x-3)^2 \end{cases}$$

Risolviamo i due sistemi:

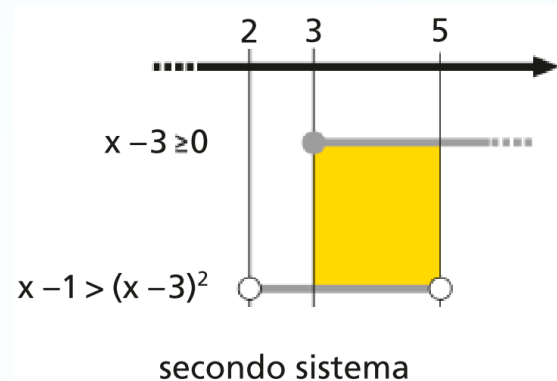
$$1^{\circ} \text{ sistema: } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 3 \end{cases}$$



1^a Soluzione:

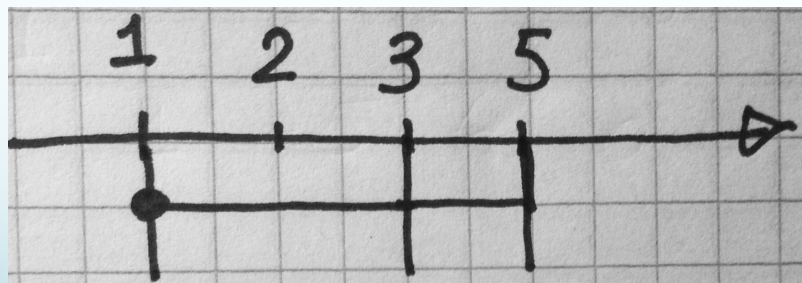
$$1 \leq x < 3$$

$$2^{\circ} \text{ sistema: } \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 7x + 10 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 2 < x < 5 \end{cases}$$



2^a Soluzione: $3 \leq x < 5$

La soluzione della disequazione è data dall'unione delle soluzioni dei singoli sistemi:



Soluzione

$$1 \leq x < 3 \cup 3 \leq x < 5 \rightarrow 1 \leq x < 5$$

oppure

$$[1; 3[\cup [3; 5[= [1; 5[$$

Risolvere la seguente disequazione irrazionale:

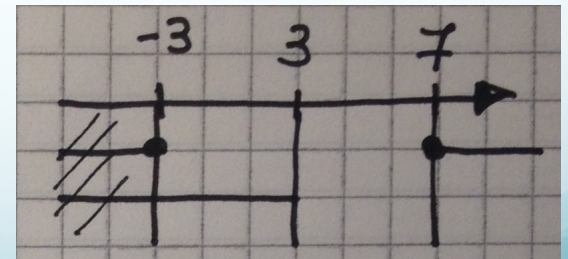
$$\sqrt{x^2 - 4x - 21} > x - 3$$

La soluzione della disequazione data è data dall'unione delle soluzioni dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 21 \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x - 21 > (x - 3)^2 \end{cases}$$

Risolviamo i due sistemi:

$$1^\circ \text{ sistema: } \begin{cases} x^2 - 4x - 21 \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq -3 \vee x \geq 7 \\ x < 3 \end{cases}$$



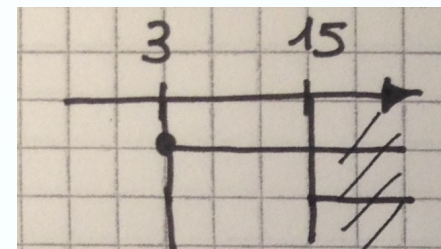
1ª Soluzione:

$$x \leq -3$$

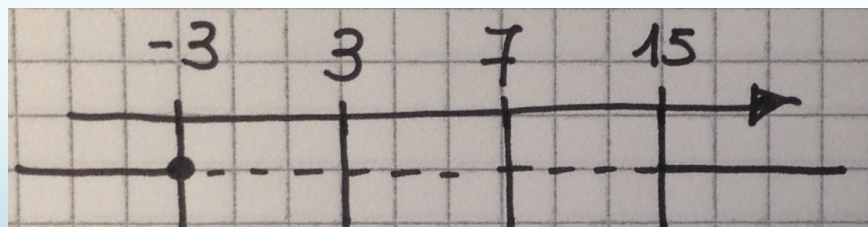
$$2^{\circ} \text{ sistema: } \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x^2 - 4x - 21 > (x-3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 2x > 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x > 15 \end{cases}$$

2^a Soluzione:

$$x > 15$$



La soluzione della disequazione è data dall'unione delle soluzioni dei singoli sistemi:



soluzione

$$x \leq -3 \cup x > 15$$

oppure

$$]-\infty; -3] \cup [15; +\infty[$$

Docente: Vincenzo Pappalardo
Materia: Matematica

Algebra

Equazioni e Disequazioni
valore assoluto

Il *valore assoluto* di un numero è uguale al numero stesso se il numero è positivo o nullo, è l'opposto del numero se questo è negativo:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

esempio

$$|+7| = 7 \quad |-7| = 7 \quad |0| = 0$$

In generale, se $f(x)$ rappresenta una funzione, il suo *valore assoluto* è definito come:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Proprietà del valore assoluto

$$1. \quad |x| = |-x| \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$2. \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$$

$$3. \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0;$$

$$4. \quad |x| = |y| \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm y \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$$

$$5. \quad |x| \leq |y| \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leq y^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$$

$$6. \quad \sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Equazioni valore assoluto

