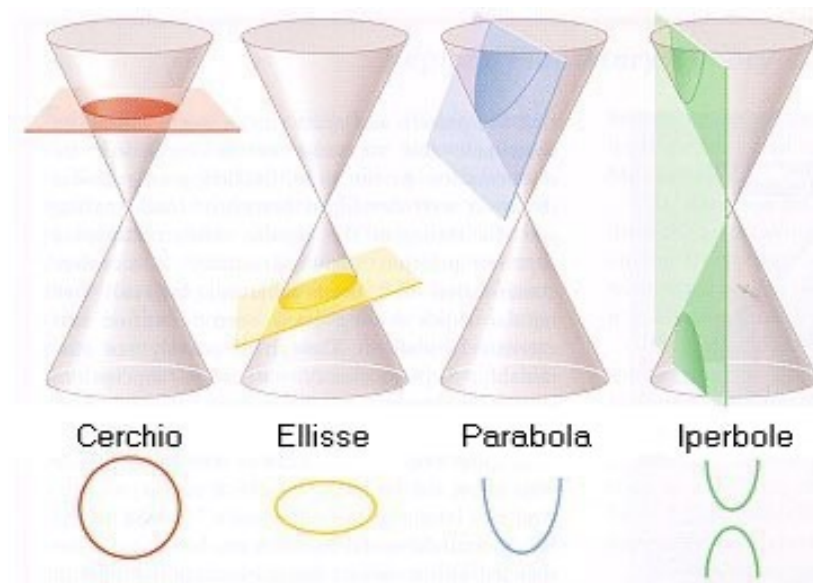


Geometria Analitica

LA PARABOLA

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

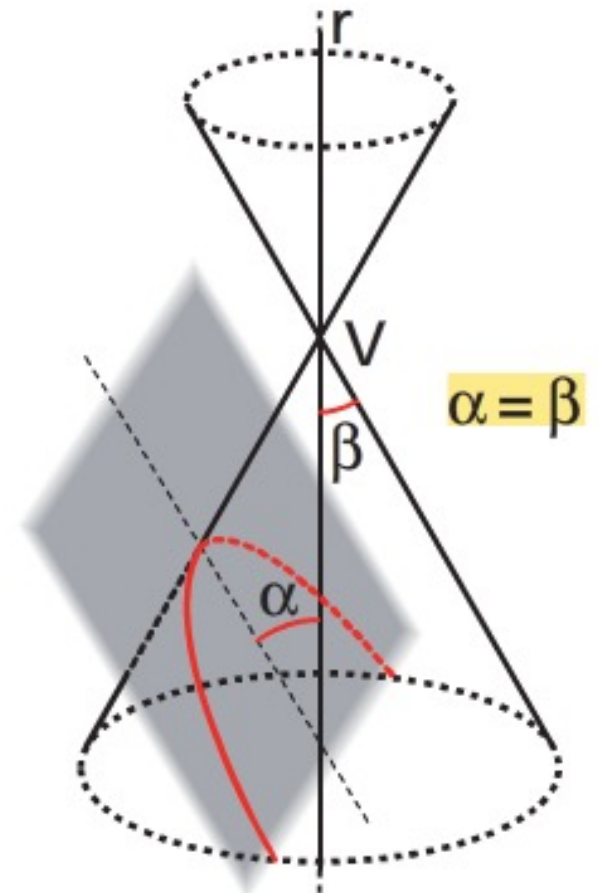
MATERIA: Matematica



La *parabola* fa parte di un insieme di curve (circonferenza, ellisse, iperbole) chiamate *coniche*, perché si possono ottenere tagliando un cono con un piano.

Consideriamo un cono di asse r con angolo al vertice 2β . Sezioniamo la superficie del cono con un piano che formi con l'asse del cono un angolo $\alpha = \beta$.

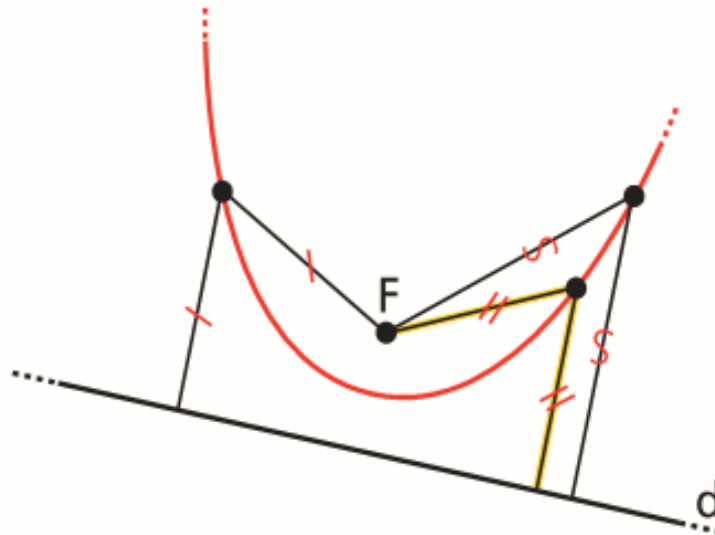
La figura che si ottiene dall'intersezione è una *parabola*.

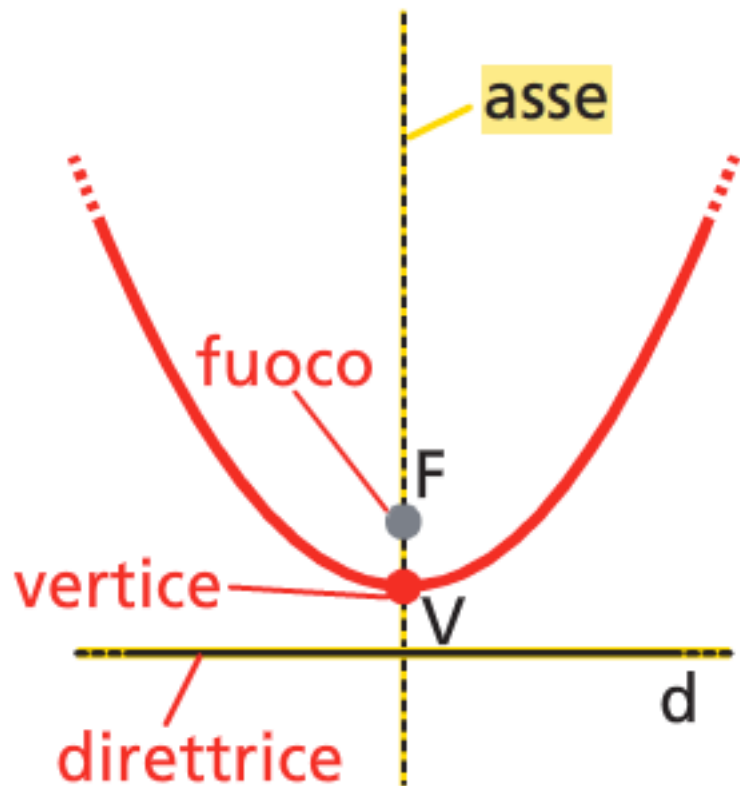


DEFINIZIONE

Scegliamo sul piano un punto F e una retta d . Possiamo tracciare sul piano i punti equidistanti da F e da d .

Il luogo geometrico di questi punti è
detto ***parabola***.

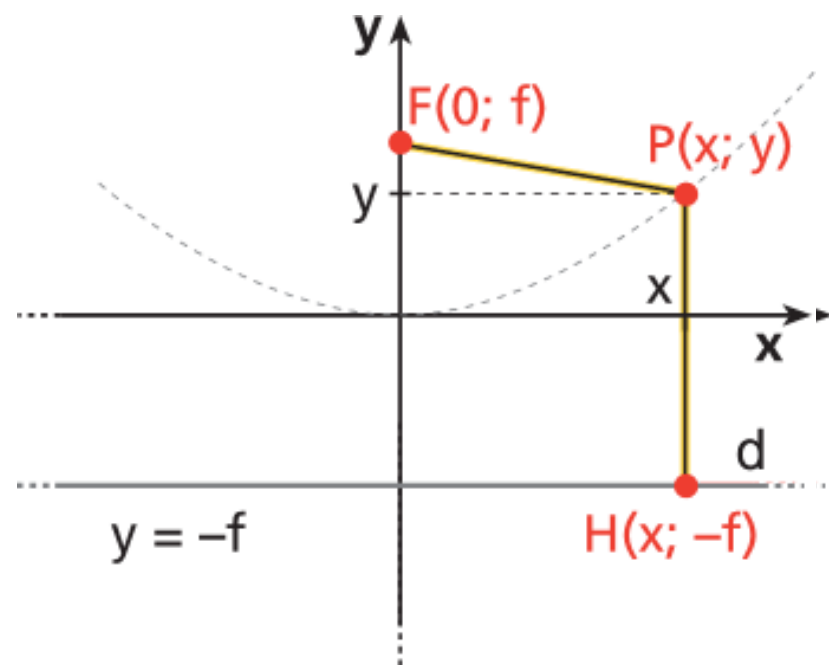




Il punto F e la retta d sono detti, rispettivamente, **fuoco** e **direttrice** della parabola.

La retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice si chiama **asse** della parabola. Il punto V in cui la parabola interseca il suo asse è detto **vertice** della parabola.

Determiniamo l'equazione della parabola con asse coincidente con l'asse y e vertice nell'origine degli assi cartesiani.



Fissiamo il **fuoco** nel punto $F(0;f)$ e la **direttrice** nella retta d di equazione $y = -f$

Indichiamo con $P(x;y)$ un punto generico equidistante da F e da d :

$$PF = PH \rightarrow \sqrt{x^2 + (y - f)^2} = |y + f|$$

$$x^2 + (y - f)^2 = (y + f)^2$$

$$x^2 - 4fy = 0 \rightarrow y = \frac{1}{4f}x^2$$

Posto $a = 1/4f$, l'equazione precedente diventa:

Equazione della parabola con vertice
nell'origine e asse verticale:

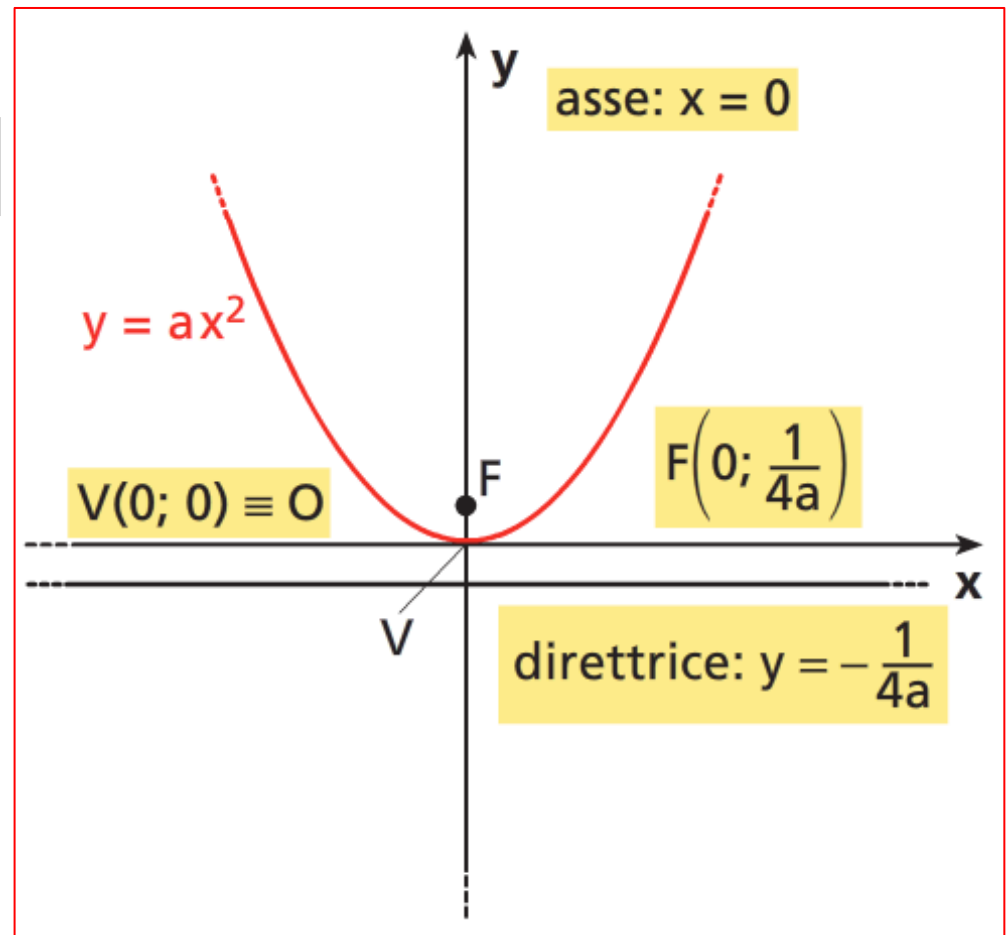
$$y = ax^2$$

Coordinate del fuoco:

$$F\left(0; \frac{1}{4a}\right)$$

*Equazione della
direttrice:*

$$y = -\frac{1}{4a}$$

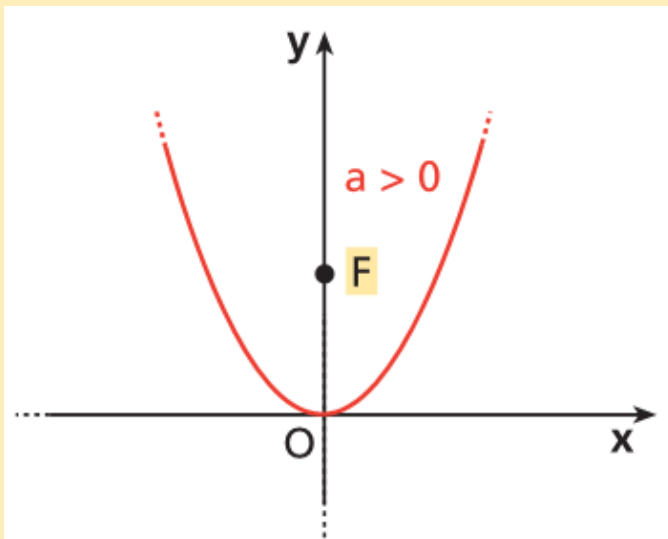


$$a > 0$$

$y = ax^2$ è **positiva** o nulla

la distanza focale è $f > 0$

F ha ordinata **positiva**



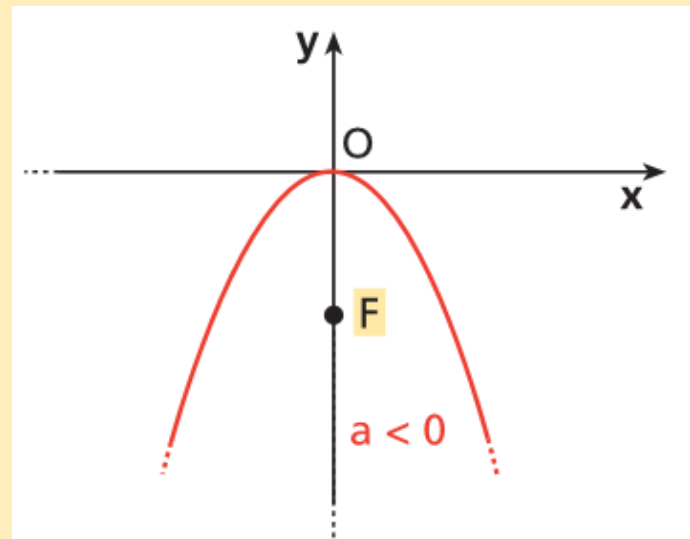
Concavità rivolta **verso l'alto**

$$a < 0$$

$y = ax^2$ è **negativa** o nulla

la distanza focale è $f < 0$

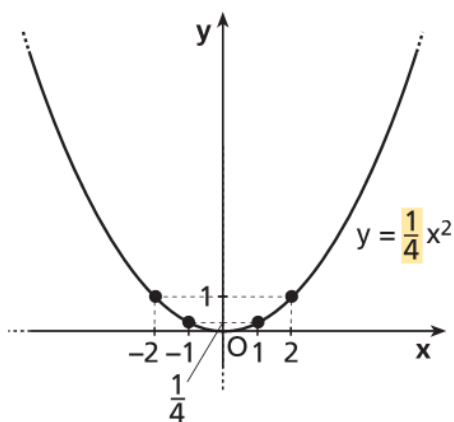
F ha ordinata **negativa**



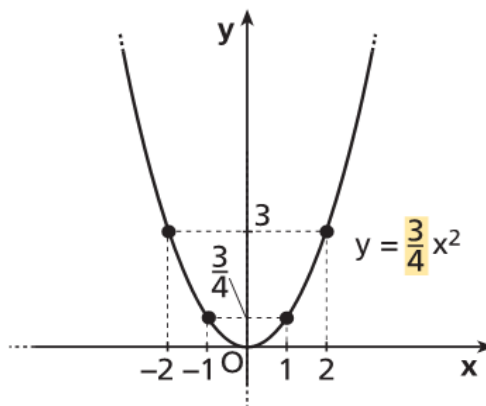
Concavità rivolta **verso il basso**.

Come si comporta l'apertura della parabola al variare del coefficiente a ?

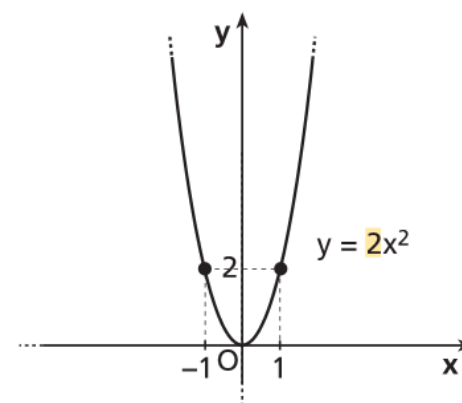
$$a = \frac{1}{4}$$



$$a = \frac{3}{4}$$



$$a = 2$$

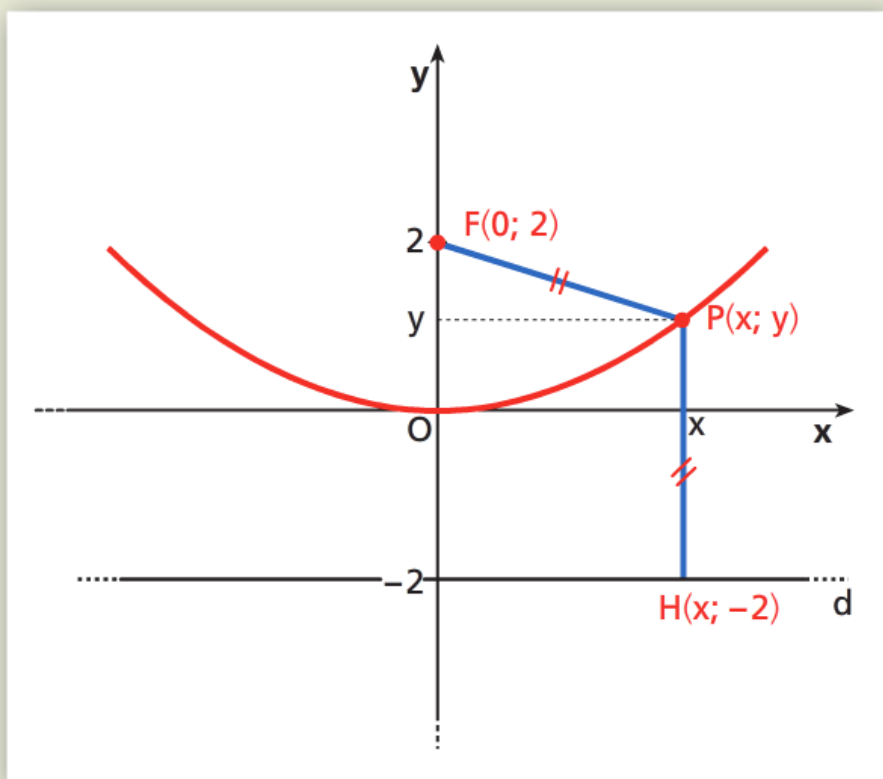


Per $a > 0$, all'aumentare di a diminuisce l'apertura della parabola.

ESERCIZIO GUIDA

Applicando la definizione, determiniamo l'equazione della parabola che ha fuoco $F(0; 2)$ e direttrice d di equazione $y = -2$.

La parabola è il luogo dei punti equidistanti dal fuoco e dalla direttrice. Disegniamo il fuoco F e la direttrice d . Indichiamo con $P(x; y)$ un punto generico della parabola e con H il piede della perpendicolare condotta da P alla direttrice.



Se $P(x; y)$ sta sulla parabola, le sue coordinate soddisfano la condizione $\overline{PF} = \overline{PH}$.

Pertanto, poiché

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4}$$

$$\overline{PH} = |y - (-2)| = |y + 2|$$

abbiamo:

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} = |y + 2|.$$

Eleviamo i due membri al quadrato e svolgiamo i calcoli:

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = (y + 2)^2$$

$$x^2 + \cancel{y^2} - 4y + \cancel{4} = \cancel{y^2} + 4y + \cancel{4}$$

$$x^2 = 8y.$$

Ricaviamo y :

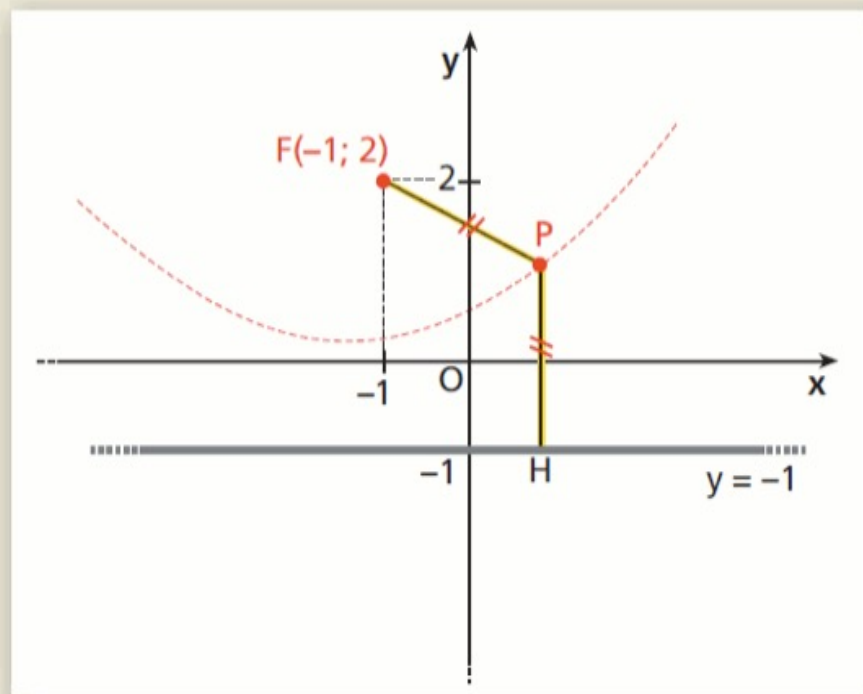
$$y = \frac{x^2}{8}.$$

Questa è l'equazione della parabola richiesta.

ESERCIZIO GUIDA

Una parabola ha direttrice di equazione $y = -1$ e fuoco nel punto $F(-1; 2)$. Determiniamo l'equazione della parabola mediante la definizione.

La parabola è per definizione il luogo dei punti equidistanti dal fuoco e dalla direttrice. Pertanto, preso un punto $P(x; y)$ sulla parabola, deve valere la relazione $\overline{PH} = \overline{PF}$.



Poiché

$$\overline{PF} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2},$$
$$\overline{PH} = |y+1|,$$

uguagliando le due espressioni si ottiene:

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = |y+1|.$$

Eleviamo al quadrato i membri dell'equazione per eliminare la radice ed eseguiamo i calcoli:

$$\begin{aligned}(x+1)^2 + (y-2)^2 &= (y+1)^2 \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 &= y^2 + 2y + 1 \\ x^2 + 2x + 5 &= 6y + 1 \\ 6y &= x^2 + 2x + 4.\end{aligned}$$

Perciò l'equazione della parabola è:

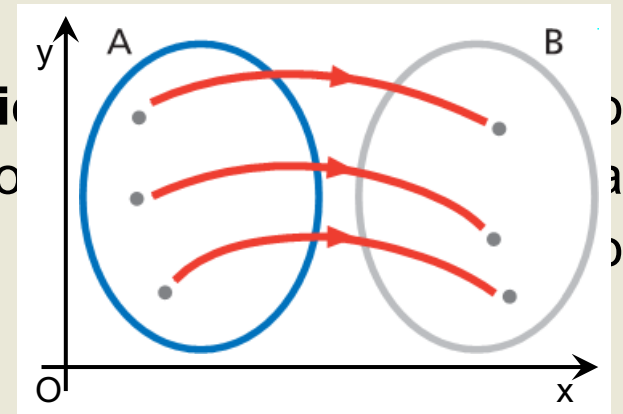
$$y = \frac{x^2}{6} + \frac{x}{3} + \frac{2}{3}.$$

➤ **Equazione di una parabola generica con asse verticale**

Ci servono alcuni elementi sulle trasformazioni geometriche

DEFINIZIONE

Una **trasformazione geometrica** è una corrispondenza biunivoca a ogni punto del piano uno del piano stesso.

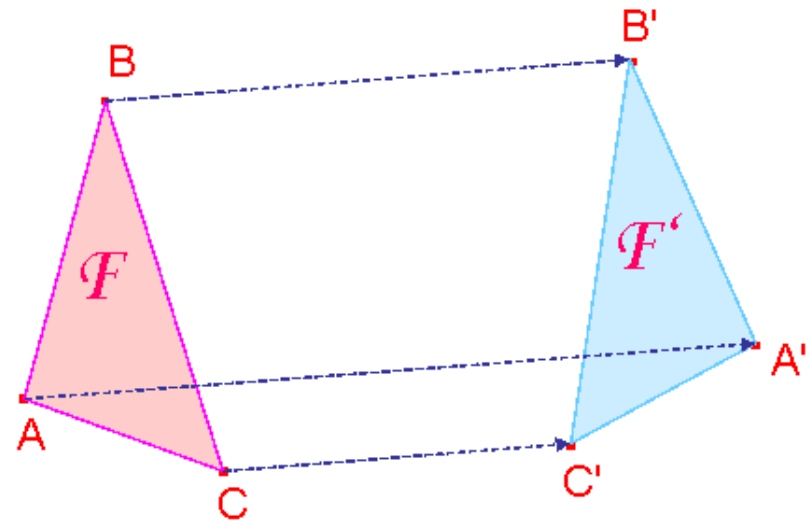


ESEMPIO

$$\begin{cases} x' = x - 2y + 6 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = 2 - 2 \cdot 1 + 6 \\ y' = -2 + 1 - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = 6 \\ y' = -2 \end{cases}$$

$\uparrow$ $P(2; 1)$ $\downarrow$ $P'(6; -2)$

Le **isometrie** sono tutte le trasformazioni (movimenti, spostamenti) che mantengono inalterate le figure, più precisamente che mantengono inalterate le caratteristiche misurabili (la lunghezza dei lati, l'ampiezza degli angoli).



Una **traslazione** è una isometria di equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

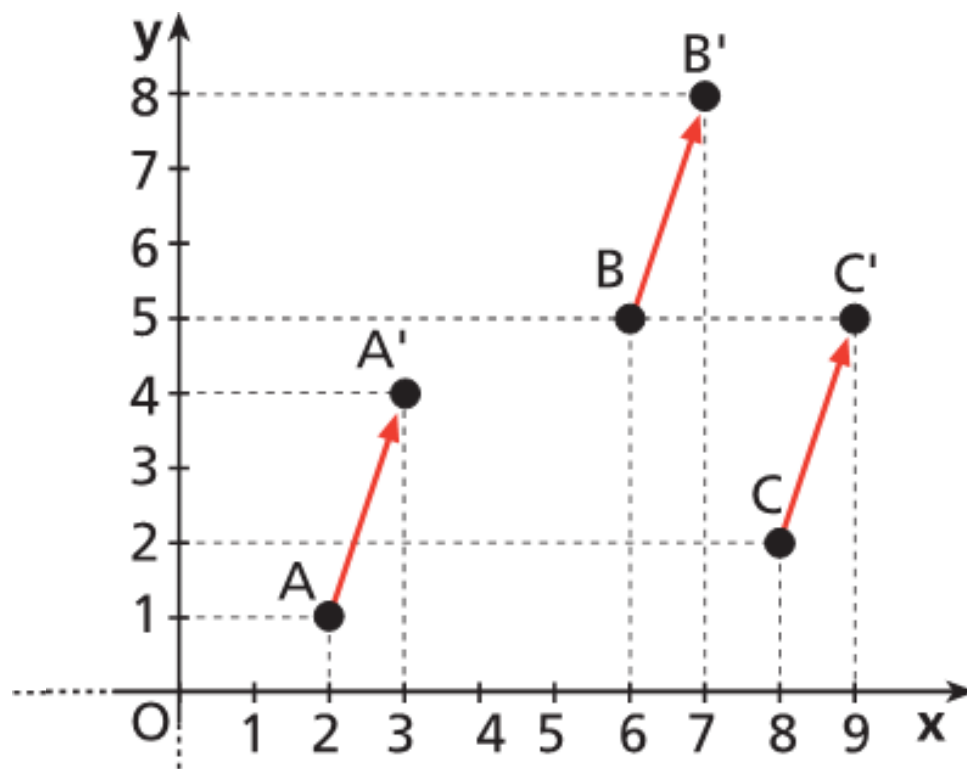
Le equazioni permettono di trovare le coordinate di un punto $P'(x';y')$ note quelle del punto $P(x;y)$.

