

Matematica

Funzioni

Autore: prof. *Pappalardo Vincenzo*

docente di Matematica e Fisica

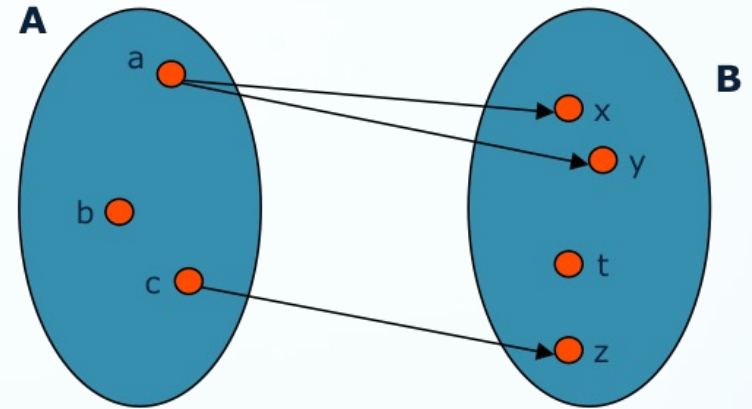


Le Funzioni e loro caratteristiche

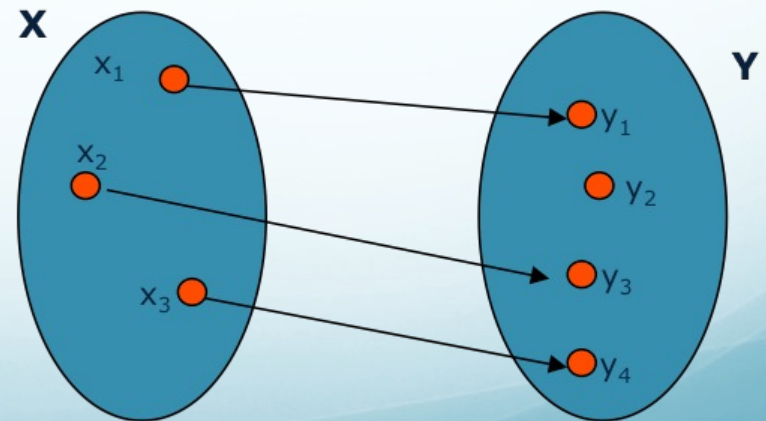
L'analisi di diversi fenomeni della natura o la risoluzione di problemi tecnici o matematici, conduce a considerare la variazione di una grandezza in corrispondenza di un'altra grandezza, cioè lo studio di funzioni.

Relazioni e funzioni

Dati due insiemi A e B , si definisce **RELAZIONE** una legge che associa a qualche elemento di A uno o più elementi di B .



Una **FUNZIONE** è una particolare relazione fra due insiemi X e Y tale che ad ogni elemento x di X associa uno ed un solo elemento y di Y .



Poiché una funzione fa corrispondere ad ogni elemento di X un unico elemento di Y , essa viene anche chiamata corrispondenza univoca.

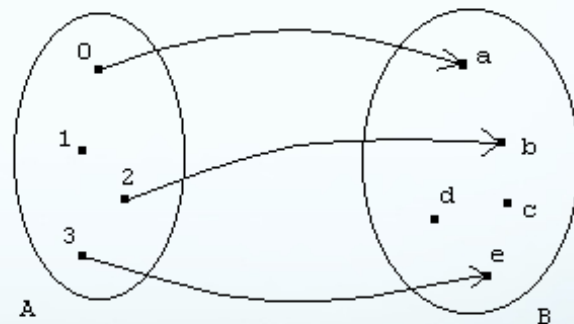
L'elemento y è detto **immagine** di x mediante la funzione f .

L'insieme di partenza X è detto **dominio** della funzione; il sottoinsieme di Y formato dalle immagini degli elementi di X è detto **codominio**.

La seguente relazione da A a B ha:

dominio = $\{0, 2, 3\}$

codominio = $\{a, b, e\}$



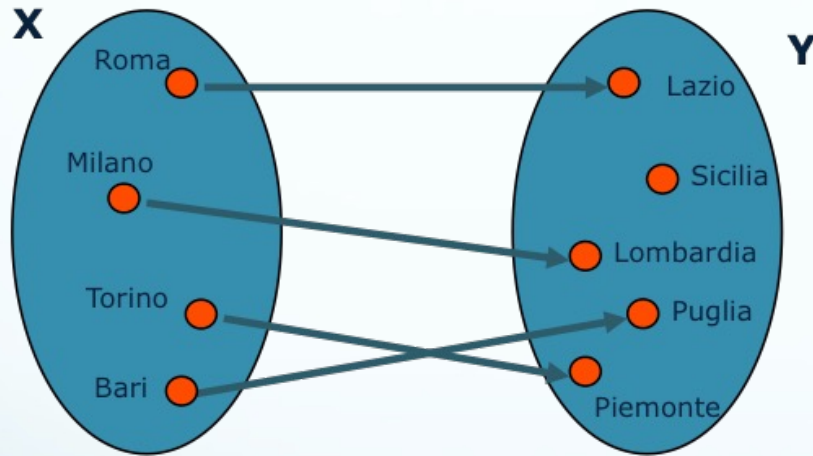
Una funzione si indica nel seguente modo: $y = f(x)$

Oppure: $f : X \rightarrow Y$ $X \xrightarrow{f} Y$

Esempio

Consideriamo gli insiemi:

$$X = \{\text{Roma, Milano, Torino, Bari}\} \quad Y = \{\text{Sicilia, Piemonte, Lombardia, Lazio, Puglia}\}$$



◆ Per ogni elemento di X esiste un solo elemento di Y associato

◆ Tale elemento di B è unico

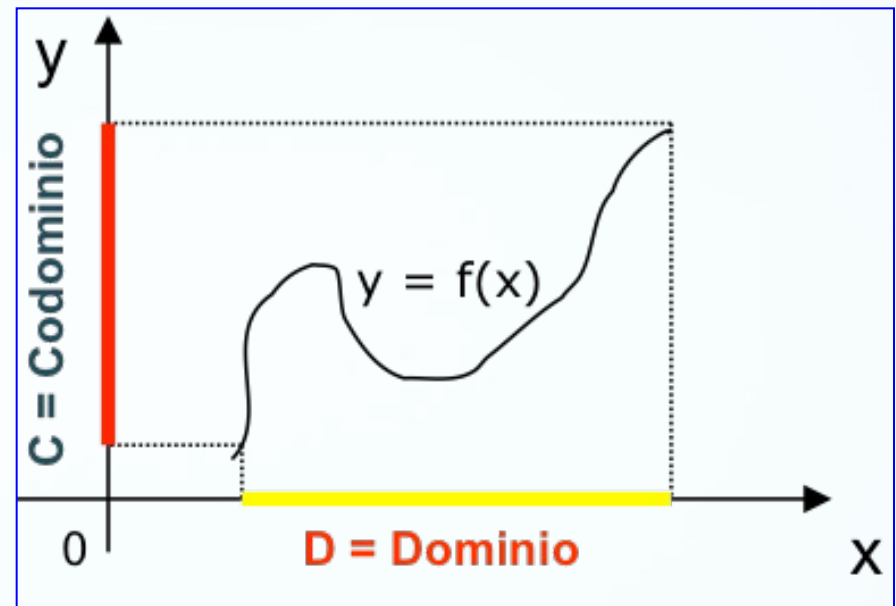
Pertanto la relazione tra l'insieme X e l'insieme Y è una **funzione**

Quando i due insiemi X e Y sono numerici, le funzioni vengono dette **funzioni numeriche**, e saranno descritte mediante un' espressione analitica. Per esempio le seguenti espressioni analitiche sono funzioni numeriche:

$$y = 3x^3 - 1 \qquad y = \frac{4x^2 + 3}{x - 1} \qquad y = \sqrt{\frac{2x - 3}{5x^3 + 1}}$$
$$y = \frac{e^{x-1} + 2}{\sin x} \qquad y = \ln\left(\frac{x^2 + 2}{x}\right)$$

Il valore che assume y dipende da quello attribuito alla x . Per questa ragione, y si chiama **variabile dipendente** e la x **variabile indipendente**.

Il **DOMINIO** è l'insieme dei valori assunti dalla variabile indipendente x , mentre quelli assunti dalla variabile dipendente y si chiama **CODOMINIO**.



Il **CAMPO DI ESISTENZA** di una funzione $y = f(x)$ è l'insieme dei valori reali delle x che rendono reale la funzione.

Ad ogni funzione corrisponde sempre un **GRAFICO**.

La procedura completa per determinare il grafico di una funzione, sarà acquisita attraverso l'analisi matematica (che farete al quinto anno).

Determinare dominio e codominio della seguente funzione:

$$y = x^2 - 4x + 2$$

Il dominio di una funzione intera è:

$$D = \mathfrak{R} \xrightarrow{\text{oppure}} D =]-\infty; +\infty[$$

Per determinare il codominio, procediamo come segue:

➤ esplicitiamo la funzione rispetto a x:

$$x^2 - 4x + 2 - y = 0$$

➤ ricaviamo la x:

$$\Delta = 4 - (2 - y) = 2 + y \qquad x = 2 \pm \sqrt{2 + y}$$

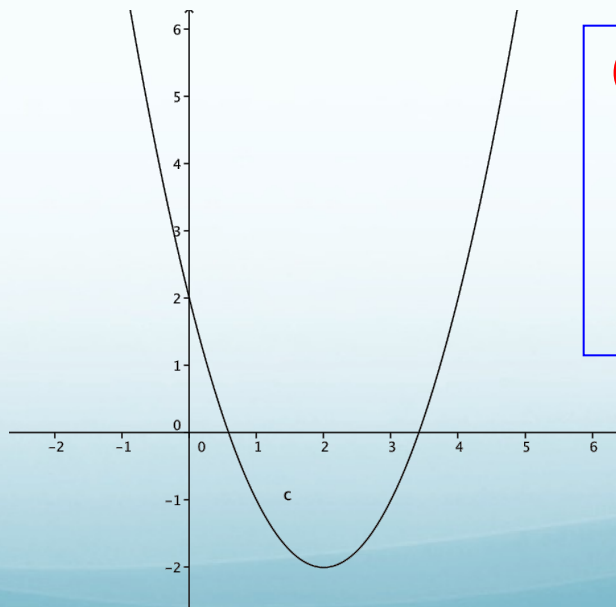
Abbiamo così ottenuto una nuova funzione (chiamata funzione inversa), dove x è espresso in funzione di y . Il dominio di questa nuova funzione sarà il codominio della funzione di partenza.

Essendo la funzione inversa una funzione irrazionale, il suo dominio è dato da:

$$2 + y \geq 0 \rightarrow y \geq -2$$

Il codominio è pertanto l'insieme:

$$C = [-2; +\infty[$$



Osserva il dominio e il codominio sul grafico della funzione

Determinare dominio e codominio della seguente funzione:

$$y = \frac{2x-1}{x^2+5x+6}$$

Il dominio di una funzione fratta è:

$$x^2 + 5x + 6 \neq 0 \rightarrow x_1 \neq -2 \vee x_2 \neq -3$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2 \vee x \neq -3\} \xrightarrow{\text{oppure}} D =]-\infty; -3[\vee]-3; -2[\vee]-2; +\infty[$$

Per determinare il codominio, procediamo come segue:

➤ esplicitiamo la funzione rispetto a x:

$$y(x^2 + 5x + 6) = 2x - 1$$

$$yx^2 + x(5y - 2) + 6y + 1 = 0$$

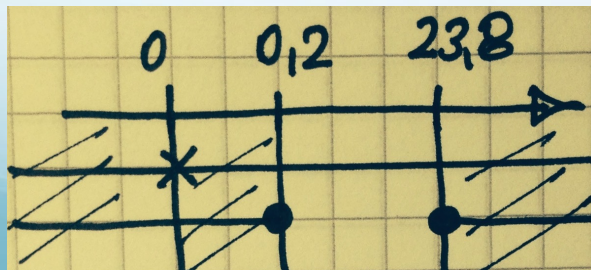
➤ ricaviamo la x:

$$x_{1,2} = \frac{-(5y-2) \mp \sqrt{(5y-2)^2 - 4y(6y+1)}}{2y} = \frac{2-5y \mp \sqrt{y^2 - 24y + 4}}{2y}$$

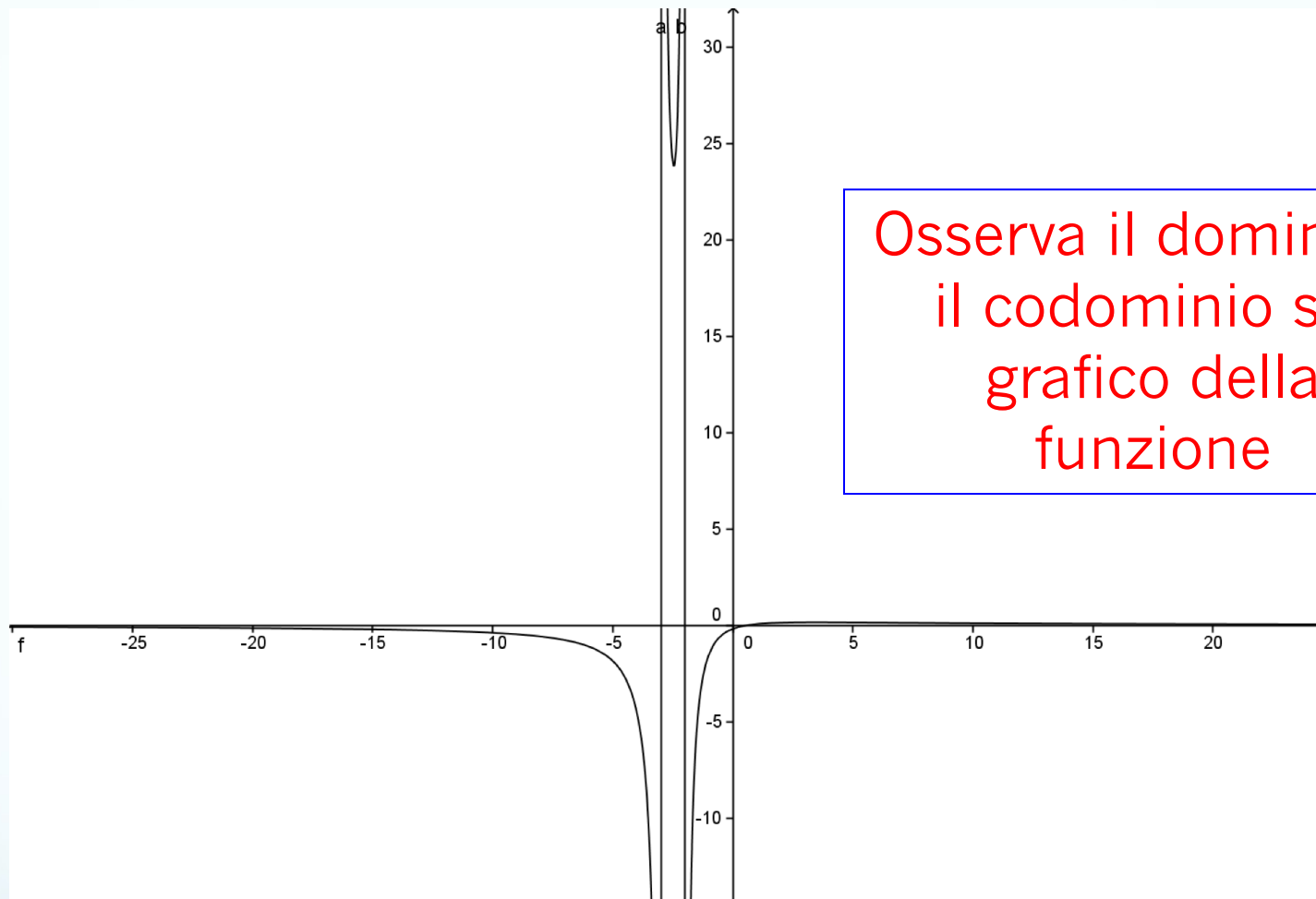
Abbiamo così ottenuto una nuova funzione (chiamata funzione inversa), dove x è espresso in funzione di y.