Risolvere la seguente equazione in valore assoluto:

$$|x - 5| = 3x - 1$$

Applichiamo la definizione:

$$|x - 5| = \begin{cases} x - 5 & \text{se } x - 5 \geq 0 \\ -(x - 5) & \text{se } x - 5 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 5 & \text{se } x \geq 5 \\ -x + 5 & \text{se } x < 5 \end{cases}$$

Pertanto, la soluzione dell'equazione è data dall'unione delle soluzioni delle seguenti equazioni:

$$x - 5 = 3x - 1 \quad \text{quando } x \geq 5$$

$$-x + 5 = 3x - 1 \quad \text{quando } x < 5$$

Soluzione prima equazione:

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x - 5 = 3x - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

Soluzione non è accettabile in quanto non soddisfa la condizione $x \geq 5$.

Soluzione seconda equazione :

$$\begin{cases} x < 5 \\ -x + 5 = 3x - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Soluzione accettabile in quanto soddisfa la condizione $x \geq 5$.

In definitiva:

$$\text{soluzione} \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Risolvere la seguente equazione in valore assoluto:

$$|x^2 - x| = 6$$

Applichiamo la definizione:

$$|x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x & \text{se } x^2 - x \geq 0 \\ -(x^2 - x) & \text{se } x^2 - x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - x & \text{se } x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ -(x^2 - x) & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

La soluzione dell'equazione è data dall'unione delle soluzioni delle seguenti equazioni:

$$x^2 - x = 6 \quad \text{quando } x \leq 0 \vee x \geq 1$$

$$-x^2 + x = 6 \quad \text{quando } 0 < x < 1$$

Soluzione prima equazione:

$$\begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ x^2 - x = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ x_1 = -2 \quad x_2 = 3 \end{cases}$$

Soluzione accettabile in quanto
soddisfa la condizione $x \leq 0 \vee x \geq 1$

Soluzione seconda equazione:

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ -x^2 + x = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ \nexists x \in \mathfrak{R} \end{cases}$$

Non ammette soluzione

In definitiva:

$$\text{soluzione} \rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = 3$$

ESERCIZIO GUIDA

Risolvi l'equazione $|x - 3| = 7 - 2x$.

L'insieme delle soluzioni è l'**unione** degli insiemi delle soluzioni dei seguenti sistemi.

Primo sistema

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x - 3 = 7 - 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 3x = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x = \frac{10}{3} \end{cases} \rightarrow S_1: x = \frac{10}{3}$$

Secondo sistema

$$\begin{cases} x - 3 < 0 \\ -x + 3 = 7 - 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 3 \\ x = 4 \end{cases} \rightarrow \text{impossibile} \rightarrow S_2 = \emptyset$$

La soluzione dell'equazione iniziale è $x = \frac{10}{3}$.

ESERCIZIO GUIDA

Risolvi le equazioni: **a.** $|x + 7| = -6$; **b.** $|x^2 + 3x| = 10$.

a. Il valore assoluto di un'espressione è sempre maggiore o uguale a 0, quindi l'equazione è impossibile.

b. L'equazione equivale a $x^2 + 3x = \pm 10$.

$$x^2 + 3x = +10 \rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \quad \Delta = 49 \rightarrow x_1 = -5, x_2 = 2.$$

$$x^2 + 3x = -10 \rightarrow x^2 + 3x + 10 = 0 \quad \Delta = -31 < 0 \rightarrow \text{nessuna soluzione.}$$

Le soluzioni sono $x = -5$ e $x = 2$.

Equazione con due valori assoluto

$$|A(x)| = |B(x)|$$

Soluzione

$$|A(x)| = |B(x)| \Leftrightarrow A(x) = B(x) \cup A(x) = -B(x)$$

esempio

$$|x^2 - 1| = |x + 1| \Leftrightarrow (x^2 - 1 = x + 1) \cup (x^2 - 1 = -x - 1)$$

Risolviamo la prima equazione: $x^2 - 1 = x + 1 \rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 2$

Risolviamo la seconda equazione: $x^2 - 1 = -x - 1 \rightarrow x_3 = 0 \quad x_4 = -1$

Soluzione equazione data

Unione delle soluzioni delle singole equazioni

$$S = \{-1; 0; 2\}$$

Risolvere la seguente equazione con più valori assoluti:

$$\frac{2|x|}{|x+2|} = |x-1|$$

$$\text{C.E.: } |x+2| = 0 \rightarrow x \neq -2.$$

Utilizziamo la proprietà 3, letta da destra verso sinistra:

$$\frac{2|x|}{|x+2|} = 2 \left| \frac{x}{x+2} \right| = \left| \frac{2x}{x+2} \right|.$$