ESEMPIO

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 3 \end{cases}$$

Ogni punto viene traslato aumentando di 1 unità la sua ascissa e di 3 unità la sua ordinata.

I segmenti orientati AA' , BB' , CC' sono tutti equipollenti e si chiamano **vettori**.



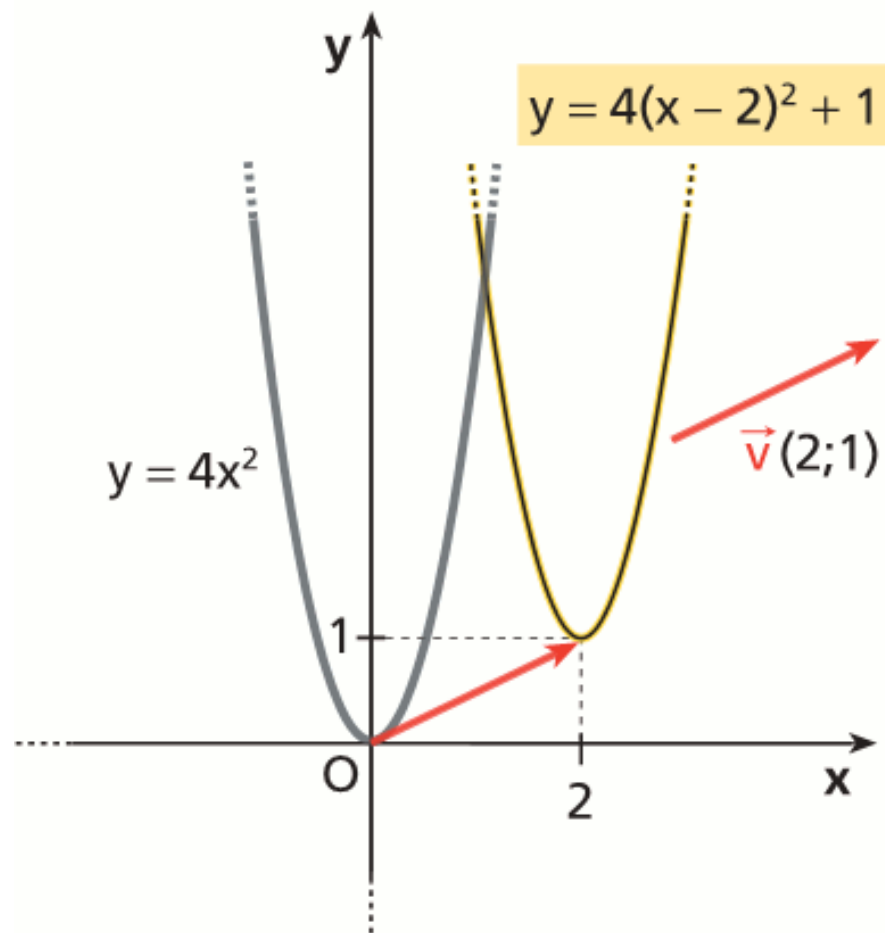
ESEMPIO

Data la funzione (parabola) $y = 4x^2$ trasliamo il suo grafico secondo il vettore $\vec{v}(2;1)$

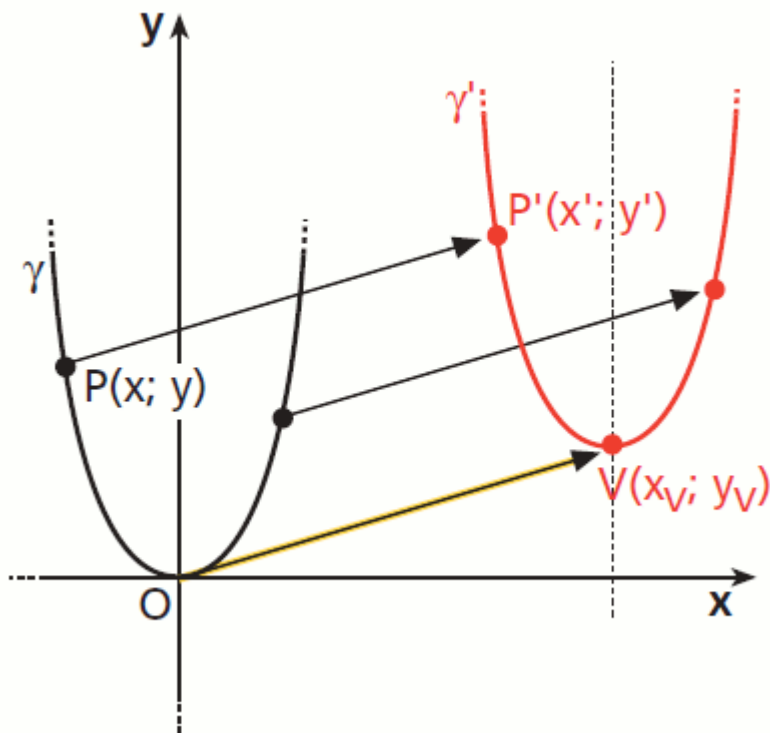
$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' - 1 \end{cases}$$

$$y' - 1 = 4(x' - 2)^2 \longrightarrow y' = 4(x' - 2)^2 + 1$$

$$y = 4(x - 2)^2 + 1 \rightarrow y = 4x^2 - 16x + 17$$



Generalizziamo:



La trasformazione:

$$\begin{cases} x' = x + x_V \\ y' = y + y_V \end{cases}$$

trasla i punti del piano.

Sotto questa trasformazione, la parabola di equazione $y = ax^2$ diventa:

$$y - y_V = a(x - x_V)^2$$

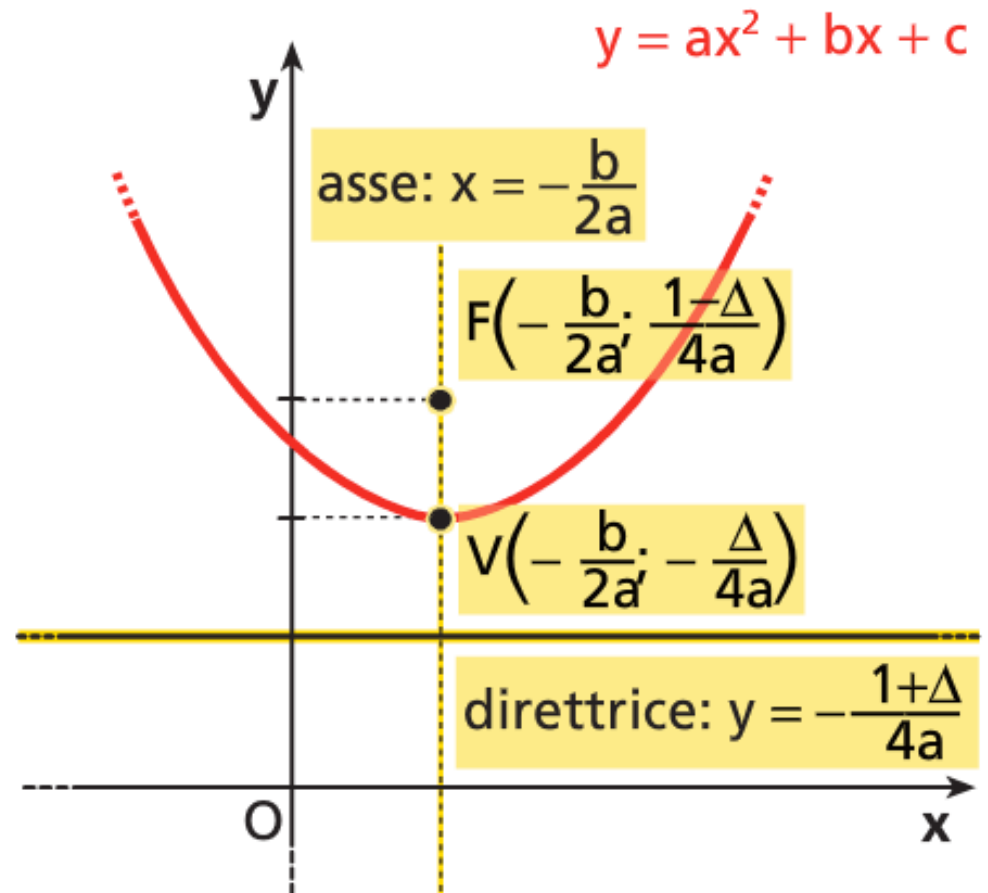
In particolare, le coordinate del **vertice** diventano:

$$V(x_V; y_V)$$

Esplicitiamo y , svolgiamo i calcoli e ordiniamo:

EQUAZIONE DELLA
PARABOLA CON ASSE
PARALLELO ALL'ASSE Y

$$y = ax^2 + bx + c$$



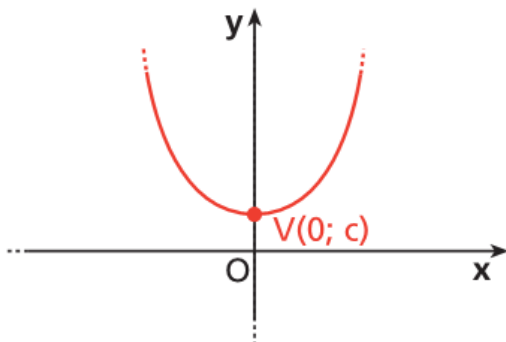
➤ *Alcuni casi particolari*

$$b = 0$$

L'equazione diventa:

$$y = ax^2 + c$$

La parabola ha vertice $V(0; c)$ e il suo asse di simmetria è l'asse y .



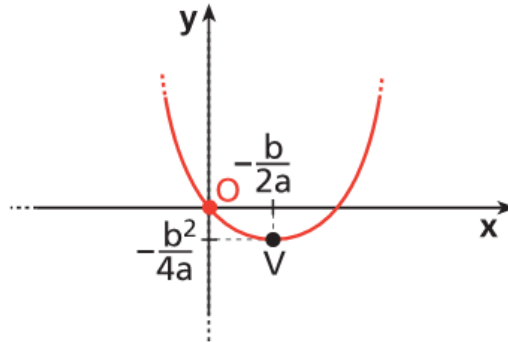
$$y = ax^2 + c$$

$$c = 0$$

L'equazione diventa:

$$y = ax^2 + bx$$

La parabola passa per l'origine O .



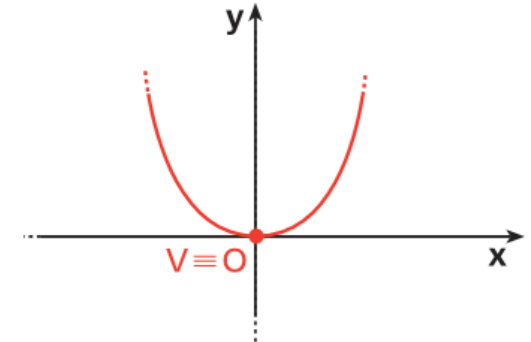
$$y = ax^2 + bx$$

$$b = 0, c = 0$$

L'equazione diventa:

$$y = ax^2$$

La parabola ha il vertice nell'origine O .



$$y = ax^2$$

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo le caratteristiche della parabola $y = x^2 + 3x + 2$ e disegniamo il suo grafico.

Le caratteristiche della parabola sono l'asse di simmetria, il vertice, il fuoco, la direttrice.

- L'asse ha equazione $x = -\frac{b}{2a}$, quindi $x = -\frac{3}{2}$.
- Il vertice ha ascissa $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$ e l'ordinata è $y_V = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{9 - 8}{4} = -\frac{1}{4}$.

Poiché il vertice è un punto della parabola, l'ordinata del vertice si può ottenere anche sostituendo l'ascissa $x = -\frac{3}{2}$ nell'equazione della parabola. Il vertice è allora $V\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

- Il fuoco F ha la stessa ascissa del vertice, $x_F = -\frac{3}{2}$. L'ordinata è $y_F = \frac{1 - \Delta}{4a} = \frac{1 - (9 - 8)}{4 \cdot 1} = 0$.

Pertanto è $F\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$.

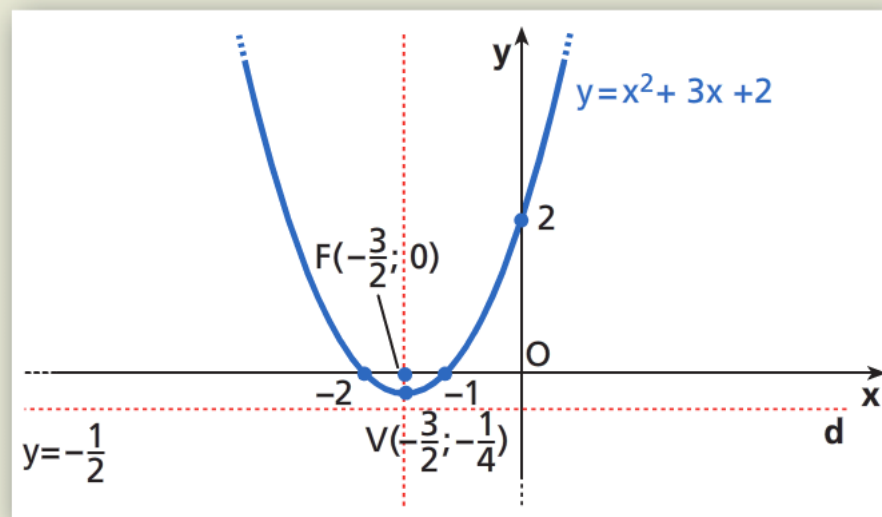
- L'equazione della direttrice è

$$y = -\frac{1 + \Delta}{4a} = -\frac{1 + 1}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Per disegnare la parabola è utile determinare i punti di intersezione con gli assi cartesiani.

Per $x = 0$ si ha $y = 2$ e per $y = 0$ si ha $x_1 = -1$ e $x_2 = -2$. I punti di intersezione sono allora $(0; 2)$, $(-1; 0)$ e $(-2; 0)$.

Rappresentiamo ora la parabola.



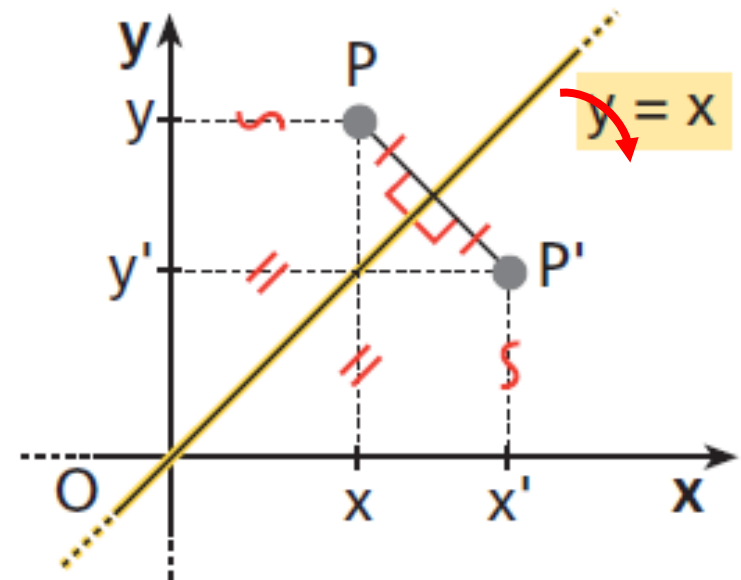
➤ *Equazione di una parabola generica con asse orizzontale*

Ci servono alcuni elementi
sulle trasformazioni
geometriche, in
particolare sulla simmetria.

Simmetria rispetto alla bisettrice

$$y = x$$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$



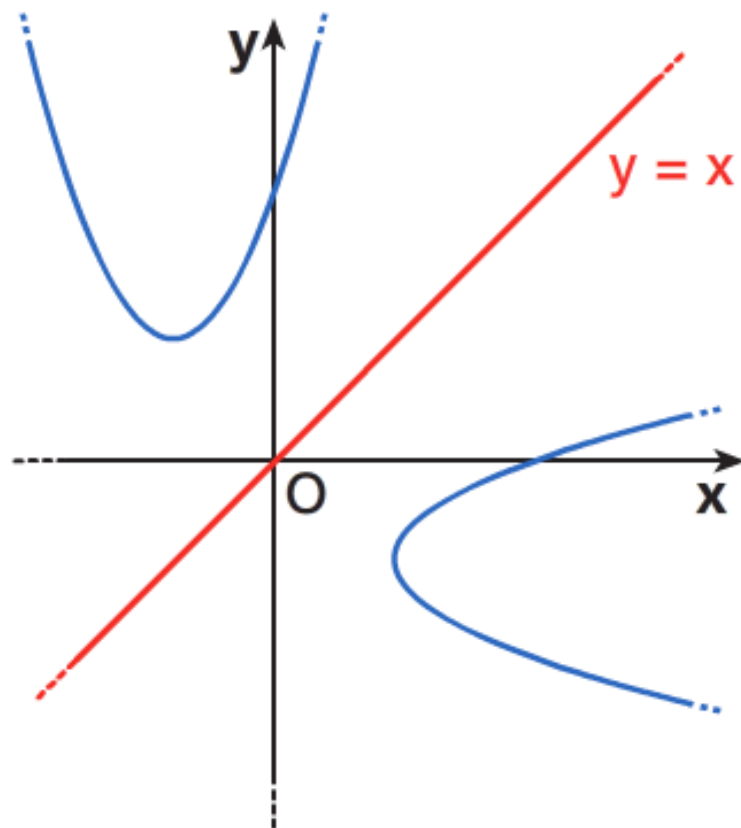
Ogni parabola con asse parallelo all'asse x si può ottenere dalla simmetria di una parabola con asse parallelo all'asse y rispetto alla bisettrice $y = x$.

Applichiamo le equazioni della simmetria:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

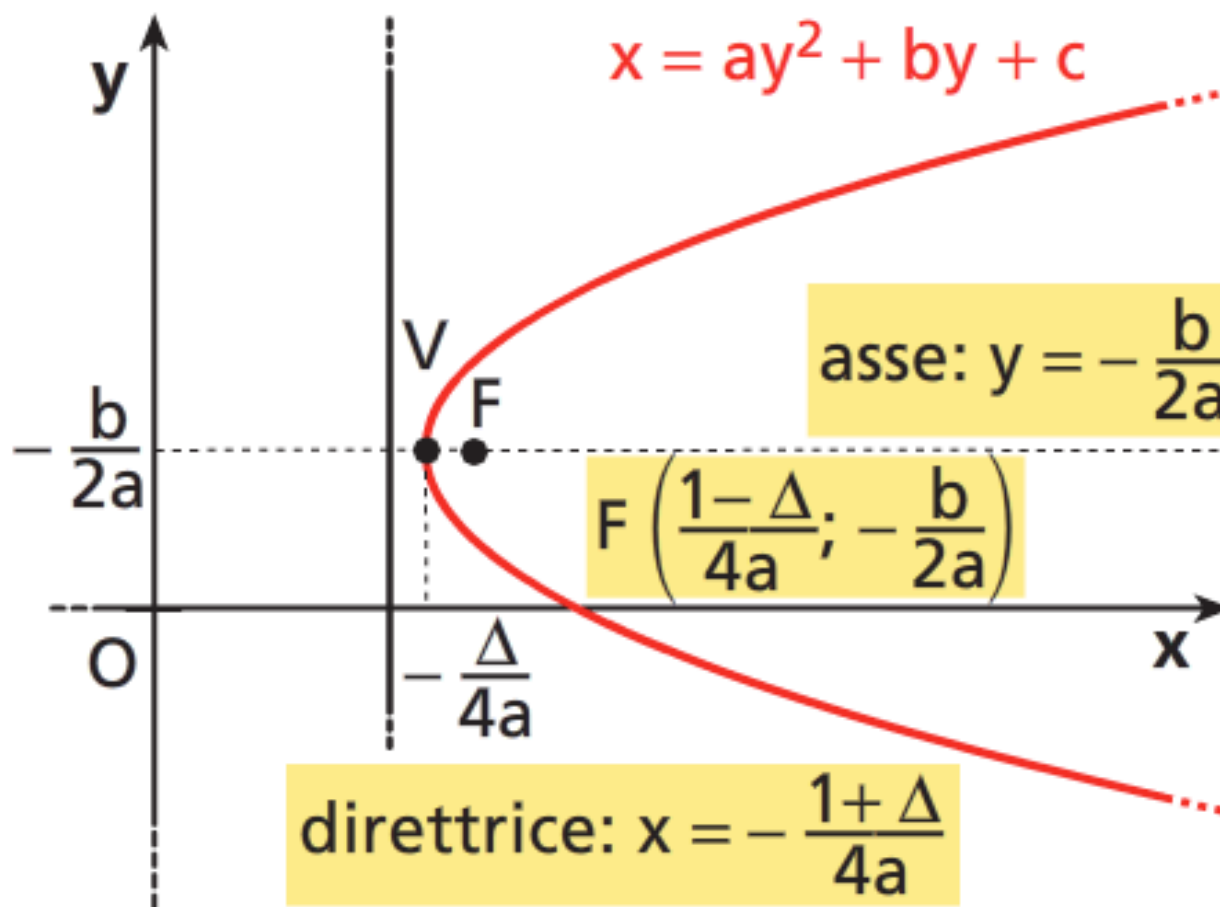
all'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$.

In sostanza, sostituendo la variabile x con la variabile y , si ottiene:



EQUAZIONE DELLA PARABOLA CON ASSE PARALLELO ALL'ASSE X

$$x = ay^2 + by + c$$



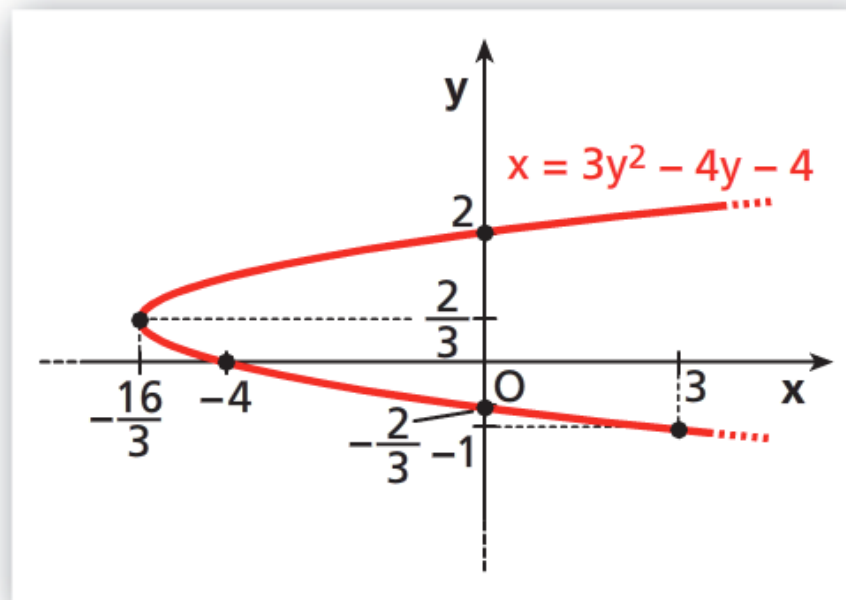
Disegniamo la parabola di equazione $x = 3y^2 - 4y - 4$.

Il vertice è $V\left(-\frac{16}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Determiniamo le coordinate di alcuni punti della parabola, mediante una tabella, attribuendo valori a y e ricavando quelli di x :

y	x	
$-\frac{2}{3}$	0	$\rightarrow \left(0; -\frac{2}{3}\right)$
0	-4	$\rightarrow (-4; 0)$
2	0	$\rightarrow (0; 2)$
-1	3	$\rightarrow (3; -1)$

Il fuoco è $F\left(-\frac{21}{4}; \frac{2}{3}\right)$, l'equazione della direttrice è $x = -\frac{65}{12}$.



ESERCIZIO GUIDA

Data la parabola di equazione $x = -y^2 + 6y - 5$, determiniamo le sue caratteristiche e disegniamola nel piano cartesiano.

- Poiché $a < 0$, la concavità è verso sinistra.
- Calcoliamo il discriminante.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 20 = 16.$$

- Troviamo le coordinate del vertice.

$V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$; pertanto:

$$x_V = -\frac{16}{-4} = 4; y_V = -\left(-\frac{6}{2}\right) = 3; V(4; 3).$$

- L'asse ha equazione $y = 3$.
- Troviamo le coordinate del fuoco.

Il fuoco ha la stessa ordinata del vertice:

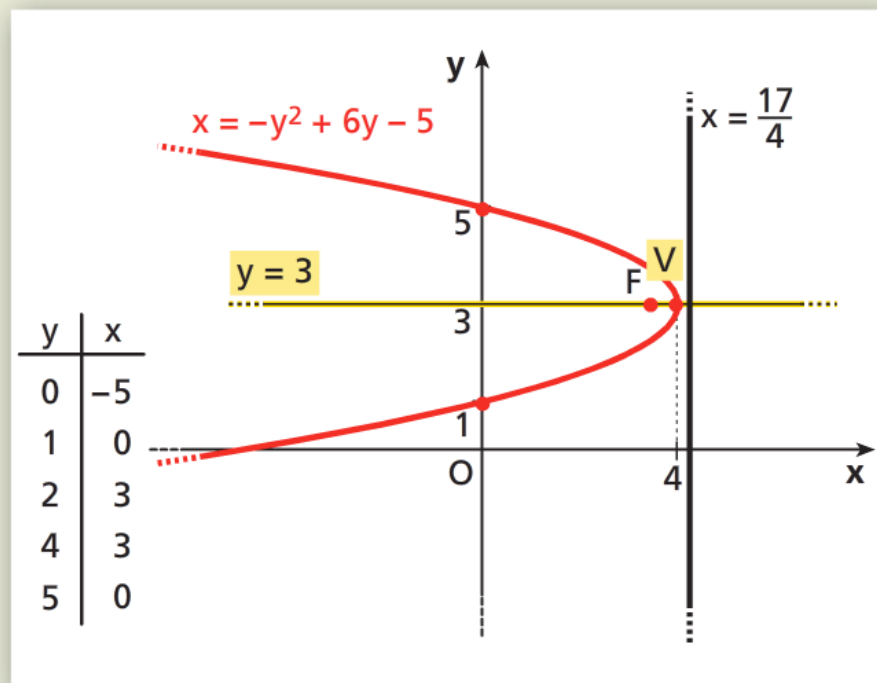
$$F\left(\frac{1 - \Delta}{4a}; 3\right), x_F = \frac{1 - 16}{-4} = \frac{15}{4}.$$

- La direttrice ha equazione

$$x = -\frac{1 + \Delta}{4a} = -\frac{1 + 16}{-4} = \frac{17}{4}.$$

- Determiniamo alcuni punti della parabola, osservando che per $x = 0$, si ha

$$-y^2 + 6y - 5 = 0, \text{ da cui } y = 1 \text{ e } y = 5.$$



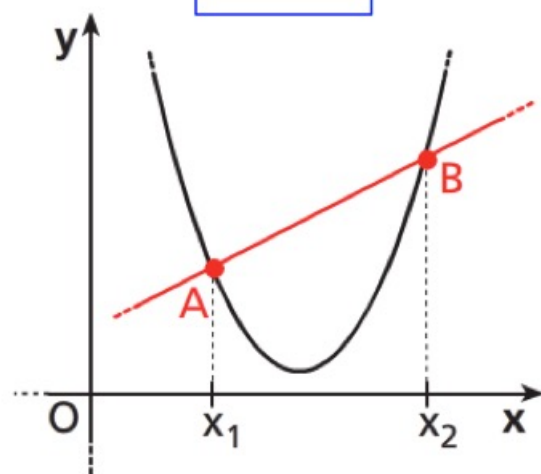
2. LA POSIZIONE DI UNA RETTA RISPETTO A UNA PARABOLA

Per studiare la posizione di una retta rispetto a una parabola, dobbiamo determinare quante sono le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}$$

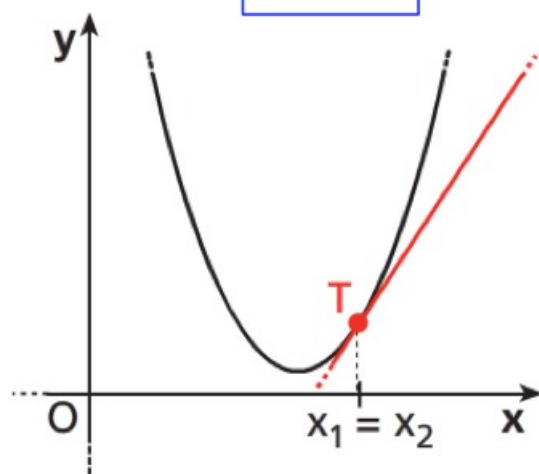
- se $\Delta > 0$, la retta è **secante** la parabola in due punti;
- se $\Delta = 0$, la retta è **tangente** alla parabola in un punto;
- se $\Delta < 0$, la retta è **esterna** alla parabola.

$$\Delta > 0$$



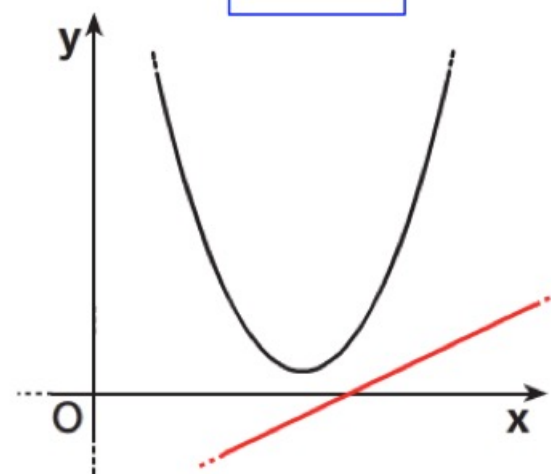
a. La retta è secante la parabola. I punti di intersezione sono due.

$$\Delta = 0$$



b. La retta è tangente alla parabola. Il punto di intersezione è unico e si chiama *punto di tangenza*.

$$\Delta < 0$$



c. La retta è esterna alla parabola. Non vi sono punti di intersezione.