Il dominio di questa nuova funzione sarà il codominio della funzione di partenza.

$$\begin{cases} y \neq 0 \\ y^2 - 24y + 4 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \neq 0 \\ y \leq 12 - \sqrt{140} \vee y \geq 12 + \sqrt{140} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \neq 0 \\ y \leq 0,2 \vee y \geq 23,8 \end{cases}$$



$$C =]-\infty; 0[\vee]0; 0,2] \vee [23,8; +\infty[$$



$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2 \vee x \neq -3\} \xrightarrow{\text{oppure}} D =]-\infty; -3[\vee]-3; -2[\vee]-2; +\infty[$$

$$C =]-\infty; 0[\vee]0; 0,2] \vee [23,8; +\infty[$$

Domini delle principali funzioni

Funzione

Dominio

Funzioni razionali intere:

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

$\mathbb{R}$

Funzioni razionali fratte:

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (P \text{ e } Q \text{ polinomi})$$

$\mathbb{R}$ esclusi i valori che annullano $Q(x)$

Funzioni irrazionali:

$$y = \sqrt[n]{f(x)}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\}, \text{ se } n \text{ è pari} \\ \text{dominio di } f(x), \text{ se } n \text{ è dispari} \end{array} \right.$

Domini delle principali funzioni

Funzioni logaritmiche:

$$y = \log_a f(x) \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$$

Funzioni esponenziali:

$$y = a^{f(x)} \quad a > 0, a \neq 1$$

dominio di $f(x)$

$$y = f(x)^{g(x)}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \cap \text{dominio di } g(x)$$

Domini delle principali funzioni

Funzioni potenza $y = f(x)^\alpha$:

α intero positivo

α intero negativo

α razionale

α irrazionale positivo

dominio di $f(x)$

dominio di $f(x)$ ma con $f(x) \neq 0$

dominio delle funzioni irrazionali

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\}$$

Funzioni goniometriche:

$$y = \sin x, y = \cos x$$

$$y = \operatorname{tg} x$$

$$y = \operatorname{cotg} x$$

$$y = \arcsin x, y = \arccos x$$

$$y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arccotg} x$$

$$\mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

$$\mathbb{R} - \{k\pi\}$$

$$[-1; 1]$$

$$\mathbb{R}$$

Funzioni numeriche

FUNZIONI ALGEBRICHE: sono quelle funzioni che contengono soltanto le quattro operazioni, l'elevamento a potenza e l'estrazione di radice.

$$y = 3x^3 - 1 \quad (\text{razionale intera})$$

$$y = \frac{4x^2 + 3}{x - 1} \quad (\text{razionale fratta})$$

$$y = \sqrt{\frac{2x - 3}{5x^3 + 1}} \quad (\text{irrazionale fratta})$$

FUNZIONI TRASCENDENTI: sono le funzioni non algebriche, come le funzioni trigonometriche, esponenziali e logaritmiche.

$$y = \ln\left(\frac{x^2 + 2}{x}\right)$$

$$y = \frac{e^{x-1} + 2}{\sin x}$$

FUNZIONI

algebriche trascendenti

$$y = e^x, y = \sin x$$

razionali

irrazionali

$$y = \sqrt{x + 1}$$

interi

fratte

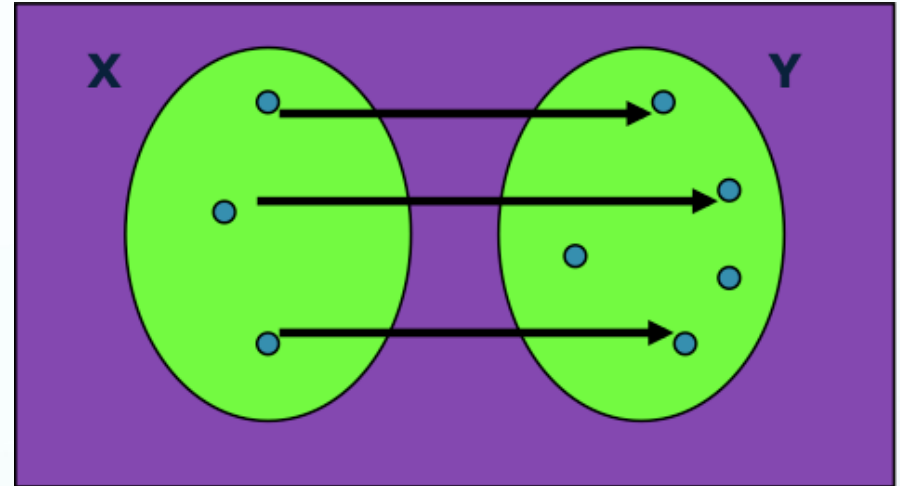
$$y = 5x - 7$$

$$y = \frac{2x - 1}{3x + 2}$$

Le proprietà delle funzioni e la loro composizione

Funzioni iniettive, suriettive, biettive

DEFINIZIONE – Una funzione da X a Y si dice **INIETTIVA** se ogni elemento di Y è immagine di al più un elemento di X .



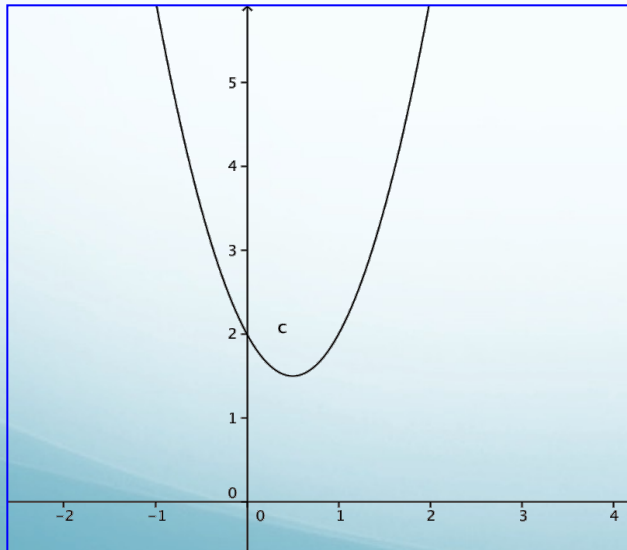
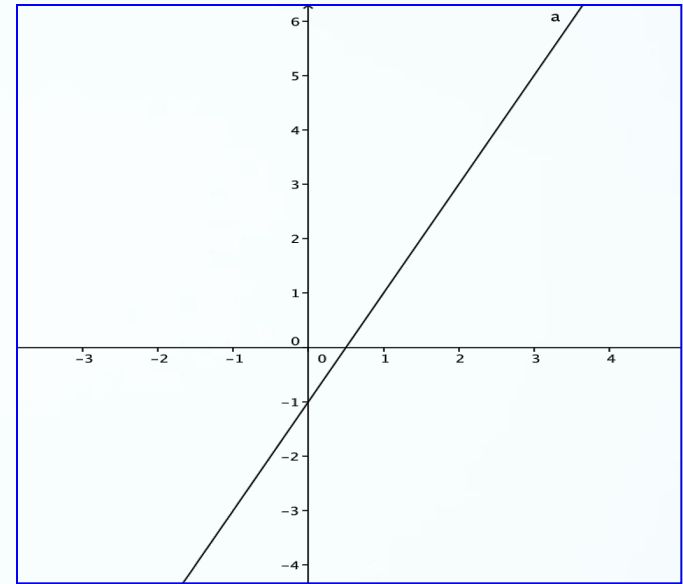
Se una funzione è iniettiva, a due elementi distinti del dominio non corrisponde mai lo stesso elemento del codominio:

$$\forall (x_1, x_2) \in D, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Esempio

$$y = 2x - 1 \Rightarrow \text{funzione iniettiva}$$

Perché ogni valore di y proviene da un solo valore di x .

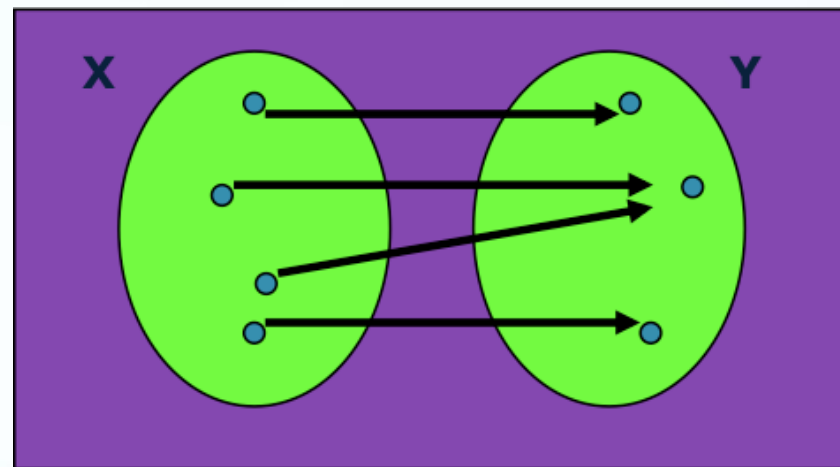


$$y = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow \text{funzione non iniettiva}$$

Perché ci sono valori di y che sono immagine di due valori distinti della x . Infatti, sostituendo $y=5$ nella funzione, otteniamo:

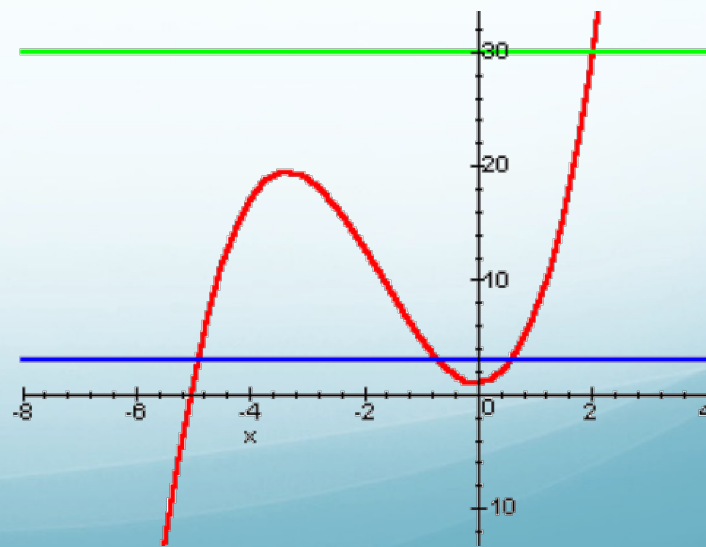
$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 2 &= 5 & x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ x_1 &= -1 & x_2 &= 3 \end{aligned}$$

DEFINIZIONE – Una funzione da X a Y si dice **SURIETTIVA** quando ogni elemento di Y è immagine di almeno un elemento di X .



Dicendo **almeno** intendiamo che un elemento di Y può essere l'immagine di più elementi di X . Se una funzione è suriettiva, l'insieme Y coincide con il codominio.

Esempio

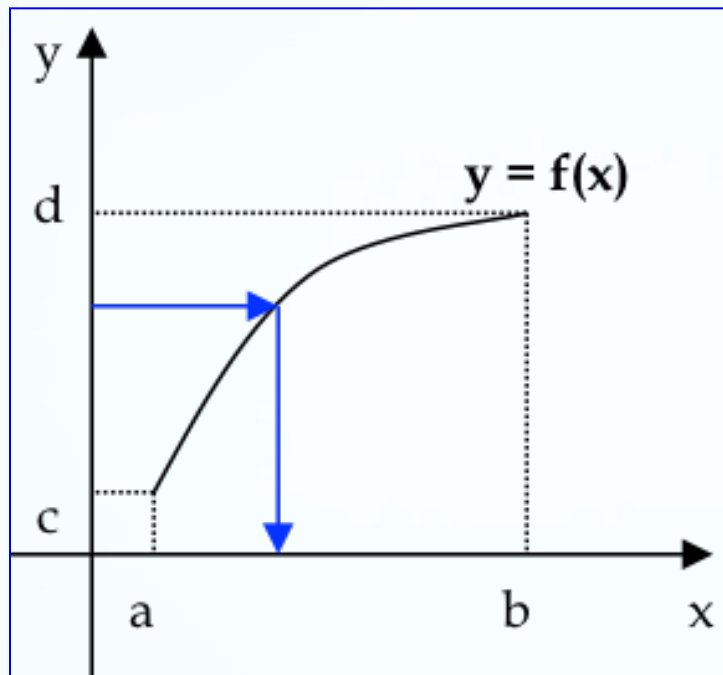


DEFINIZIONE – Una funzione da X a Y si dice **BIETTIVA** (o biunivoca) quando è sia iniettiva che suriettiva.

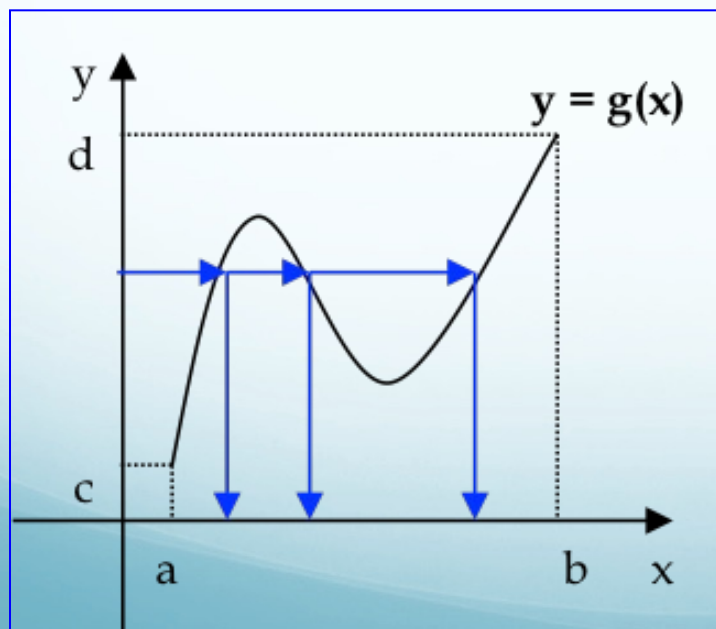
In una funzione biunivoca c'è una corrispondenza “uno a uno” fra gli elementi di X e quelli di Y . Ogni elemento di X è l'immagine di uno e un solo elemento di Y e viceversa.

Teorema

Una funzione è invertibile se, e solo se, è biettiva.

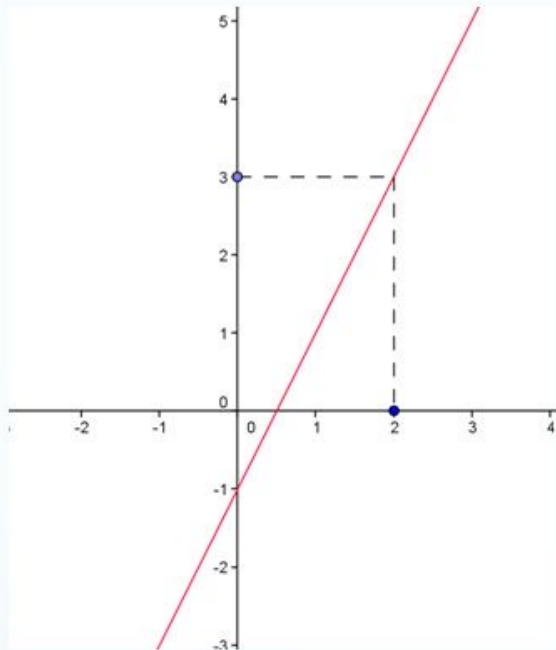


La funzione $y=f(x)$
è biiettiva



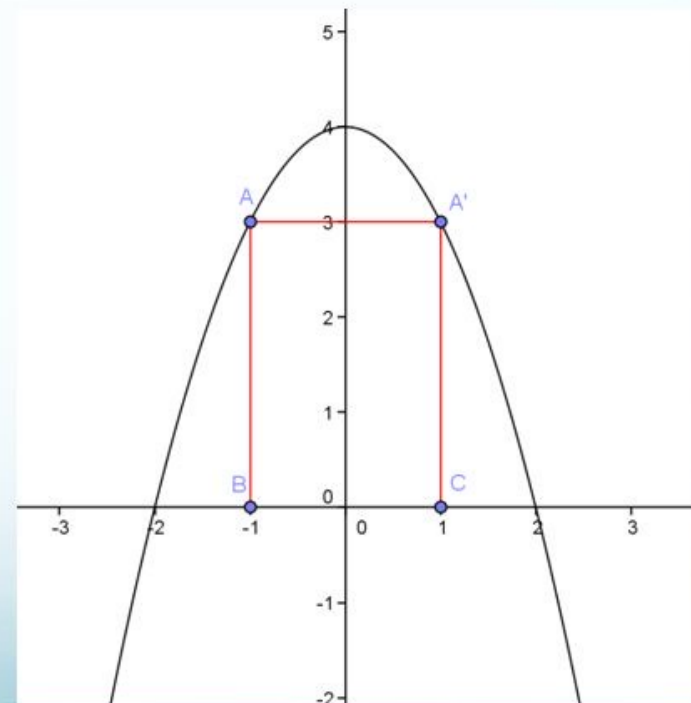
La funzione $y=g(x)$
non è biiettiva perché
non è iniettiva

Esempio



$y = 2x - 1$ è sia iniettiva che suriettiva:
a ogni valore scelto sull'asse y
corrisponde *un valore* (suriettiva) e
un solo (iniettiva) valore sull'asse x .
La funzione è quindi biiettiva.

$y = -x^2 + 4$ è suriettiva se si considera come
insieme B quello degli y tali che $y < 4$,
ma non è iniettiva perché scelto nel codominio
un y diverso da 4, esso è immagine di *due valori*
distinti di x .



Stabilire se la seguente funzione è iniettiva, suriettiva, biiettiva:

$$y = \frac{3x+2}{x}$$

Dominio della funzione:

$$D = \mathbb{R} - \{0\} \xrightarrow{\text{oppure}} D =]-\infty; 0[\vee]0; +\infty[$$

Se la funzione è iniettiva, significa che:

$$\forall (x_1, x_2) \in D, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Quindi, dati x_1 e x_2 , si ha:

$$f(x_1) = f(x_2) \text{ se } \frac{3x_1+2}{x_1} = \frac{3x_2+2}{x_2} \xrightarrow{\text{calcoli}} x_1 = x_2$$

La funzione è iniettiva.

Verifichiamo se la funzione è suriettiva.

Ricaviamo la funzione inversa:

$$y = \frac{3x+2}{x} \rightarrow xy = 3x+2 \rightarrow xy - 3x = 2 \rightarrow x(y-3) = 2 \rightarrow x = \frac{2}{y-3}$$

Codominio della funzione:

$$C = \mathbb{R} - \{3\} \xrightarrow{\text{oppure}} C =]-\infty; 3[\vee]3; +\infty[$$

La funzione non è suriettiva.