Scriviamo questa espressione al primo membro dell'equazione e applichiamo la proprietà 4:

$$\left| \frac{2x}{x+2} \right| = |x-1| \rightarrow \frac{2x}{x+2} = \pm(x-1).$$

Quindi dobbiamo risolvere due equazioni e considerare l'unione delle soluzioni:

$$\frac{2x}{x+2} = x - 1 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = -1 \vee x = 2;$$

$$\frac{2x}{x+2} = -x + 1 \rightarrow x^2 + 3x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Tutti i valori ottenuti soddisfano le C.E., quindi le soluzioni dell'equazione iniziale sono:

$$x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}, x_4 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}.$$

Risolvere la seguente equazione con più valori assoluti:

$$|x| + |x + 1| - |x + 2| = x$$

Procedura risolutiva:

1. Studiare i segni degli argomenti di ciascun valore assoluto.
2. Costruire lo schema dei segni grazie al quale potremo distinguere gli intervalli in cui studiare l'equazione.
3. Determinare l'insieme soluzione parziale per ciascun caso, risolvendo l'equazione in ogni intervallo determinato nel punto 2. Utilizziamo la definizione di valore assoluto così che esso "sparisca".
4. L'insieme soluzione dell'equazione di partenza è dato dall'unione delle soluzioni parziali determinati nel punto 3.

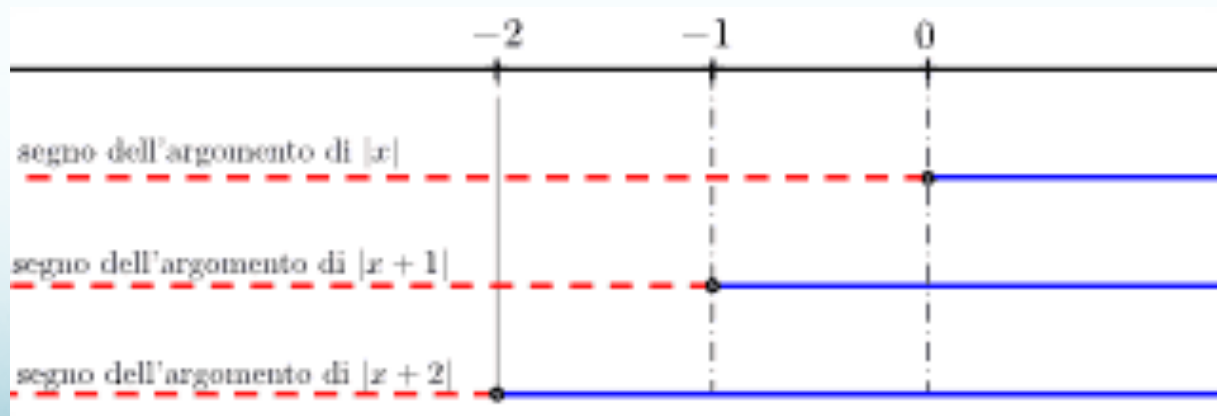
1. Studiare i segni degli argomenti di ciascun valore assoluto.

segno argomento di $|x| \rightarrow x \geq 0$

segno argomento di $|x+1| \rightarrow x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$

segno argomento di $|x+2| \rightarrow x+2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2$

2. Costruire lo schema dei segni grazie al quale potremo distinguere gli intervalli in cui studiare l'equazione.



3. Determinare l'insieme soluzione parziale per ciascun caso, risolvendo l'equazione in ogni intervallo determinato nel punto 2. Utilizziamo la definizione di valore assoluto così che esso "sparisca".

$$\left(\begin{array}{l} \text{definizione valore assoluto} \\ \text{nell'intervallo } x \leq -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} |x| = -x \\ |x+1| = -(x+1) \\ |x+2| = -(x+2) \end{array} \right)$$

L'equazione diventa:

$$-x - (x+1) - [-(x+2)] = x \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Soluzione non accettabile in quanto non soddisfa la condizione $x \leq -2$.

$$\left(\begin{array}{l} \text{definizione valore assoluto} \\ \text{nell'intervallo } -2 \leq x \leq -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} |x| = -x \\ |x+1| = -(x+1) \\ |x+2| = x+2 \end{array} \right)$$

L'equazione diventa: $-x - (x+1) - (x+2) = x \rightarrow x = -\frac{3}{4}$

Soluzione non accettabile in quanto non soddisfa la condizione $-2 \leq x \leq -1$.

$$\left(\begin{array}{l} \text{definizione valore assoluto} \\ \text{nell'intervallo } -1 \leq x \leq 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} |x| = -x \\ |x+1| = x+1 \\ |x+2| = x+2 \end{array} \right)$$

L'equazione diventa: $-x + (x+1) - (x+2) = x \rightarrow x = -\frac{1}{2}$

Soluzione accettabile in quanto soddisfa la condizione $-2 \leq x \leq -1$

$$\left(\begin{array}{l} \text{definizione valore assoluto} \\ \text{nell'intervallo } x \geq 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} |x| = x \\ |x+1| = x+1 \\ |x+2| = x+2 \end{array} \right)$$

L'equazione diventa:

$$x + (x+1) - (x+2) = x \rightarrow \text{soluzione impossibile}$$

4. L'insieme soluzione dell'equazione di partenza è dato dall'unione delle soluzioni parziali determinati nel punto 3.

L'equazione ha come unica soluzione $x = -1/2$.