Trovare le intersezioni della parabola di equazione:

$y = -x^2 + 2x$ con la retta di equazione: $y = 2x + 3$.

Dal sistema:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x \\ y = 2x + 3, \end{cases} \quad \text{si ha l'equazione: } x^2 + 3 = 0,$$

che non ha soluzioni reali. Pertanto la retta è **esterna** alla parabola (fig. 11.23).

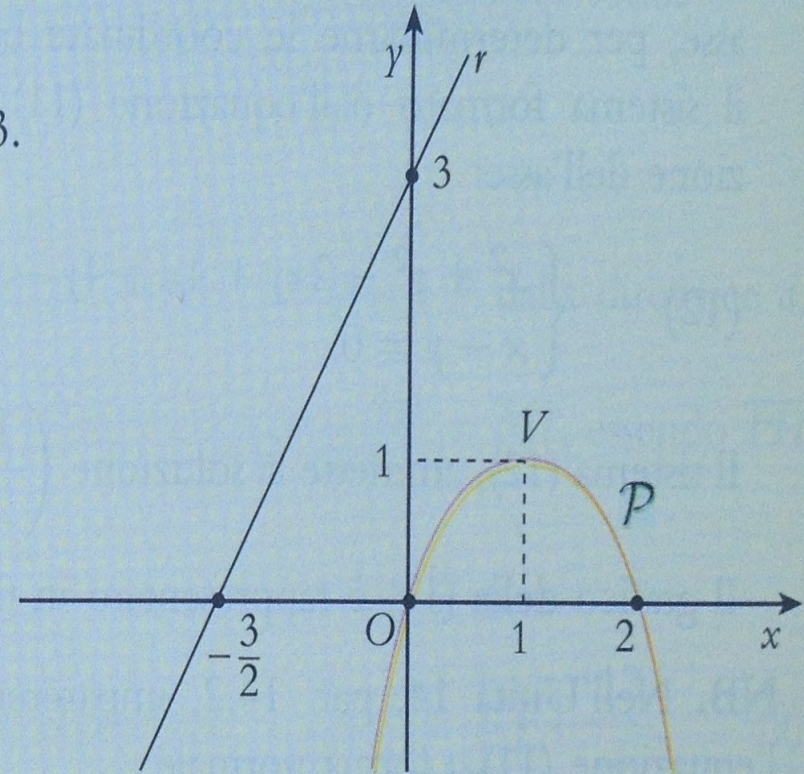


Figura 11.23

Determiniamo gli eventuali punti di intersezione della parabola di equazione

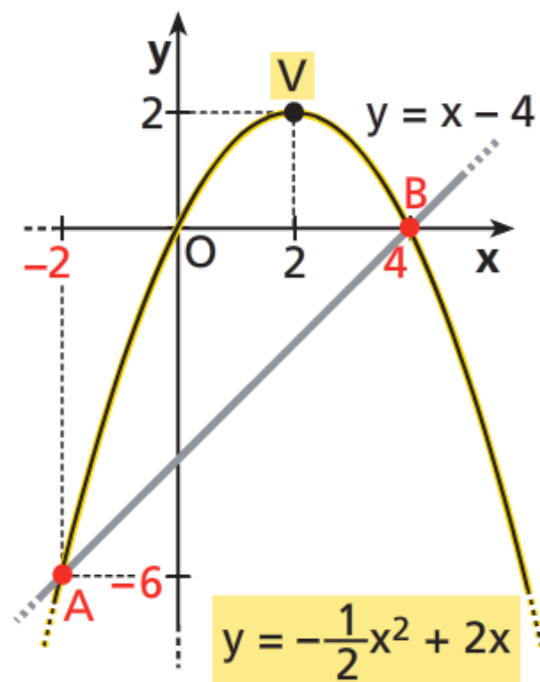
$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$$

con la retta di equazione

$$y = x - 4.$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \\ y = x - 4 \end{cases}$$



Utilizzando il metodo del confronto, otteniamo l'equazione:

$$x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Essa ammette due soluzioni reali distinte, $x_1 = -2$ e $x_2 = 4$, che sono le ascisse dei due punti di intersezione.

ESERCIZIO GUIDA

Stabiliamo se le rette di equazioni $y = x - 2$ e $y = x - 1$ sono secanti, tangenti o esterne alla parabola di equazione $y = x^2 + 3x - 1$ e rappresentiamo graficamente la parabola e le rette.

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = x^2 + 3x - 1 \end{cases}$$

Per confronto, otteniamo:

$$x^2 + 3x - 1 = x - 2$$

$$x^2 + 3x - 1 - x + 2 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - 1 = 0.$$

Quindi l'unica soluzione è:

$$x = -1.$$

Poiché $\Delta = 0$, la retta è tangente alla parabola. Il punto di tangenza ha ascissa $x = -1$ e la rispettiva ordinata è $y = -3$.

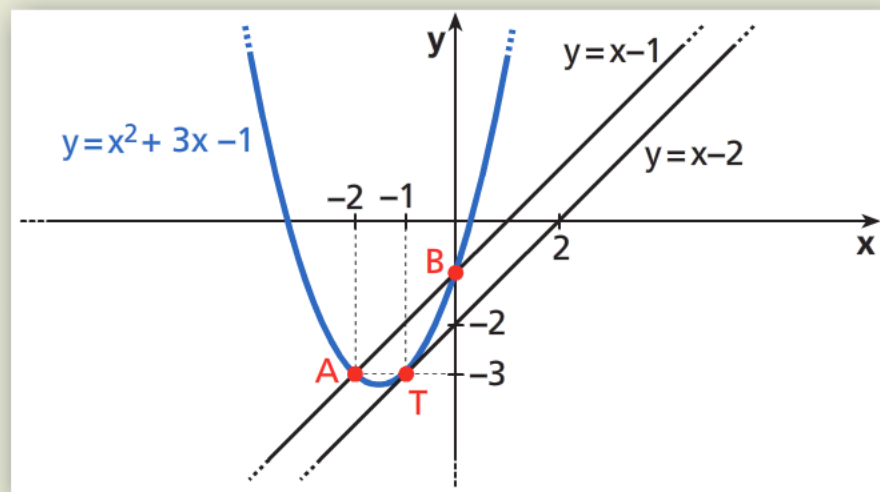
Il punto di tangenza è $T(-1; -3)$.

Risolviamo ora il sistema:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x^2 + 3x - 1 \end{cases}$$

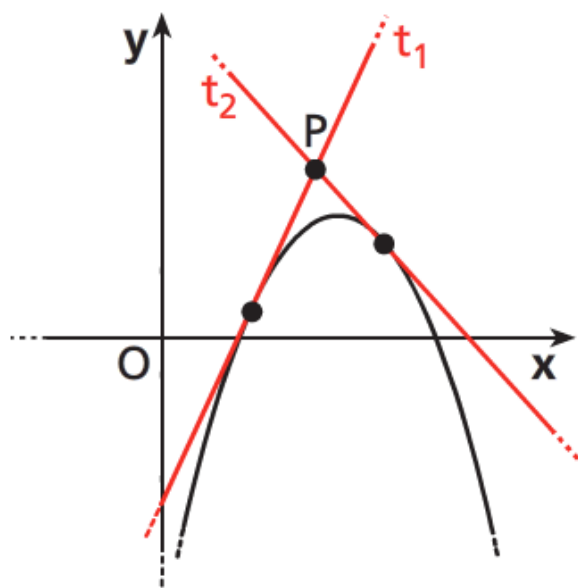
Si ha $x - 1 = x^2 + 3x - 1$, da cui $x^2 + 2x = 0$. L'equazione ha $\Delta > 0$, quindi si hanno due soluzioni $x_1 = -2$ e $x_2 = 0$. La retta $y = x - 1$ è quindi secante la parabola nei punti $A(-2; -3)$ e $B(0; -1)$.

Rappresentiamo il grafico della parabola e delle due rette.

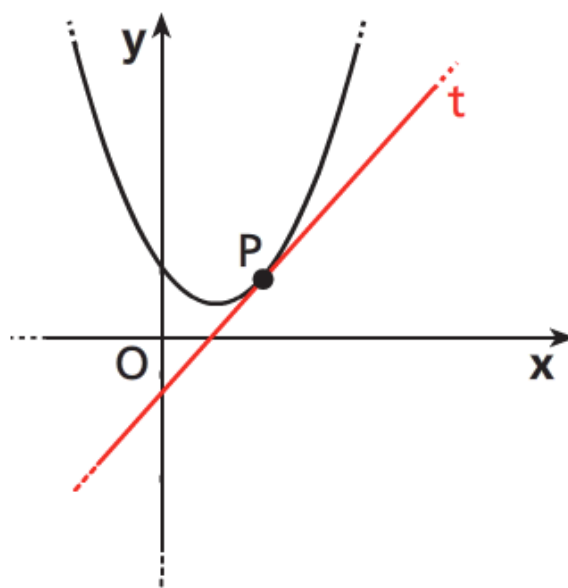


3. LE RETTE TANGENTI A UNA PARABOLA

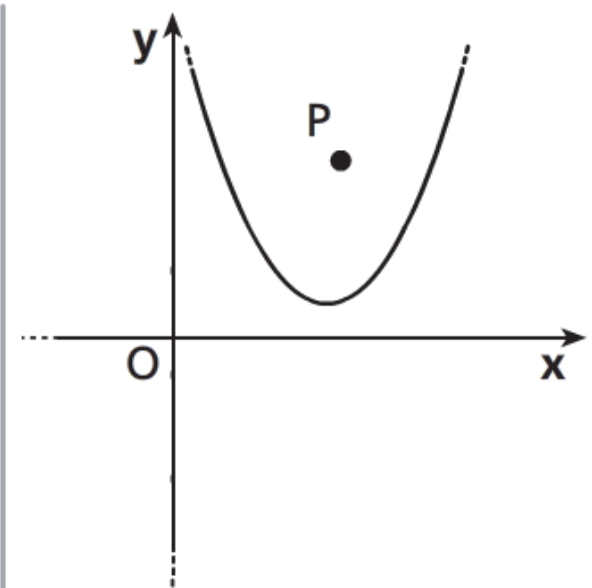
Dato un punto $P=(x_0;y_0)$ e una parabola qualsiasi, si possono presentare i seguenti tre casi:



a. P esterno alla parabola:
due rette tangenti.



b. P sulla parabola: una
retta tangente.



c. P interno alla parabola:
non esistono rette tangenti.

Per determinare le equazioni delle eventuali rette tangenti, è possibile seguire i seguenti metodi.

❑ Metodo generale, valido per tutte le coniche (circonferenza, ellisse, parabola, iperbole)

METODO DEL DISCRIMINANTE NULO $\Delta = 0$

Determinare le equazioni delle rette tangenti alla parabola di equazione $y = x^2 - 2$ condotte dal punto $P(1;-5)$.

1. Si scrive il sistema formato dall'equazione della parabola e quella del fascio di rette passanti per P:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y + 5 = m(x - 1) \end{cases}$$

2. Metodo di sostituzione:

$$x^2 - mx + m + 3 = 0$$

3. Calcoliamo Δ :

$$\Delta = m^2 - 4m - 12$$

4. Poniamo la condizione di tangenza $\Delta=0$, in quanto, affinché le rette (o la retta) per P siano tangenti (o tangente) alla parabola, è necessario che l'equazione risolvente ammetta due soluzioni coincidenti:

$$\Delta = 0 \rightarrow m^2 - 4m - 12 = 0$$

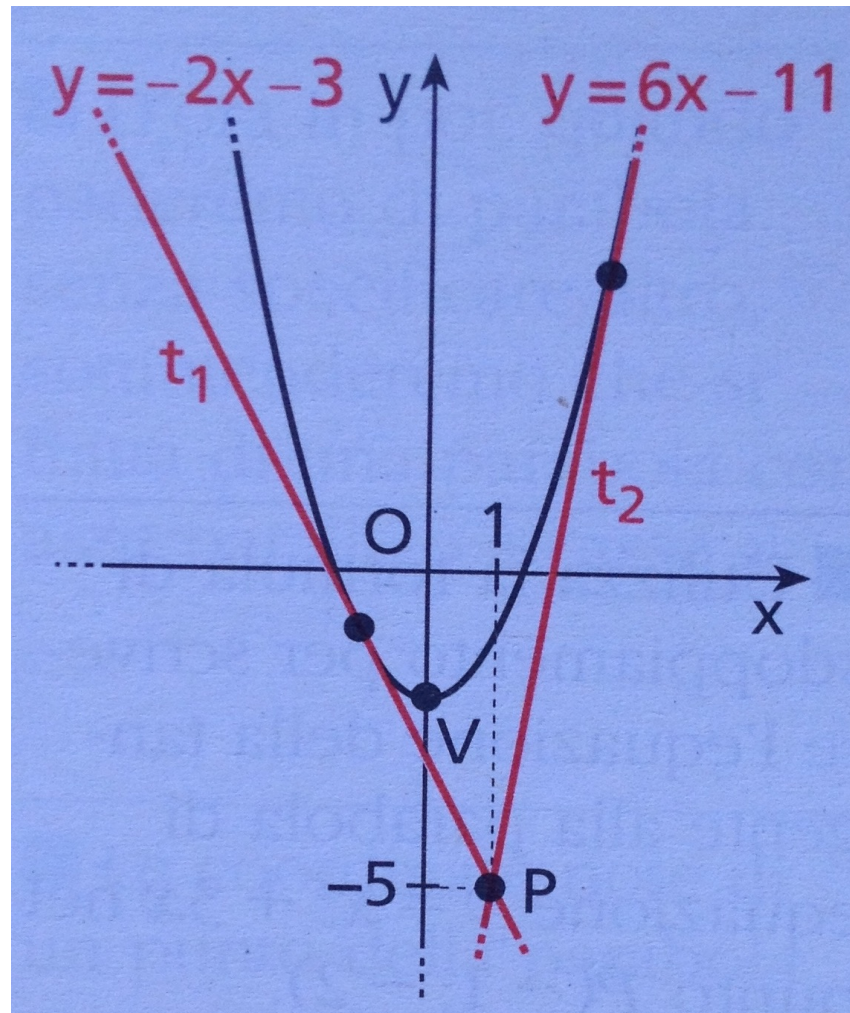
Risolvendo l'equazione di 2° grado rispetto a m , otteniamo le seguenti soluzioni:

$$m_1 = -2 \quad m_2 = 6$$

5. In definitiva, ci sono due rette tangenti alla parabola condotte dal punto P . Le equazioni sono:

$$t_1 \rightarrow y = -2x - 3$$

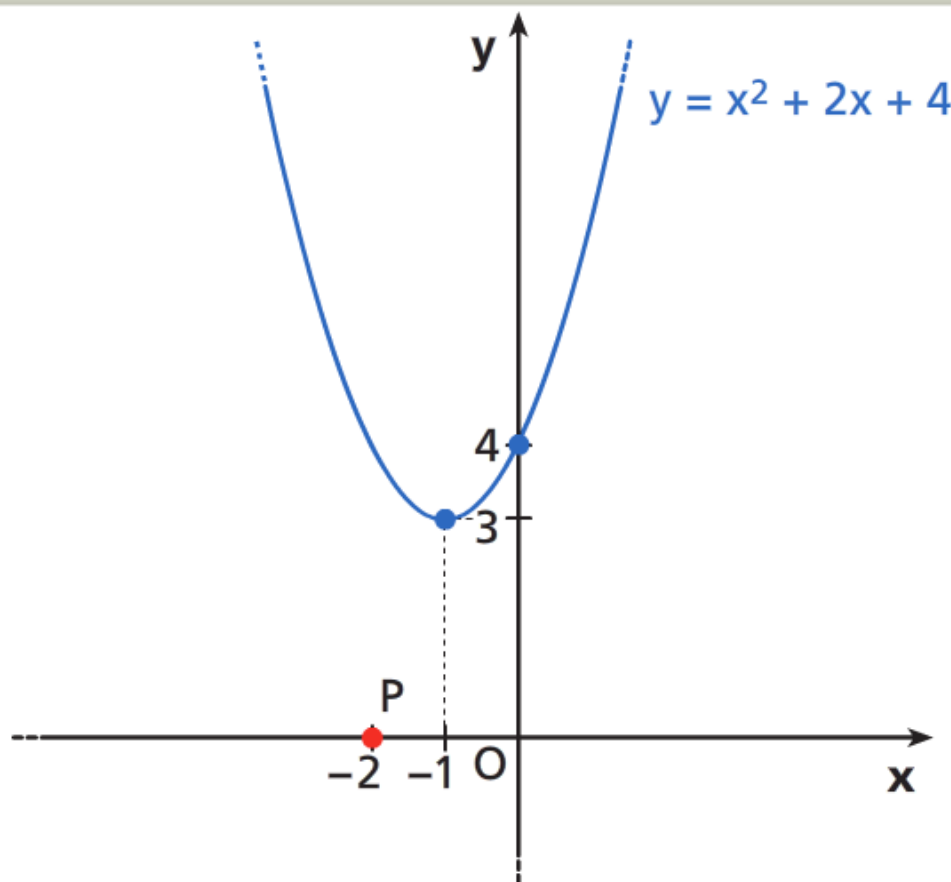
$$t_2 \rightarrow y = 6x - 11$$



ESERCIZIO GUIDA

Data la parabola di equazione $y = x^2 + 2x + 4$, determiniamo le equazioni delle rette passanti per il punto $P(-2; 0)$ e tangenti alla parabola.

La parabola ha il vertice di coordinate $(-1; 3)$.



Poiché l'ordinata del vertice è positiva e la concavità è rivolta verso l'alto, la parabola non ha intersezioni con l'asse x . Essa interseca l'asse y in $(0; 4)$. Il punto P non appartiene alla parabola. Scriviamo l'equazione della generica retta passante per P :

$$y = m(x + 2).$$

Mettiamo a sistema l'equazione della retta con quella della parabola:

$$\begin{cases} y = mx + 2m \\ y = x^2 + 2x + 4 \end{cases}$$

Mediante sostituzione, otteniamo:

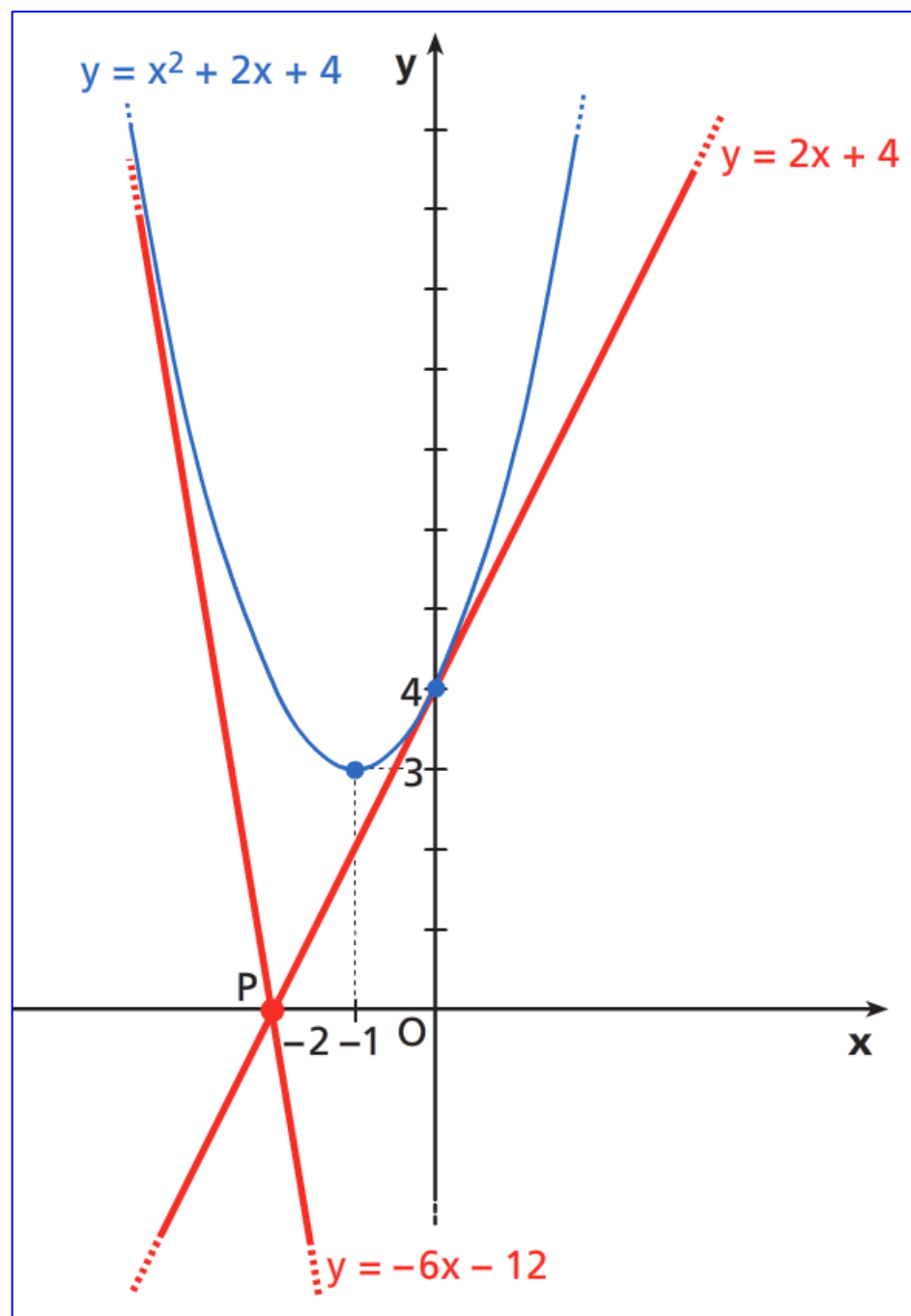
$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 4 &= mx + 2m \\ x^2 + (2 - m)x + 4 - 2m &= 0 \\ \Delta &= (2 - m)^2 - 4(4 - 2m) = \\ &= m^2 + 4m - 12. \end{aligned}$$

Ponendo $\Delta = 0$ (condizione di tangenza):

$$m^2 + 4m - 12 = 0$$

$$m = -2 \pm \sqrt{16} = -2 \pm 4 = \begin{cases} -6 \\ 2 \end{cases}$$

Poiché abbiamo trovato due valori di m , $m_1 = -6$ e $m_2 = 2$, esistono **due** rette tangenti alla parabola passanti per P , di equazioni $y = -6x - 12$ e $y = 2x + 4$.



METODO DELLA FORMULA DI SDOPPIAMENTO

Si applica solo se il punto $P=(x_0;y_0)$ appartiene alla parabola $y=ax^2+bx+c$

Formula dello sdoppiamento

$$\frac{y+y_0}{2} = ax_0x + b\frac{x+x_0}{2} + c$$

Questa formula, detta **formula di sdoppiamento**, si può ricordare pensando che si ottiene dall'equazione della parabola sostituendo x con $\frac{x+x_0}{2}$, y con $\frac{y+y_0}{2}$ e x^2 con x_0x :

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{y} & = & a & \boxed{x^2} & + & b & \boxed{x} & + & c \\ \uparrow & & & \uparrow & & & \uparrow & & \\ \boxed{\frac{y+y_0}{2}} & & & \boxed{x_0x} & & & \boxed{\frac{x+x_0}{2}} & & \end{array}$$

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione della tangente alla parabola di equazione $y = x^2 + 3x$ nel suo punto $P(-1; -2)$.

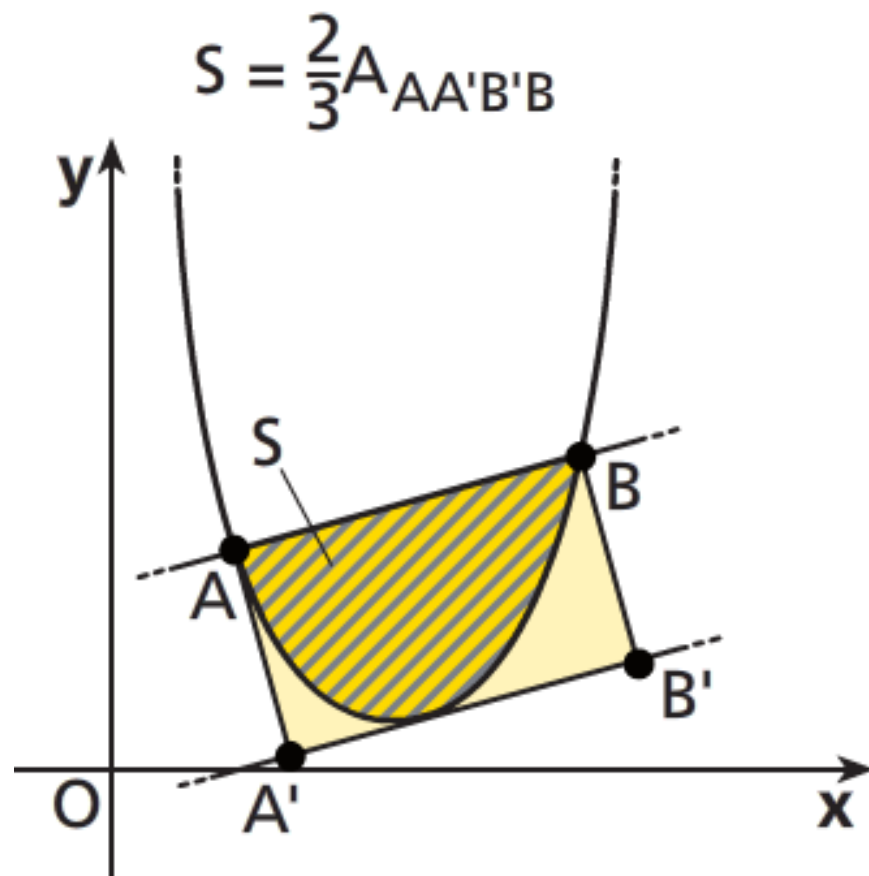
Utilizziamo la formula di sdoppiamento, dove vale $x_0 = -1$ e $y_0 = -2$:

$$y = x^2 + 3x \rightarrow \frac{y - 2}{2} = -x + 3 \frac{x - 1}{2} \rightarrow y = x - 1.$$

IL SEGMENTO PARABOLICO

Se una retta è secante a una parabola nei punti A e B, il segmento AB e l'arco di parabola AB delimitano una parte di piano detta *segmento parabolico*.

Tracciamo la retta parallela ad AB e tangente alla parabola, e consideriamo su di essa le proiezioni A' e B' di A e B. Si dimostra che:
l'area del segmento parabolico è uguale a 2/3 dell'area del rettangolo AA'B'B.



ESEMPIO

Determiniamo l'area S del segmento parabolico individuato dalla parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ e dalla retta di equazione $y = x + \frac{1}{2}$.

Dal sistema delle due equazioni si ottengono i punti di intersezione:

$$A\left(1; \frac{3}{2}\right) \text{ e } B\left(5; \frac{11}{2}\right).$$

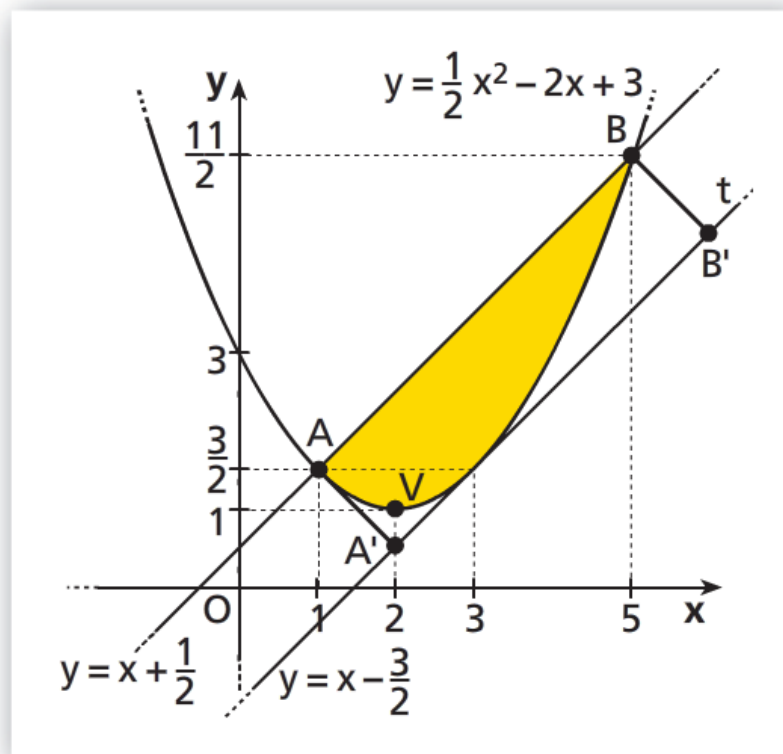
Considerando una generica retta parallela ad AB , di equazione $y = x + q$, e imponendo la condizione di tangenza alla parabola, si ottiene la retta tangente t di equazione:

$$y = x - \frac{3}{2}.$$

Calcoliamo la misura di AB con la formula della distanza tra due punti. Otteniamo $\overline{AB} = 4\sqrt{2}$, mentre la distanza di A dalla retta t vale $\sqrt{2}$. Quindi l'area del rettangolo $AA'B'B$ è: $4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8$.