Possiamo però affermare che è una corrispondenza biunivoca tra D e C:

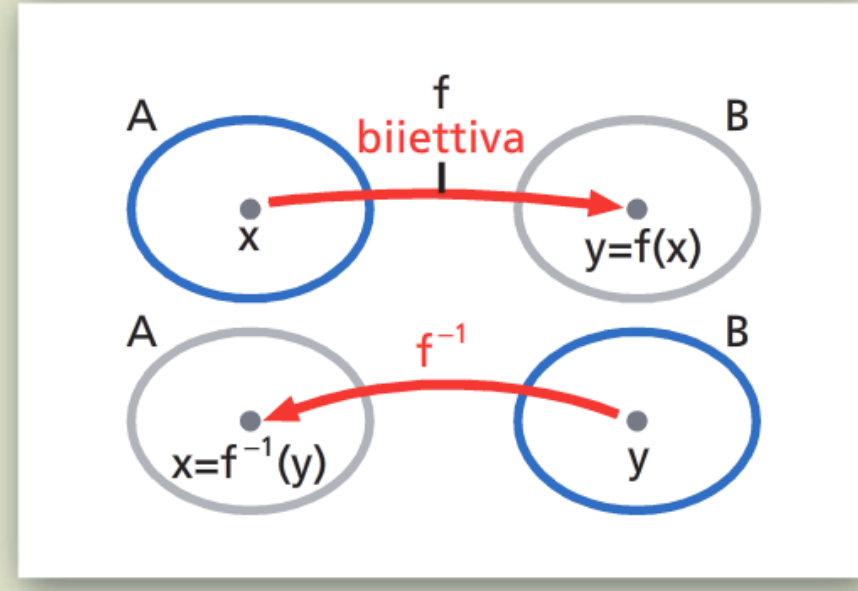
$$D \rightarrow C \xrightarrow{\text{oppure}} \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\}$$

DEFINIZIONE

Funzione inversa

Data la funzione biiettiva f da A a B , la funzione inversa di f è la funzione biiettiva f^{-1} da B ad A che associa a ogni y di B il valore x di A tale che $y = f(x)$:

$$f^{-1}: y \rightarrow x.$$

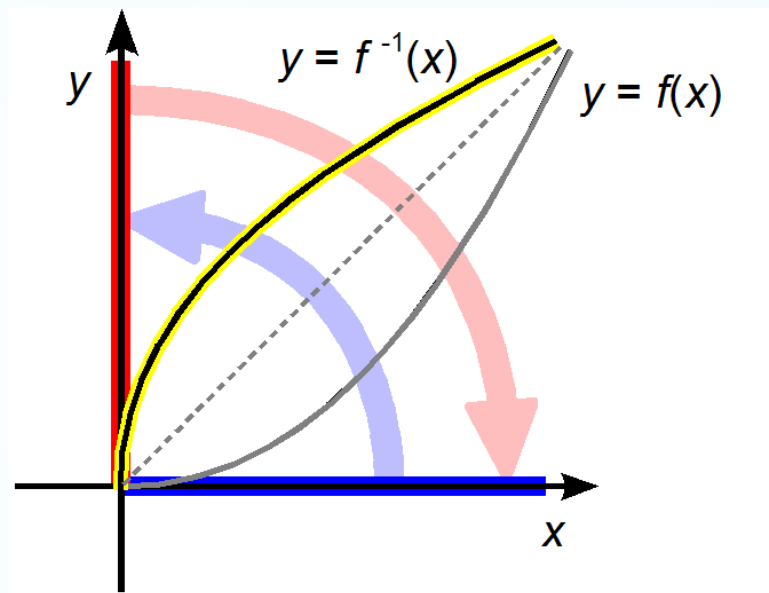


Se una funzione ammette inversa, si dice che è **invertibile**.

Data una funzione biiettiva reale di variabile reale $y=f(x)$, disegnare il grafico di f^{-1} equivale a partire dalle ordinate di f e ricavare le ascisse.

Ordinate e ascisse si scambiano i ruoli:

$$x \rightarrow y \text{ e } y \rightarrow x$$



Il grafico di f e di f^{-1} sono simmetrici rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

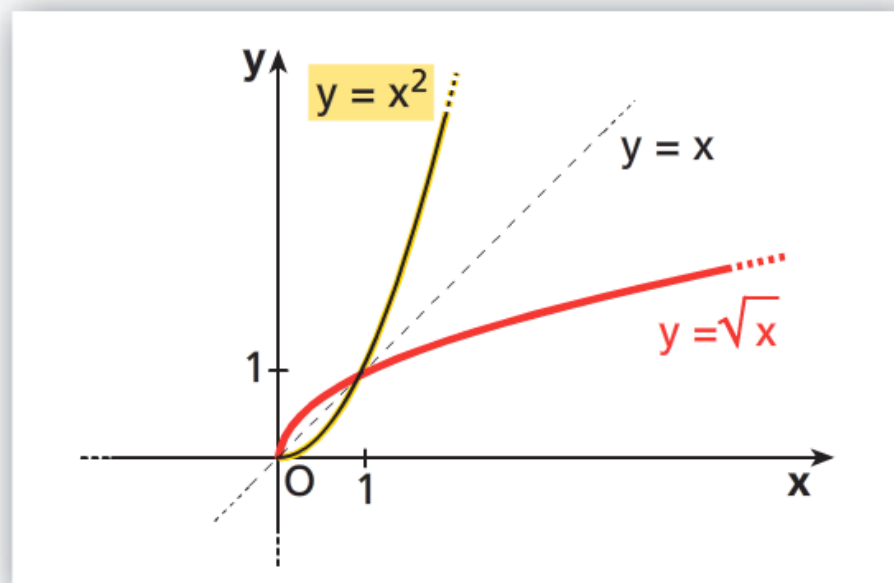
Sfruttando questa proprietà, conoscendo il grafico di una funzione possiamo disegnare il grafico della sua inversa.

ESEMPIO

La funzione $y = f(x) = x^2$ ha come dominio $\mathbb{R}$, ma in $\mathbb{R}$ non è biiettiva. Per renderla biiettiva dobbiamo considerare come dominio un insieme più ristretto, per esempio quello dei numeri reali positivi o nulli. In casi come questo parliamo di **restrizione del dominio** per l'invertibilità della funzione. La sua funzione inversa è:

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}.$$

Per rappresentare la funzione f^{-1} insieme alla funzione f , scambiamo le variabili nell'espressione della funzione inversa, considerando: $y = \sqrt{x}$.



Esempio

Sia data la funzione: $y = f(x) = 2x - 1$

Poiché la funzione è biiettiva, ammette inversa. Possiamo ottenere la funzione inversa nel seguente modo:

❖ ricaviamo dalla funzione la x : $x = \frac{y + 1}{2}$

❖ scambiamo la x con la y : $f^{-1}(x) = y = \frac{x + 1}{2}$

Esempio

La funzione: $y = f(x) = x^2 - 1$ non ammette inversa perché non è biiettiva, in particolare non è iniettiva.

Composizione di due funzioni

Esempio

Consideriamo le seguenti funzioni:

$$f(x) = 2x - 1 \qquad g(x) = -x^2 + 3$$

Calcoliamo l'immagine di 3:

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

Al valore ottenuto applichiamo la funzione g:

$$g(5) = -(5)^2 + 3 = -22$$

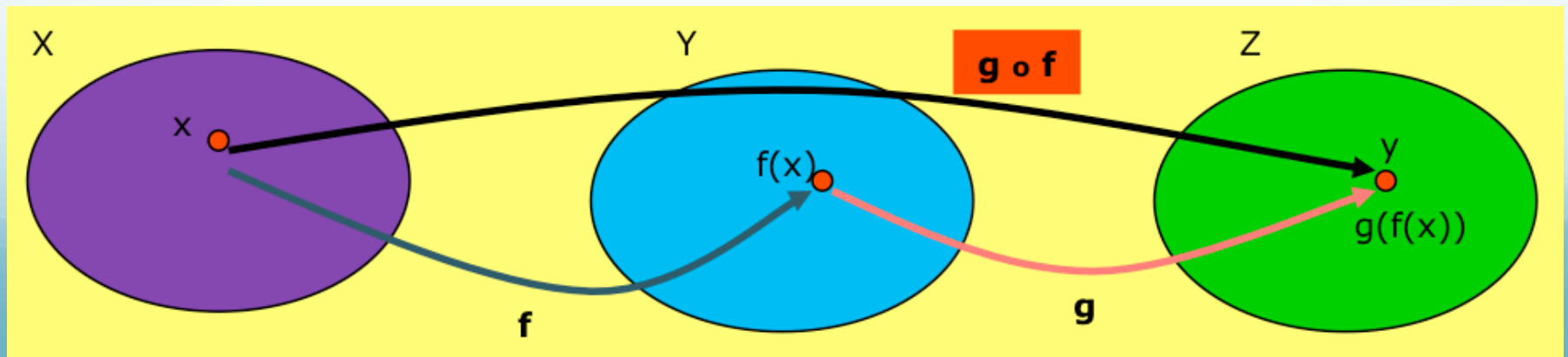
Al valore iniziale 3 abbiamo così associato uno ed un solo valore, -22, ottenendo una nuova funzione che chiamiamo *funzione composta di f e g e che indichiamo con $g \circ f$ oppure con $g[f(x)]$.*

Per ottenere l'espressione analitica della funzione composta, ripetiamo il procedimento utilizzando un generico valore x al posto del valore particolare 3, ossia sostituiamo $f(x)=2x-1$ al posto della x nella funzione $g(x)$:

$$\begin{aligned} g[f(x)] &= g(2x-1) = -(2x-1)^2 + 3 = \\ &= -4x^2 - 1 + 4x + 3 = -4x^2 + 4x + 2 \end{aligned}$$

In generale, date due funzioni: $f : X \rightarrow Y$ $g : Y \rightarrow Z$
comporre le due funzioni significa considerare una terza
funzione, detta funzione composta mediante f e g, che
associa a ogni elemento di X un elemento di Z nel seguente
modo:

- ❑ all'elemento x appartenente ad X corrisponde, mediante f , l'elemento $y = f(x)$ appartenente a Y
- ❑ all'elemento $f(x)$ appartenente a Y corrisponde, mediante g , l'elemento $g[f(x)]$ appartenente a Z



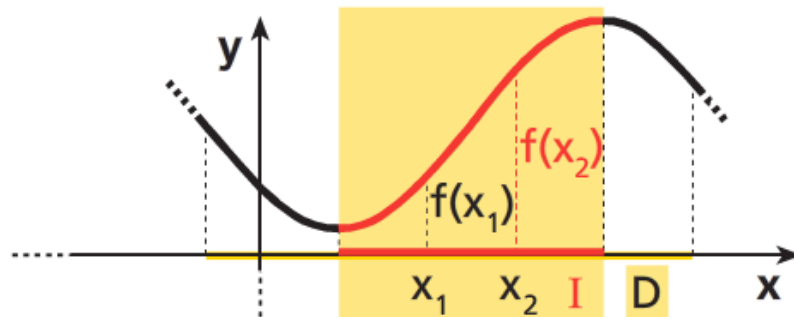
Funzioni crescenti e decrescenti

● Una funzione crescente viene detta anche **crescente in senso stretto**.

DEFINIZIONE

Funzione crescente

Una funzione $y = f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ si dice crescente in un intervallo I , sottoinsieme di D , se comunque scelti x_1 e x_2 appartenenti a I , con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) < f(x_2)$.

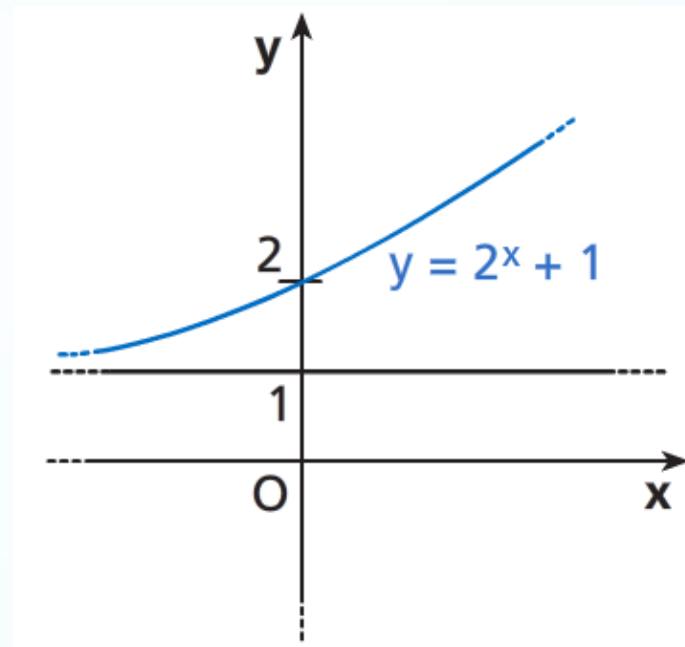


Se nella definizione precedente sostituiamo la relazione $f(x_1) < f(x_2)$ con $f(x_1) \leq f(x_2)$, otteniamo la definizione di funzione **crescente in senso lato**, o anche **non decrescente**.

ESEMPIO La funzione $y = 2^x + 1$ è crescente in $\mathbb{R}$.

$$x_1 < x_2 \rightarrow 2^{x_1} < 2^{x_2}$$

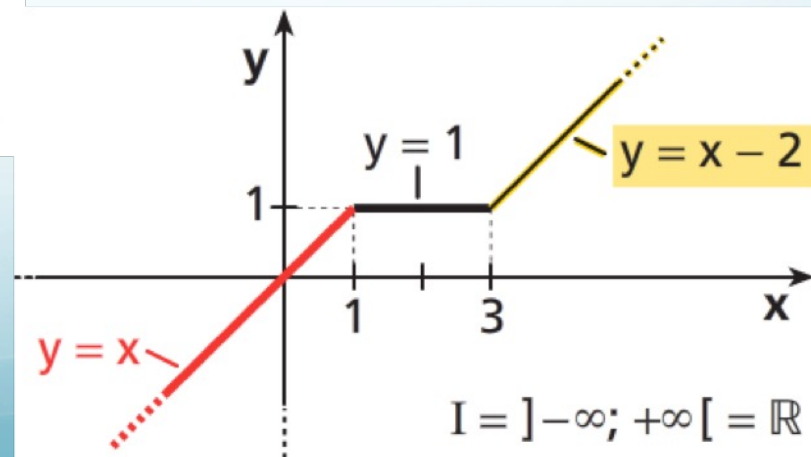
$$2^{x_1} + 1 < 2^{x_2} + 1 \rightarrow y_1 < y_2$$



ESEMPIO La funzione

$$y = f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 3 \\ x - 2 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

è crescente in senso lato in $\mathbb{R}$ (figura 4).

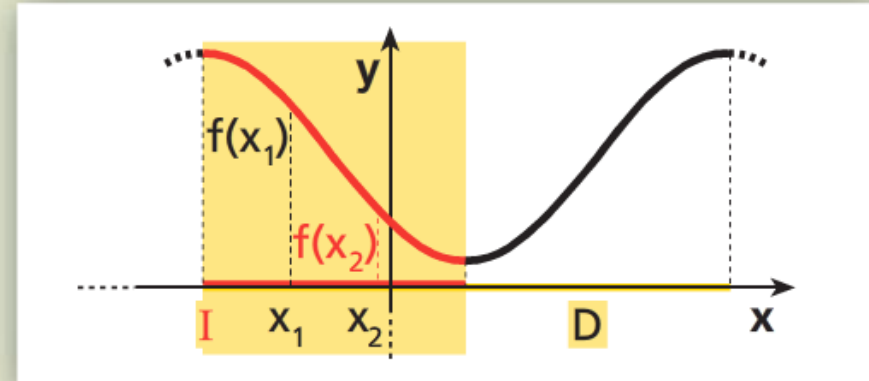


- Una funzione crescente viene detta anche **crescente in senso stretto**.

DEFINIZIONE

Funzione decrescente

Una funzione $y = f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ si dice decrescente in un intervallo I , sottoinsieme di D , se comunque scelti x_1 e x_2 appartenenti a I , con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) > f(x_2)$.

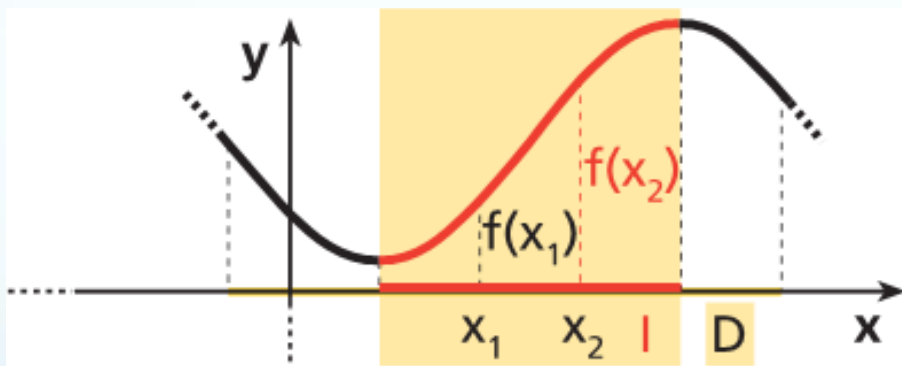


Se nella definizione precedente sostituiamo la relazione $f(x_1) > f(x_2)$ con $f(x_1) \geq f(x_2)$, otteniamo la definizione di funzione **decrescente in senso lato**, o anche **non crescente**.

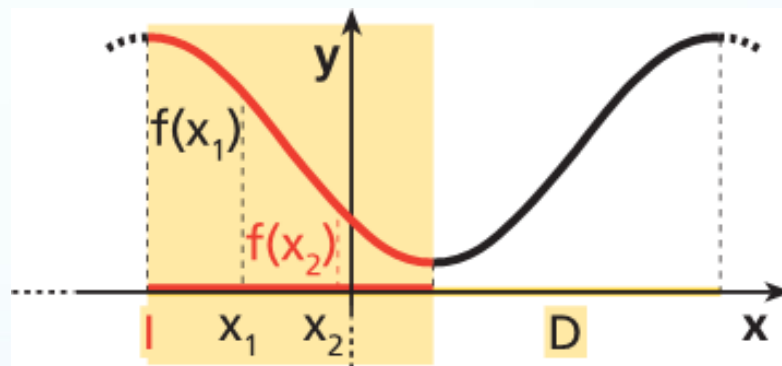
DEFINIZIONE

Funzione monotona

Una funzione di dominio D si dice monotona in un intervallo I , sottoinsieme di D , se, in quell'intervallo è sempre crescente o decrescente.



funzione monotona
crescente in I



funzione monotona
decrescente in I

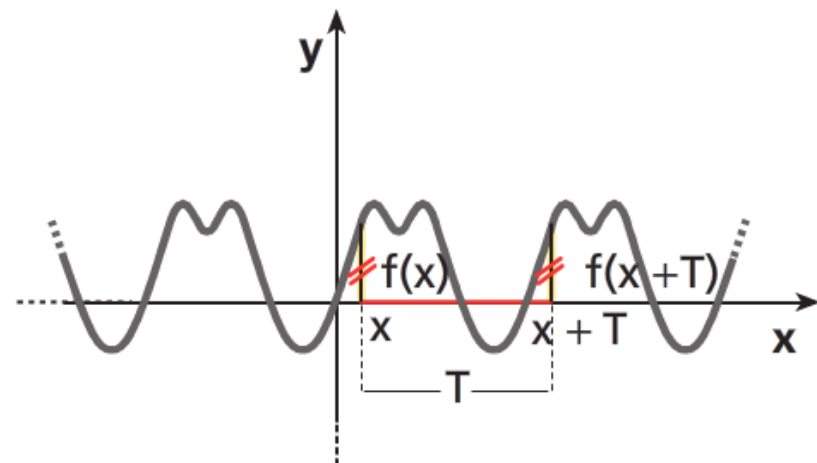
Una funzione f monotona in senso stretto è sempre iniettiva. Infatti, se f è monotona in senso stretto, allora per ogni $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$ oppure $f(x_1) > f(x_2)$; quindi risulta $f(x_1) \neq f(x_2)$, cioè f è iniettiva.