ESERCIZIO GUIDA

Risolvi l'equazione $|x - 1| - 3x = |2x + 8|$.

Studiamo il segno delle espressioni all'interno dei valori assoluti.

$$x - 1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq 1$$

$$2x + 8 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq -4$$

L'equazione ha come soluzioni l'unione delle soluzioni dei tre seguenti sistemi, che risolviamo.

Primo sistema

$$\begin{cases} x < -4 \\ -(x - 1) - 3x = -(2x + 8) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x < -4 \\ x = \frac{9}{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{impossibile}$$

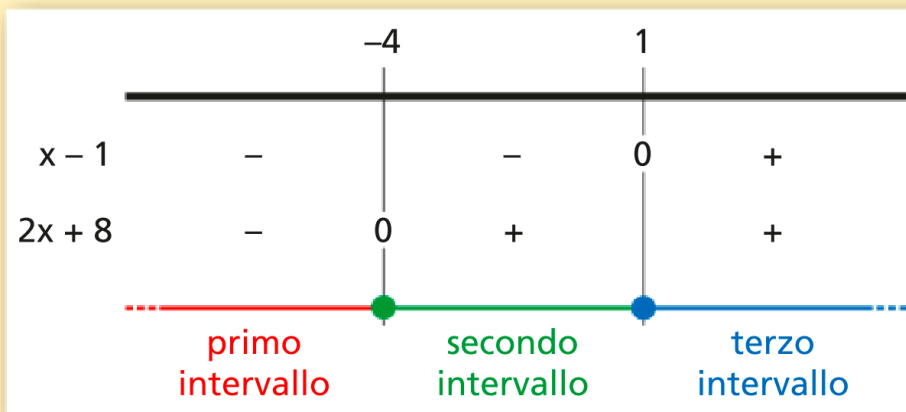
Secondo sistema

$$\begin{cases} -4 \leq x < 1 \\ -(x - 1) - 3x = 2x + 8 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -4 \leq x < 1 \\ x = -\frac{7}{6} \end{cases} \quad \rightarrow \quad x = -\frac{7}{6}$$

Terzo sistema

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x - 1 - 3x = 2x + 8 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x = -\frac{9}{4} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{impossibile}$$

La soluzione dell'equazione è $x = -\frac{7}{6}$.



Disequazioni valore assoluto

La disequazione con valore assoluto del tipo:

$$|A(x)| < k \quad k > 0$$

è equivalente a:

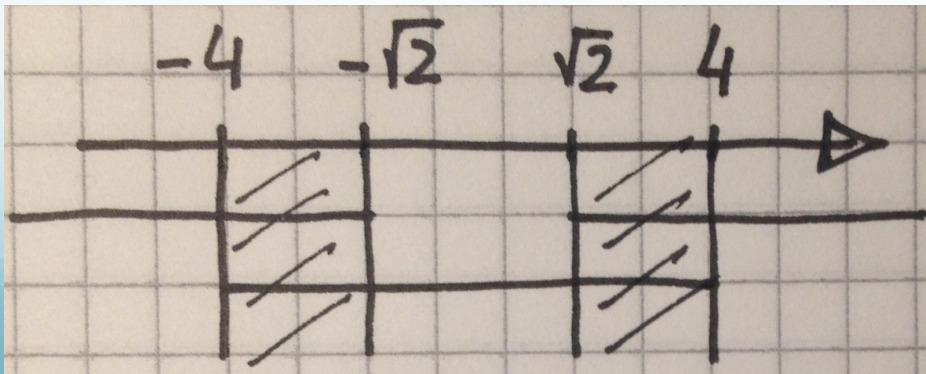
$$-k < A(x) < k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A(x) > -k \\ A(x) < k \end{cases}$$

Risolvere la seguente disequazione con valore assoluto:

$$|x^2 - 9| < 7$$

E' equivalente a:

$$-7 < x^2 - 9 < 7 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9 > -7 \\ x^2 - 9 < 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2} \\ -4 < x < 4 \end{cases}$$



soluzione

$$-4 < x < -\sqrt{2} \cup \sqrt{2} < x < 4$$

oppure

$$]-4; \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; 4[$$

Disequazione con valore assoluto (caso particolare):

$$|2x^2 + x| < -4$$

Soluzione: impossibile

Perché: per definizione il valore assoluto non può essere mai negativo.

Disequazioni del tipo $|A(x)| < k$

$$|A(x)| < k \rightarrow -k < A(x) < k \\ k > 0$$

598

ESERCIZIO GUIDA

Risolvi la disequazione $8 + |3x - 1| < 13$.