L'area del segmento parabolico è:

$$S = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}.$$



4. CONDIZIONI PER DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UNA PARABOLA

Per poter determinare l'equazione di una parabola $y=ax^2+b+c$ occorre calcolare i tre coefficienti a,b,c presenti in essa.

Pertanto il problema è: trovare tre **condizioni** tra loro indipendenti tali da tradurle in tre equazioni nelle tre incognite a,b,c .

Ecco alcuni casi:

1. Sono note le coordinate del vertice (due condizioni) e del fuoco (una condizione); 2. Sono note le coordinate del vertice o del fuoco (due condizioni) e l'equazione della direttrice (una condizione); 3. La parabola passa per tre punti non allineati (una condizione per ogni punto); 4. La parabola passa per due punti (due condizioni) ed è nota l'equazione dell'asse (una condizione); 5. La parabola passa per un punto (una condizione) e si conosce il vertice o il fuoco (due condizioni); 6. La parabola è tangente a una retta (una condizione) e passa per due punti (due condizioni).

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione della parabola passante per i punti $A(-1; 5)$ e $B(4; 0)$ e tangente alla retta di equazione $y = 2x - 9$.

Imponiamo alla parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ il passaggio per i due punti A e B :

$$5 = a - b + c \quad \text{passaggio per } A(-1; 5),$$

$$0 = 16a + 4b + c \quad \text{passaggio per } B(4; 0).$$

Ora imponiamo che la retta $y = 2x - 9$ sia tangente alla parabola.
Scriviamo il sistema

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 2x - 9 \end{cases}$$

e poniamo nell'equazione risolvente $ax^2 + (b - 2)x + c + 9 = 0$ la condizione $\Delta = 0$:

$$\Delta = (b - 2)^2 - 4a \cdot (c + 9) = 0.$$

Dalle tre condizioni otteniamo il sistema:

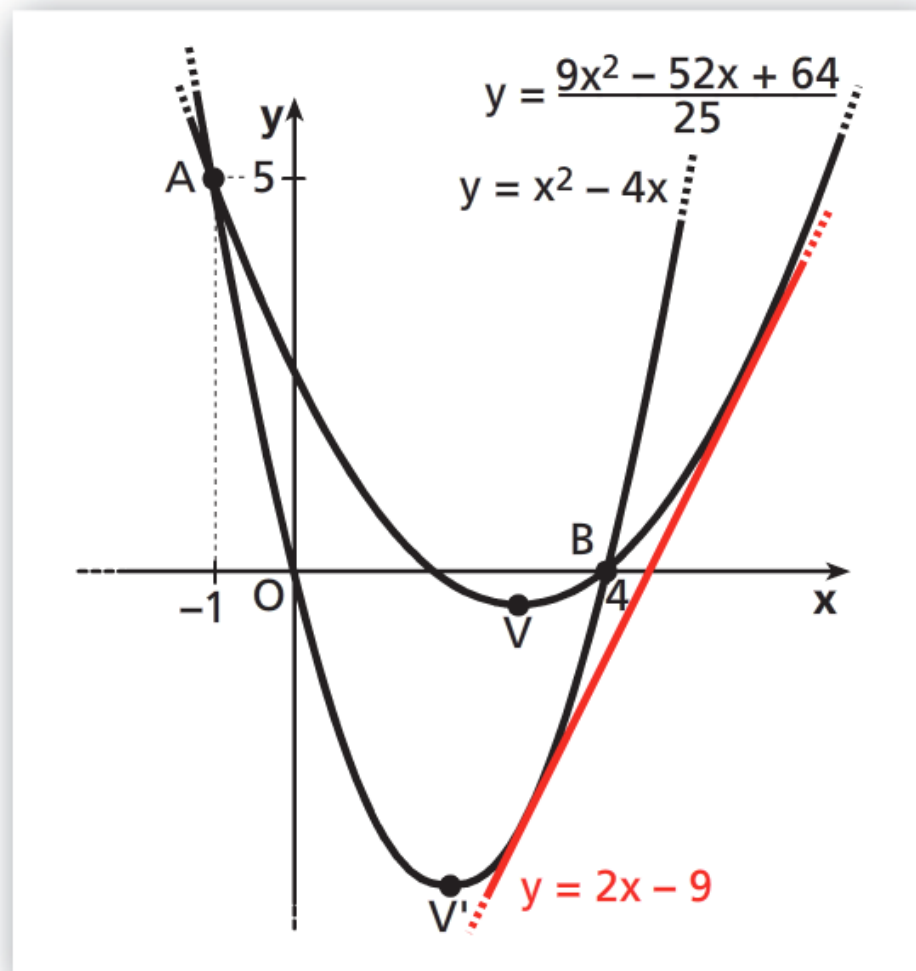
$$\begin{cases} a - b + c = 5 \\ 16a + 4b + c = 0 \\ (b - 2)^2 - 4a(c + 9) = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, ricaviamo:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a = \frac{9}{25} \\ b = -\frac{52}{25} \\ c = \frac{64}{25} \end{cases}$$

Pertanto, sono due le parabole che soddisfano le condizioni richieste:

$$y = x^2 - 4x, \quad y = \frac{9x^2 - 52x + 64}{25}.$$



ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y avente per vertice il punto $V(1; 2)$ e per fuoco il punto $F(1; 3)$ e rappresentiamola nel piano cartesiano.

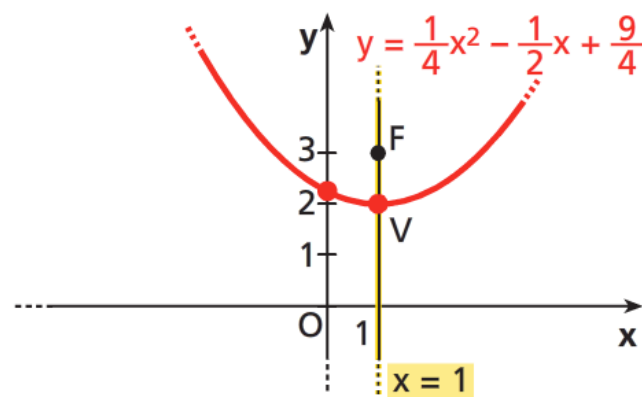
La parabola ha equazione generale $y = ax^2 + bx + c$. Per trovare a , b , c , utilizziamo le formule del vertice $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ e quelle del fuoco $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$. Si ha il sistema:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ -\frac{\Delta}{4a} = 2 \\ \frac{1-\Delta}{4a} = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ b^2 - 4ac = -8a \\ 1 - (b^2 - 4ac) = 12a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ b^2 - 4ac = -8a \\ 1 + 8a = 12a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} - c = -2 \\ a = \frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{9}{4} \end{cases}$$

L'equazione della parabola è: $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$.

Osservazione. La seconda equazione del sistema può essere sostituita con la condizione di appartenenza del vertice alla parabola:

$$2 = a + b + c.$$



ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'equazione della parabola che passa per i punti $A(0; -4)$, $B(-1; -1)$ e che ha asse di equazione $x = 1$.

L'asse è parallelo all'asse y e quindi la parabola cercata ha equazione $y = ax^2 + bx + c$.

L'equazione dell'asse della generica parabola è $x = -\frac{b}{2a}$ e quindi vale l'uguaglianza $-\frac{b}{2a} = 1$.

Imponiamo ora che la parabola passi per i punti A e B . Un punto appartiene alla parabola se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione.

Sostituiamo pertanto le coordinate dei due punti al posto di x e y nell'equazione $y = ax^2 + bx + c$:

$$-4 = c \quad (\text{passaggio per } A)$$

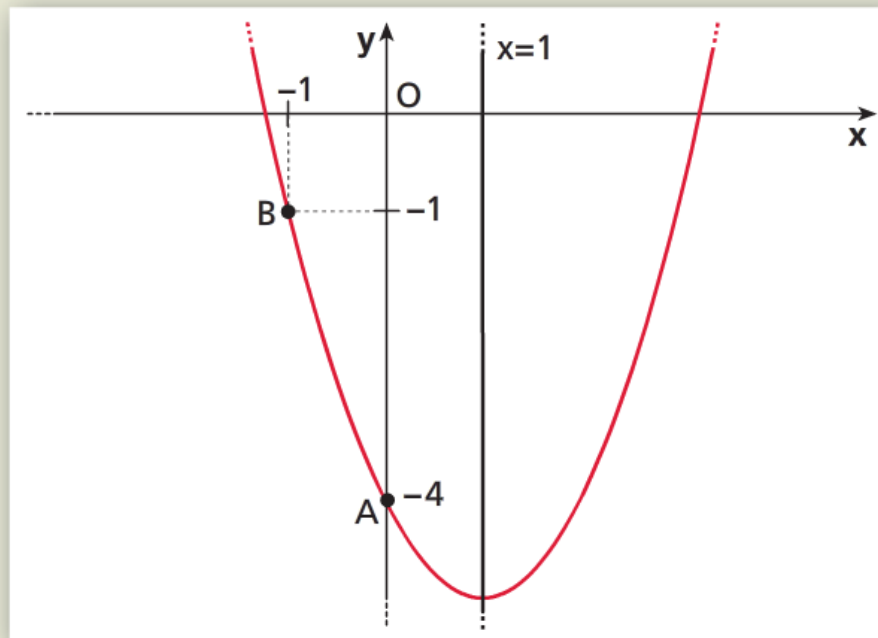
$$-1 = a - b + c \quad (\text{passaggio per } B)$$

RisolviAMO il sistema formato dalle tre equazioni nelle tre incognite a , b , c :

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ -4 = c \\ -1 = a - b + c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ c = -4 \\ a - b + c = -1 \end{cases} \rightarrow$$

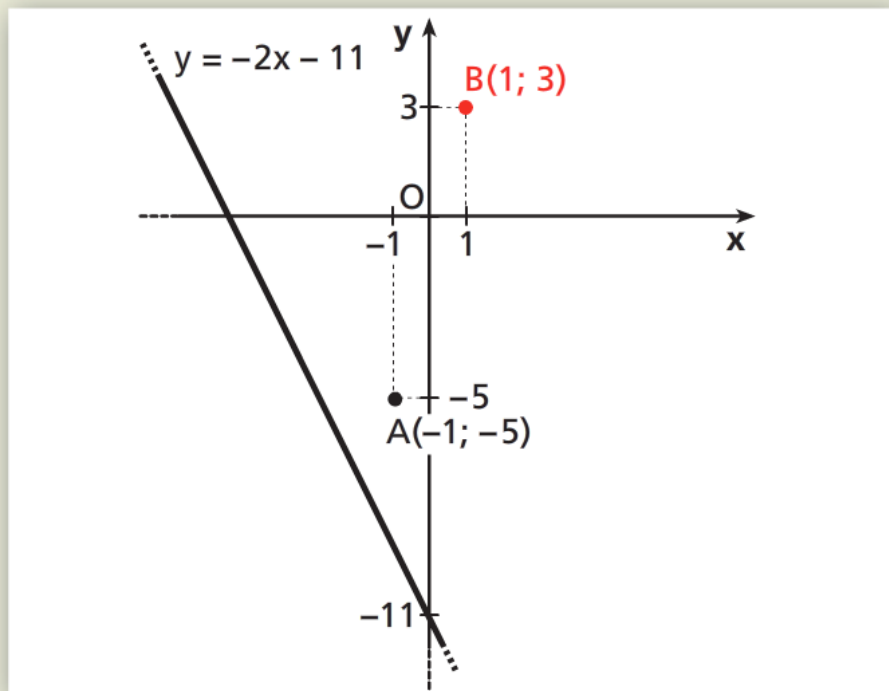
$$\rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ c = -4 \\ a + 2a - 4 = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = -4 \\ a = 1 \end{cases}$$

L'equazione della parabola è $y = x^2 - 2x - 4$.



ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y e con il vertice di ascissa minore di -1 , passante per i punti $A(-1; -5)$ e $B(1; 3)$ e tangente alla retta di equazione $y = -2x - 11$.



Imponiamo alla parabola di equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

il passaggio per i due punti A e B :

$$\begin{cases} -5 = a - b + c & \text{passaggio per } A(-1; -5) \\ 3 = a + b + c & \text{passaggio per } B(1; 3) \end{cases}$$

Ricaviamo due incognite in funzione della terza. Usiamo il metodo di riduzione, sottraendo membro a membro:

$$\ominus \begin{cases} a - b + c = -5 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$$

$$-2b = -8 \rightarrow b = 4$$

Sostituiamo $b = 4$ nella prima equazione e ricaviamo c in funzione di a :

$$\begin{cases} a - 4 + c = -5 \rightarrow c = -a - 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

L'equazione della parabola diventa:

$$y = ax^2 + 4x - a - 1.$$

Ora imponiamo che la retta $y = -2x - 11$ sia tangente alla parabola:

$$\begin{cases} y = ax^2 + 4x - a - 1 \\ y = -2x - 11 \end{cases}$$

L'equazione risolvente è:

$$ax^2 + 6x - a + 10 = 0.$$

Imponiamo la condizione di tangenza, cioè $\frac{\Delta}{4} = 0$:

$$a^2 - 10a + 9 = 0 \rightarrow a = 1 \vee a = 9.$$

Le soluzioni trovate sono due:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 9 \\ b = 4 \\ c = -10 \end{cases}$$

Otteniamo le due parabole di equazioni:

$$y = x^2 + 4x - 2 \quad \text{e} \quad y = 9x^2 + 4x - 10.$$

Poiché la parabola richiesta deve avere il vertice con ascissa minore di -1 , calcoliamo le coordinate del vertice delle due parabole:

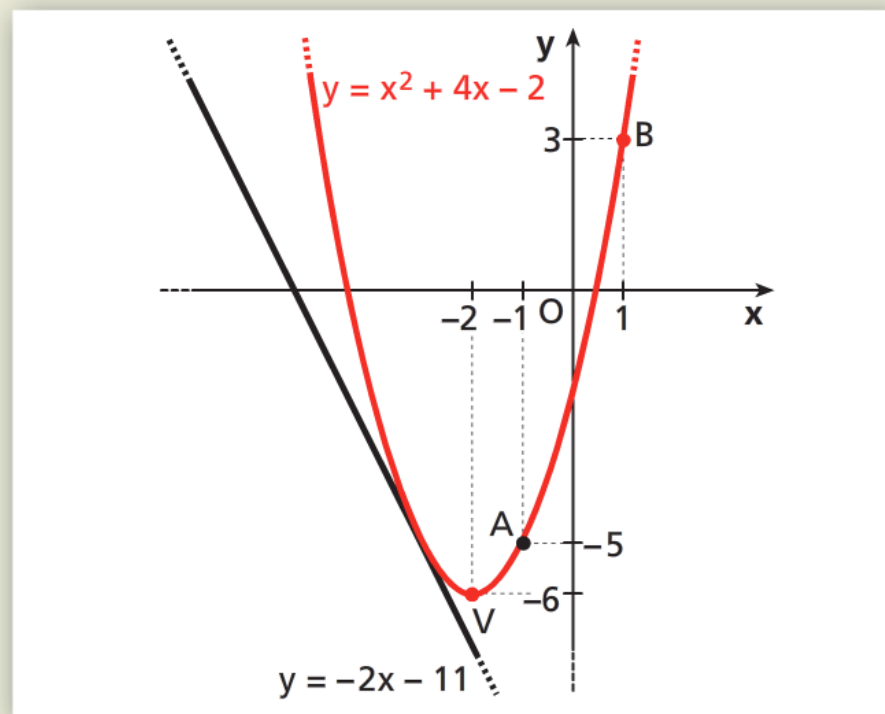
$$y = x^2 + 4x - 2, \quad V(-2; -6), \quad \text{ascissa } -2 < -1$$

$$y = 9x^2 + 4x - 10, \quad V\left(-\frac{2}{9}; -\frac{94}{9}\right),$$

$$\text{ascissa } -\frac{2}{9} > -1.$$

Pertanto la parabola cercata ha equazione:

$$y = x^2 + 4x - 2.$$



Date due parabole r e r' , di equazioni:

$$r: y - ax^2 - bx - c = 0 \quad \text{e} \quad r': y - a'x^2 - b'x - c' = 0$$

si chiama *fascio di parabole* definito da r e r' (*generatrici del fascio*), l'insieme di r' e di tutte le parabole rappresentate dall'equazione:

Equazione fascio di parabole

$$y - ax^2 - bx - c + k(y - a'x^2 - b'x - c') = 0 \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

Forma esplicita

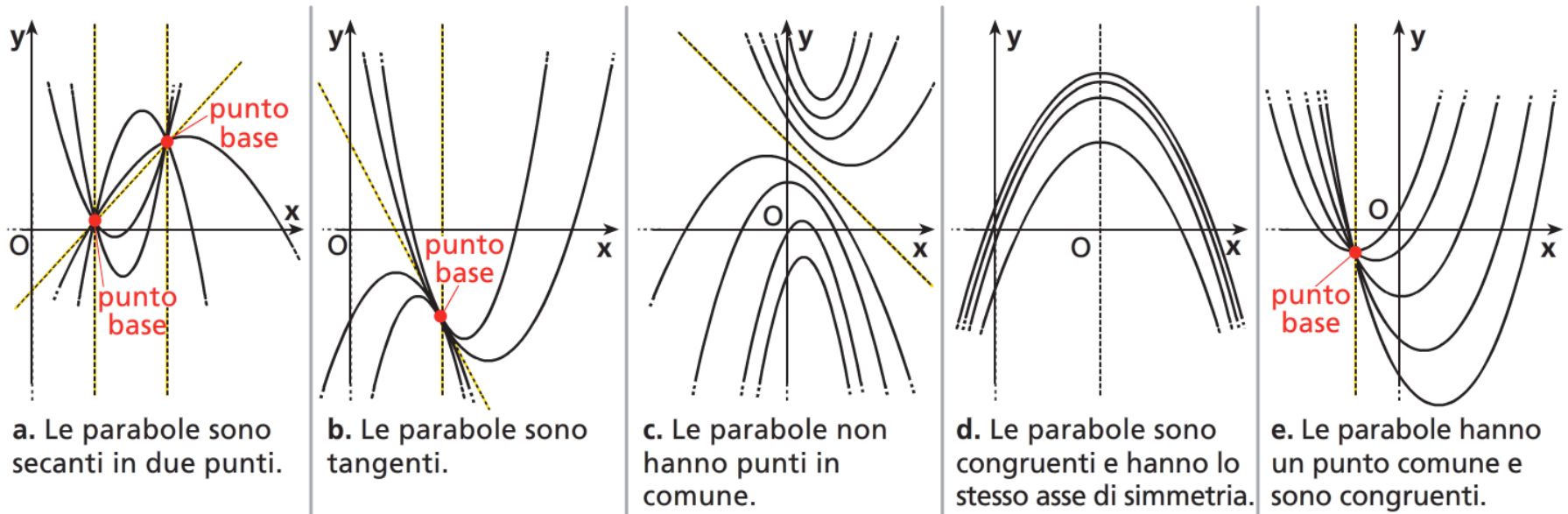
$$y = \frac{a + ka'}{1 + k} x^2 + \frac{b + kb'}{1 + k} x + \frac{c + kc'}{1 + k}$$

➤ STUDIO DI UN FASCIO DI PARABOLE

Studiare un fascio di parabole vuol dire descriverne le caratteristiche. In particolare determinare:

1. Le generatrici
2. I punti base
3. Le parabole degeneri

I casi possibili sono:



Procedimento

Studiare il seguente fascio di parabole:

$$y = -(k+2)x^2 - x + k-1$$

1. Le generatrici

Si riscrive in forma implicita l'equazione del fascio e si raccoglie rispetto al parametro k :

$$y + 2x^2 + x + 1 + k(x^2 - 1) = 0$$

Le equazioni delle due generatrici si ottengono una per $k=0$ e l'altra uguagliando a zero l'espressione che è moltiplicata per k (parabola degenera, ossia coppia di rette):

$$\gamma: y + 2x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow y = -2x^2 - x - 1$$

$$\gamma': x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \quad x = -1$$

2. Punti base

Si risolve il sistema formato dalle equazioni delle due generatrici:

$$\begin{cases} y = -2x^2 - x - 1 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases} e \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

I punti base sono due $A=(1;-4)$ e $B=(-1;-2)$, si tratta di un fascio di parabole secanti.

3. Parabole degeneri

Sono rette che devono passare per gli eventuali punti base. Si ottengono:

- a) uguagliando a zero il coefficiente di x^2 (se dipende dal parametro k); la retta che si ottiene è parallela all'asse x o non è parallela agli cartesiani;
- b) uguagliando a zero il coefficiente di y (se dipende dal parametro k); si ottiene sempre una retta o una coppia di rette parallele all'asse y .

Nel nostro esempio:

$$y = -(k+2)x^2 - x + k - 1 \quad \rightarrow \quad -(k+2) = 0 \quad \rightarrow \quad k = -2$$

$$y = -x - 3 \quad \rightarrow \quad \text{parabola degenera}$$

4. Disegno del fascio di parabole

Coordinate del vertice:

$$V = \left(-\frac{1}{2(k+2)}; \frac{4k^2 + 4k - 7}{4(k+2)} \right)$$

Le parabole hanno il vertice variabile e quindi anche l'asse di simmetria è variabile.

Concavità:

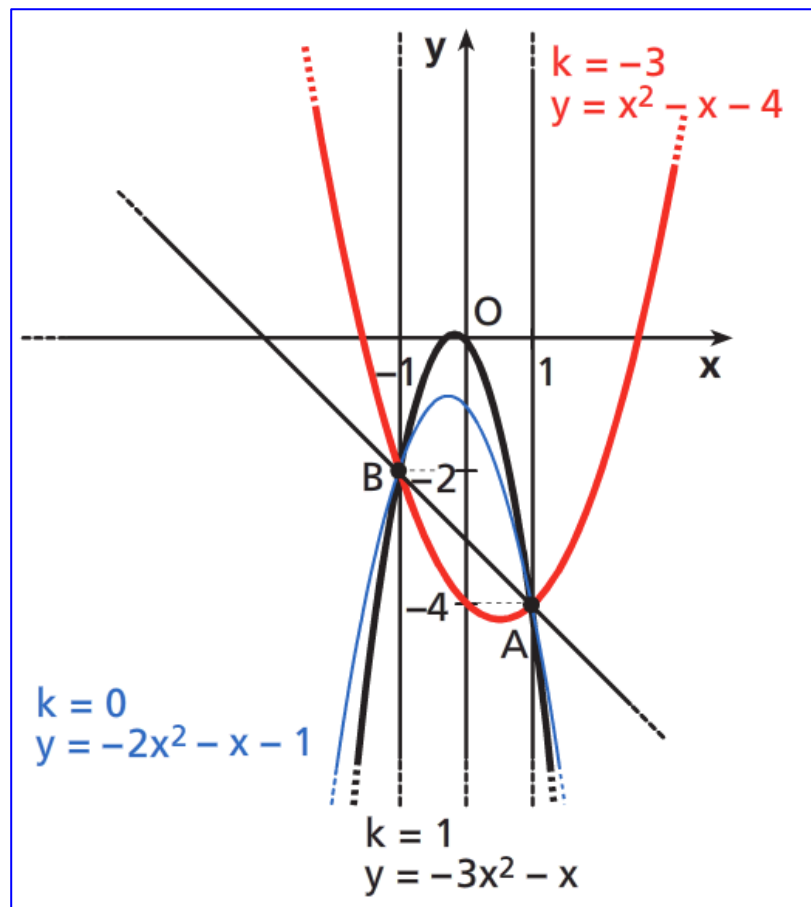
$$\begin{cases} \text{se } k < -2 & \text{le parabole hanno concavità verso l'alto} \\ \text{se } k > -2 & \text{le parabole hanno concavità verso il basso} \\ \text{se } k = -2 & \text{si ha la parabola degenere, ossia la retta di equazione } y = -x - 3 \end{cases}$$

Disegniamo qualche parabola del fascio, attribuendo alcuni valori a k :

$$k = 0 \rightarrow y = -2x^2 - x - 1 \rightarrow V_0\left(-\frac{1}{4}; -\frac{7}{8}\right);$$

$$k = 1 \rightarrow y = -3x^2 - x \rightarrow V_1\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{12}\right);$$

$$k = -3 \rightarrow y = x^2 - x - 4 \rightarrow V_{-3}\left(\frac{1}{2}; -\frac{17}{4}\right).$$



$$\begin{cases} y = -2x^2 - x - 1 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

I punti base sono due: $A(1; -4)$ e $B(-1; -2)$.

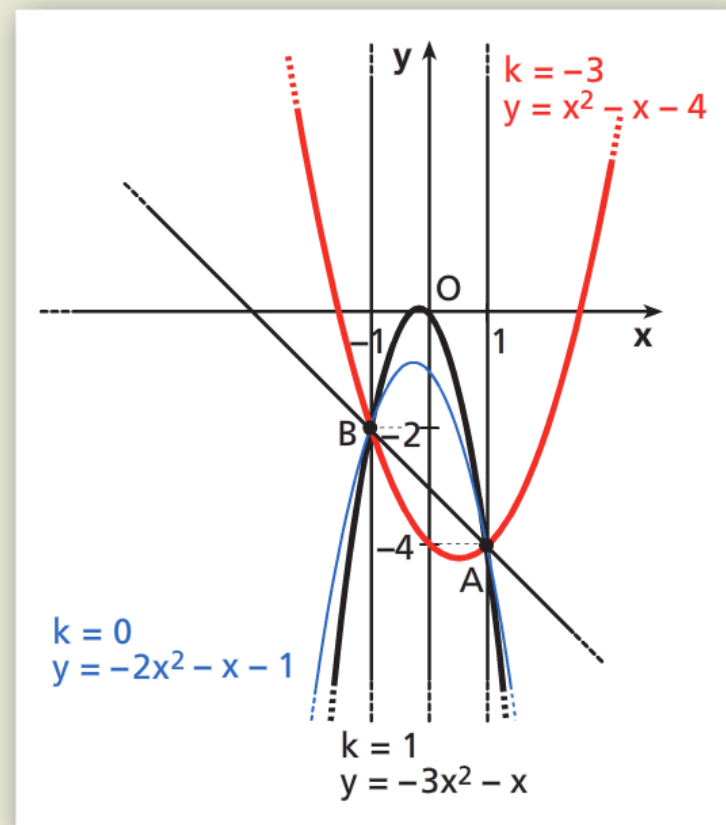
Si tratta quindi di un fascio di parabole secanti.

- Disegniamo qualche parabola del fascio, attribuendo alcuni valori a k :

$$k = 0 \rightarrow y = -2x^2 - x - 1 \rightarrow V_0\left(-\frac{1}{4}; -\frac{7}{8}\right);$$

$$k = 1 \rightarrow y = -3x^2 - x \rightarrow V_1\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{12}\right);$$

$$k = -3 \rightarrow y = x^2 - x - 4 \rightarrow V_{-3}\left(\frac{1}{2}; -\frac{17}{4}\right).$$



➤ TROVARE L'EQUAZIONE DI UN FASCIO DI PARABOLE

Si deve scrivere la combinazione lineare delle equazioni di due parabole qualsiasi del fascio, prese come generatrici. Tali equazioni possono essere anche quelle delle parabole degeneri.

Scrivere l'equazione del fascio di parabole passanti per i punti $A=(2;1)$ e $B=(4;2)$

A e B sono i punti base del fascio. Scriviamo le equazioni delle parabole degeneri, cioè la retta AB e la coppia di rette parallele all'asse y passanti per A e B:

$$\gamma_1 : \frac{y-1}{2-1} = \frac{x-2}{4-2} \rightarrow 2y - x = 0 \qquad \gamma_2 : (x-2)(x-4) = 0$$

Equazione del fascio di parabole:

$$2y - x + k(x-2)(x-4) = 0$$

In generale possiamo distinguere i seguenti casi:

✓ **Fasci di parabole per due punti distinti**

Dati i punti distinti $A=(x_A; y_A)$ e $B=(x_B; y_B)$ e indicata con $y = mx + q$ l'equazione della retta AB, si dimostra che l'equazione:

$$y = mx + q + k(x - x_A)(x - x_B)$$

rappresenta un fascio di parabole passanti per i punti base A e B.