DEFINIZIONE

Funzione periodica

Una funzione $y = f(x)$ si dice periodica di periodo T , con $T > 0$, se, per qualsiasi numero k intero, si ha:

$$f(x) = f(x + kT).$$



$$f(x) = f(x + kT), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

In una funzione periodica il grafico si ripete di periodo in periodo.

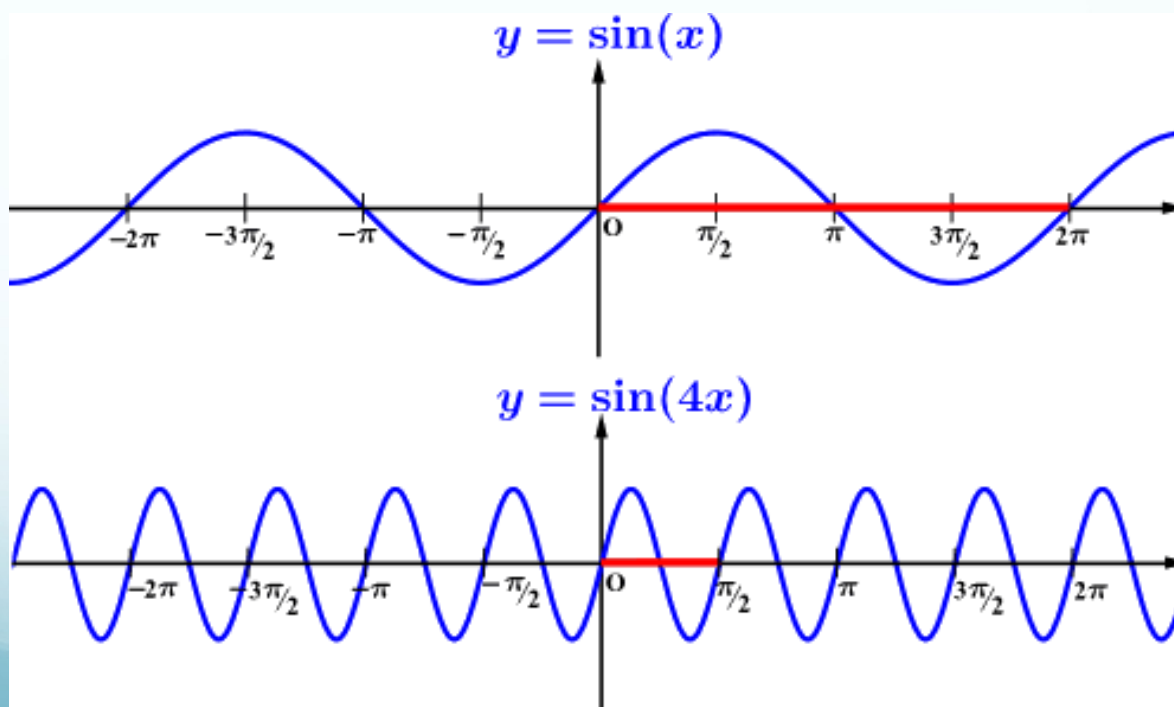
ESEMPIO

$y = \sin x$ e $y = \cos x$ sono funzioni periodiche di periodo 2π .

$y = \operatorname{tg} x$ e $y = \operatorname{cotg} x$ sono funzioni periodiche di periodo π .

$y = \sin(x)$ è periodica di periodo 2π perché:

$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$



Funzioni pari e dispari

DEFINIZIONE

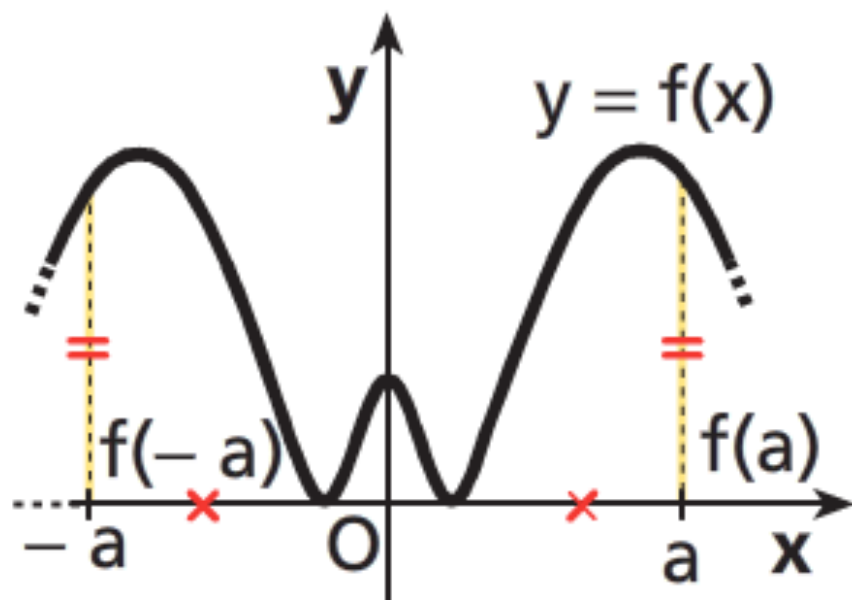
Funzione pari

Indichiamo con D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che, se $x \in D$, allora $-x \in D$. Una funzione $y = f(x)$ avente D come dominio si dice pari se $f(-x) = f(x)$ per qualunque x appartenente a D .

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$D \subseteq \mathbb{R}$$

$$\forall x, -x \in D \Rightarrow f(-x) = f(x)$$

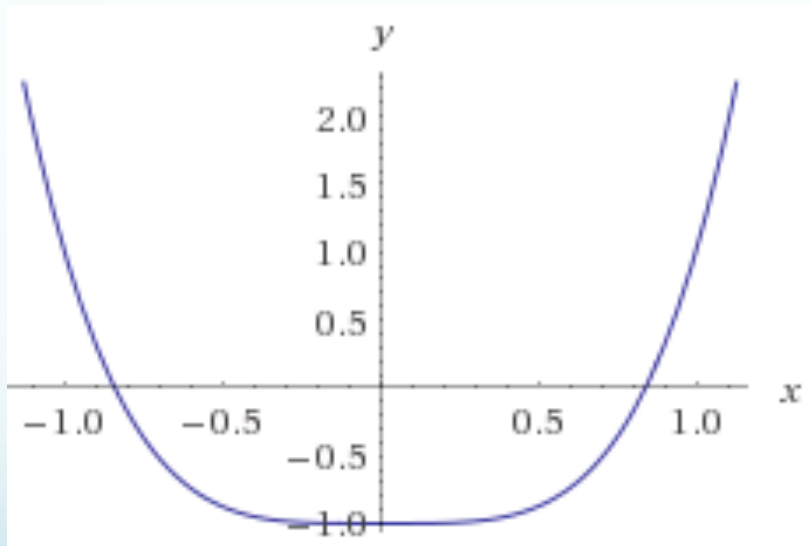


Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse y .

ESEMPIO

La funzione $y = f(x) = 2x^4 - 1$ è pari perché, sostituendo a x il suo opposto $-x$, si ottiene ancora $f(x)$:

$$f(-x) = 2(-x)^4 - 1 = 2x^4 - 1 = f(x).$$



In generale, se una funzione è polinomiale $y = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ e contiene soltanto potenze della x con esponente pari, allora la funzione è pari.

DEFINIZIONE

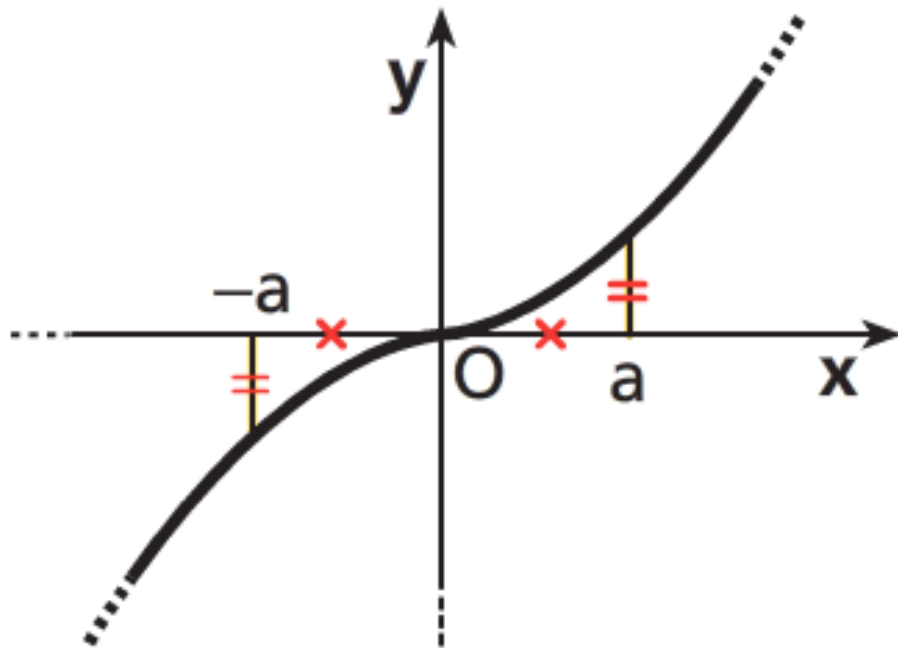
Funzione dispari

Indichiamo con D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che, se $x \in D$, anche $-x \in D$. Una funzione $y = f(x)$ avente D come dominio si dice dispari se $f(-x) = -f(x)$ per qualunque x appartenente a D .

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$D \subseteq \mathbb{R}$$

$$\forall x, -x \in D \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

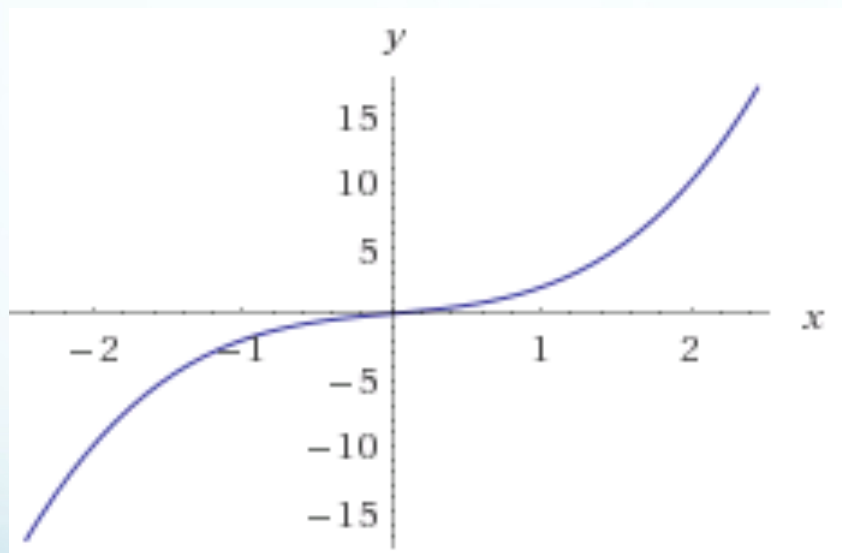


Il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine.

ESEMPIO

La funzione $y = f(x) = x^3 + x$ è dispari perché, sostituendo a x il suo opposto $-x$, si ottiene $-f(x)$:

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x).$$

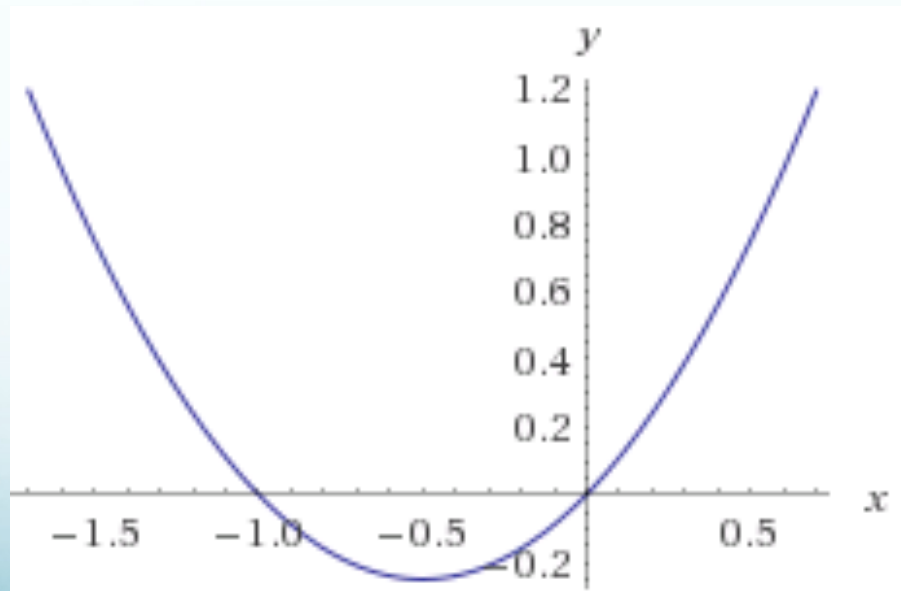


In generale, se una funzione è polinomiale $y = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ e contiene soltanto potenze della x con esponente dispari, allora la funzione è dispari.

Una funzione che non sia pari non è necessariamente dispari (e viceversa).

Esempio: la funzione $y=x^2+x$ non è né pari né dispari

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq -f(x) \wedge \neq f(x).$$



Esercizi

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo il dominio delle seguenti funzioni:

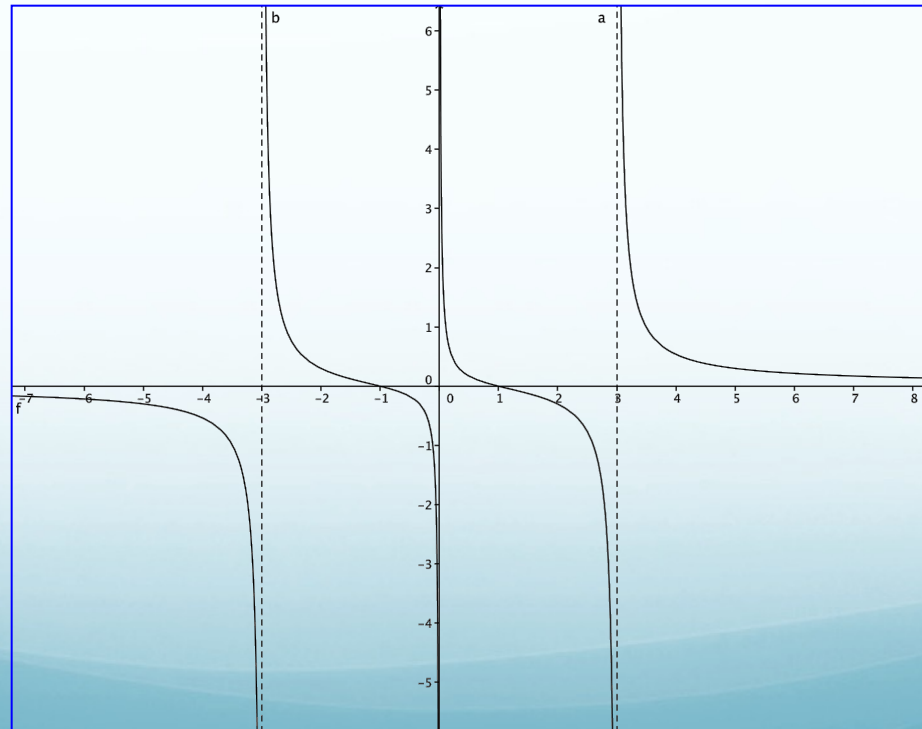
$$\text{a) } y = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 9x}; \quad \text{b) } y = \sqrt{\frac{x + 2}{x^2 - 6x + 5}}; \quad \text{c) } y =$$

a) L'espressione ha significato per ogni valore di x che rende non nullo il denominatore, ossia:

$$x^3 - 9x \neq 0 \rightarrow x(x^2 - 9) \neq 0.$$

$$\text{Dominio: } x \neq 0 \wedge x \neq 3 \wedge x \neq -3.$$

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 9x}$$



b) L'indice della radice $\sqrt{\frac{x+2}{x^2-6x+5}}$ è pari,
quindi l'espressione esiste soltanto se:

$$\frac{x+2}{x^2-6x+5} \geq 0.$$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

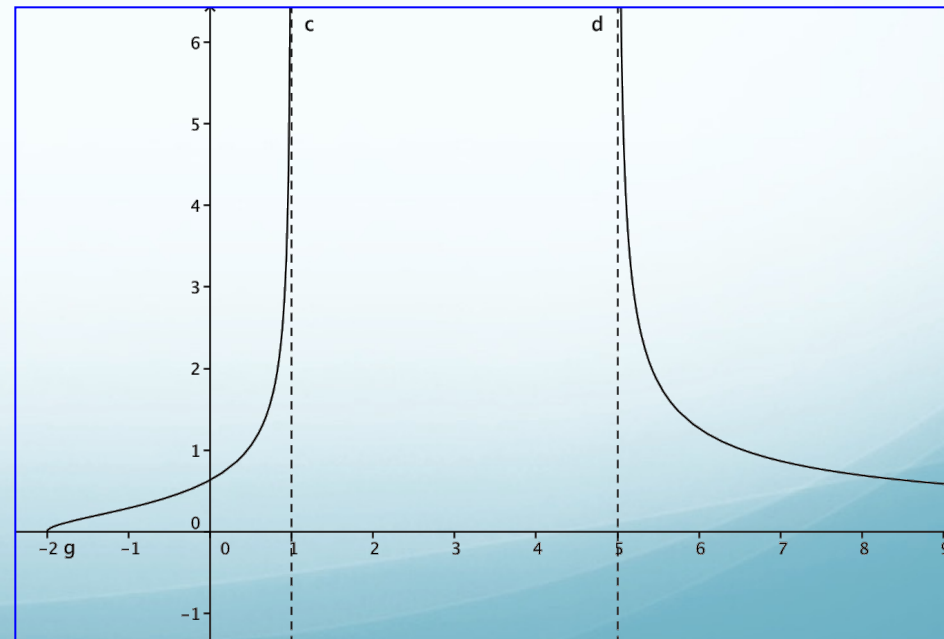
$$x+2 > 0 \quad \text{per } x > -2;$$

$$x^2-6x+5 > 0 \quad \text{per } x < 1 \vee x > 5.$$

$$y = \sqrt{\frac{x+2}{x^2-6x+5}}$$

		-2		1		5	
	...						→
Segno di N	-	0	+		+		+
Segno di D	+		+	0	-	0	+
Segno di $\frac{N}{D}$	-	0	+	-	-	0	+

Dominio: $-2 \leq x < 1 \vee x > 5.$



ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo il dominio e il codominio delle seguenti funzioni:

$$y = \frac{x^2 - 2}{x}$$

- a) La funzione $y = f(x) = \frac{x^2 - 2}{x}$ è definita per $x \neq 0$.