Scriviamo la disequazione nella forma $|A(x)| < k$:

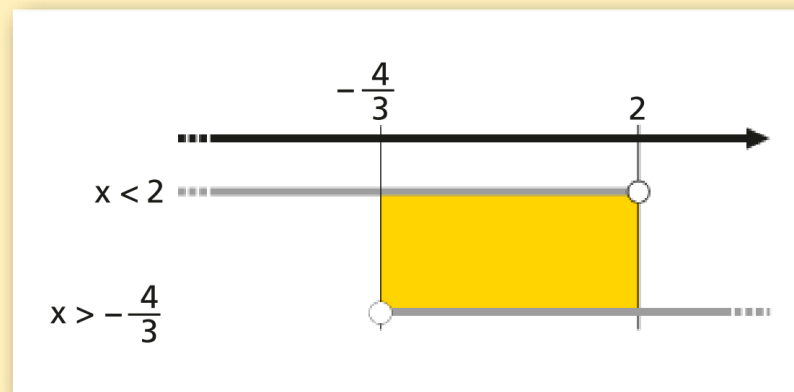
$$|3x - 1| < 13 - 8 \rightarrow |3x - 1| < 5.$$

Poiché la disequazione $|A(x)| < k$, con $k > 0$, è equivalente a $-k < A(x) < k$, la disequazione data è equivalente a

$$-5 < 3x - 1 < 5,$$

ossia al sistema:

$$\begin{cases} 3x - 1 < 5 \\ 3x - 1 > -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x < 6 \\ 3x > -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > -\frac{4}{3} \end{cases}.$$



Le soluzioni della disequazione data sono:

$$-\frac{4}{3} < x < 2.$$

La disequazione con valore assoluto del tipo:

$$|A(x)| > k \quad k > 0$$

è equivalente a:

$$A(x) < -k \cup A(x) > k$$

Risolvere la seguente disequazione con valore assoluto:

$$|x^2 - x| > 6$$

E' equivalente a: $x^2 - x < -6 \cup x^2 - x > 6$

Prima disequazione:

$$x^2 - x < -6 \rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

Seconda disequazione:

$$x^2 - x > 6 \rightarrow x < -2 \vee x > 3$$

La soluzione della disequazione è data dall'unione delle soluzioni delle singole disequazioni:

soluzione

$$x < -2 \cup x > 3 \xleftrightarrow{\text{oppure}}]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[$$

Disequazioni del tipo $|A(x)| > k$

$$|A(x)| > k \rightarrow A(x) < -k \vee A(x) > k \\ k > 0$$

609

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo la disequazione $|3x + 5| - 4 > 6$.

Scriviamo la disequazione nella forma $|A(x)| > k$:

$$|3x + 5| > 6 + 4 \rightarrow |3x + 5| > 10.$$

Poiché la disequazione $|A(x)| > k$, con $k > 0$, è equivalente ad $A(x) < -k \vee A(x) > k$, la disequazione data è equivalente a:

$$3x + 5 < -10 \vee 3x + 5 > 10$$

$$3x < -15 \vee 3x > 5$$

$$x < -5 \vee x > \frac{5}{3}.$$

Le soluzioni della disequazione data sono:

$$x < -5 \vee x > \frac{5}{3}.$$

Risolvere la seguente disequazione fratta con valore assoluto:

$$\left| \frac{2x-5}{x+1} \right| > 1$$

La disequazione data è equivalente all'unione delle seguenti disequazioni:

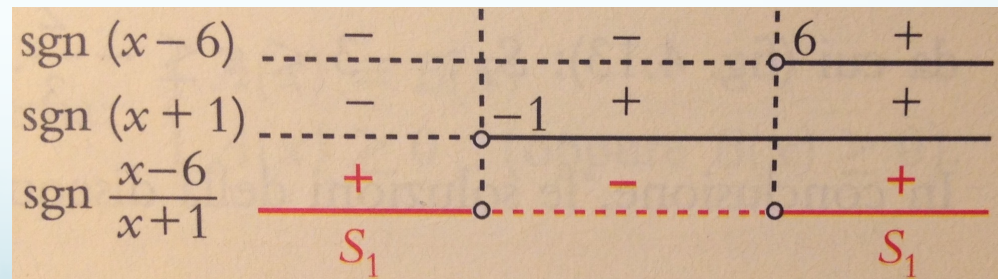
$$\frac{2x-5}{x+1} > 1 \cup \frac{2x-5}{x+1} < -1$$

- Prima disequazione:

$$\frac{2x-5}{x+1} > 1 \rightarrow \frac{x-6}{x+1} > 0$$

$$N > 0 \rightarrow x-6 > 0 \rightarrow x > 6$$

$$D > 0 \rightarrow x+1 > 0 \rightarrow x > -1$$



soluzione

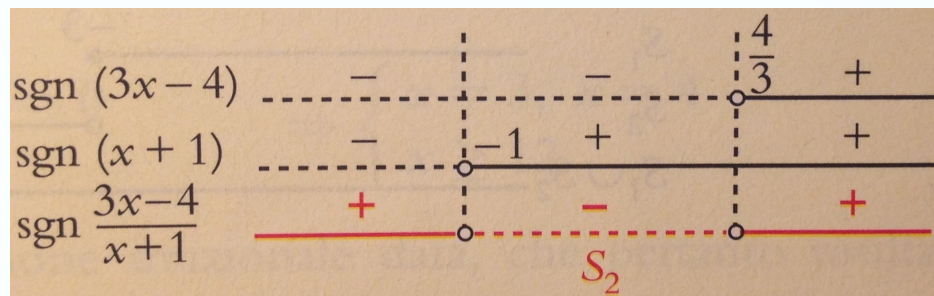
$$x < -1 \vee x > 6 \longleftrightarrow]-\infty; -1[\cup]6; +\infty[$$