✓ **Fasci di parabole tangenti in un punto a una retta data**

Dato il punto $T=(x_T; y_T)$ appartenente alla retta $r: y=mx+q$, si dimostra che l'equazione:

$$y = mx + q + k(x - x_T)^2$$

rappresenta un fascio di parabole tangenti in T alla retta r .

ESERCIZIO GUIDA

- a) Determiniamo l'equazione del fascio di parabole con asse parallelo all'asse y , passanti per i punti $A(-1; 0)$ e $B(1; 2)$.
- b) Determiniamo l'equazione del fascio di parabole con asse parallelo all'asse y , tangenti nel punto T di ascissa 3 alla retta t di equazione $y = 2x - 1$.

- a) Determiniamo l'equazione della retta AB utilizzando la formula della retta per due punti:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \rightarrow \frac{y - 0}{2 - 0} = \frac{x - (-1)}{1 - (-1)} \rightarrow \frac{y}{2} = \frac{x + 1}{2} \rightarrow y = x + 1.$$

Scriviamo l'equazione del fascio utilizzando la formula:

$$y = mx + q + k(x - x_A)(x - x_B).$$

Sostituendo a x_A e x_B le ascisse di A e B e a m e q i valori trovati per la retta AB , otteniamo:

$$y = x + 1 + k(x + 1)(x - 1) \rightarrow y = x + 1 + k(x^2 - 1) \rightarrow y = kx^2 + x + 1 - k.$$

- b) Scriviamo l'equazione del fascio utilizzando la formula:

$$y = mx + q + k(x - x_T)^2.$$

Sostituendo a x_T l'ascissa di T e a m e q i corrispondenti valori dell'equazione di t otteniamo:

$$y = 2x - 1 + k(x - 3)^2 \rightarrow y = 2x - 1 + k(x^2 - 6x + 9) \rightarrow y = kx^2 + (2 - 6k)x - 1 + 9k.$$

Scrivere l'equazione del fascio di parabole generato dalle parabole:

$$\mathcal{P} : y = -x^2 + 9; \quad \mathcal{P}_1 : y = x^2 - 5x + 6,$$

determinando, (se esistono):

- a) i punti base del fascio;
- b) le parabole degeneri (rette) del fascio.

L'equazione del fascio di parabole è:

$$(11) \quad y + x^2 - 9 + t(y - x^2 + 5x - 6) = 0,$$

alla quale va aggiunta la parabola $\mathcal{P}_1$ che non corrisponde ad alcun valore di t nella (11).

Dal sistema:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 9 \\ y = x^2 - 5x + 6, \end{cases} \quad \text{sottraendo membro a membro si ottiene l'equazione:}$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0, \text{ le cui soluzioni individuano i punti base } A(3, 0), B\left(-\frac{1}{2}, \frac{35}{4}\right).$$

Riscriviamo la (11) nella forma equivalente:

$$(12) \quad (1 + t)y = (t - 1)x^2 - 5tx + 6t + 9$$

e determiniamo i valori di t per i quali la (12) diventa un'equazione di primo grado o scomponibile in due equazioni di primo grado.

- Per $t = 1$, la (12) diventa (fig. 11.49):
 $2y = -5x + 15 \Rightarrow 5x + 2y - 15 = 0$, che rappresenta la retta che passa per i punti base.

- Per $t = -1$, la (12) diventa: $2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2(x - 3)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$,

che rappresenta le due rette che passano per i punti base e sono parallele all'asse y , le cui equazioni sono:

$$x = 3 \text{ e } x = -\frac{1}{2}.$$

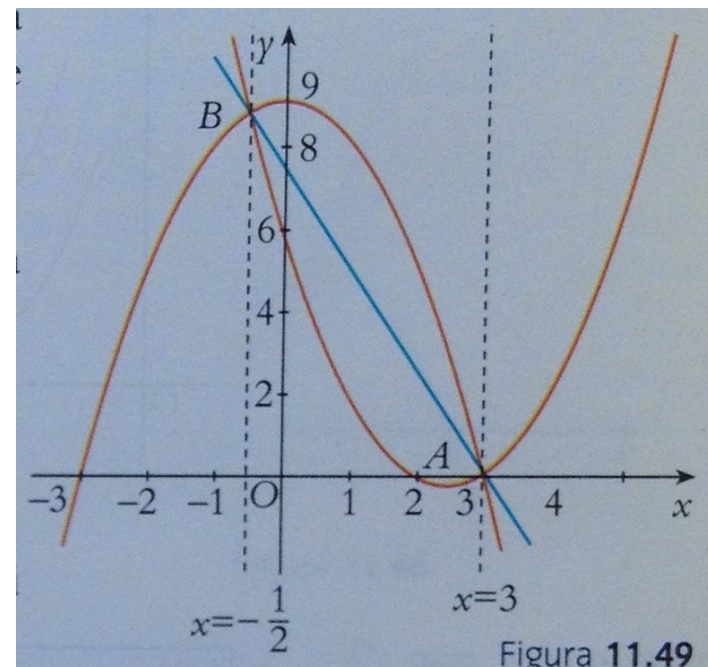


Figura 11.49

Le rette associate a questi due valori di t , sono le *parabole degeneri* del fascio.

ESERCIZIO GUIDA

Rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = x^2 - 3x - |x - 1| + 1.$$

Poiché

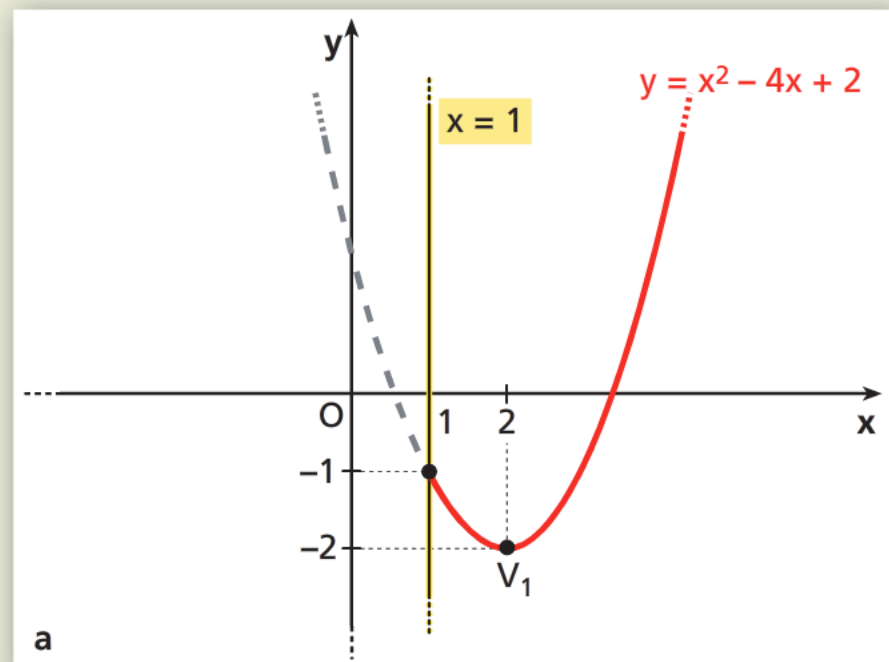
$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1) & \text{se } x - 1 < 0 \end{cases}$$

la funzione data è la seguente:

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 2 & \text{se } x \geq 1 \\ x^2 - 2x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

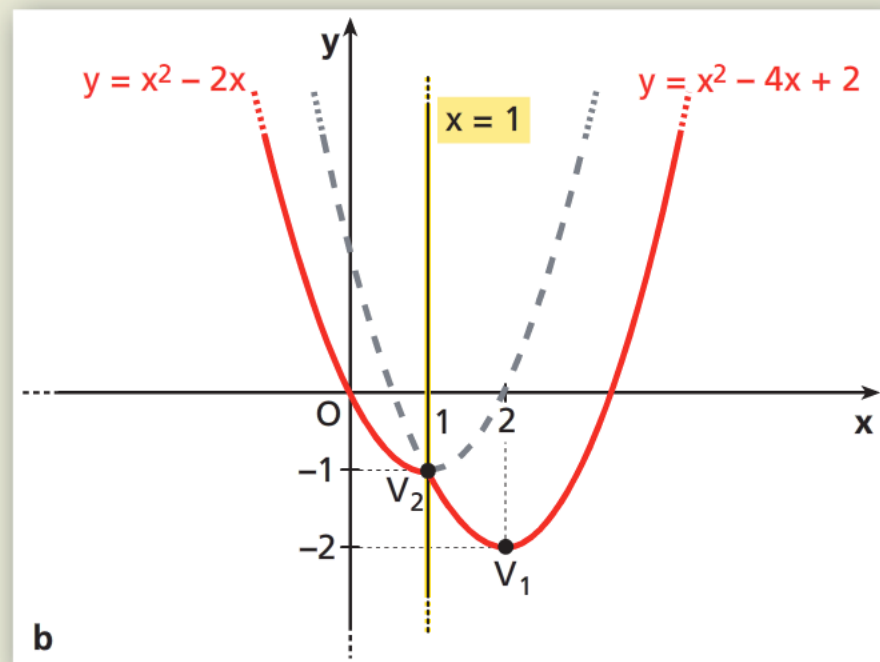
Le equazioni $y = x^2 - 4x + 2$ e $y = x^2 - 2x$ sono le equazioni di due parabole rispettivamente di vertici $V_1(2; -2)$ e $V_2(1; -1)$.

Consideriamo la prima equazione e disegniamo solo l'arco di parabola contenuto nel semipiano con $x \geq 1$.



Consideriamo la seconda equazione e disegniamo solo l'arco di parabola contenuto nel semipiano delle $x < 1$.

Il grafico della funzione è rappresentato dalla linea continua.



ESERCIZIO GUIDA

Dopo averne determinato il dominio, rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = 1 + \sqrt{x + 1}.$$

Per determinare il dominio occorre porre il radicando maggiore o uguale a 0, cioè:

$$x + 1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1.$$

Il dominio della funzione è dunque l'insieme $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$.

Tracciamo nel piano cartesiano la retta $x = -1$ ed eliminiamo tutti i punti che hanno ascissa minore di -1 (figura *a*).

Per rappresentare la funzione isoliamo la radice:

$$y - 1 = \sqrt{x + 1}.$$

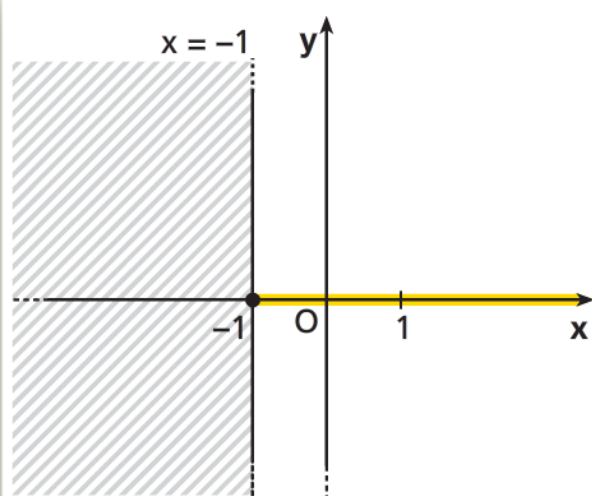
Questa equazione è equivalente a:

$$\begin{cases} y - 1 \geq 0 \\ (y - 1)^2 = x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ y^2 - 2y + 1 = x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ x = y^2 - 2y \end{cases}$$

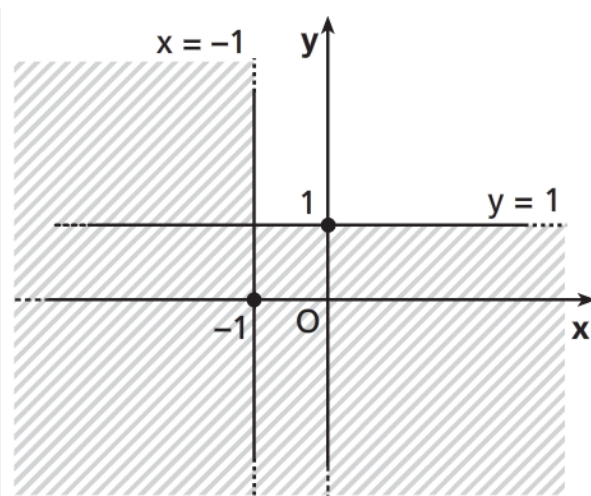
Tracciamo nel piano cartesiano la retta $y = 1$ ed eliminiamo tutti i punti che hanno ordinata minore di 1 (figura *b*).

L'equazione $x = y^2 - 2y$ è l'equazione di una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse x con vertice $V(-1; 1)$.

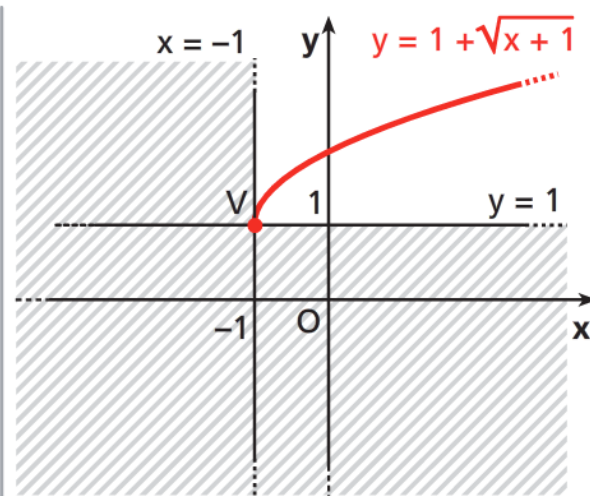
Tracciamo il ramo di parabola contenuto nella parte di piano che non abbiamo oscurato (figura c).



a. Il dominio di $y = 1 + \sqrt{x + 1}$.



b. Regione contenente il grafico della funzione.

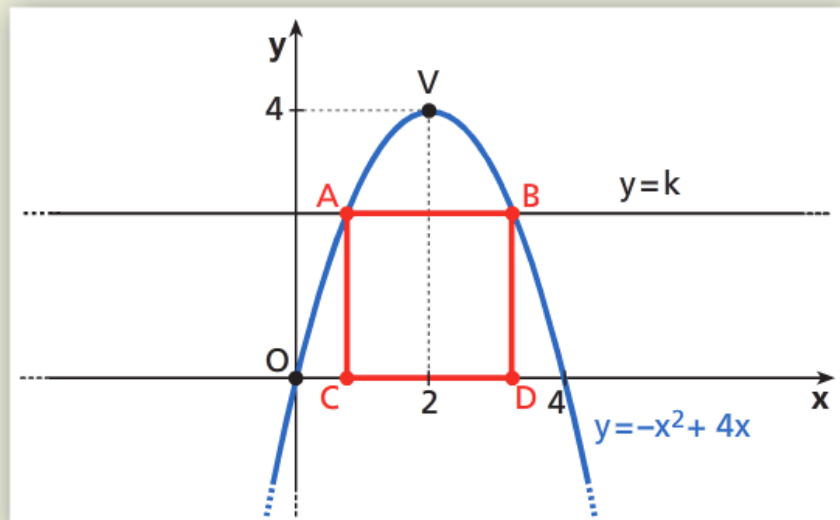


c. Il grafico della funzione.

ESERCIZIO GUIDA

Inscriviamo nella parte di piano compresa tra la parabola di equazione $y = -x^2 + 4x$ e l'asse x un rettangolo di perimetro uguale a 10.

La parabola ha il vertice V di coordinate $(2; 4)$ e interseca gli assi cartesiani nei punti $(0; 0)$ e $(4; 0)$.



Tracciamo ora una retta parallela all'asse x . Essa ha equazione $y = k$, con $0 < k < 4$, e interseca la parabola nei punti A e B , le cui coordinate si determinano risolvendo il sistema:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ y = k \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + k = 0 \\ y = k \end{cases} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - k} \\ y = k \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} A(2 - \sqrt{4 - k}; k) \\ B(2 + \sqrt{4 - k}; k) \end{matrix} \end{aligned}$$

Consideriamo poi le proiezioni di A e B sull'asse x , che indichiamo con C e D , e troviamo il perimetro del rettangolo $ABDC$. Si ha:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= 2 + \sqrt{4 - k} - 2 + \sqrt{4 - k} = 2\sqrt{4 - k}, \\ \overline{AC} &= k. \end{aligned}$$

Quindi il perimetro del rettangolo è uguale a:

$$4\sqrt{4 - k} + 2k.$$

Troviamo ora per quale valore di k il perimetro risulta uguale a 10 resolvendo l'equazione:

$$4\sqrt{4 - k} + 2k = 10.$$

Si ha $2\sqrt{4 - k} = 5 - k$, da cui, posto $k \leq 4$, si ottiene, elevando al quadrato:

$$4 \cdot (4 - k) = 25 + k^2 - 10k \rightarrow k^2 - 6k + 9 = 0.$$

Le soluzioni di questa equazione sono:

$$k_1 = k_2 = 3.$$

Dovendo essere $0 < k < 4$, la soluzione è accettabile e la retta che individua il rettangolo ha equazione $y = 3$.

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo graficamente la seguente disequazione irrazionale:

$$\sqrt{2x+2} + 1 \geq \frac{3}{2}x.$$

Isoliamo la radice a sinistra del segno di disuguaglianza:

$$\sqrt{2x+2} \geq \frac{3}{2}x - 1.$$

Dai due membri della disequazione ricaviamo le equazioni di due funzioni, cioè poniamo:

$$y = \sqrt{2x+2} \text{ e } y = \frac{3}{2}x - 1.$$

Per disegnare il grafico della prima funzione,

$$y = \sqrt{2x + 2},$$

determiniamo il suo dominio ponendo il radicando maggiore o uguale a 0:

$$2x + 2 \geq 0 \rightarrow 2x \geq -2 \rightarrow x \geq -1.$$

Il dominio della funzione è dunque l'insieme $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$.

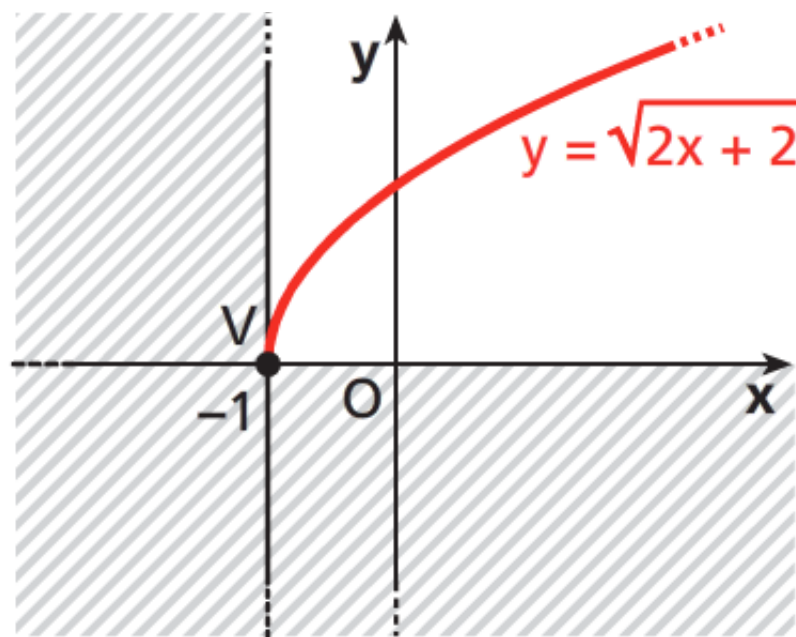
L'equazione $y = \sqrt{2x + 2}$ è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 2x + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x = \frac{1}{2}y^2 - 1 \end{cases}$$

L'equazione

$$x = \frac{1}{2}y^2 - 1$$

è l'equazione di una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle ascisse e con vertice $V(-1; 0)$. La condizione $y \geq 0$ impone di tracciare solo l'arco di parabola che contiene tutti i punti di ordinata maggiore o uguale a 0 (figura a).



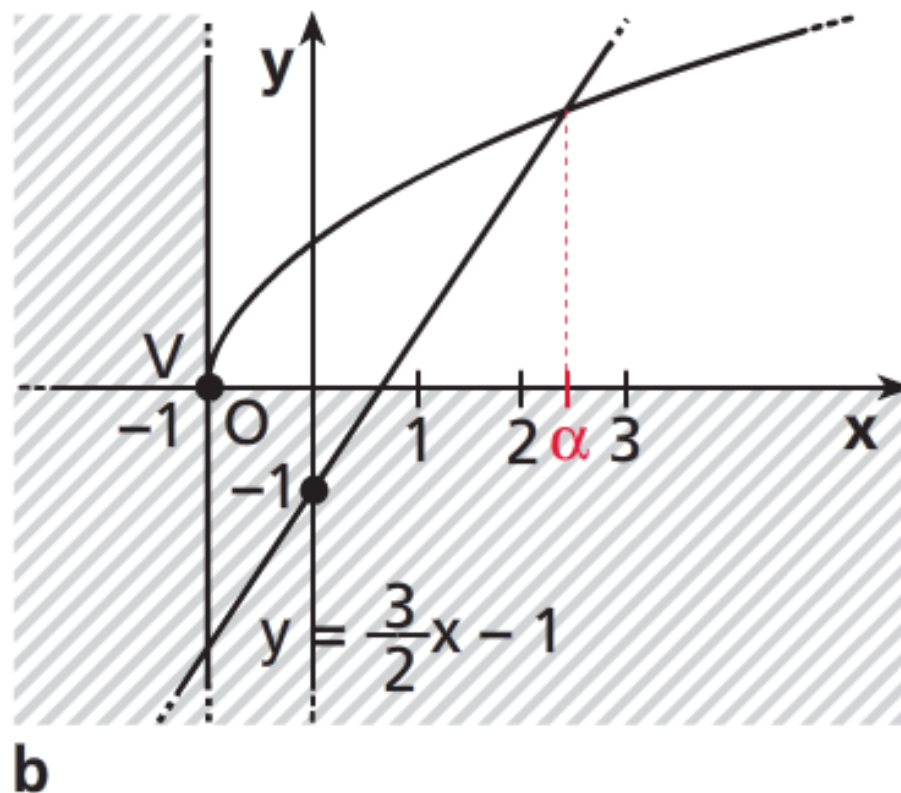
a

Rappresentiamo la seconda funzione, corrispondente alla retta di equazione

$$y = \frac{3}{2}x - 1,$$

tracciandone il grafico per $x \geq -1$ (figura b).

Dal grafico leggiamo, in modo approssimato, l'ascissa α del punto di intersezione tra la retta e la parabola, nella parte di piano in cui la disequazione ha significato: $\alpha \simeq 2,4$.



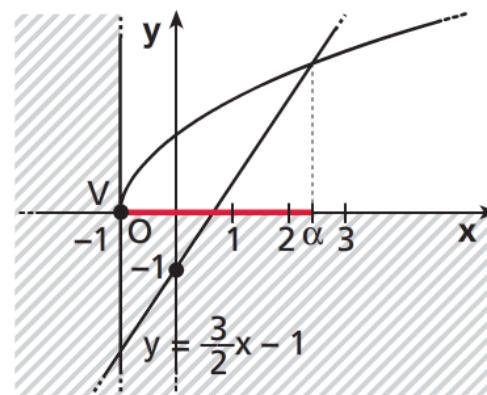
Osserviamo nel grafico tracciato che la disequazione iniziale $\sqrt{2x+2} \geq \frac{3}{2}x - 1$ mette a confronto l'ordinata di un punto della parabola (membro a sinistra) con l'ordinata di un punto della retta (membro a destra) con la stessa ascissa.

Evidenziamo sul grafico la zona in cui i punti della parabola hanno ordinate maggiori o uguali alle ordinate dei punti corrispondenti della retta (figura c).

Le ascisse di questi punti sono le soluzioni della disequazione data:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq \alpha, \alpha \approx 2,4\}.$$

Osservazione. Se dobbiamo risolvere un'equazione, per esempio $\sqrt{2x+2} + 1 = \frac{3}{2}x$, procediamo allo stesso modo, ma terminiamo la risoluzione dopo la determinazione dell'ascissa (o delle ascisse) dei punti di intersezione.



c

ESERCIZIO GUIDA

RisolviAMO il sistema parametrico

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} - 4x + 6 \\ 2kx + (1 + k)y - 2k - 2 = 0 \\ 0 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

al variare del parametro k in $\mathbb{R}$, utilizzando il metodo grafico.

- L'equazione $y = \frac{x^2}{2} - 4x + 6$ rappresenta una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y , che ha vertice in $V(4; -2)$ e che interseca gli assi cartesiani in $(0; 6)$, $(2; 0)$ e $(6; 0)$.
Disegniamo la curva ed evidenziamo l'arco con $0 \leq x \leq 6$ che ha per estremi i punti $A(0; 6)$ e $B(6; 0)$.
- Studiamo ora l'equazione $2kx + (1 + k)y - 2k - 2 = 0$.
Evidenziamo k :

$$k(2x + y - 2) + y - 2 = 0.$$

È un fascio proprio di rette, di generatrici:

$$y = 2, \quad \text{ottenuta ponendo } k = 0,$$

$$2x + y - 2, \quad \text{ottenuta ponendo l'espressione che è moltiplicata per } k \text{ uguale a } 0.$$

Il centro del fascio è $C(0; 2)$.

- Imponiamo alla retta generica del fascio il passaggio per $A(0; 6)$:

$$(1 + k)6 - 2k - 2 = 0 \rightarrow 4k + 4 = 0 \rightarrow k = -1.$$

- Imponiamo ora il passaggio per $B(6; 0)$:

$$12k - 2k - 2 = 0 \rightarrow 10k - 2 = 0 \rightarrow k = \frac{1}{5}.$$

- Troviamo il valore di k relativo alla retta del fascio tangente alla parabola con il sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} - 4x + 6 \\ 2kx + (k + 1)y - 2k - 2 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo il valore di y ricavato dalla prima equazione nella seconda, otteniamo:

$$2kx + (k + 1)\left(\frac{x^2}{2} - 4x + 6\right) - 2k - 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2kx + k\frac{x^2}{2} - 4kx + 6k + \frac{x^2}{2} - 4x + 6 - 2k - 2 = 0 \rightarrow (k + 1)x^2 - 4(k + 2)x + 8k + 8 = 0.$$

Poniamo $\frac{\Delta}{4} = 0$:

$$4(k + 2)^2 - 8(k + 1)^2 = 0 \rightarrow k^2 + \cancel{4k} + 4 - 2k^2 - \cancel{4k} - 2 = 0 \rightarrow -k^2 + 2 = 0 \rightarrow k = \pm\sqrt{2}.$$

Le rette tangenti alla parabola sono due, ma quella tangente all'arco AB si ottiene per $k = \sqrt{2}$. Infatti le rette del fascio, al variare di k , ruotano intorno al punto C in senso orario a partire dalla retta $2x + y - 2 = 0$, che si ottiene per $k \rightarrow \infty$.

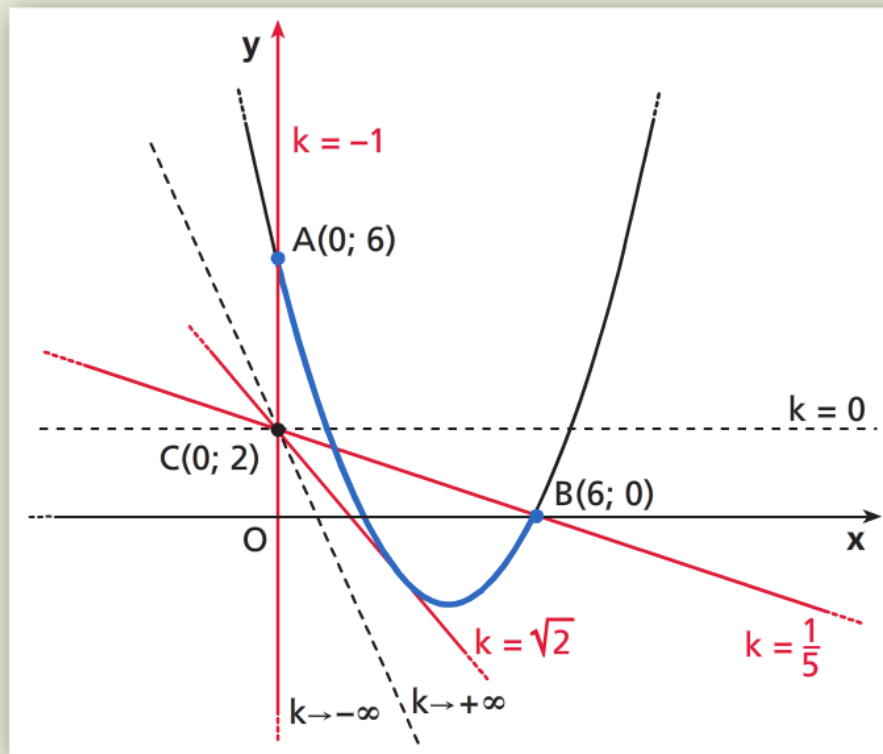
- Osservando il grafico, deduciamo il numero dei punti di intersezione tra la parabola e le rette del fascio nell'intervallo $0 \leq x \leq 6$ e quindi il numero delle soluzioni, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- per $k = -1$, una soluzione;
- per $-1 < k < \frac{1}{5}$, una soluzione;
- per $k = \frac{1}{5}$, due soluzioni;
- per $\frac{1}{5} < k < \sqrt{2}$, due soluzioni;
- per $k = \sqrt{2}$, due soluzioni coincidenti.