Ricaviamo la variabile x in funzione della y :

$$x^2 - xy - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 8}}{2}.$$

I valori del codominio sono quei valori di y per i quali la x è definita e appartiene al dominio della funzione, cioè $x \neq 0$. Poiché l'espressione di x che abbiamo ottenuto è definita per ogni y reale ed è sempre diversa da 0, il codominio di $f(x)$ è l'insieme $C = \mathbb{R}$.

ESERCIZIO GUIDA

Stabiliamo se le seguenti funzioni sono pari o dispari:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 - |x|}{1 - 4x^2}; \quad \text{b) } f(x) = \frac{x^3 - x}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

a) Determiniamo il dominio. La funzione è fratta:

$$1 - 4x^2 \neq 0 \rightarrow 4x^2 \neq 1 \rightarrow x^2 \neq \frac{1}{4} \rightarrow D: x \neq \pm \frac{1}{2},$$

Preso un generico x del dominio, sostituiamo il suo opposto nella funzione:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - |-x|}{1 - 4(-x)^2} = \frac{x^2 - |x|}{1 - 4x^2} = f(x).$$

Quindi la funzione è pari.

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{\sqrt[3]{x^2}}$$

b) Determiniamo il dominio. La funzione è fratta:

$$\sqrt[3]{x^2} \neq 0 \rightarrow x^2 \neq 0 \rightarrow D: x \neq 0.$$

Preso un generico x del dominio, sostituiamo il suo opposto nella funzione:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)}{\sqrt[3]{(-x)^2}} = \frac{-x^3 + x}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-(x^3 - x)}{\sqrt[3]{x^2}} = -\frac{x^3 - x}{\sqrt[3]{x^2}} = -f(x).$$

La funzione è dunque dispari.

Studio di una funzione

primi elementi

Ad ogni funzione corrisponde un grafico, quindi studiare una funzione significa determinare il suo grafico. Per le conoscenze fin qui acquisite, di una funzione siamo in grado di studiare:

❖ TIPO DI FUNZIONE - Stabilire se si tratta di una funzione algebrica (intera, fratta, irrazionale) o trascendente (esponenziale, logaritmica, trigonometrica).

❖ SIMMETRIE – Stabilire se la funzione presenta delle simmetrie, ossia se è pari (simmetrica rispetto all'asse delle y) o è dispari (simmetrica rispetto all'origine).

❖ **DOMINIO O CAMPO DI ESISTENZA** - Rappresenta l'insieme dei valori che può assumere la variabile indipendente x , in corrispondenza dei quali la funzione y esiste, ossia assume valori che appartengono all'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.

❖ **INTERSEZIONE CON GLI ASSI CARTESIANI** - Determinare i punti d'intersezione della funzione con gli assi cartesiani.

❖ **COMPORTAMENTO DELLA FUNZIONE NEI PUNTI DI DISCONTINUITA'** - Studiare il comportamento della funzione nei punti che non fanno parte del dominio, ossia capire in che modo la funzione tende all'infinito in questi punti.

❖ **SEGNO DELLA FUNZIONE** - Determinare per quali valori della variabile x la funzione y assume valori positivi e negativi, cioè stabilire in quale zona del piano cartesiano la funzione è positiva ed in quale è negativa.

❖ **GRAFICO DELLA FUNZIONE** – Riportare su un sistema di assi cartesiani tutte le informazioni ricavate ai punti precedenti al fine di ottenere una situazione visiva del comportamento della funzione.

Esercizi

Studiare le seguenti funzioni.

$$y = x^4 - 3x^2 + 2$$

1. Determiniamo il dominio della funzione. Poiché non esistono limitazioni per x , si ha $D: \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Controlliamo se la funzione presenta delle simmetrie.

Essendo $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 2 = x^4 - 3x^2 + 2 = f(x)$, la funzione è pari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y .

3. Intersezioni con gli assi.

Asse y :

$$\begin{cases} y = x^4 - 3x^2 + 2 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \text{il punto di intersezione con l'asse } y \text{ è } A(0; 2).$$

Asse x :

$$\begin{cases} y = x^4 - 3x^2 + 2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x^4 - 3x^2 + 2 = 0.$$

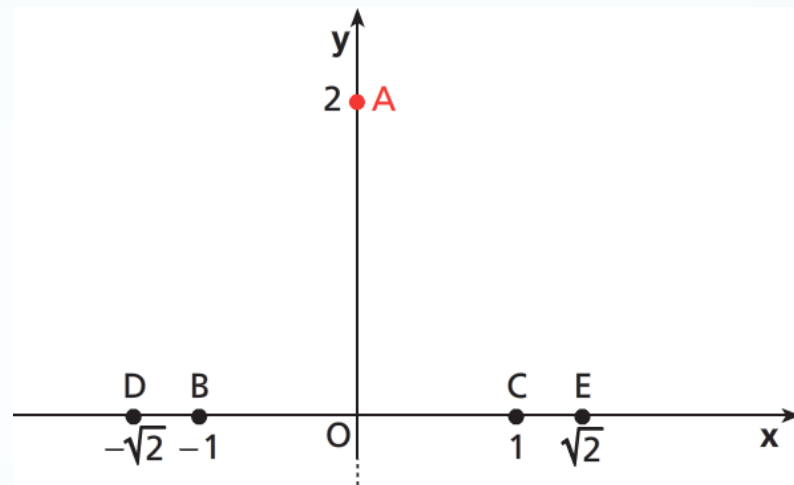
L'equazione ha per soluzioni:

$$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -\sqrt{2}, x_4 = \sqrt{2}.$$

I punti di intersezione con l'asse x sono:

$$B(-1; 0), C(1; 0),$$

$$D(-\sqrt{2}; 0), E(\sqrt{2}; 0).$$



4. Studiamo il segno della funzione.

$$x^4 - 3x^2 + 2 > 0$$

$$x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 2)(x^2 - 1) > 0.$$

Primo fattore:

$$x^2 - 2 > 0 \text{ per } x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}.$$

Secondo fattore:

$$x^2 - 1 > 0 \text{ per } x < -1 \vee x > 1.$$

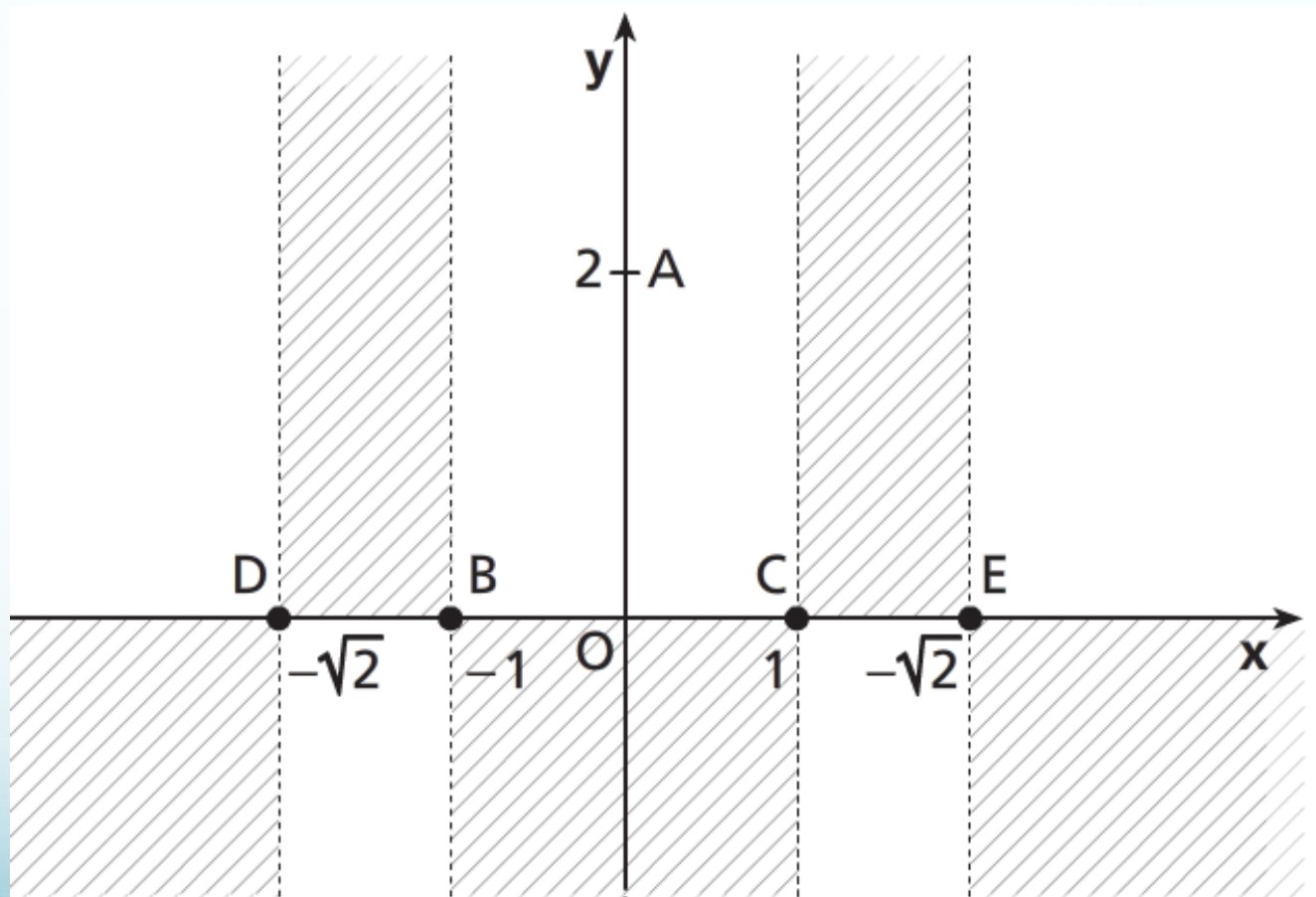
Compiliamo il quadro dei segni (figura b).

$$f(x) > 0,$$

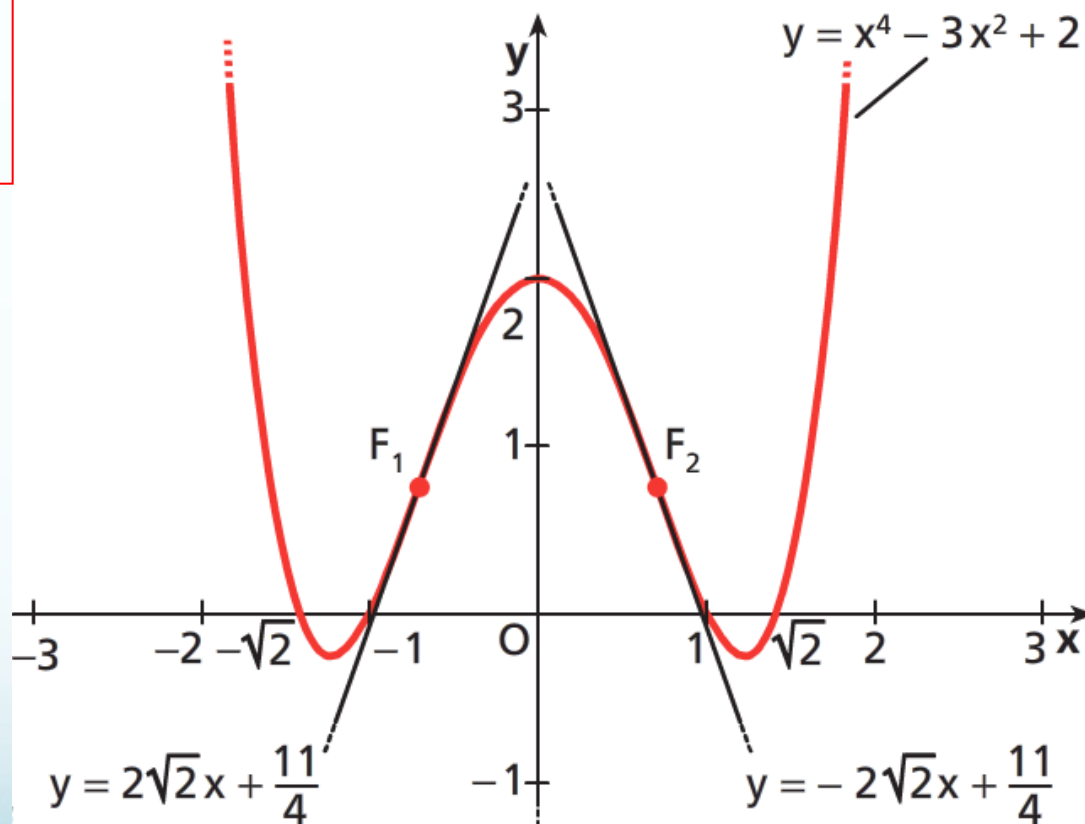
$$\text{per } x < -\sqrt{2} \vee -1 < x < 1 \vee x > \sqrt{2}.$$

		$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$	
$x^2 - 2$	+	0	-		-		-	0	+
$x^2 - 1$	+		+	0	-	0	+		+
y	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Rappresentiamo i risultati fin qui ottenuti su un piano cartesiano, tratteggiando le zone del piano in cui la funzione non è definita.



5. Grafico della funzione



$$y = \frac{x^2 - 1}{x}$$

1. Determiniamo il dominio della funzione. Si tratta di una funzione razionale fratta il cui denominatore deve essere non nullo. Quindi:

$$D: \mathbb{R} - \{0\}.$$

2. Cerchiamo eventuali simmetrie.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{-x} = -\frac{x^2 - 1}{x} = -f(x).$$

Poiché $f(-x) = -f(x)$, la funzione è dispari. Il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi.

3. Determiniamo le intersezioni con gli assi.

Asse y : nessuna intersezione, essendo $x = 0$ escluso dal dominio.