- Seconda disequazione:

$$\frac{2x-5}{x+1} < -1 \rightarrow \frac{3x-4}{x+1} < 0$$

$$N > 0 \rightarrow 3x-4 > 0 \rightarrow x > \frac{4}{3}$$

$$D > 0 \rightarrow x+1 > 0 \rightarrow x > -1$$



soluzione

$$-1 < x < \frac{4}{3} \vee \xrightarrow{\text{oppure}} \left] -1; \frac{4}{3} \right[$$

L'insieme delle soluzioni trovate rappresenta la soluzione della disequazione data:

soluzione

$$S = S_1 \cup S_2 \Rightarrow x < -1 \vee -1 < x < \frac{4}{3} \vee x > 6 \xrightarrow{\text{oppure}}]-\infty; -1[\cup \left] -1; \frac{4}{3} \right[\cup]6; +\infty[$$

Disequazione con valore assoluto (caso particolare):

$$|2x^2 + x| > -4$$

$$\begin{array}{c} \text{soluzione} \\ \forall x \in \mathfrak{R} \quad \longleftrightarrow_{\text{oppure}} \quad]-\infty; +\infty[\end{array}$$

Perché: per definizione il valore assoluto è sempre positivo

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo la disequazione $|x^2 - 4| < x^2 + 5x + 10$.

Studiamo il segno dell'espressione all'interno del valore assoluto:

$$x^2 - 4 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \leq -2 \vee x \geq 2.$$

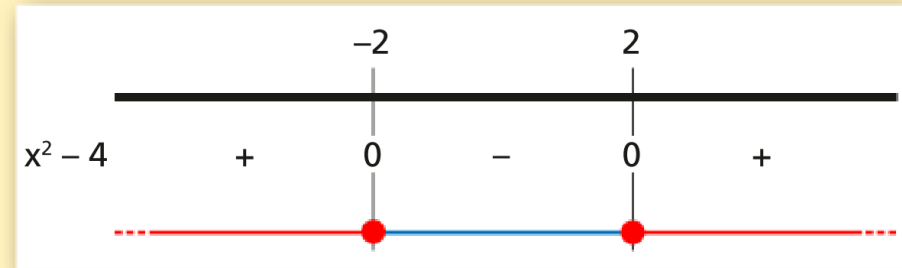
La disequazione ammette come soluzioni i valori appartenenti all'unione degli insiemi delle soluzioni dei due seguenti sistemi, che risolviamo.

Primo sistema

$$\begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ x^2 - 4 < x^2 + 5x + 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ -5x < 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ x > -\frac{14}{5} \end{cases}$$



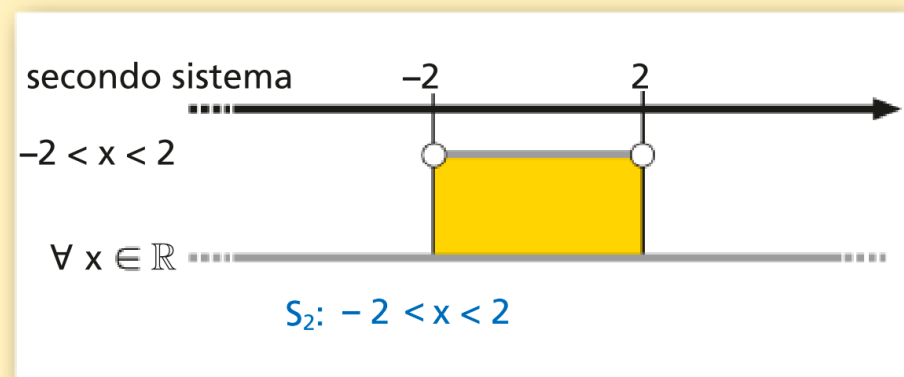
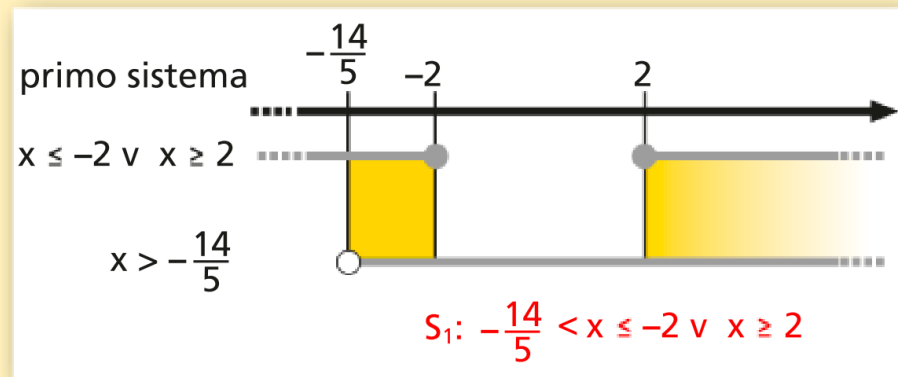
Secondo sistema

$$\begin{cases} -2 < x < 2 \\ -x^2 + 4 < x^2 + 5x + 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 < x < 2 \\ -2x^2 - 5x - 6 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 < x < 2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Compiliamo i quadri delle soluzioni dei due sistemi.