In sintesi, il sistema ammette:

una soluzione per $-1 \leq k < \frac{1}{5}$;

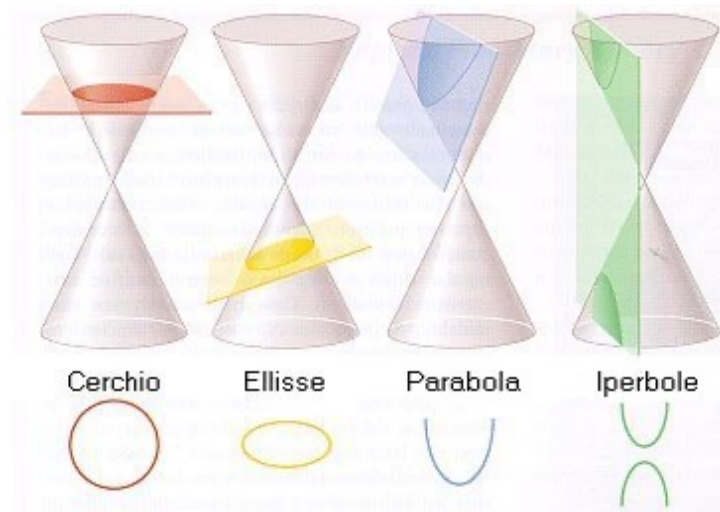
due soluzioni per $\frac{1}{5} \leq k \leq \sqrt{2}$.



Docente: Vincenzo Pappalardo
Materia: Matematica

Circonferenza

Geometria Analitica

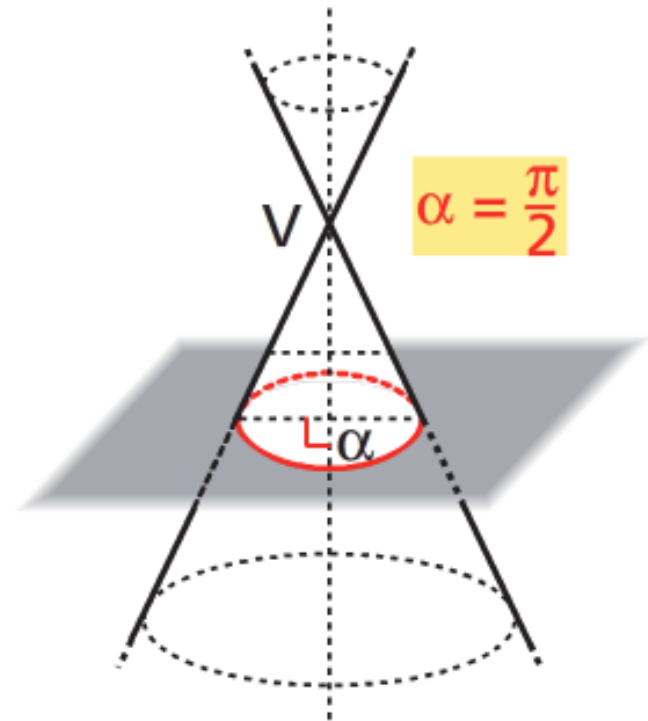


INTRODUZIONE

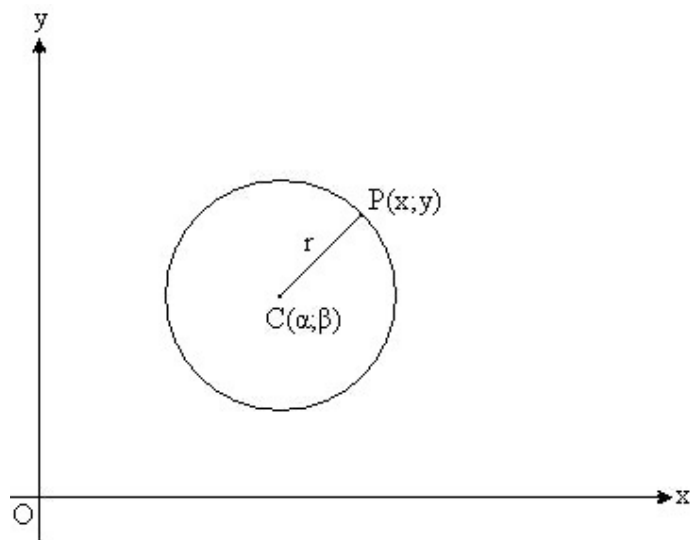
La circonferenza fa parte di un insieme di curve (ellisse, parabola, iperbole) chiamate *coniche*, perché si possono ottenere tagliando un cono con un piano.

Consideriamo un cono e tagliamolo con un piano perpendicolare al suo asse.

La figura che si ottiene dall'intersezione del piano e la superficie del cono è una *circonferenza*.



LA CIRCONFERENZA E LA SUA EQUAZIONE



*La circonferenza come luogo
geometrico*

Assegnato nel piano un punto $C=(\alpha, \beta)$, detto centro, si chiama circonferenza la curva piana luogo geometrico dei punti $P=(x; y)$ equidistanti da C :

$$PC = \text{costante} = r$$

Trasformiamo la proprietà che godono i punti P in una equazione: **l'equazione della circonferenza**, ossia l'equazione che deve essere soddisfatta dai punti P del luogo geometrico.

$$\overline{PC} = r$$

usiamo la formula della distanza tra due punti

$$\begin{aligned}\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} &= r \rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \\ \rightarrow x^2 + \alpha^2 - 2\alpha x + y^2 + \beta^2 - 2\beta y - r^2 &= 0\end{aligned}$$

Poniamo:

$$a = -2\alpha \quad b = -2\beta \quad c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$$

si ottiene:

Equazione della circonferenza

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

RIASSUNTO FORMULE

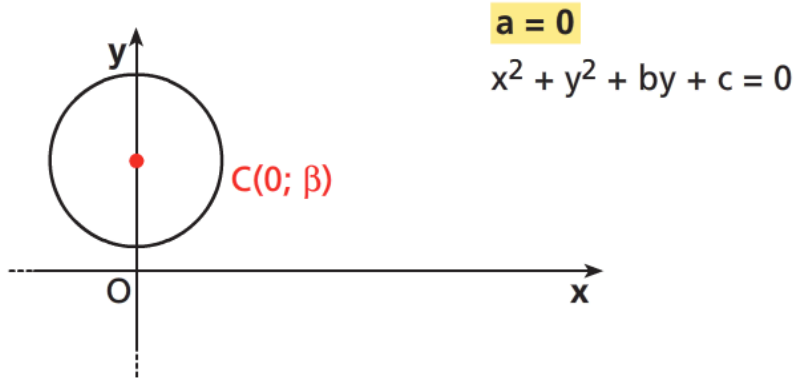
$$\text{centro} \rightarrow C = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$$

$$\text{raggio} \rightarrow r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

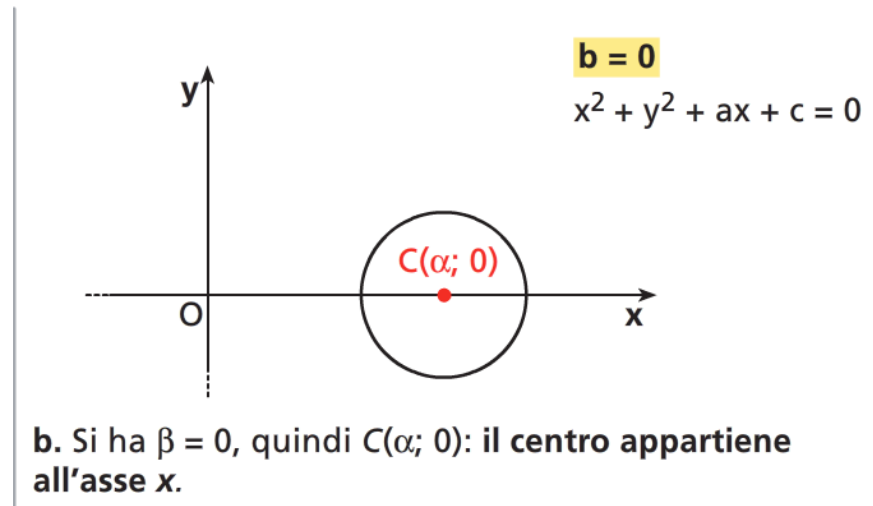
condizione esistenza circonferenza

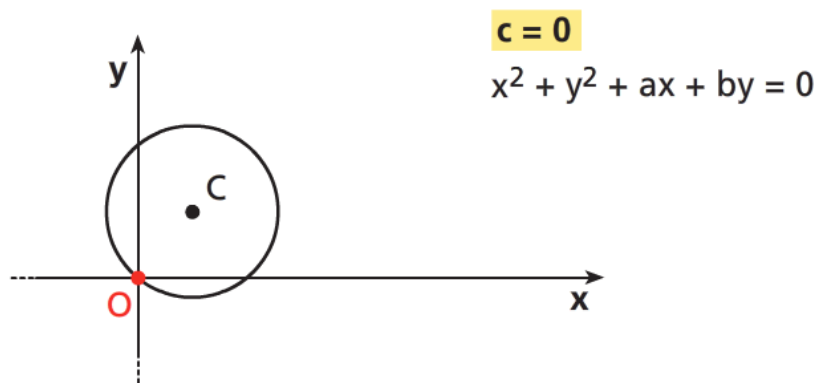
$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c \geq 0$$

CIRCONFERENZE PARTICOLARI

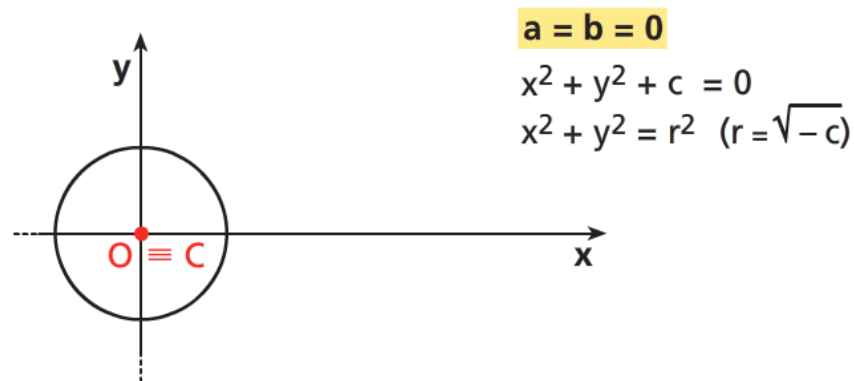


a. Si ha $\alpha = 0$, quindi $C(0; \beta)$: il centro appartiene all'asse y .

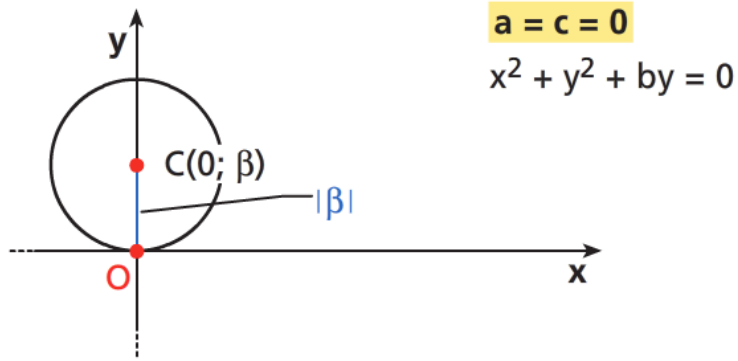




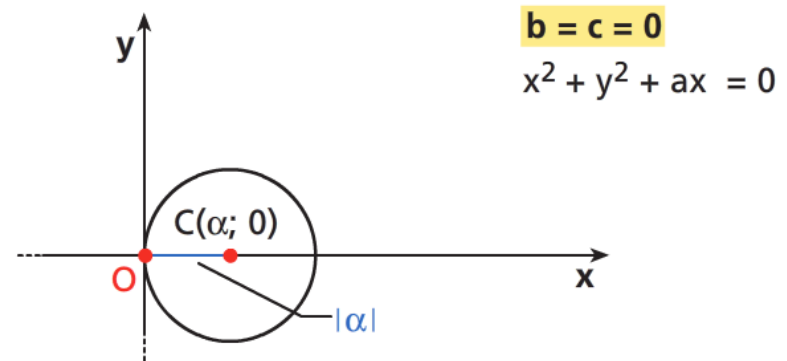
c. Le coordinate di $O(0; 0)$ verificano l'equazione, quindi la circonferenza passa per l'origine degli assi.



d. Si ha $\alpha = \beta = 0$, quindi $C(0; 0)$.
La circonferenza ha il centro nell'origine.



e. La circonferenza ha centro sull'asse y e passa per l'origine. Il raggio misura $r = \sqrt{\beta^2} = |\beta|$.



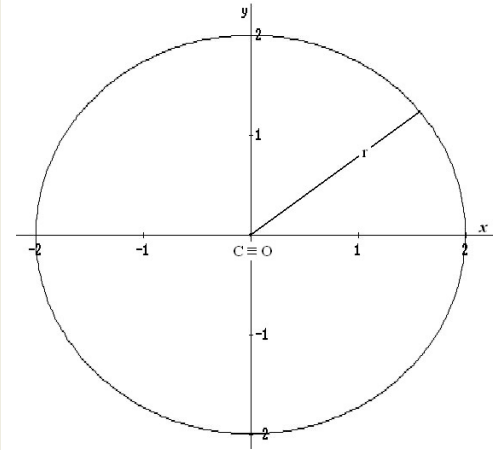
f. La circonferenza ha centro sull'asse x e passa per l'origine. Il raggio misura $r = \sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$.

ESERCIZI

L'equazione: $x^2 + y^2 = 4$ rappresenta una circonferenza? In caso affermativo determinare centro e raggio.

$$a = 0; \quad b = 0; \quad c = -4; \quad a^2/4 + b^2/4 - c = 4$$

L'equazione data rappresenta una circonferenza reale di centro $C(\alpha; \beta) = C(-a/2; -b/2) = C(0;0)$ e di raggio $r = 2$.



L'equazione: $x^2 + y^2 + 9 = 0$ rappresenta una circonferenza?

$$a = 0; \quad b = 0; \quad c = -9; \quad a^2/4 + b^2/4 - c = -9$$

L'equazione data non rappresenta una circonferenza.

ESERCIZIO GUIDA

Indichiamo quale, fra le seguenti equazioni, è quella di una circonferenza:

a) $x^2 + y^2 - x + y + 5 = 0$; b) $2x^2 + 2y^2 - x - 4y + 2 = 0$; c) $x^2 - y^2 + 5x = 0$.

a) Poiché la misura del raggio deve essere un numero reale, nella formula $r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ il radicando deve essere positivo.

Sostituendo i valori $a = -1$, $b = 1$, $c = 5$, otteniamo per il radicando:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 5 = -\frac{18}{4} < 0 \rightarrow \text{l'equazione non è quella di una circonferenza.}$$

b) Dividiamo entrambi i membri per 2:

$$x^2 + y^2 - \frac{x}{2} - 2y + 1 = 0.$$

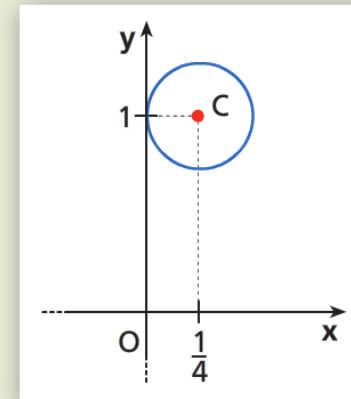
Sostituiamo $a = -\frac{1}{2}$, $b = -2$, $c = 1$ nell'espressione $\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c$:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1 - 1 = \frac{1}{16} > 0.$$

L'equazione data, quindi, è quella di una circonferenza. Il raggio misura $\frac{1}{4}$.

Le coordinate del centro sono $x_C = -\frac{a}{2} = \frac{1}{4}$ e $y_C = -\frac{b}{2} = 1$ (figura sopra).

c) $x^2 - y^2 + 5x = 0$ non è l'equazione di una circonferenza perché il coefficiente 1 di x^2 non è uguale a coefficiente -1 di y^2 .



Determinare per quali valori del parametro reale k l'equazione: $3x^2 + 3y^2 - 6(k-1)x + 27 = 0$ rappresenta una circonferenza.

Affinchè l'equazione data rappresenti una circonferenza si deve verificare che:

$$a^2/4 + b^2/4 - c \geq 0, \text{ cioè } (k-1)^2 - 9 \geq 0; \quad k^2 - 2k - 8 \geq 0, \quad \text{verificata per } k \leq -2 \cup k \geq 4.$$

In particolare per $k = -2$ e per $k = 4$ la circonferenza è degenera ($r = 0$), e si riduce ai punti:

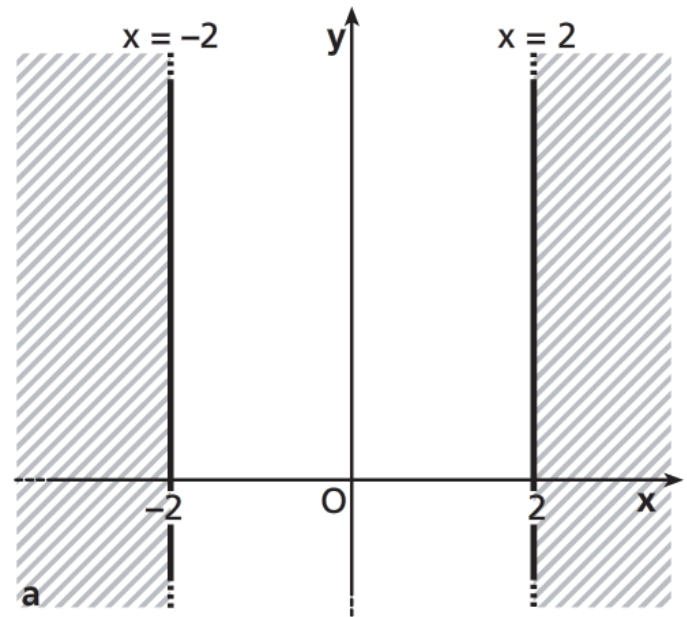
$C_1(-3;0)$, per $k = -2$, e $C_2(3;0)$, per $k = 4$.

$$\text{Infatti si ha :} \quad \left| \begin{array}{l} \text{per } k = -2 \rightarrow x^2 + y^2 + 6x + 9 = 0 \rightarrow (x+3)^2 + y^2 = 0, \text{ verificata solo per } \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases} \\ \text{per } k = 4 \rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 + y^2 = 0, \text{ verificata solo per } \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Tracciare il grafico della seguente funzione:

$$y = 2 + \sqrt{4 - x^2}$$

Cominciamo a determinare il dominio della funzione. Essendo una funzione irrazionale intera, il dominio è:



$$4 - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 - 4 \leq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow D = [-2; 2]$$

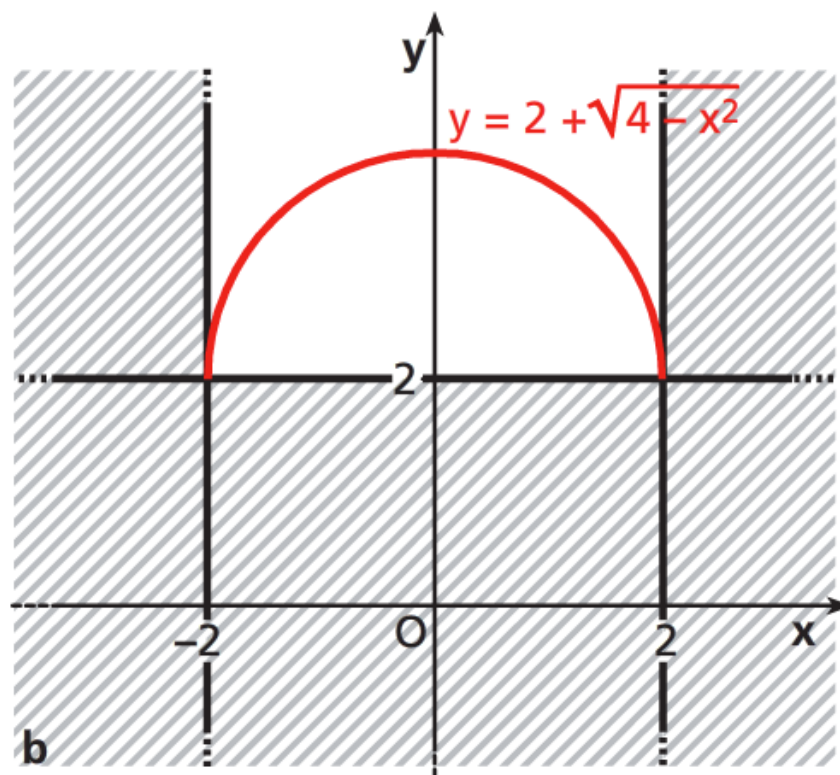
Per rappresentare la funzione, scriviamola come:

$$y - 2 = \sqrt{4 - x^2}$$

Tenendo presente il dominio, questa funzione è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} y - 2 \geq 0 \\ (y - 2)^2 = 4 - x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 2 \\ x^2 + y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

Pertanto, il grafico della funzione è quello in figura. Si noti il dominio e il codominio della funzione.



ESERCIZIO GUIDA

Rappresentiamo graficamente la curva di equazione:

$$x^2 + y^2 - 4|x| - 4 = 0.$$

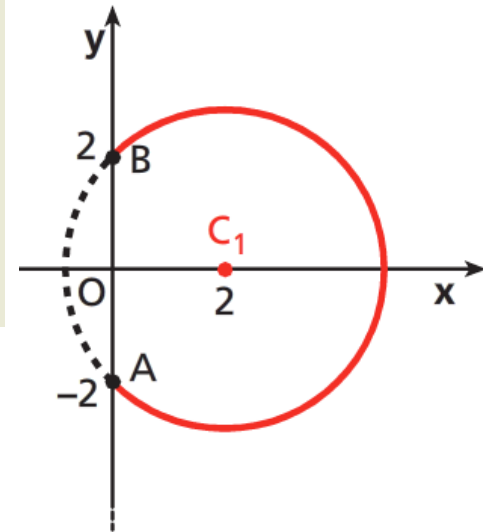
Poiché

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

allora l'equazione data risulta equivalente all'unione delle soluzioni dei due sistemi:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0 \end{cases}$$

La rappresentazione delle soluzioni del primo sistema è costituita dai punti della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0$ contenuti nel semipiano delle $x \geq 0$.

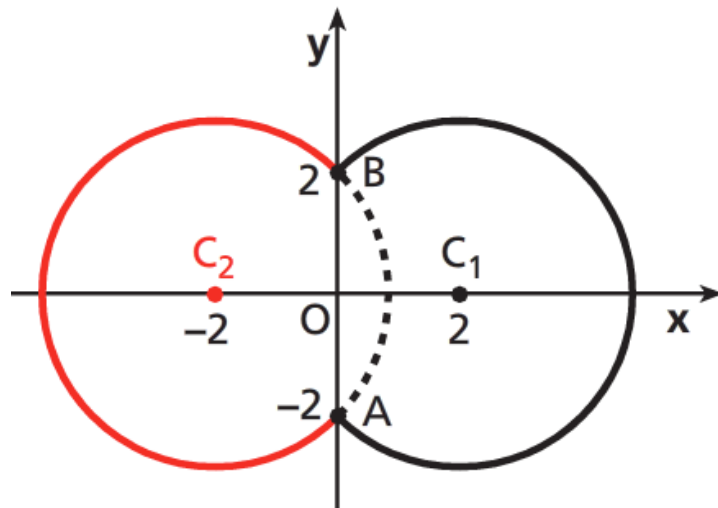


La circonferenza ha centro $C_1(2; 0)$ e raggio $r = 2\sqrt{2}$ e passa per i punti $A(0; -2)$ e $B(0; 2)$.

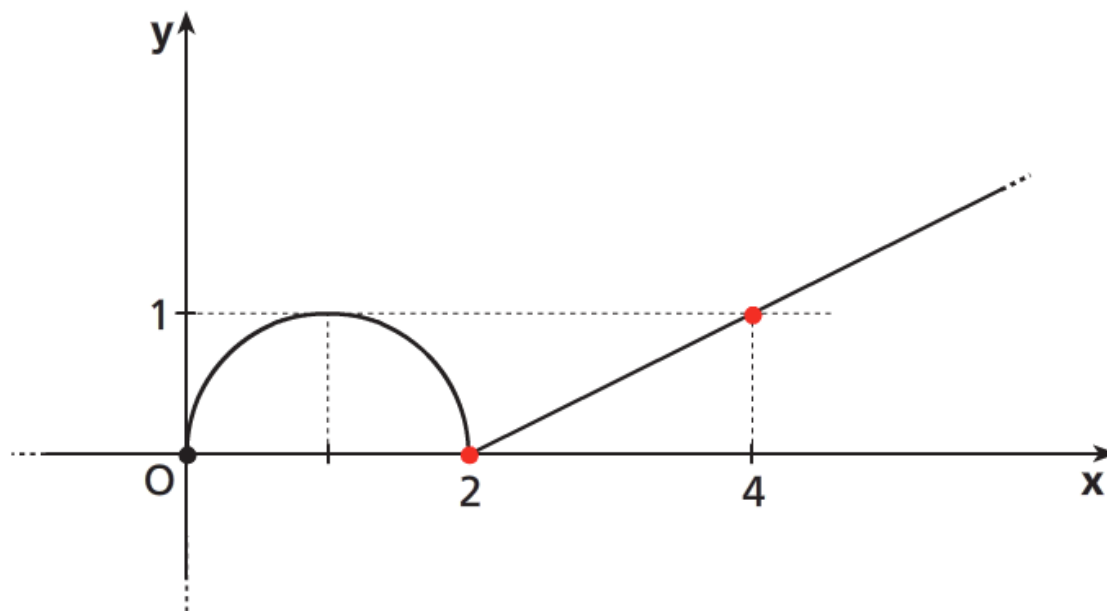
Disegniamo solo l'arco di circonferenza contenuto nel semipiano delle $x \geq 0$ (figura a).

La rappresentazione delle soluzioni del secondo sistema è costituita dai punti della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0$ contenuti nel semipiano delle $x < 0$.

Tale circonferenza ha centro $C_2(-2; 0)$ e raggio $r = 2\sqrt{2}$ e passa per i punti $A(0; -2)$ e $B(0; 2)$. Disegniamo solo l'arco di circonferenza contenuto nel semipiano delle $x < 0$ (figu-



Trovare l'equazione corrispondente al grafico utilizzando i dati della figura.



Il grafico è costituito da una semicirconferenza nell'intervallo $0 \leq x \leq 2$ e da una semiretta nell'intervallo $x > 2$.

Dai dati del grafico, conosciamo centro $C=(1;0)$ e raggio $r=1$ della circonferenza, per cui l'equazione sarà:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

Poiché i punti della semicirconferenza hanno $y \geq 0$, otteniamo l'espressione della funzione nell'intervallo $0 \leq x \leq 2$:

$$y^2 = 2x - x^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{2x - x^2} \xrightarrow[\text{la parte positiva}]{\text{prendiamo solo}} y = \sqrt{2x - x^2}$$

La semiretta passa per i punti (2;0) e (4;1), per cui, utilizzando la formula della retta passante per due punti, otteniamo l'espressione della funzione nell'intervallo $x > 2$:

$$\frac{y-0}{1-0} = \frac{x-2}{4-2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 1$$

In definitiva, la curva in figura rappresenta il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x - x^2} & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x - 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo graficamente la seguente disequazione irrazionale:

$$\sqrt{-x^2 + 2x + 8} + 4 \geq 2x.$$

Isoliamo la radice a sinistra del segno di disuguaglianza:

$$\sqrt{-x^2 + 2x + 8} \geq 2x - 4.$$

Dai due membri della disequazione ottenuta ricaviamo le equazioni di due funzioni:

$$y = \sqrt{-x^2 + 2x + 8},$$

$$y = 2x - 4.$$

Per disegnare il grafico della prima funzione,

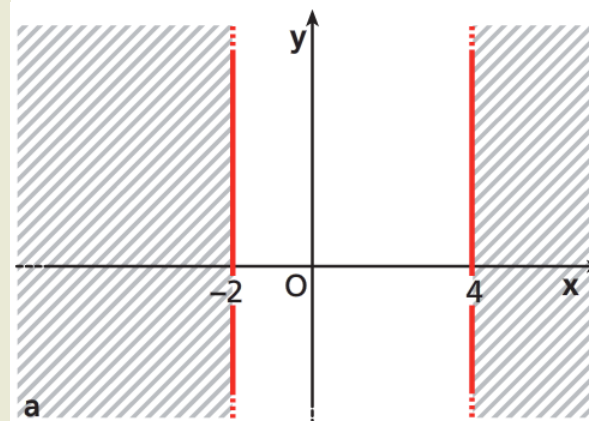
$$y = \sqrt{-x^2 + 2x + 8},$$

determiniamo il suo dominio ponendo il radicando maggiore o uguale a 0:

$$-x^2 + 2x + 8 \geq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq 4.$$

Il dominio della funzione è dunque l'insieme

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 4\} \text{ (figura a).}$$



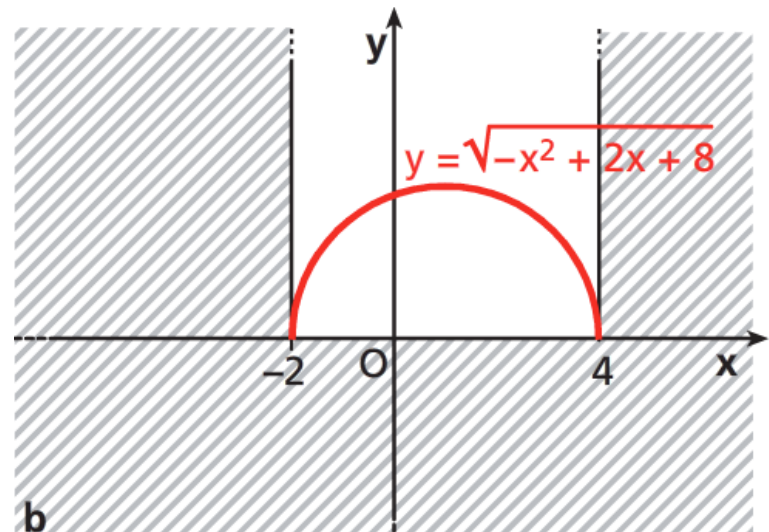
L'equazione della prima funzione,

$$y = \sqrt{-x^2 + 2x + 8},$$

è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = -x^2 + 2x + 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases}$$

che rappresenta una semicirconferenza di centro $(1; 0)$ e raggio 3 (figura *b*).