Asse x :

$$\begin{cases} y = \frac{x^2 - 1}{x} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

I punti di intersezione con l'asse x sono:

$$A(-1; 0), \quad B(1; 0).$$

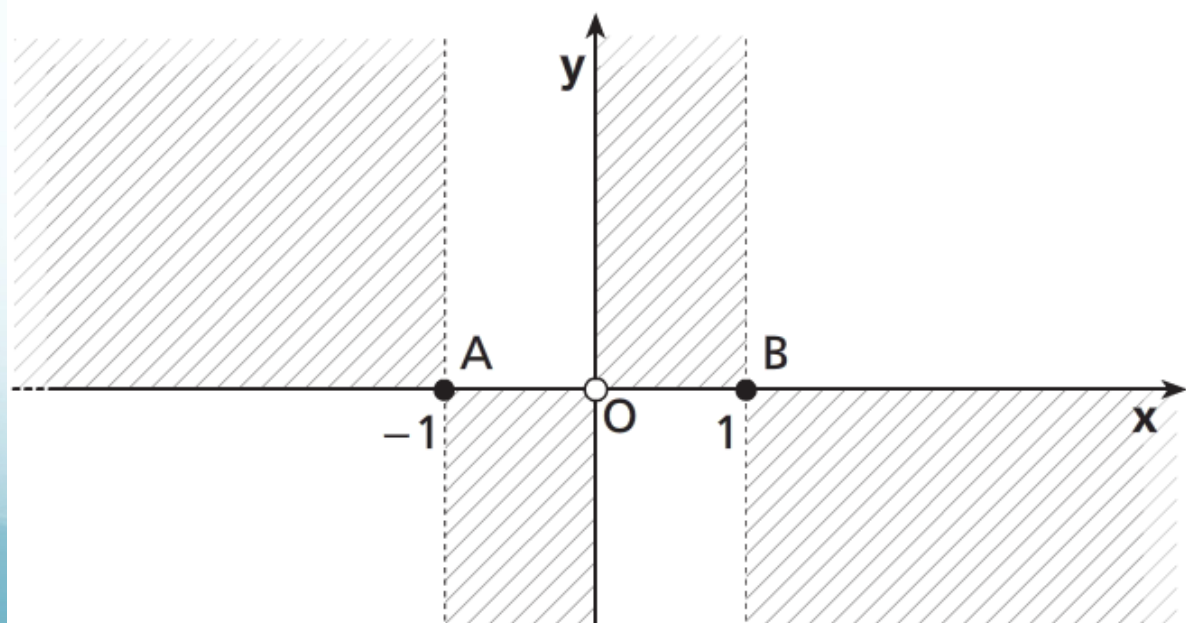
4. Studiamo il segno della funzione.

$$\frac{x^2 - 1}{x} > 0 \quad N > 0 \text{ per } x < -1 \vee x > 1,$$

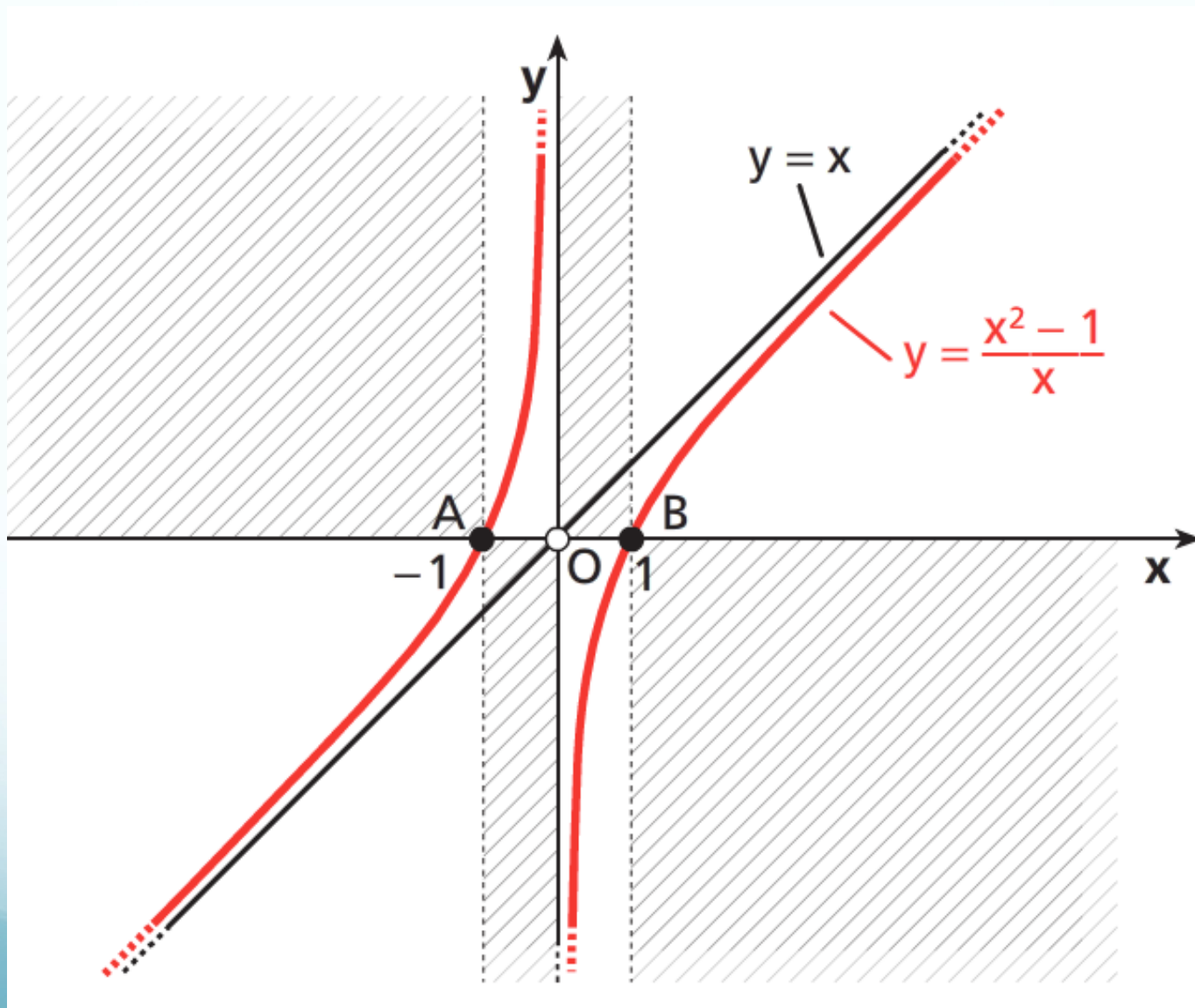
$$D > 0 \text{ per } x > 0.$$

	...	-1		0		1		...
Segno di N	+	0	-		-	0	+	
Segno di D	-		-	0	+		+	
Segno di $\frac{N}{D}$	-	0	+	-	-	0	+	

Rappresentiamo i risultati fin qui ottenuti su un piano cartesiano, tratteggiando le zone del piano in cui la funzione non è definita.



5. Grafico della funzione



$$y = \frac{(2 - x)^3}{3(x - 4)}$$

1. Determiniamo il dominio della funzione. Il suo denominatore deve essere non nullo.

Quindi:

$$D: x \neq 4.$$

2. Cerchiamo eventuali simmetrie:

$$f(-x) = \frac{[2 - (-x)]^3}{3(-x - 4)} = \frac{(2 + x)^3}{-3(x + 4)}.$$

Poiché $f(-x) \neq -f(x)$ e $f(-x) \neq f(x)$, la funzione non è né dispari né pari.

3. Determiniamo le intersezioni con gli assi.

Asse y :

$$\begin{cases} y = \frac{(2-x)^3}{3(x-4)} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{-12} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ x = 0 \end{cases}$$

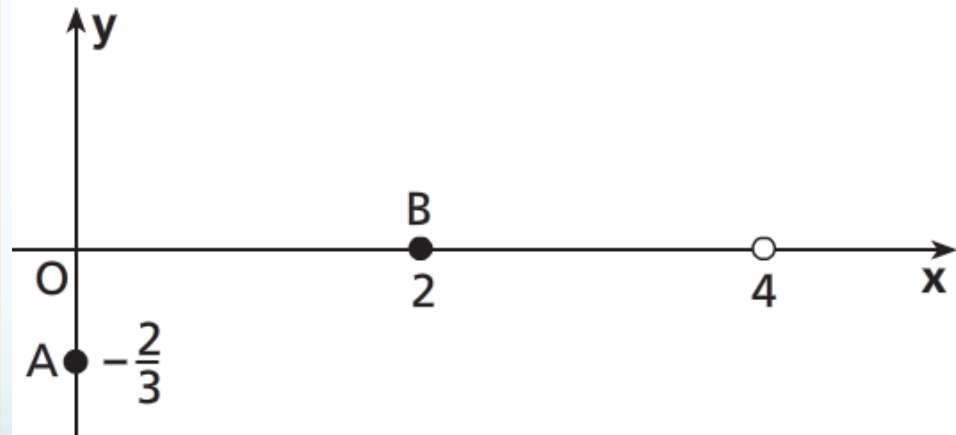
Il punto di intersezione con l'asse y è $A\left(0; -\frac{2}{3}\right)$.

Asse x :

$$\begin{cases} y = \frac{(2-x)^3}{3(x-4)} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{(2-x)^3}{3(x-4)} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2-x)^3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2-x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Il punto di intersezione con l'asse x è $B(2; 0)$.



4. Studiamo il segno della funzione:

$$\frac{(2-x)^3}{3(x-4)} > 0 \quad N > 0 \text{ per } x < 2$$

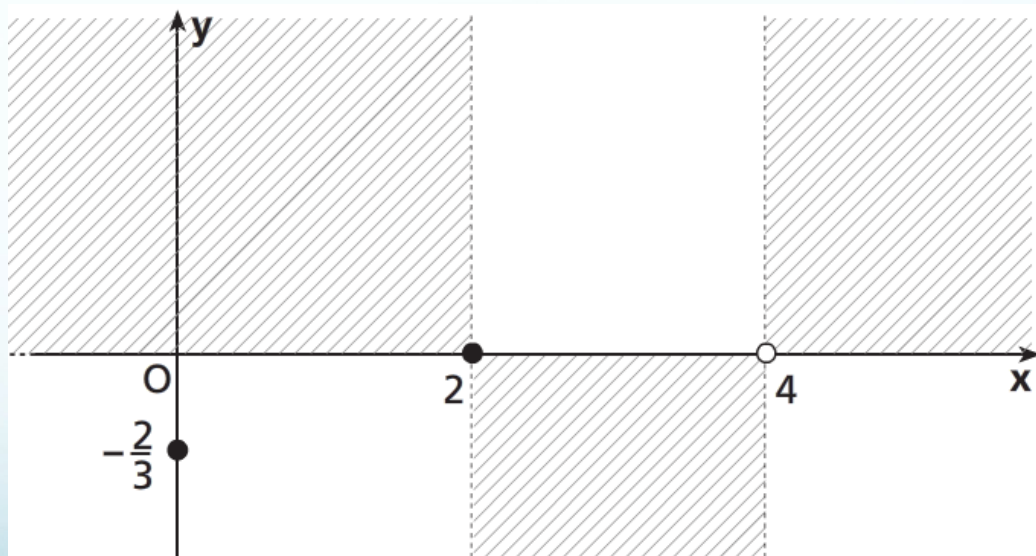
$$D > 0 \text{ per } x > 4.$$

Compiliamo il quadro dei segni (figura b).

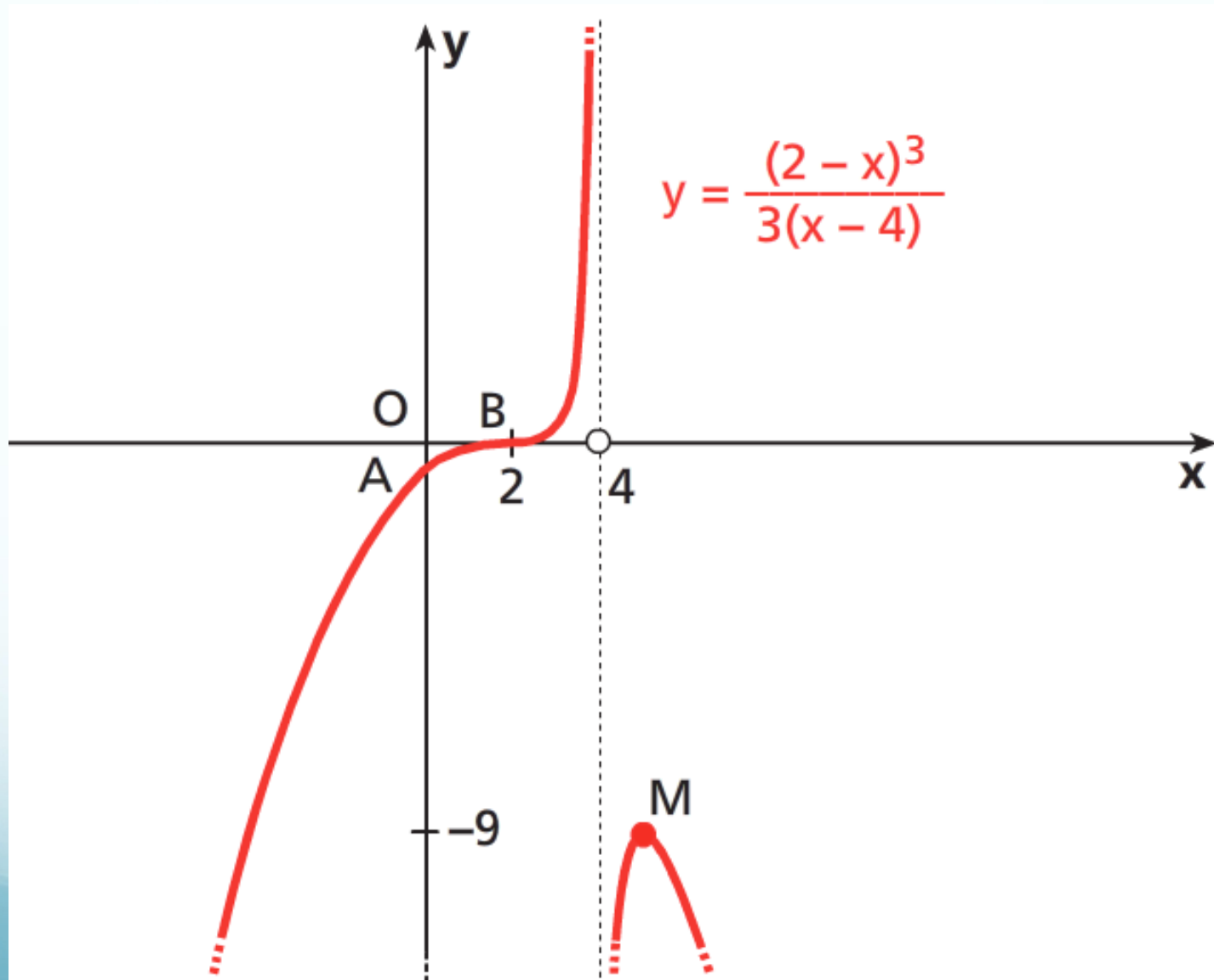
$$f(x) > 0 \quad \text{per } 2 < x < 4.$$

	...	2		4	
$(2-x)^3$	+	0	-		-
$3(x-4)$	-		-	0	+
y	-	0	+	0	-

Rappresentiamo i risultati fin qui ottenuti su un piano cartesiano, tratteggiando le zone del piano in cui la funzione non è definita.



5. Grafico della funzione



$$y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

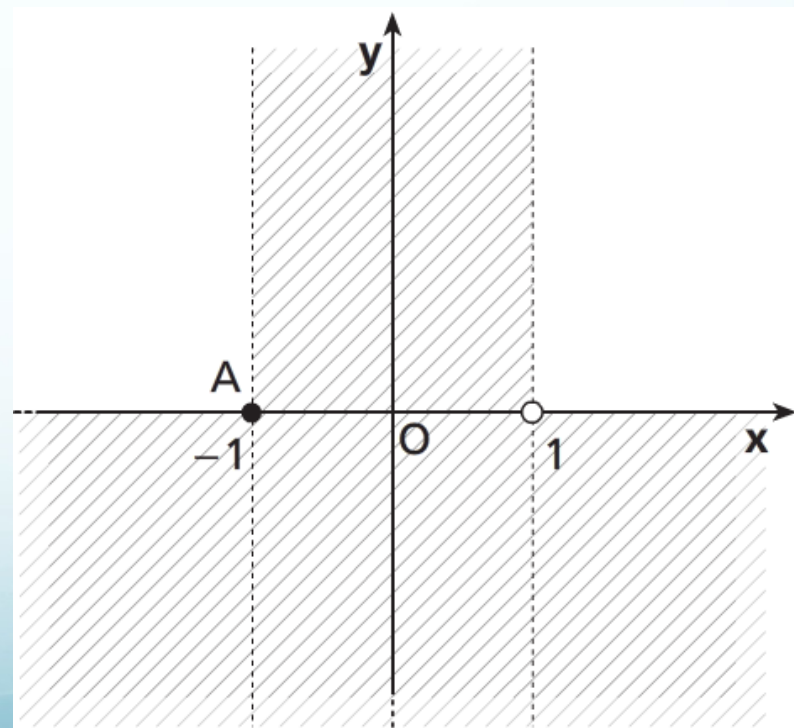
1. Determiniamo il dominio della funzione

$$\frac{x+1}{x-1} \geq 0 \quad \text{per } x \leq -1 \vee x > 1.$$

Il dominio della funzione è

$$x \leq -1 \vee x > 1$$

La funzione non esiste nelle zone tratteggiate del piano cartesiano.



2. Cerchiamo eventuali simmetrie. Calcoliamo:

$$f(-x) = \sqrt{\frac{-x+1}{-x-1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Essendo

$$f(-x) \neq \pm f(x),$$

la funzione non è né pari né dispari.

3. Intersezioni con gli assi.

Non esiste intersezione con l'asse y in quanto $x = 0$ è escluso dal dominio.