Uniamo le soluzioni.

La disequazione iniziale è soddisfatta per $x > -\frac{14}{5}$.

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo la disequazione $|2x - 1| \leq |3 - x|$.

Per la proprietà 5 del valore assoluto,

$$|a| \leq |b| \rightarrow a^2 \leq b^2$$

$$|2x - 1| \leq |3 - x| \leftrightarrow (2x - 1)^2 \leq (3 - x)^2.$$

$$\text{Risolviamo: } 4x^2 - 4x + 1 \leq 9 - 6x + x^2 \rightarrow 3x^2 + 2x - 8 \leq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq \frac{4}{3}$$

Risolvere la seguente disequazione con valore assoluto:

$$|x - 4| > -2x + 1$$

Applichiamo la definizione:

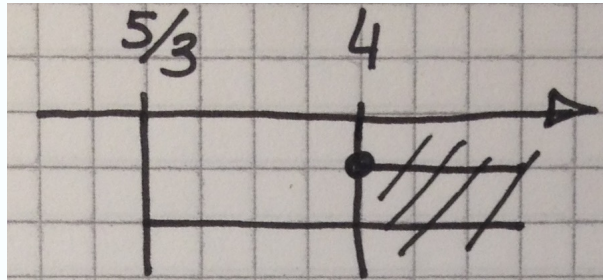
$$|x - 4| = \begin{cases} x - 4 & \text{se } x - 4 \geq 0 \\ -(x - 4) & \text{se } x - 4 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 4 & \text{se } x \geq 4 \\ -x + 4 & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

La soluzione della disequazione è data dall'unione delle soluzioni dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x - 4 > -2x + 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 4 \\ -x + 4 > -2x + 1 \end{cases}$$

Soluzione primo sistema:

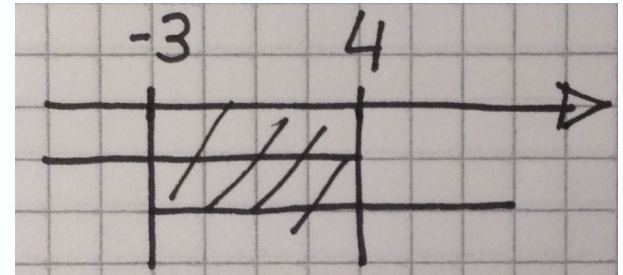
$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x > \frac{5}{3} \end{cases}$$



soluzione $\rightarrow x \geq 4$

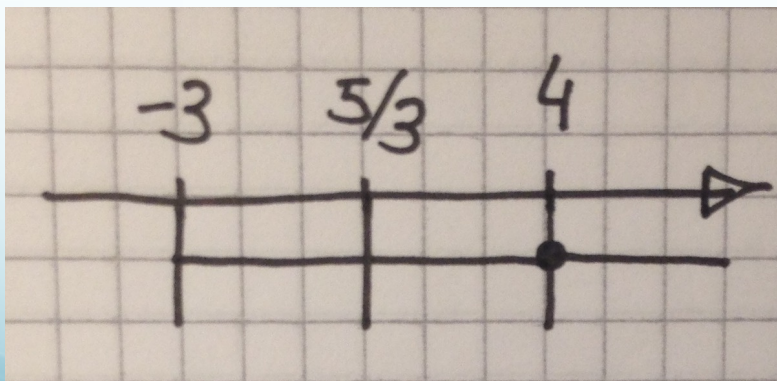
Soluzione secondo sistema:

$$\begin{cases} x < 4 \\ x > -3 \end{cases}$$



soluzione $\rightarrow -3 < x < 4$

In definitiva:



soluzione

$$-3 < x < 4 \cup x \geq 4 \Leftrightarrow x > -3$$

oppure

$$]-3; 4[\cup [4; +\infty[=]-3; +\infty[$$

Risolvere la seguente disequazione fratta con valore assoluto:

$$\frac{|x| - x}{2x^2 + 1} \leq -3$$

Riscriviamo la disequazione nel seguente modo:

$$\frac{|x| - x}{2x^2 + 1} + 3 \leq 0 \rightarrow \frac{|x| - x + 6x^2 + 3}{2x^2 + 1} \leq 0$$

Studiamo il segno della disequazione fratta:

$$N \geq 0 \rightarrow |x| - x + 6x^2 + 3 \geq 0$$

$$D > 0 \rightarrow 2x^2 + 1 > 0$$

Con l'aiuto della definizione di valore assoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

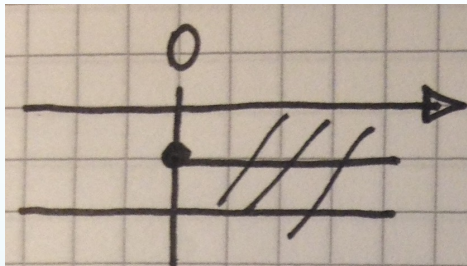
il numeratore diventa:

$$N \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x - x + 6x^2 + 3 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ -x - x + 6x^2 + 3 \geq 0 \end{cases}$$