La seconda funzione corrisponde alla retta di equazione

$$y = 2x - 4,$$

che interseca l'asse x in $(2; 0)$ (figura c).

Dal grafico leggiamo, in modo approssimato, l'ascissa α del punto di intersezione tra la retta e la circonferenza, nella parte di piano in cui la disequazione ha significato:

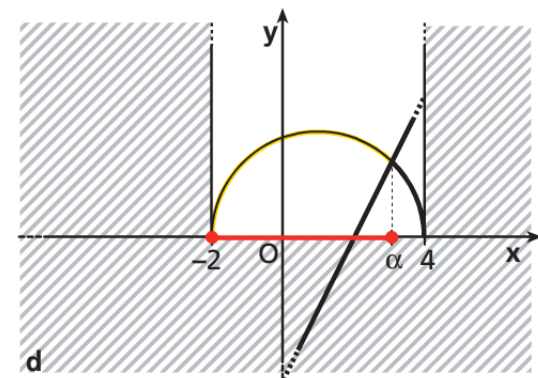
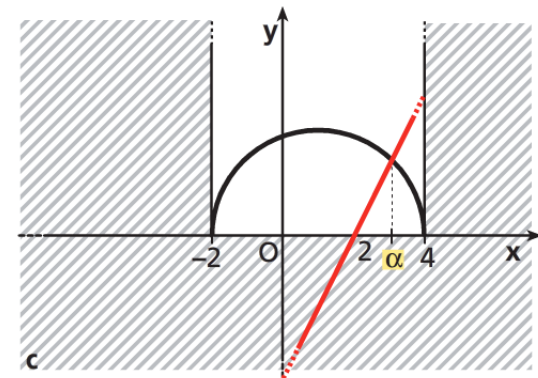
$$\alpha \simeq 3,1.$$

Osserviamo nel grafico tracciato che la disequazione $\sqrt{-x^2 + 2x + 8} \geq 2x - 4$ mette a confronto l'ordinata di un punto della circonferenza con l'ordinata di un punto della retta con la stessa ascissa.

Evidenziamo sul grafico la zona in cui i punti della circonferenza hanno ordinate maggiori o uguali rispetto alle ordinate dei punti corrispondenti della retta (figura d).

Le ascisse di questi punti sono le soluzioni della disequazione data:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq \alpha, \alpha \simeq 3,1\}.$$



POSIZIONE DI UNA RETTA RISPETTO ALLA CIRCONFERENZA

Per studiare la posizione di una retta rispetto a una circonferenza, dobbiamo determinare quante sono le soluzioni del seguente sistema (metodo di sostituzione):

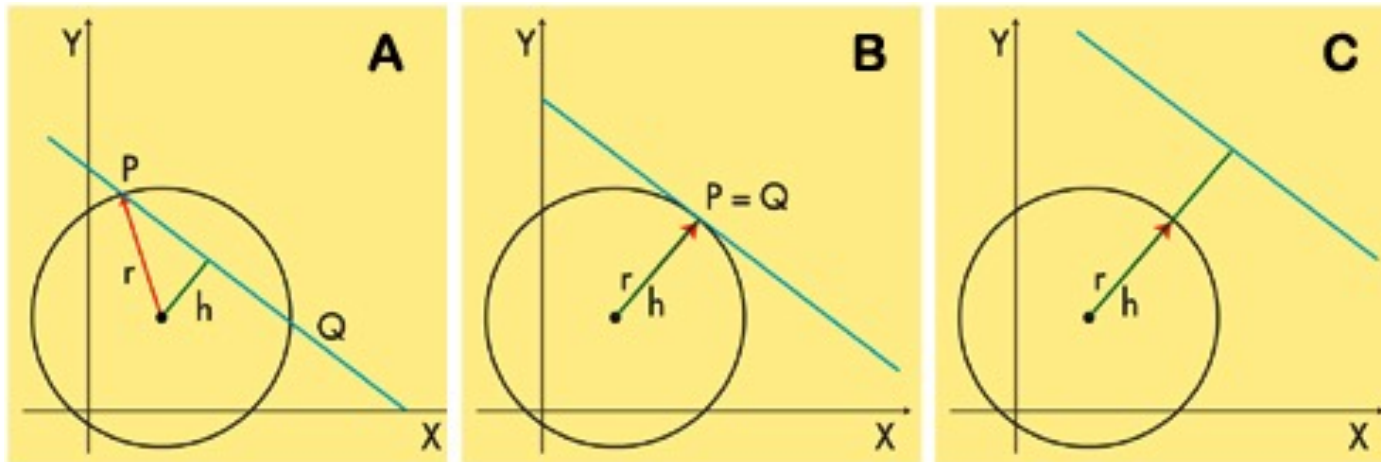
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = mx + q \end{cases}$$

$\Delta > 0 \rightarrow$ retta secante (soluzioni reali e distinte)

$\Delta = 0 \rightarrow$ retta tangente (soluzioni reali e coincidenti)

$\Delta < 0 \rightarrow$ retta esterna (non ci sono soluzioni reali)

La posizione di una retta rispetto a una circonferenza è possibile definirla anche dalla distanza h della retta rispetto al centro della circonferenza:



$h < r \rightarrow$ retta secante
 $h = r \rightarrow$ retta tangente
 $h > r \rightarrow$ retta esterna

ESERCIZI

Determinare gli eventuali punti di intersezione tra la circonferenza di equazione: $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ e la retta di equazione: $x-2y-1=0$.

Per determinare gli eventuali punti d'intersezione tra la retta e la circonferenza, dobbiamo risolvere il seguente sistema di 2° grado:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

Metodo di sostituzione: ricaviamo la x dalla seconda equazione e sostituiamola nella prima:

$$\begin{cases} x = 2y + 1 \\ (2y + 1)^2 + y^2 - 2(2y + 1) - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Effettuiamo le dovute operazioni:

$$\begin{cases} x = 2y + 1 \\ 4y^2 + 4y + 1 + y^2 - 4y - 2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ 5y^2 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ y(5y - 2) = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene

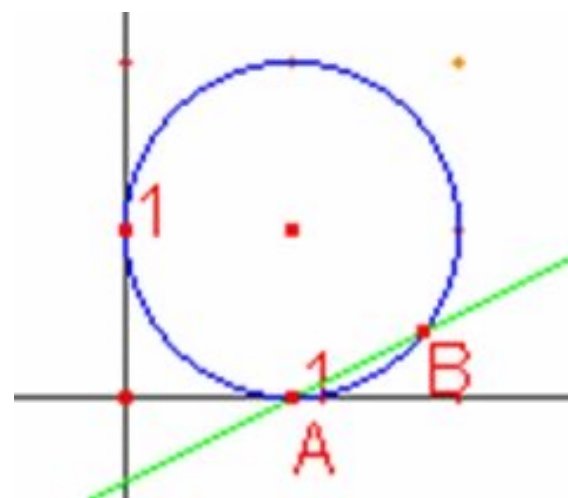
$$\begin{cases} x = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

A(1;0) e

$$\begin{cases} x = 2y + 1 \\ 5y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \cdot \frac{2}{5} + 1 = \frac{4}{5} + 1 = \frac{9}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$$

B $\left(\frac{9}{5}; \frac{2}{5}\right)$

La retta è secante alla circonferenza nei punti:
A=(1;0) e B=(9/5;2/5)



Determinare gli eventuali punti di intersezione tra la circonferenza di equazione: $x^2 + y^2 = 1$ e la retta di equazione: $y = -x + 5$.

Il sistema da risolvere è il seguente:

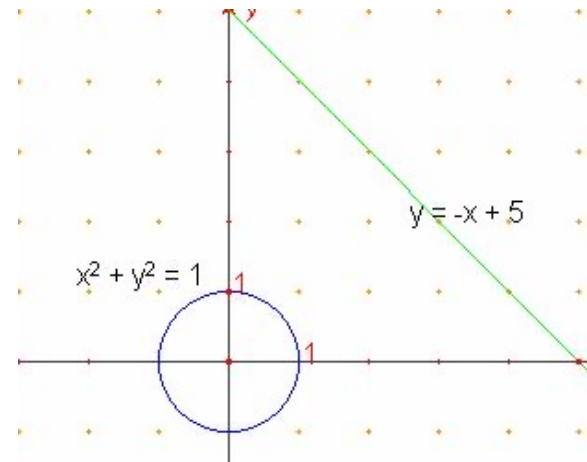
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = -x + 5 \end{cases}$$

Metodo di sostituzione: $\begin{cases} y = -x + 5 \\ x^2 + (-x + 5)^2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -x + 5 \\ x^2 + x^2 - 10x + 25 = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ x^2 - 5x + 12 = 0 \end{cases}$$

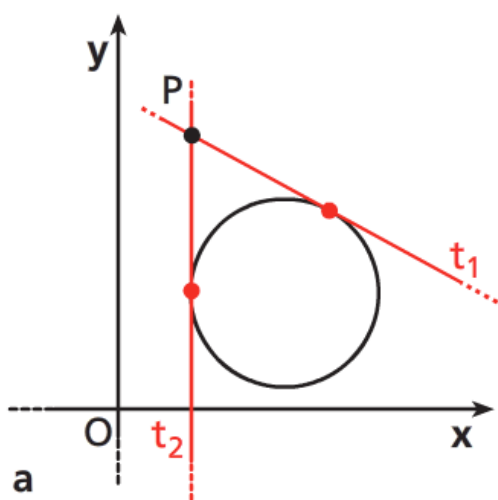
$$\Delta < 0$$

*il sistema non ammette soluzioni
la retta è esterna*

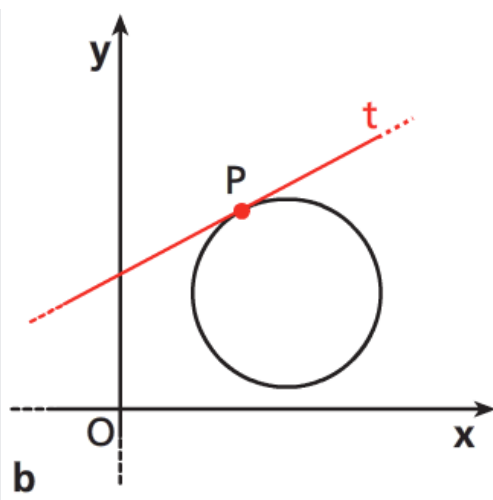


LE RETTE TANGENTI A UNA CIRCONFERENZA

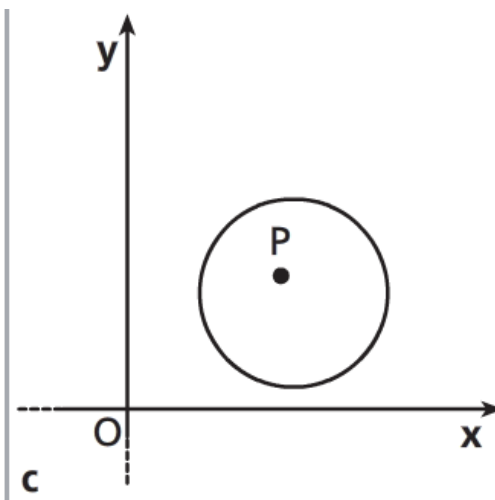
Dato un punto $P=(x_0;y_0)$ e una circonferenza qualsiasi di equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$, si possono presentare i seguenti tre casi:



P è esterno
alla circonferenza



P appartiene
alla circonferenza



P è interno
alla circonferenza

- ❑ Metodo generale, valido per tutte le coniche (circonferenza, ellisse, parabola, iperbole)

METODO DEL DISCRIMINANTE NULLO $\Delta = 0$

Determinare le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione: $x^2 + y^2 - 2x = 0$ condotte dal punto $P(9/4; 0)$.

1. Verifico se P appartiene alla circonferenza:

$$81/16 - 9/2 \neq 0$$

P non appartiene alla circonferenza, quindi posso avere due soluzioni (due rette tangenti), se P è esterno, nessuna soluzione (nessuna retta tangente), se P è interno alla circonferenza.

2. Si scrive il sistema formato dall'equazione della circonferenza e quella del fascio di rette passanti per P:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ y = m(x - 9/4) \end{cases}$$

Metodo di sostituzione:

$$x^2 + m^2 \left(x - \frac{9}{4} \right)^2 - 2x = 0$$

Dopo varie operazioni algebriche si ottiene un'equazione di 2° grado i cui coefficienti della x sono funzioni del parametro m:

$$16(1+m^2)x^2 - (72m^2 + 32)x + 81m^2 = 0$$

3. Si pone la condizione di tangenza $\Delta=0$:

$$\Delta=b^2 - 4ac = (72m^2 + 32)^2 - 4 \cdot 16(1+m^2) \cdot (81m^2) = 0$$

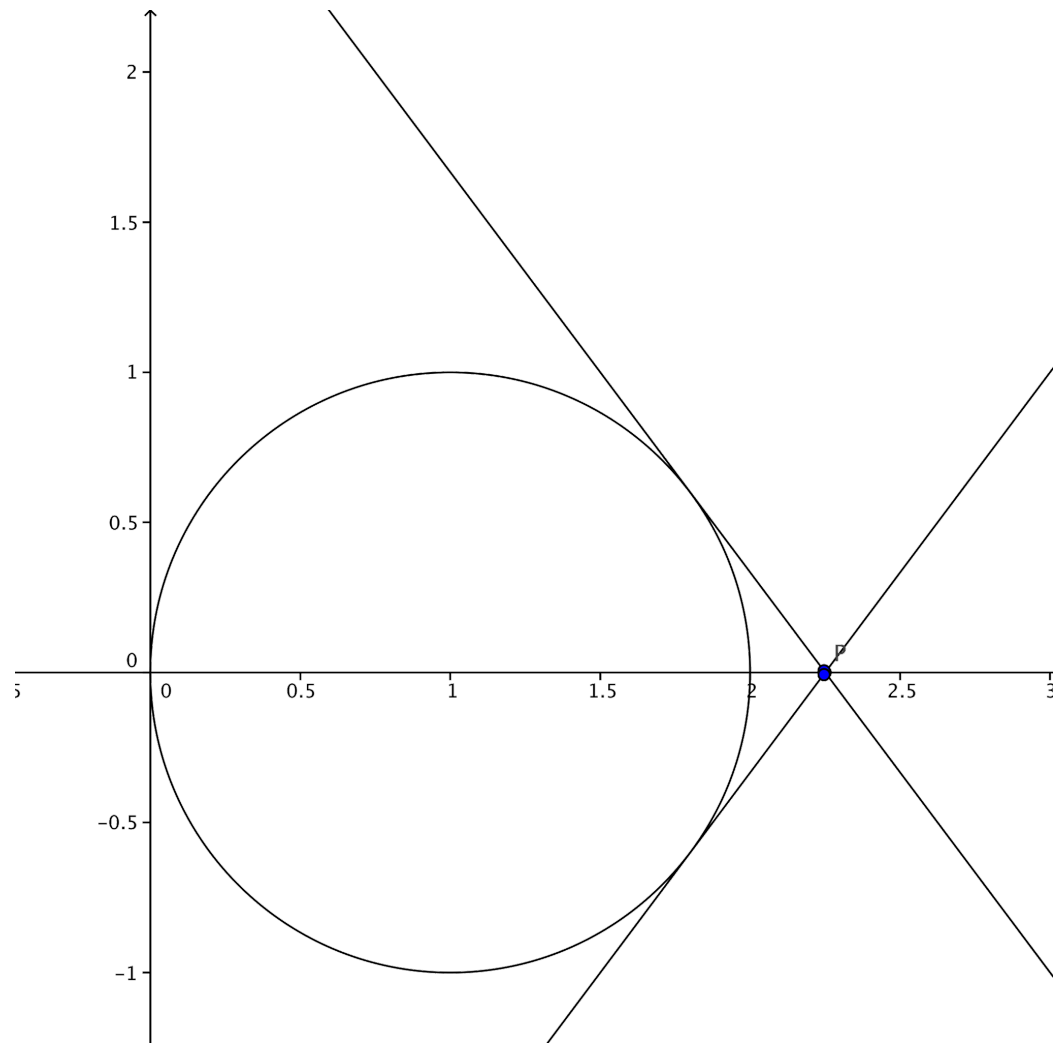
e l'equazione di 2° grado rispetto a m ammette le seguenti soluzioni:

$$-144m^2 + 256 = 0 \quad m_{1,2} = \pm \frac{4}{3}$$

4. Poiché le soluzioni sono due, il punto P è esterno alla retta e le rette tangenti alla circonferenza sono due:

Rette tangenti alla circonferenza passanti per P

$$y = \frac{4}{3}x - 3 \qquad y = -\frac{4}{3}x + 3$$



ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ condotte dal punto $P(-3; -2)$.

Rappresentiamo la circonferenza e il punto P . La circonferenza ha centro $(0; 2)$ e raggio 3. Il punto P è esterno alla circonferenza, quindi le tangenti sono due.

- Utilizziamo il I metodo ($\Delta = 0$). L'equazione di una retta generica per P è $y + 2 = m(x + 3)$ e cioè $y = mx + 3m - 2$ con esclusione della retta $x = -3$ parallela all'asse y .

Mettiamola a sistema con l'equazione della circonferenza:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0 \\ y = mx + 3m - 2 \end{cases}$$

Troviamo l'equazione risolvente e riduciamo a forma normale:

$$x^2(1 + m^2) - 2m(4 - 3m)x + 9m^2 - 24m + 7 = 0.$$

Poniamo la condizione di tangenza $\frac{\Delta}{4} = 0$:

$$m^2(4 - 3m)^2 - (1 + m^2)(9m^2 - 24m + 7) = 0$$

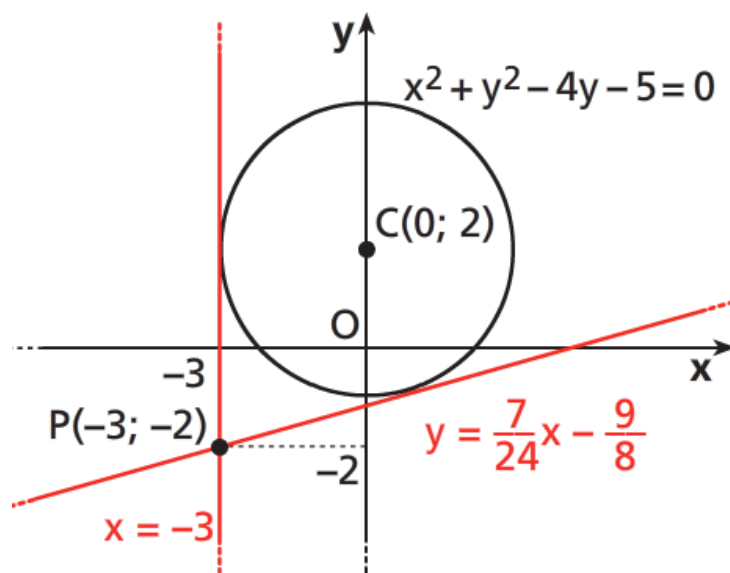
$$\cancel{16m^2} + \cancel{9m^4} - \cancel{24m^3} - \cancel{9m^2} + 24m - 7 - \cancel{9m^4} + \cancel{24m^3} - \cancel{7m^2} = 0$$

$$24m - 7 = 0 \rightarrow m = \frac{7}{24}.$$

Otteniamo **un solo** valore di m a cui corrisponde la retta di equazione:

$$y + 2 = \frac{7}{24}(x + 3) \rightarrow y = \frac{7}{24}x - \frac{9}{8}.$$

L'altra tangente deve essere parallela all'asse y e ha equazione $x = -3$.



METODO DELLA FORMULA DI SDOPPIAMENTO

Si applica solo se il punto $P=(x_0; y_0)$ appartiene alla circonferenza $x^2+y^2+ax+by+c=0$

Formula dello sdoppiamento

$$xx_0 + yy_0 + a \cdot \frac{x + x_0}{2} + b \cdot \frac{y + y_0}{2} + c = 0$$

Determinare le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x-6y-10=0$, condotte dal punto $P(5;5)$.

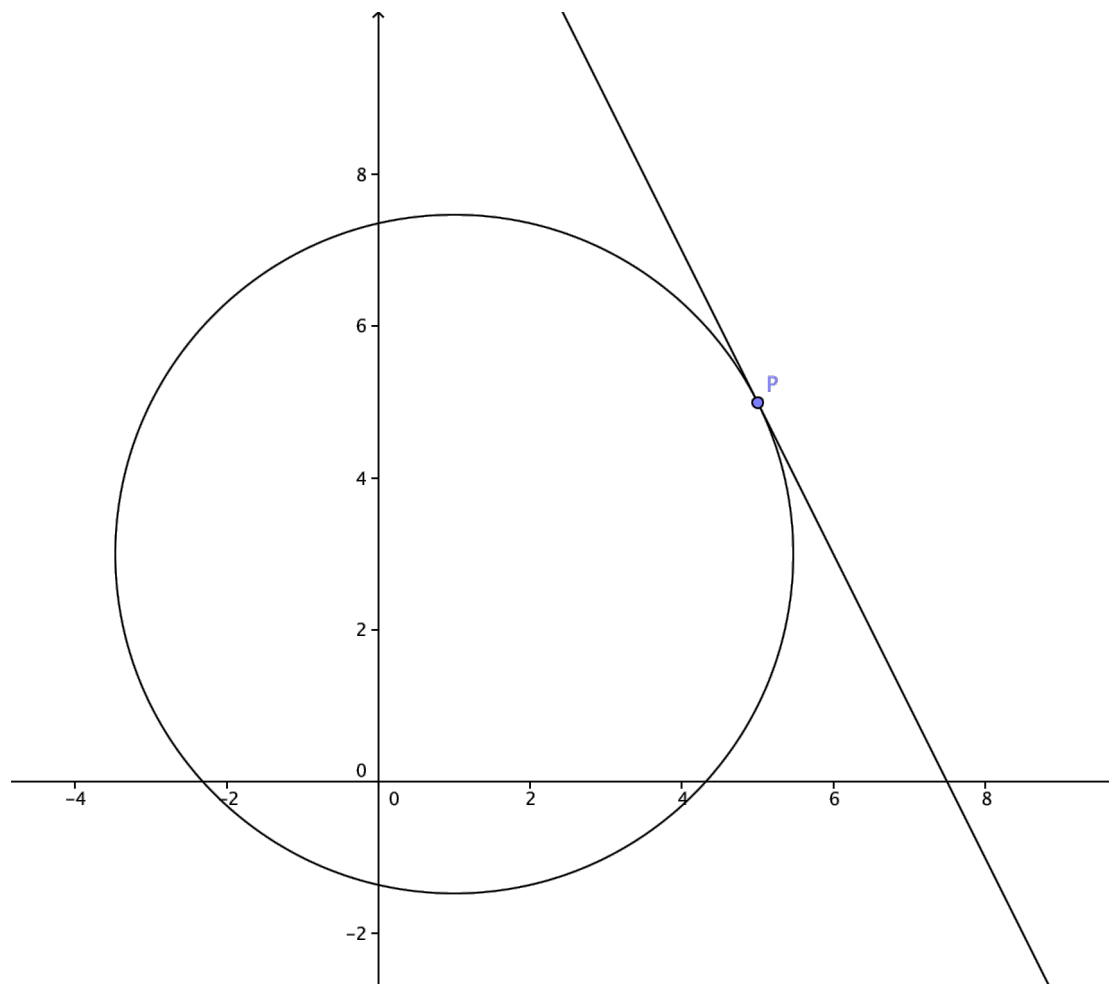
Verifico se P appartiene alla circonferenza:

$$25 + 25 - 10 - 30 - 10 = 0$$

P appartiene alla circonferenza, quindi ho sicuramente una e una sola tangente, e posso applicare la formula dello sdoppiamento:

$$5x + 5y - 2 \cdot \frac{x+5}{2} - 6 \cdot \frac{y+5}{2} - 10 = 0$$

$$\text{retta tangente} \rightarrow 4x + 2y - 30 = 0 \quad \text{oppure} \quad y = -2x + 15$$



ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'equazione della retta tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ nel suo punto $P(1; 3)$.

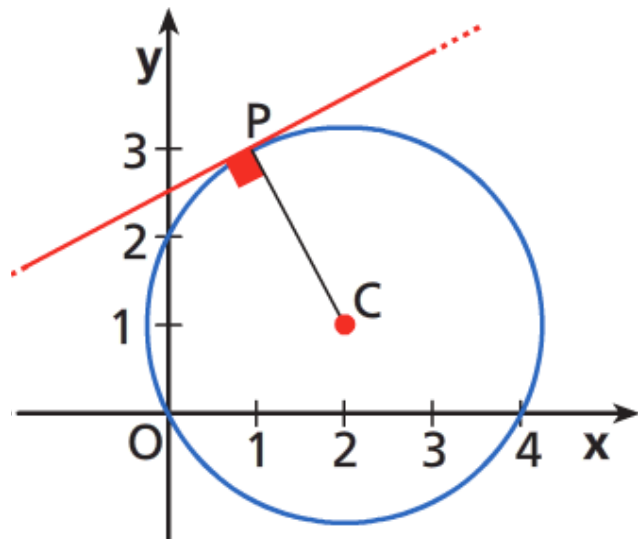
Il punto $P(1;3)$ appartiene alla circonferenza.

Formula dello sdoppiamento

$$xx_0 + yy_0 + a \cdot \frac{x+x_0}{2} + b \cdot \frac{y+y_0}{2} + c = 0$$

$$x + 3y - 4 \frac{x+1}{2} - 2 \frac{y+3}{2} = 0$$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$



METODO DELLA DISTANZA CENTRO-RETTA = RAGGIO

Si applica solo se il punto $P=(x_0;y_0)$ non appartiene alla circonferenza $x^2+y^2+ax+by+c=0$

Determinare le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione: $x^2+y^2-2x=0$ condotte dal punto $P(9/4;0)$.

1. Verifico se P appartiene alla circonferenza:

$$81/16 - 9/2 = 0$$

P non appartiene alla circonferenza, quindi posso applicare il metodo della distanza centro-retta=raggio.