Calcoliamo l'intersezione con l'asse x :

$$\begin{cases} y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \\ y = 0 \end{cases}$$

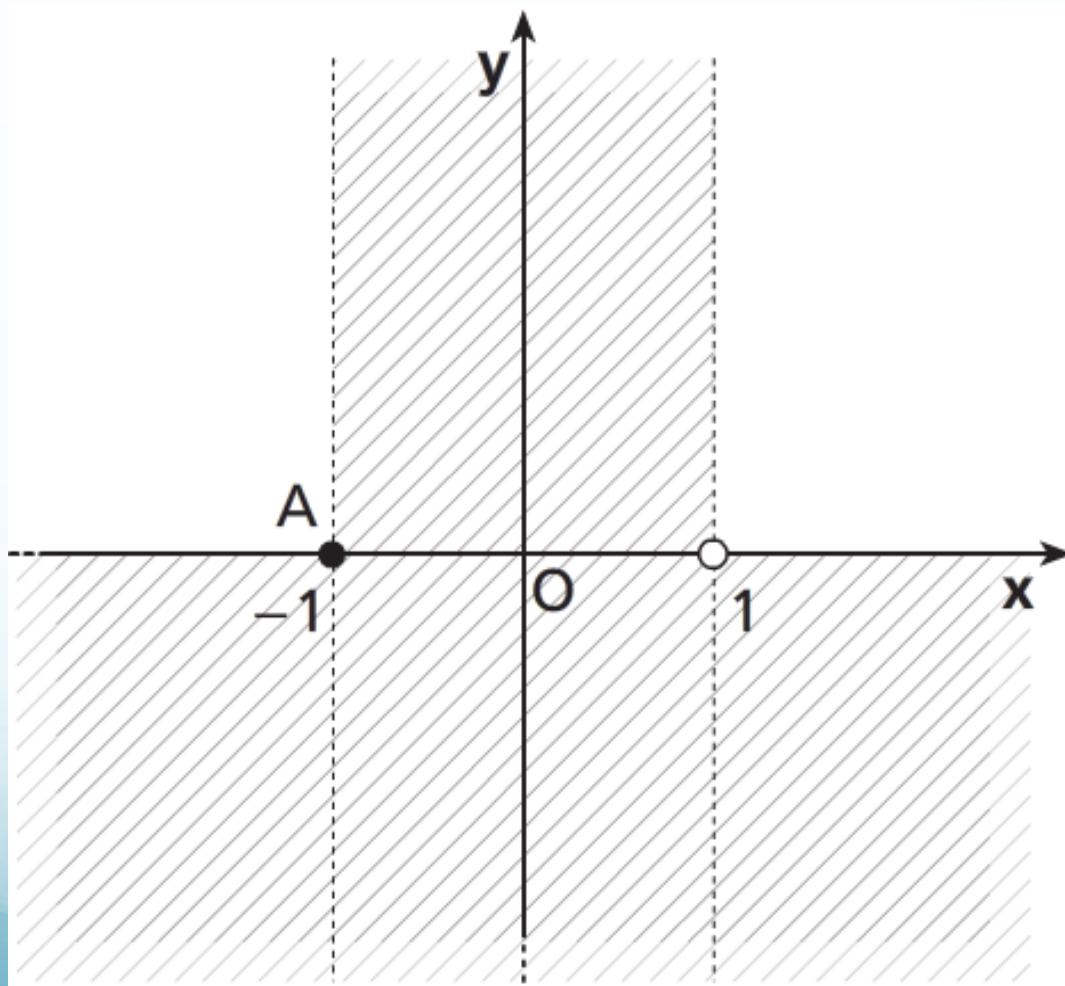
Il punto di intersezione con l'asse x è:

$$A(-1; 0).$$

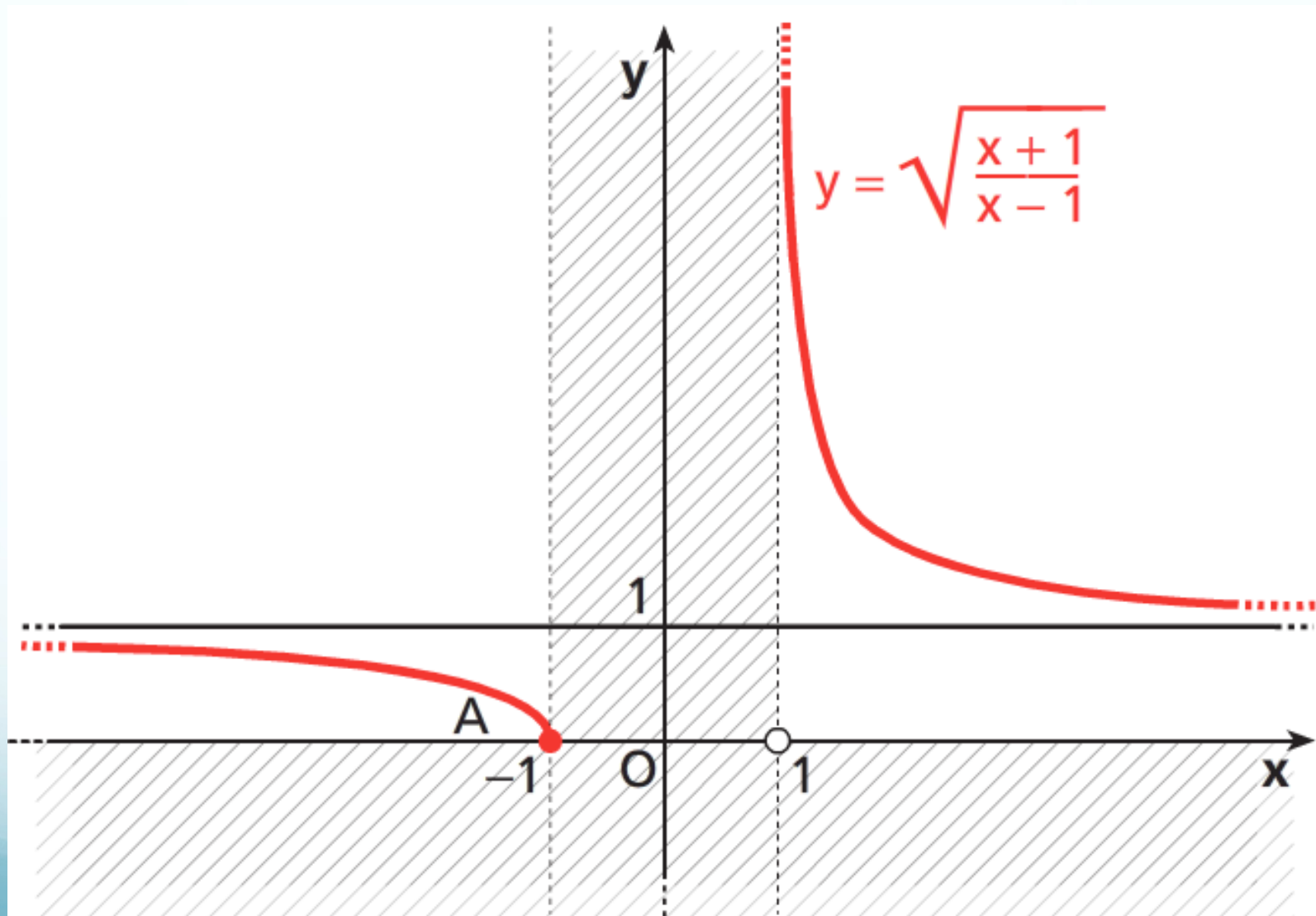
4. Studiamo il segno della funzione.

La funzione è sempre positiva nel suo dominio in quanto un radicale con n pari è sempre positivo o nullo.

Rappresentiamo i risultati fin qui ottenuti su un piano cartesiano, tratteggiando le zone del piano in cui la funzione non è definita.



5. Grafico della funzione



$$y = \left| \frac{1-3x}{x^2-1} \right|$$

1. Tipo di funzione: funzione algebrica fratta in valore assoluto

2. Simmetrie:

$$f(-x) = \left| \frac{1+3x}{x^2-1} \right| \neq f(x) \neq -f(x)$$

La funzione non è né pari e né dispari

3. Dominio:

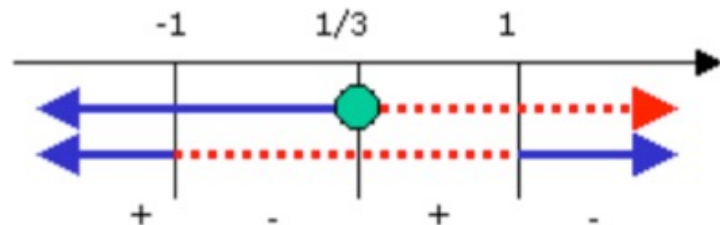
$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

A questo punto conviene esprimere la funzione valore assoluto come:

$$y = \left| \frac{1-3x}{x^2-1} \right| \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1-3x}{x^2-1} \rightarrow \text{se } \frac{1-3x}{x^2-1} \geq 0 \Rightarrow x < -1 \cup \frac{1}{3} \leq x < 1 \\ y_2 = -\frac{1-3x}{x^2-1} \rightarrow \text{se } \frac{1-3x}{x^2-1} < 0 \Rightarrow -1 < x < \frac{1}{3} \cup x > 1 \end{cases}$$

$$N \rightarrow 1-3x \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{1}{3}$$

$$D \rightarrow x^2 - 1 > 0 \rightarrow x < -1 \cup x > 1$$



Non confondere questo grafico con il segno della funzione, in quanto la funzione valore assoluto, per definizione, è sempre positiva. Questo grafico ci dice dove si trovano le funzioni y_1 e y_2 , la cui unione dà luogo alla funzione valore assoluto.

4. Intersezione con gli assi cartesiani:

$$X: \begin{cases} y_1 = \frac{1-3x}{x^2-1} \Rightarrow 1-3x=0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{3}; 0\right) \\ y=0 \end{cases}$$

$$Y: \begin{cases} y_1 = \frac{1-3x}{x^2-1} \Rightarrow y = -1 \Rightarrow \forall y \in \mathbb{R} \\ x=0 \end{cases}$$

La funzione y_1 non interseca l'asse delle y in quanto il valore trovato $y = -1$ è negativo e la funzione valore assoluto è sempre positiva.

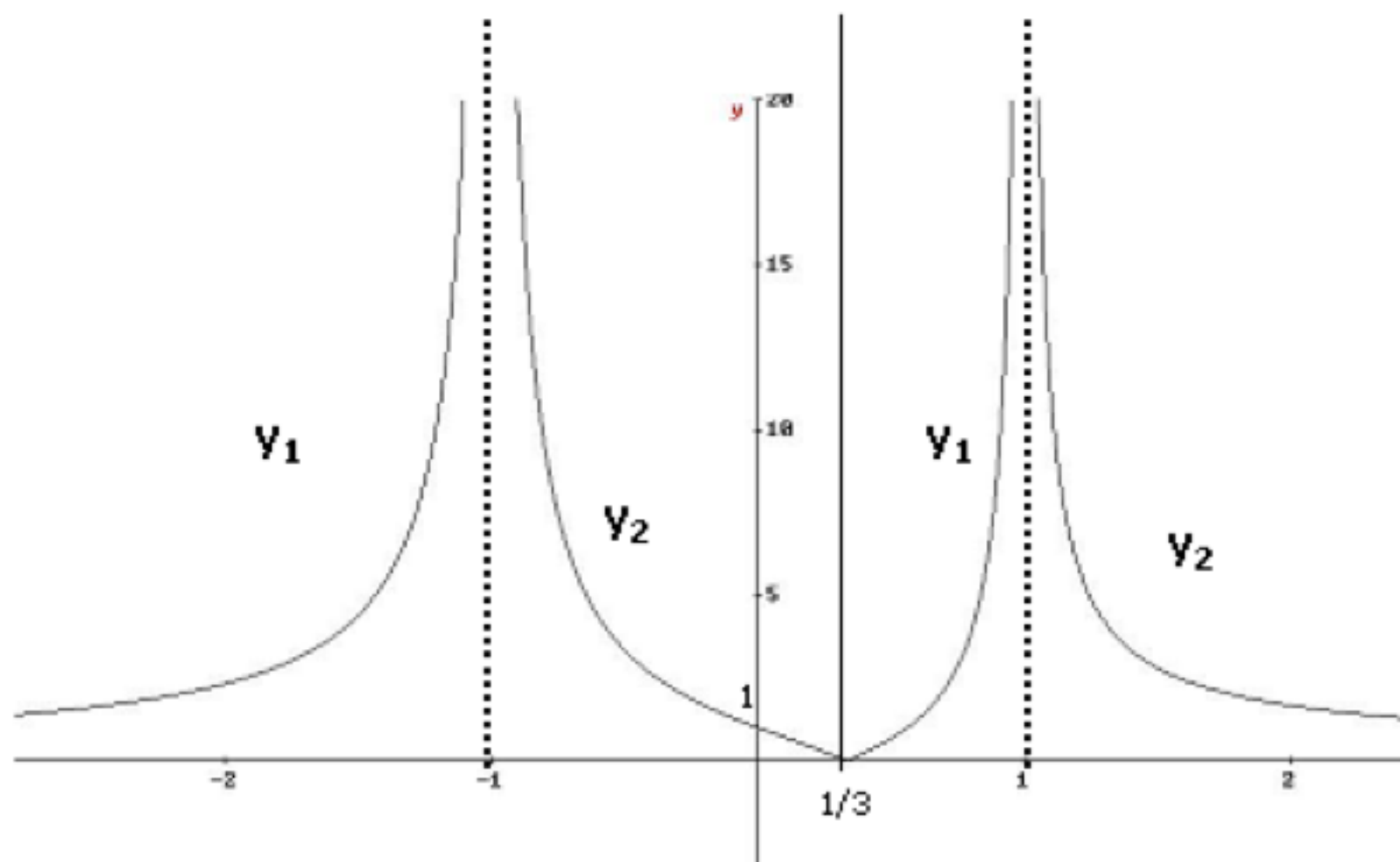
$$X: \begin{cases} y_2 = -\frac{1-3x}{x^2-1} \Rightarrow -1+3x=0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{3}; 0\right) \\ y=0 \end{cases}$$

$$Y: \begin{cases} y_2 = -\frac{1-3x}{x^2-1} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow B = (0; 1) \\ x=0 \end{cases}$$

5. Segno:

La funzione valore assoluto è sempre positiva.

5. Grafico della funzione:



$$y = \left| \frac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \right|$$

1. Tipo di funzione: funzione algebrica fratta in valore assoluto

2. Simmetrie:

$$f(-x) = \left| \frac{2x^2 + x}{x^2 + 1} \right| \neq f(x) \neq -f(x)$$

La funzione non è né pari e né dispari

3. Dominio:

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

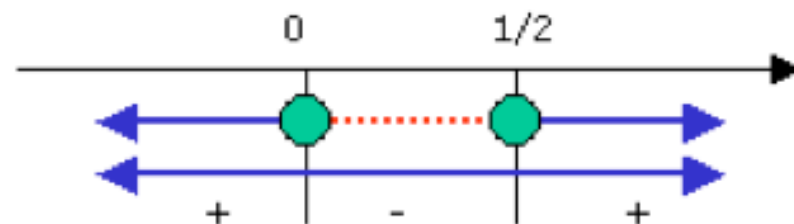
Poiché il denominatore non si annulla mai, in quanto è diverso da zero per qualunque valore della x , non ci sono punti di discontinuità e quindi asintoti verticali.

A questo punto conviene esprimere la funzione valore assoluto come:

$$y = \left| \frac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \right| \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \rightarrow \text{se } \frac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \cup x \geq \frac{1}{2} \\ y_2 = -\frac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \rightarrow \text{se } \frac{2x^2 - x}{x^2 + 1} < 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$N \rightarrow 2x^2 - x \geq 0 \Rightarrow x(2x - 1) \geq 0 \rightarrow x \leq 0 \cup x \geq \frac{1}{2}$$

$$D \rightarrow x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$



Non confondere questo grafico con il segno della funzione, in quanto la funzione valore assoluto, per definizione, è sempre positiva. Questo grafico ci dice dove si trovano le funzioni y_1 e y_2 , la cui unione dà luogo alla funzione valore assoluto.

4. Intersezione con gli assi cartesiani:

$$X: \begin{cases} y_1 = \frac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - x = 0 \Rightarrow x(2x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0; x = \frac{1}{2} \Rightarrow A = (0;0); B = \left(\frac{1}{2};0\right)$$

$$X: \begin{cases} y_2 = -\frac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow -2x^2 + x = 0 \Rightarrow x(-2x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0; x = \frac{1}{2} \Rightarrow A = (0;0); B = \left(\frac{1}{2};0\right)$$

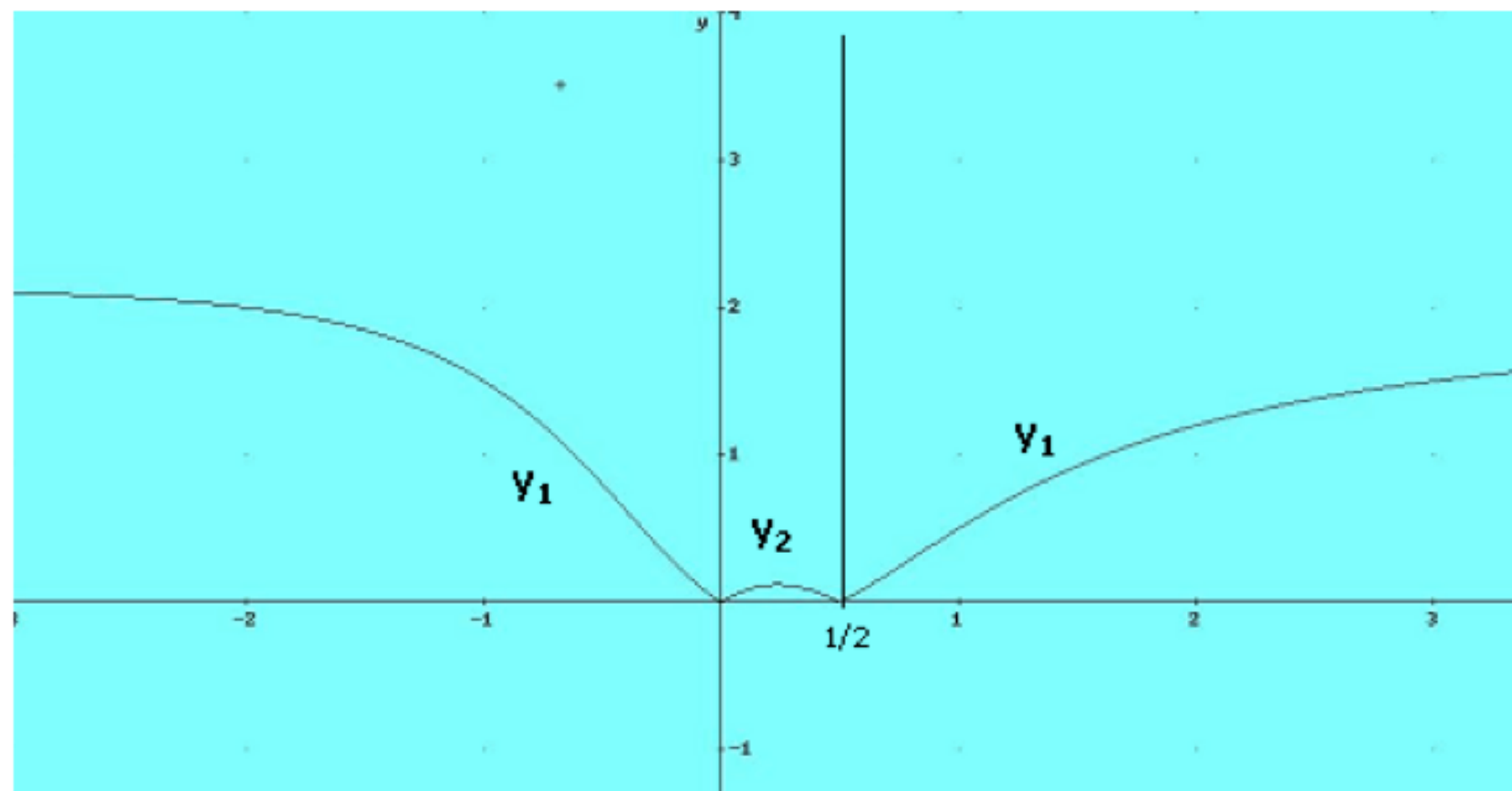
$$Y: \begin{cases} y_1 = \frac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow C = (0;0)$$

$$Y: \begin{cases} y_2 = -\frac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow C = (0;0)$$

5. Segno:

La funzione valore assoluto è sempre positiva.