Risolviamo:

1° sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 6x^2 + 3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

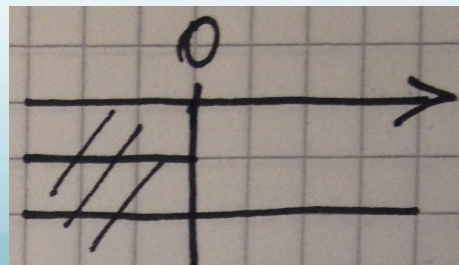


soluzione

$$x \geq 0 \xrightarrow{\text{oppure}} [0; +\infty[$$

2° sistema

$$\begin{cases} x < 0 \\ 6x^2 - 2x + 3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

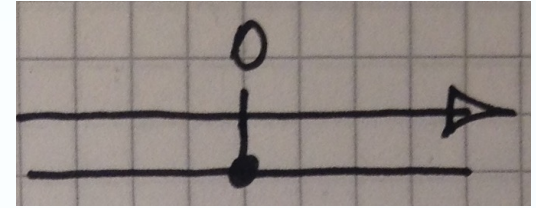


soluzione

$$x < 0 \xrightarrow{\text{oppure}}]-\infty; 0[$$

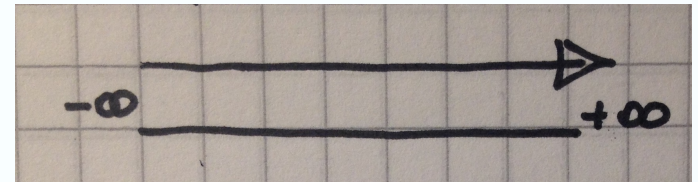
Pertanto:

$$N \geq 0 \xrightarrow{\text{soluzione}}]-\infty; 0[\cup [0; +\infty[=]-\infty; +\infty[$$

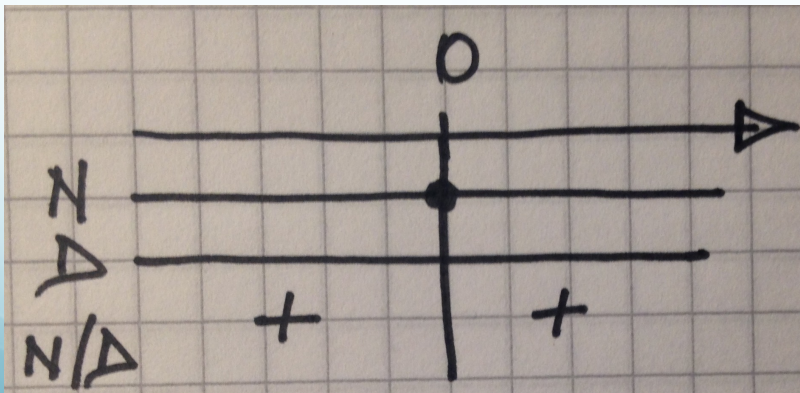


Per quanto riguarda il denominatore, abbiamo:

$$D > 0 \rightarrow 2x^2 + 1 > 0 \xrightarrow{\text{soluzione}} \forall x \in \mathbb{R}$$



La soluzione della disequazione fratta è:



La disequazione fratta non è soddisfatta (non ammette soluzione) per nessun valore di x .

soluzione

$$\nexists x \in \mathbb{R}$$

Risolvere la seguente disequazione fratta con valore assoluto:

$$|x^2 - 1| > 2 - |4 - x| + x^2$$

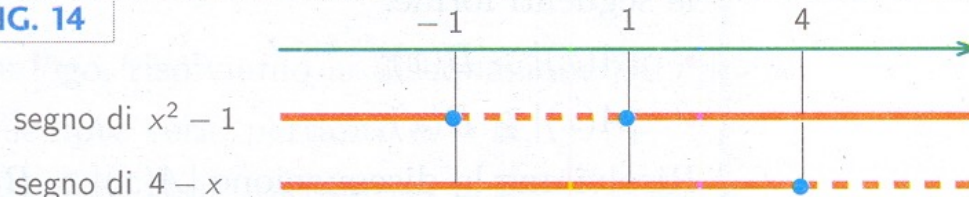
a. Esaminiamo il segno di ogni argomento risolvendo le disequazioni:

$$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$$

$$4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$$

b. Costruiamo lo schema dei segni degli argomenti:

FIG. 14



c. Per l'intervallo $x < -1 \vee 1 < x < 4$ risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x < -1 \vee 1 < x < 4 \\ x^2 - 1 > 2 - 4 + x + x^2 \end{cases}$$

che ha per soluzione $x < -1$.

d. Per l'intervallo $-1 \leq x \leq 1$ risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -x^2 + 1 > 2 - 4 + x + x^2 \end{cases}$$

che ammette come soluzioni $-1 \leq x \leq 1$.

e. Per l'intervallo $x \geq 4$ risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 1 > 2 + 4 - x + x^2 \end{cases}$$

che ha per soluzione $x > 7$.

L'unione delle soluzioni di tali sistemi è la soluzione della disequazione data; pertanto

$$\mathcal{S} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < -1 \vee x > 7\}.$$