6. Grafico della funzione:



LE SUCCESSIONI NUMERICHE

Ci occupiamo adesso di particolari funzioni che hanno come dominio i numeri naturali e come insieme di arrivo i numeri reali.

DEFINIZIONE

Una **successione numerica** a è una funzione che associa a ogni numero naturale n un numero reale a_n :

$$a : n \in N \rightarrow a_n \in \mathfrak{R}$$

n (*indice della successione*) =
variabile indipendente

a_n (termine della successione) =
variabile dipendente

Una successione è dunque costituita da un insieme di numeri ordinato e infinito:

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Esempio

La successione costituita da tutti i numeri naturali pari è una funzione a che associa a ogni numero naturale un numero pari:

$$a : A \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$0 \rightarrow a_0 = 0$$

$$1 \rightarrow a_1 = 2$$

$$2 \rightarrow a_2 = 4$$

.....

I numeri naturali sono infiniti, per cui sarebbe impossibile descrivere la successione tramite tutti i suoi termini.

Vediamo alcune rappresentazioni.

✓ Rappresentazione per enumerazione

Questa rappresentazione è efficiente solo se è facile, leggendo i primi termini, dedurre quali sono gli altri.

Esempio

La seguente lista di termini:

5, 10, 15, 20, 25,

rappresenta la successione dei multipli di 5.

✓ Rappresentazione mediante funzione

E' il modo più comune per rappresentare una successione numerica. Consiste nello scrivere esplicitamente la relazione che lega l'indice n (variabile indipendente) e il termine a_n (variabile dipendente).

Esempio

$$a_n = 2n + 1 \quad n \in N$$

Per rappresentare i primi termini della successione, basta sostituire a n i valori 0, 1, 2, 3,:

$$a_0=1, a_1=3, a_2=5, a_3=7, \dots$$

Da questi primi quattro numeri si vede facilmente che si tratta dei numeri dispari.

Esempio

$$a_n = \frac{2n+1}{3+n^2} \quad n \in \mathbb{N}$$

Sostituendo a n i valori 0, 1, 2, 3, ..., si ottengono i seguenti termini:

$$\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{7}{12}, \dots$$

In questo caso non è facile capire qual è il sesto termine, per cui la rappresentazione per enumerazione è inefficace.

✓ Rappresentazione ricorsiva o per ricorsione

Consiste nel fornire il primo termine della successione a_0 e una relazione che lega il termine generale a_n a quello precedente a_{n-1} :

$$\begin{cases} a_0 \\ a_n = f(a_{n-1}) \quad \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Esempio

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \quad \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Ogni termine si ottiene dal precedente sommando 2. A partire dal primo termine si determinano quelli successivi:

$$a_1 = a_0 + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$a_2 = a_1 + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$a_3 = a_2 + 2 = 5 + 2 = 7$$

...

Abbiamo riottenuto la successione dei numeri dispari.

Esempio

$$\begin{cases} a_0 = 0, & a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Ogni termine è dato dalla somma dei due precedenti. A partire dai primi due termini, otteniamo:

$$a_2 = a_1 + a_0 = 1 + 0 = 1$$

$$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$$

...

La successione che abbiamo ottenuto si chiama **successione di Fibonacci**.

Una successione è **crescente** se ogni termine è maggiore del suo precedente:

$$\forall i, k \in \mathbb{N} \text{ se } i < k \text{ si ha } a_i < a_k$$

Esempio:

1, 2, 4, 7, 11, 16, ...

Una successione è **decrescente** se ogni termine è minore del suo precedente:

$$\forall i, k \in \mathbb{N} \text{ se } i < k \text{ si ha } a_i > a_k$$

Esempio:

10, 8, 5, 3, 0, -2, -5, ...

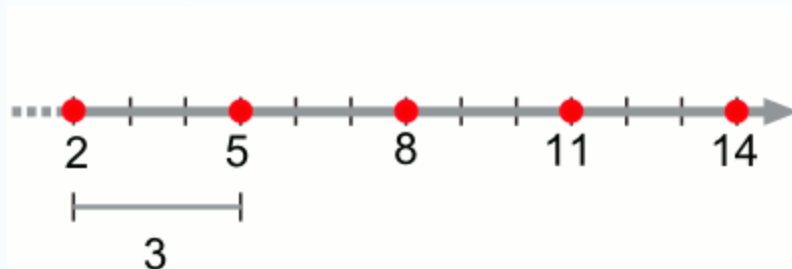
Una successione è **costante** se ogni termine è uguale al suo precedente.

Esempio:

6, 6, 6, 6, 6, ...

LE PROGRESSIONI

ARITMETICHE



DEFINIZIONE

Una successione numerica si dice **progressione aritmetica** quando la differenza fra ogni termine e il suo precedente è costante; tale differenza si dice **ragione**.

Quindi, se a_n è il termine n -esimo di una progressione aritmetica di ragione d :

$$a_n = a_{n-1} + d ,$$

e anche:

$$a_n = a_{n+1} - d .$$

ESEMPIO

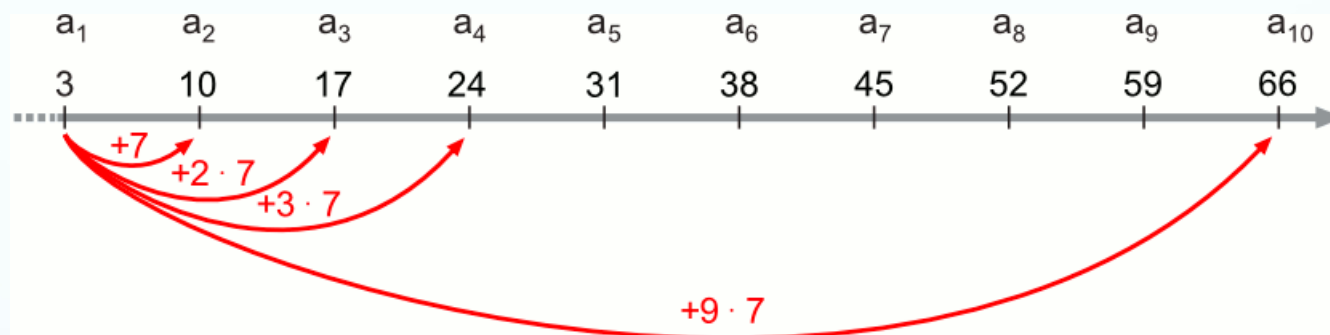
La successione
10, 15, 20, 25, 30, 35, ...
è una progressione aritmetica di
ragione 5.

Si ha, per esempio: $35 = a_6 = a_5 + 5$,
 $30 = a_5 = a_6 - 5$.

PROGRESSIONE ARITMETICA

ESEMPIO

La progressione aritmetica di ragione 7 originata da $a_1 = 3$ è:



TEOREMA

In una progressione aritmetica, il termine a_n è uguale alla somma del primo termine a_1 con il prodotto della ragione d per $(n - 1)$:

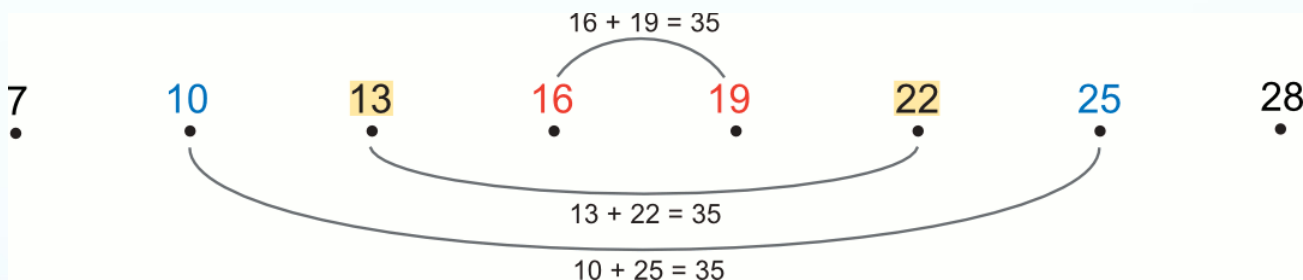
$$a_n = a_1 + (n - 1) d, \text{ con } n > 0 .$$

TERMINI EQUIDISTANTI DAGLI ESTREMI

ESEMPIO

Scriviamo i primi 8 termini di una progressione aritmetica originata dal valore 7 con ragione uguale a 3.

Sommiamo a due a due i termini equidistanti dagli estremi.



TEOREMA

Nei primi n termini di una progressione aritmetica, la somma di due termini equidistanti dagli estremi è costante e uguale alla somma dei termini estremi.

DIMOSTRAZIONE

Siano a_1 e a_n i due estremi, d la ragione, x e y i termini equidistanti da a_1 e a_n .

$$\rightarrow x = a_1 + c d, \quad y = a_n - c d$$

$$\rightarrow x + y = a_1 + c d + a_n - c d = a_1 + a_n$$

PROGRESSIONE ARITMETICA

TEOREMA

La somma S_n dei primi n termini di una progressione aritmetica è uguale al prodotto di n per la semisomma dei due termini estremi a_1 e a_n .

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

DIMOSTRAZIONE

Scriviamo S_n per esteso:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$

e in ordine inverso:

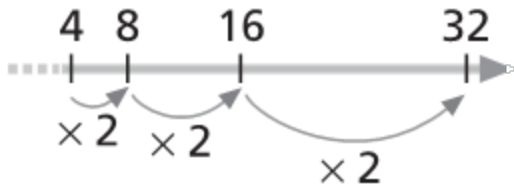
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Sommando termine a termine:

$$2 S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

$$\longrightarrow 2 S_n = n (a_1 + a_n) \longrightarrow S_n = n \frac{a_1 + a_n}{2}$$

GEOMETRICHE



DEFINIZIONE

Una successione numerica si dice **progressione geometrica** quando il quoziente fra ogni termine e il suo precedente è costante; tale rapporto si dice **ragione**.

Quindi, se a_n è il termine n -esimo di una progressione geometrica di ragione q :

$$a_n = q a_{n-1} ,$$

e anche:

$$a_n = \frac{a_{n+1}}{q} .$$

Se $q > 0$, i termini sono tutti o **positivi** o **negativi**;
se $q < 0$, i termini hanno **segno alternato**.

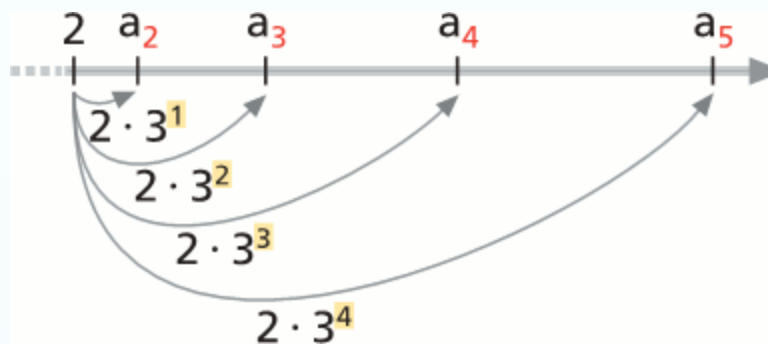
ESEMPIO

$a_1 = 6, q = 2$: 6, 12, 24, 48, ...
 $a_1 = -6, q = 2$: -6, -12, -24, -48, ...
 $a_1 = -6, q = -2$: -6, 12, -24, 48, ...

PROGRESSIONE GEOMETRICA

ESEMPIO

La progressione geometrica di ragione 3 originata da $a_1 = 2$ è:



TEOREMA

In una progressione geometrica, il termine a_n è uguale al prodotto del primo termine a_1 per la potenza della ragione q con esponente $(n - 1)$:

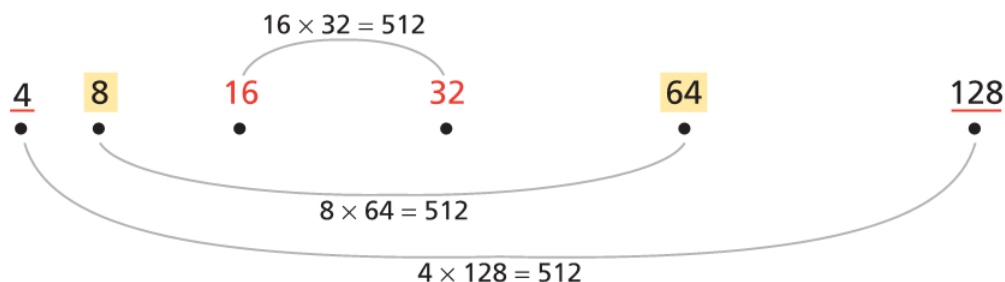
$$a_n = a_1 q^{(n-1)}, \text{ con } n > 0.$$

TERMINI EQUIDISTANTI DAGLI ESTREMI

ESEMPIO

Scriviamo i primi 6 termini di una progressione geometrica originata dal valore 4 con ragione uguale a 2.

Moltiplichiamo a due a due i termini equidistanti dagli estremi.



TEOREMA

Nei primi n termini di una progressione geometrica, il prodotto di due termini equidistanti dagli estremi è costante e uguale al prodotto dei termini estremi.

DIMOSTRAZIONE

Siano a_1 e a_n i due estremi, q la ragione, x e y i termini equidistanti da a_1 e a_n .

$$\begin{aligned} \longrightarrow x &= a_1 q^c, \quad y = a_n q^{-c} \\ \longrightarrow x y &= a_1 q^c a_n q^{-c} = a_1 a_n \end{aligned}$$

PROGRESSIONE GEOMETRICA

TEOREMA

La somma S_n dei primi n termini di una progressione geometrica di ragione q diversa da 1 è:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

DIMOSTRAZIONE

Scriviamo S_n per esteso:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

Sostituendo $a_n = a_1 q^{(n-1)}$:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1}.$$

Moltiplicando tutto per q :

$$S_n q = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^n.$$

Sottraendo membro a membro le ultime due equazioni:

$$\begin{aligned} S_n q - S_n (q - 1) &= a_1 (q^n - 1) \rightarrow S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}. \end{aligned}$$

PROGRESSIONE ARITMETICA

ESERCIZIO GUIDA

- a) Calcoliamo il sesto termine a_6 di una progressione aritmetica di ragione $d = 4$ il cui primo termine è $a_1 = 5$.
- b) Calcoliamo la ragione d di una progressione aritmetica il cui primo termine è $a_1 = 32$ e il cui sesto termine è $a_6 = 42$.

- a) Utilizziamo la formula:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d.$$

Essendo $n = 6$, $a_1 = 5$ e $d = 4$, otteniamo:

$$a_6 = 5 + (6 - 1) \cdot 4 = 25.$$

- b) Sostituendo in $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$, abbiamo:

$$42 = 32 + (6 - 1) \cdot d \rightarrow 10 = 5 \cdot d \rightarrow d = 2.$$

La progressione è la seguente:

32, 34, 36, 38, 40, 42, ...

DI UNA PROGRESSIONE ARITMETICA

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo la somma dei primi sei multipli di 5 diversi da 0.

I numeri di cui vogliamo conoscere la somma sono i primi sei termini della progressione aritmetica di primo termine 5 e ragione 5: 5, 10, 15, 20, 25, 30.

Possiamo applicare la formula $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$.

Sostituendo i nostri dati, $n = 6$, $a_1 = 5$, $a_6 = 30$, otteniamo:

$$S_6 = 6 \cdot \frac{5 + 30}{2} = 105.$$

PROGRESSIONE GEOMETRICA

ESERCIZIO GUIDA

- a) Calcoliamo il sesto termine, a_6 , di una progressione geometrica di ragione $q = 2$ il cui primo termine è $a_1 = 5$.
- b) Calcoliamo la ragione di una progressione geometrica di 6 termini i cui estremi sono, nell'ordine, 5 e 160.

-
- a) Per calcolare il sesto termine utilizziamo la formula generale $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Essendo $n = 6$, $a_1 = 5$ e $q = 2$, otteniamo: $a_6 = 5 \cdot 2^{6-1} = 5 \cdot 32 = 160$.

La progressione è 5, 10, 20, 40, 80, 160, ...

- b) Per risolvere il problema utilizziamo la relazione $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Sostituiamo nella formula i valori del problema: $n = 6$, $a_1 = 5$ e $a_6 = 160$, e otteniamo:

$$160 = 5 \cdot q^5 \rightarrow q^5 = 32 \rightarrow q = 2.$$

La progressione è: 5, 10, 20, 40, 80, 160, ...

DI UNA PROGRESSIONE GEOMETRICA

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo la somma delle prime sei potenze di 3 con esponente diverso da 0.

I numeri di cui vogliamo calcolare la somma sono i primi sei termini della progressione geometrica di ragione 3 e primo termine 3:

3, 9, 27, 81, 243, 729.

La formula che possiamo usare per risolvere il problema è $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Sostituendo i valori nella formula, cioè $n = 6$, $a_1 = 3$, $q = 3$, otteniamo:

$$S_6 = 3 \cdot \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 3 \cdot \frac{729 - 1}{2} = 3 \cdot \frac{728}{2} = 1092.$$