2. Determino le coordinate del centro C e il raggio r:

$$C = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right) = (-1; 0)$$

$$r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2} - c = 1$$

3. Scrivo l'equazione del fascio di rette passanti per $P=(9/4;0)$ in forma implicita:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 0 = m\left(x - \frac{9}{4}\right) \rightarrow$$

$$4mx - 4y - 9m = 0$$

4. Applico la formula della distanza fra le rette e il centro:

$$d = \frac{|4m(1) - 4(0) - 9m|}{\sqrt{16m^2 + 16}} = \frac{|-5m|}{\sqrt{16m^2 + 16}}$$

5. Impongo che la distanza fra le rette del fascio e il centro C sia uguale al raggio r e risolviamo:

$$\frac{|-5m|}{\sqrt{16m^2 + 16}} = 1 \quad |-5m| = \sqrt{16m^2 + 16}$$

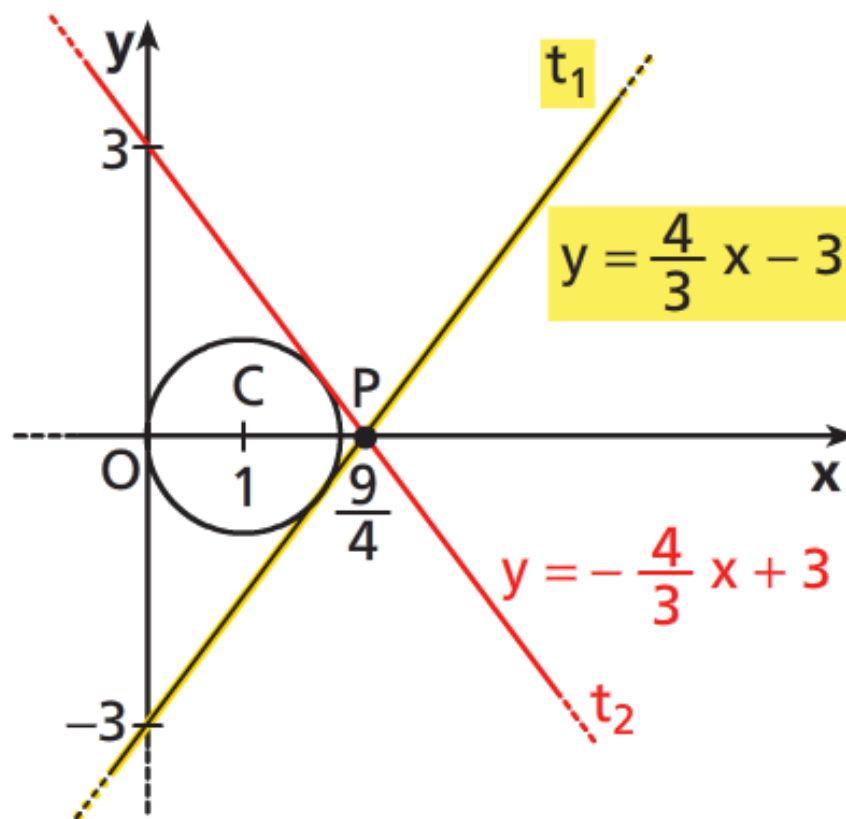
$$25m^2 = 16m^2 + 16 \quad m^2 = \frac{16}{9} \quad m_{1,2} = \pm \frac{4}{3}$$

6. Sostituisco i valori di m nell'equazione del fascio di rette e troviamo le equazioni delle due tangenti:

Rette tangenti in P

$$y = \frac{4}{3}x - 3$$

$$y = -\frac{4}{3}x + 3$$



ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ condotte dal punto $P(-3; -2)$.

Rappresentiamo la circonferenza e il punto P . La circonferenza ha centro $(0; 2)$ e raggio 3. Il punto P è esterno alla circonferenza, quindi le tangenti sono due.

Consideriamo il fascio di rette per P , $mx - y + 3m - 2 = 0$, che esclude la retta $x = -3$, e applichiamo la formula della distanza fra le rette e il centro C :

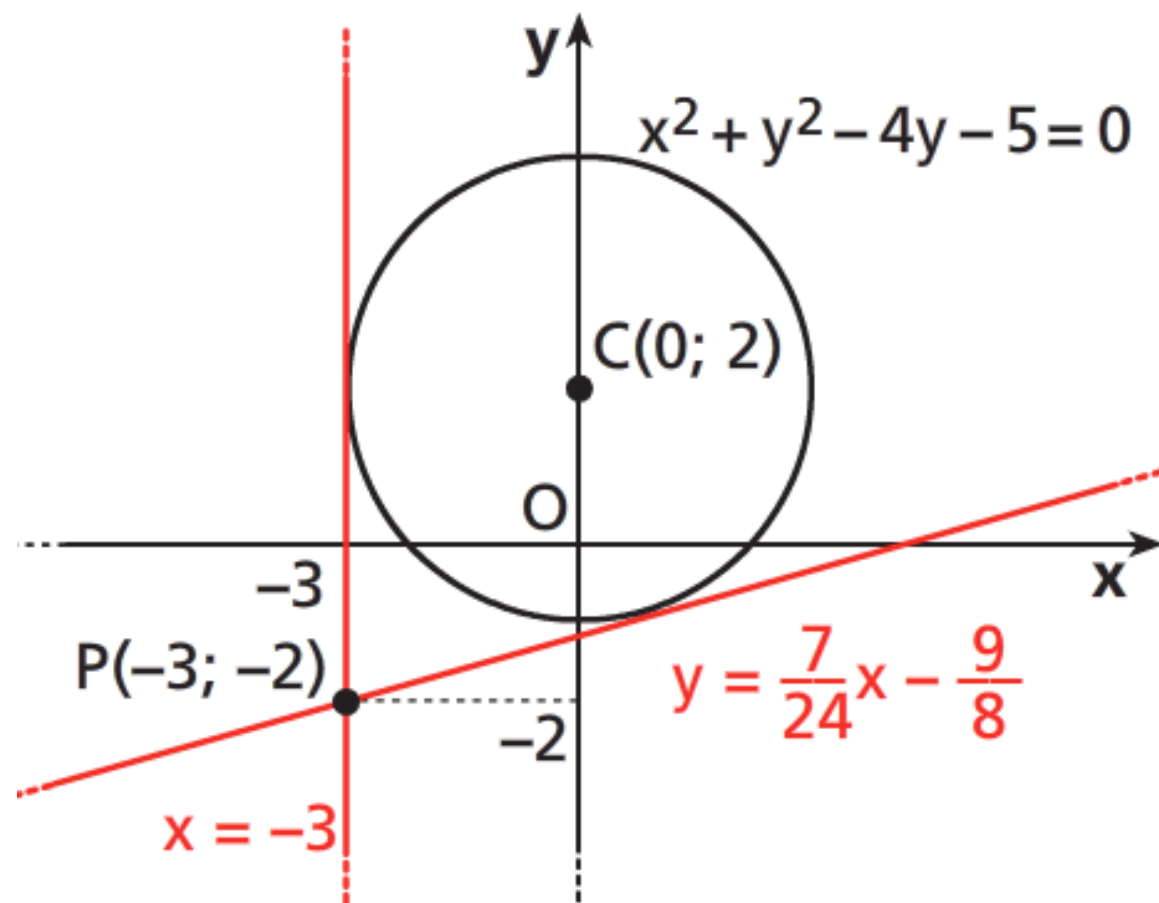
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-2 + 3m - 2|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Poniamo tale distanza uguale al raggio e risolviamo l'equazione rispetto a m :

$$\frac{|3m - 4|}{\sqrt{1 + m^2}} = 3 \rightarrow (3m - 4)^2 = 9(1 + m^2) \rightarrow 9m^2 + 16 - 24m = 9 + 9m^2 \rightarrow m = \frac{7}{24}.$$

Otteniamo la retta di equazione:

$$y = \frac{7}{24}x - \frac{9}{8}.$$



METODO DELLA TANGENTE IN P PERPENDICOLARE AL RAGGIO

Si applica solo se il punto $P=(x_0;y_0)$ appartiene alla circonferenza $x^2+y^2+ax+by+c=0$

Determinare le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x-6y-10=0$, condotte dal punto $P(5;5)$.

1. Verifico se P appartiene alla circonferenza:

$$25 + 25 - 10 - 30 - 10 = 0$$

P appartiene alla circonferenza, quindi ho sicuramente una e una sola tangente, e posso applicare il metodo della tangente in P perpendicolare al raggio.

2. Determino le coordinate del centro C:

$$C = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right) = (1; 3)$$

3. Scrivo l'equazione del fascio di rette di centro $P=(5;5)$:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y = mx - 5m + 5$$

4. Determino il coefficiente angolare della retta PC:

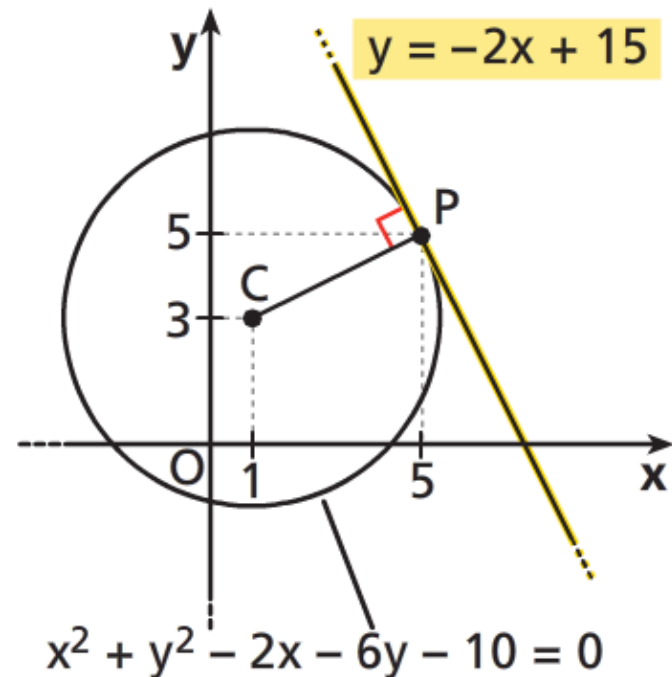
$$m_{PC} = \frac{y_P - y_C}{x_P - x_C} = \frac{5 - 3}{5 - 1} = \frac{1}{2}$$

5. Determino il coefficiente angolare della retta PC perpendicolare alla retta tangente in P :

$$m = -\frac{1}{m_{PC}} = -2$$

6. L'equazione della retta tangente in P è:

$$y = -2x + 15$$



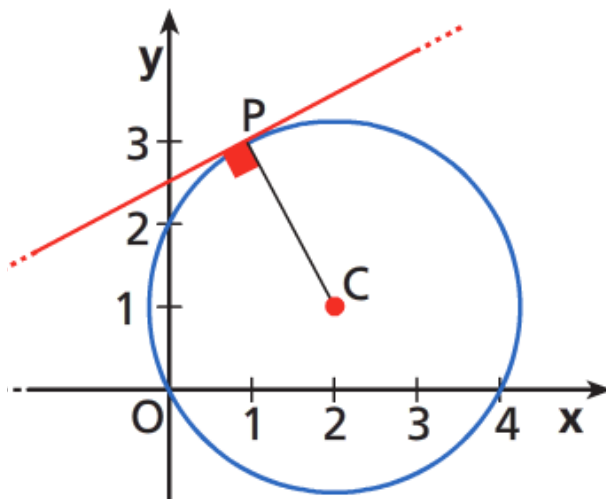
ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'equazione della retta tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ nel suo punto $P(1; 3)$.

Le coordinate del centro sono $C(2; 1)$ e il coefficiente angolare del raggio PC è $m = \frac{3 - 1}{1 - 2} = -2$.

Per la condizione di perpendicolarità la retta tangente ha coefficiente angolare $\frac{1}{2}$:

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$



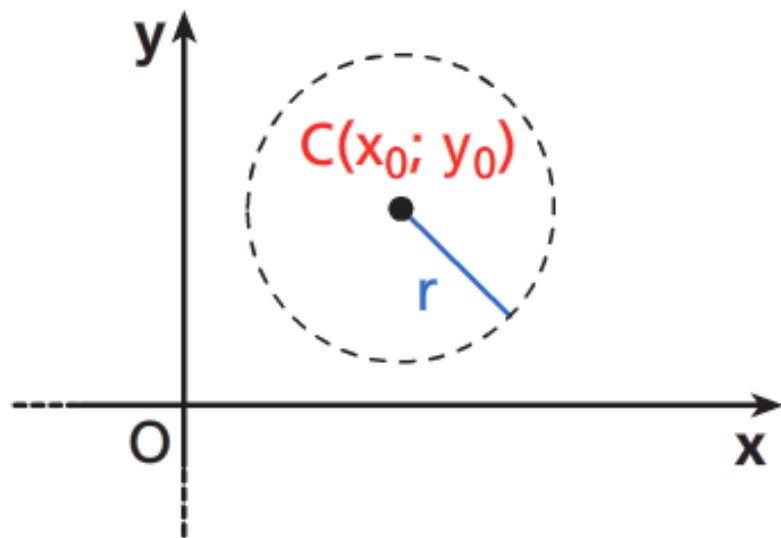
CONDIZIONI PER DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UNA CIRCONFERENZA

Per poter determinare l'equazione di una circonferenza $x^2+y^2+ax+by+c=0$ occorre calcolare i tre coefficienti a, b, c presenti in essa.

Pertanto il problema è: trovare tre condizioni tra loro indipendenti tali da tradurle in tre equazioni nelle tre incognite a, b, c .

Ecco alcuni casi.

1. Sono noti le coordinate del centro e il raggio.



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C=(-2;1/2)$ e raggio $r=1$.

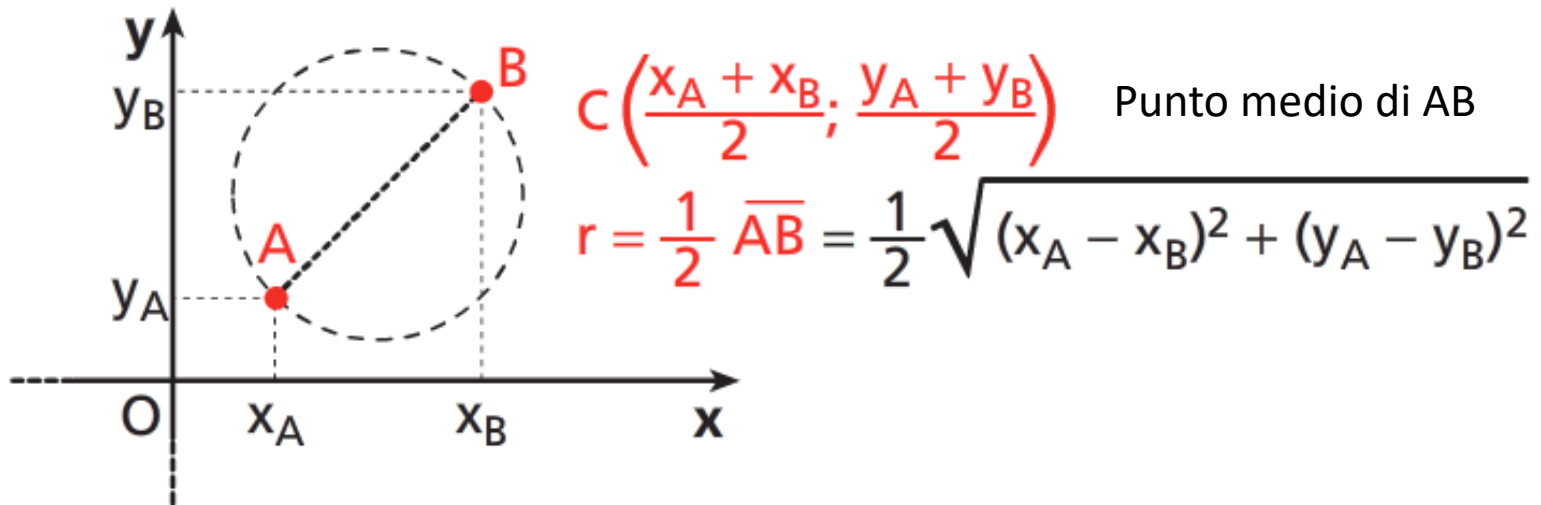
- Sono note le coordinate del centro C (due condizioni) e il raggio r (una condizione)

$$\begin{cases} a = -2\alpha ; & a = -2 \cdot (-2) = 4 \\ b = -2\beta ; & b = -2 \cdot (1/2) = -1 \\ c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 & c = 4 + 1/4 - 1 = 13/4 \end{cases}$$

equazione circonferenza

$$x^2 + y^2 + 4x - y + \frac{13}{4} = 0$$

2. Sono note le coordinate degli estremi di un diametro.



Scrivi l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento di estremi $A(-3;1)$ e $B(2;5)$.

- Sono note le coordinate degli estremi del diametro: il centro C come punto medio (due condizioni) e il raggio come metà del diametro (una condizione).

$$C = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2}; 3 \right)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(2 + 3)^2 + (5 - 1)^2} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

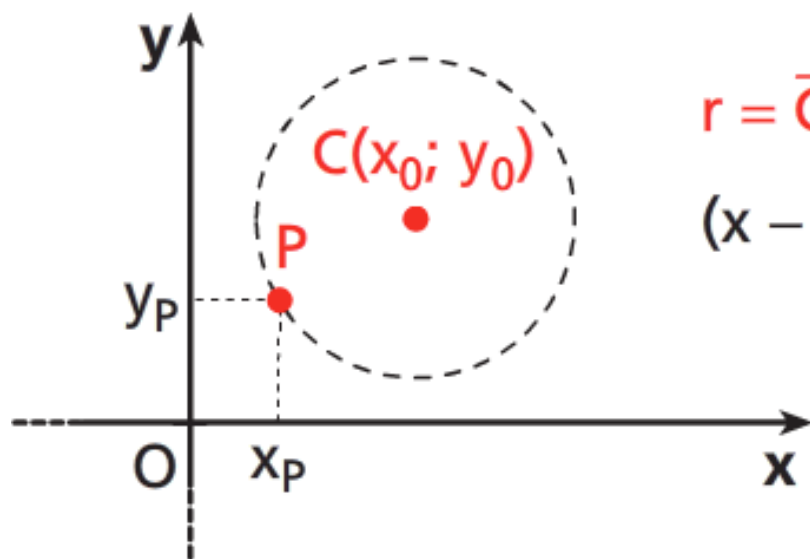
Quindi, l'equazione della circonferenza è:

$$\begin{cases} a = -2\alpha = 1 \\ b = -2\beta = -6 \\ c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 1/4 + 9 - 41/4 = -1 \end{cases}$$

equazione circonferenza

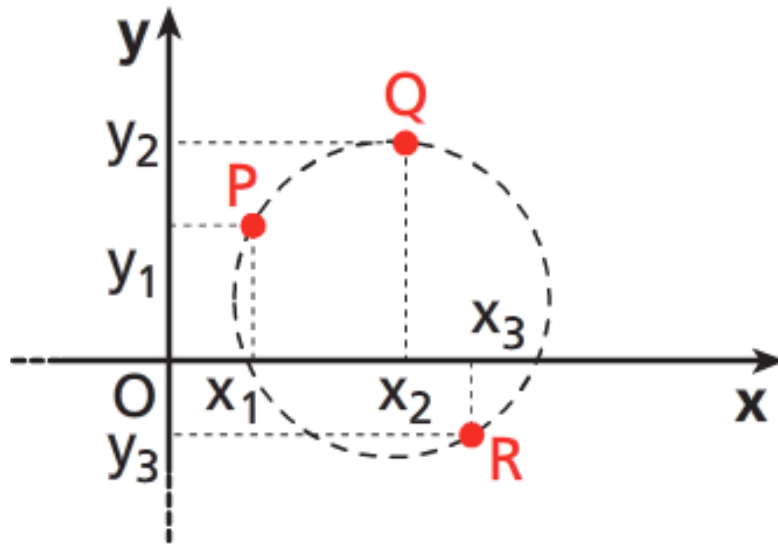
$$x^2 + y^2 + x - 6y - 1 = 0$$

3. La circonferenza passa per un punto e sono note le coordinate del centro.



$$r = \overline{CP} = \sqrt{(x_P - x_0)^2 + (y_P - y_0)^2}$$
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

4. La circonferenza passa per tre punti non allineati.



$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 + c = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 + ax_2 + by_2 + c = 0 \\ x_3^2 + y_3^2 + ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases}$$

Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti $A=(0;-2)$, $B=(0;6)$, $C=(8;0)$

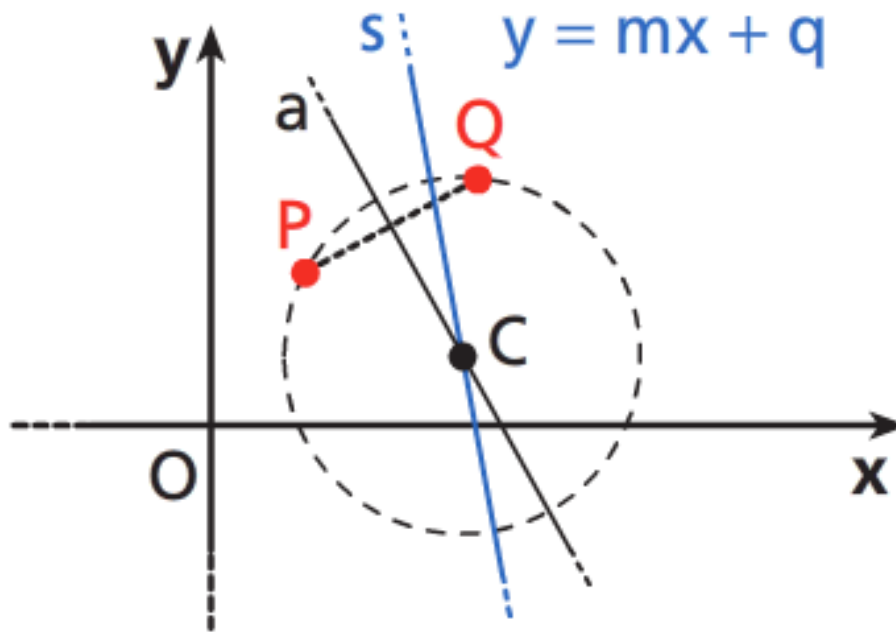
- La circonferenza passa per tre punti non allineati (tre condizioni)

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4 - 2b + c = 0 & \text{passaggio per A} \\ 36 + 6b + c = 0 & \text{passaggio per B} \\ 64 + 8a + c = 0 & \text{passaggio per C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -13/2 \\ b = -4 \\ c = -12 \end{cases}$$

equazione circonferenza

$$x^2 + y^2 - \frac{13}{2}x - 4y - 12 = 0$$

5. La circonferenza passa per due punti e il centro appartiene a una retta di equazione nota.



$$C = s \cap a$$
$$r = \overline{CP} = \overline{CQ}$$

Si trova l'equazione dell'asse
del segmento PQ:
il centro C è il punto di
intersezione della retta nota s
con l'asse a. Il raggio è
 $r = CP = CQ$

Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti $A=(1;2)$ e $B=(3;4)$ e avente il centro sulla retta di equazione $x-3y-1=0$.

Poiché AB è una corda della circonferenza, allora l'asse di AB passa per il centro.

Determiniamo l'equazione dell'asse di AB sapendo che è la retta perpendicolare al segmento e passante per il suo punto medio. Le coordinate del punto medio M di AB sono $(2; 3)$.

Il coefficiente angolare di AB è $m = 1$, quindi il coefficiente angolare dell'asse è $m_1 = -1$.

L'equazione dell'asse è $y - y_M = m_1(x - x_M)$, ossia:

$$y - 3 = -1(x - 2) \rightarrow y + x - 5 = 0.$$

Determiniamo le coordinate del centro intersecando l'asse di AB con la retta data:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x = -y + 5 \\ -y + 5 - 3y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} x = -y + 5 \\ -4y = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

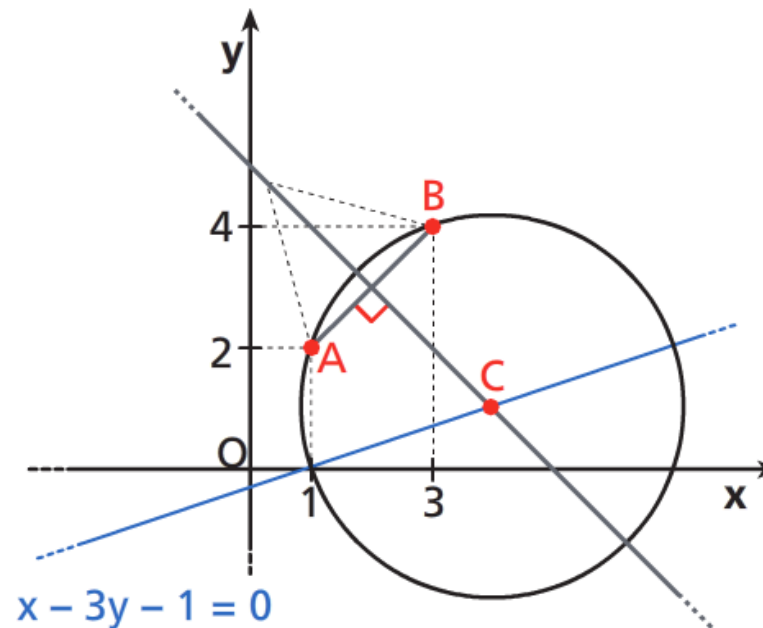
Il centro è $C(4; 1)$.

Calcoliamo la misura del raggio:

$$r = \overline{CA} = \sqrt{(4-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}.$$

Quindi l'equazione della circonferenza è:

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{10})^2 \rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 10 \rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0.$$



Metodo alternativo

Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti $A=(1;2)$ e $B=(3;4)$ e avente il centro sulla retta di equazione $x-3y-1=0$.

- La circonferenza passa per due punti (due condizioni) e il centro appartiene a una retta di equazione nota (una condizione):

$$\begin{cases} 1+4+a+2b+c=0 & \text{passaggio della circonferenza per A} \\ 9+16+3a+4b+c=0 & \text{passaggio della circonferenza per B} \\ -a/2-3(-b/2)-1=0 & \text{passaggio retta t per } C(-a/2;-b/2) \end{cases}$$

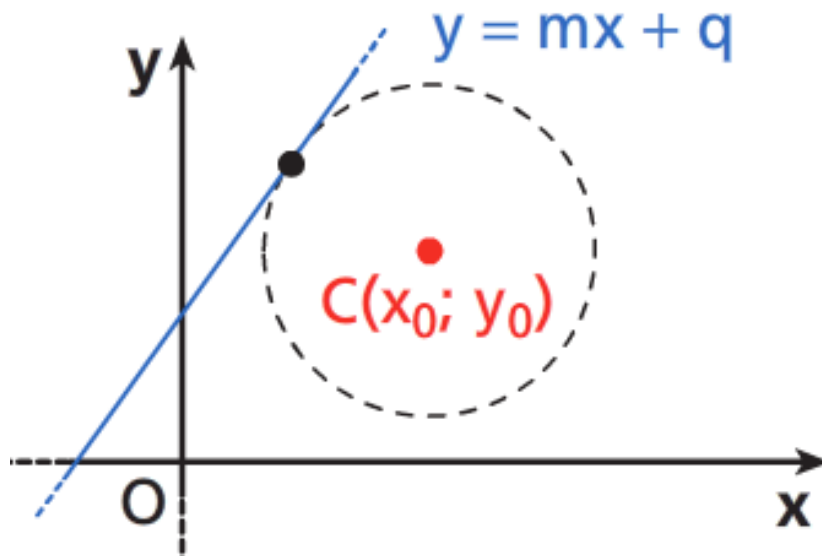
La risoluzione del sistema ci da i tre coefficienti della circonferenza:

$$\begin{cases} a = -8 \\ b = -2 \\ c = 7 \end{cases}$$

equazione circonferenza

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$$

6. Sono note le coordinate del centro e la circonferenza è tangente a una retta di equazione nota.



$$r = \frac{|mx_0 - y_0 + q|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Determinare l'equazione della circonferenza di centro $C(-2;-3)$ e tangente alla retta di equazione $y=3x-1$.

- Sono note le coordinate del centro C (due condizioni) e il raggio r (una condizione) come distanza del centro dalla retta tangente.

Calcoliamo il raggio come distanza centro-retta tangente:

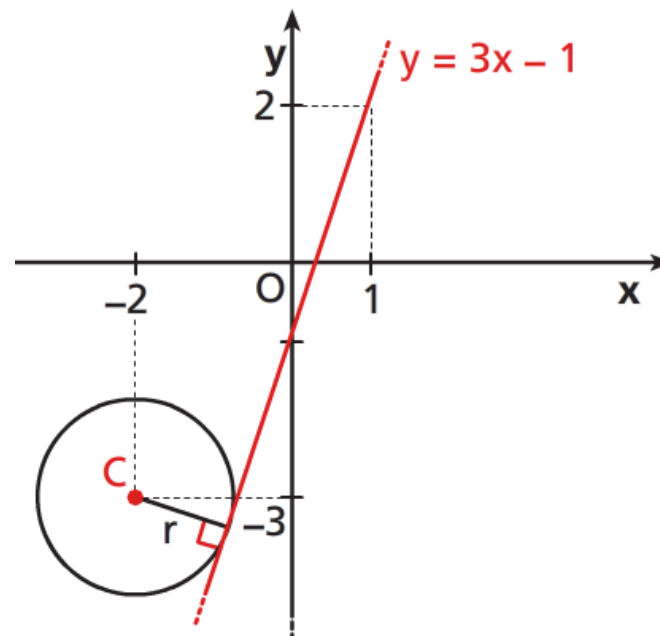
$$r = \frac{|y_0 - mx_0 - q|}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{|-3 - 3(-2) + 1|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

Il sistema di equazioni, che traduce le tre condizioni, è:

$$\begin{cases} a = -2\alpha ; & a = -2 \cdot (-2) = 4 \\ b = -2\beta ; & b = -2 \cdot (-3) = 6 \\ c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 & c = 4 + 9 - 8/5 = 57/5 \end{cases}$$

equazione circonferenza

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + \frac{57}{5} = 0$$



Altri casi

Determinare l'equazione della circonferenza passante per i punti $A=(1;4)$ e $B=(5;0)$ e tangente alla retta di equazione $y = -x + 1$.

- La circonferenza passa per due punti (due condizioni) ed è tangente alla retta (una condizione):

$$\begin{cases} 1 + 16 + a + 4b + c = 0 & \Rightarrow \text{passaggio della circonf. per } A(1; 4) \\ 25 + 5a + c = 0 & \Rightarrow \text{passaggio della circonf. per } B(5; 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 4b + c = -17 \\ 5a + c = -25 \end{cases}$$

Condizione di tangenza:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

$$x^2 + (-x + 1)^2 + ax + (a + 2)(-x + 1) + (-5a - 25) = 0$$

$$x^2 - 2x - 2a - 11 = 0$$

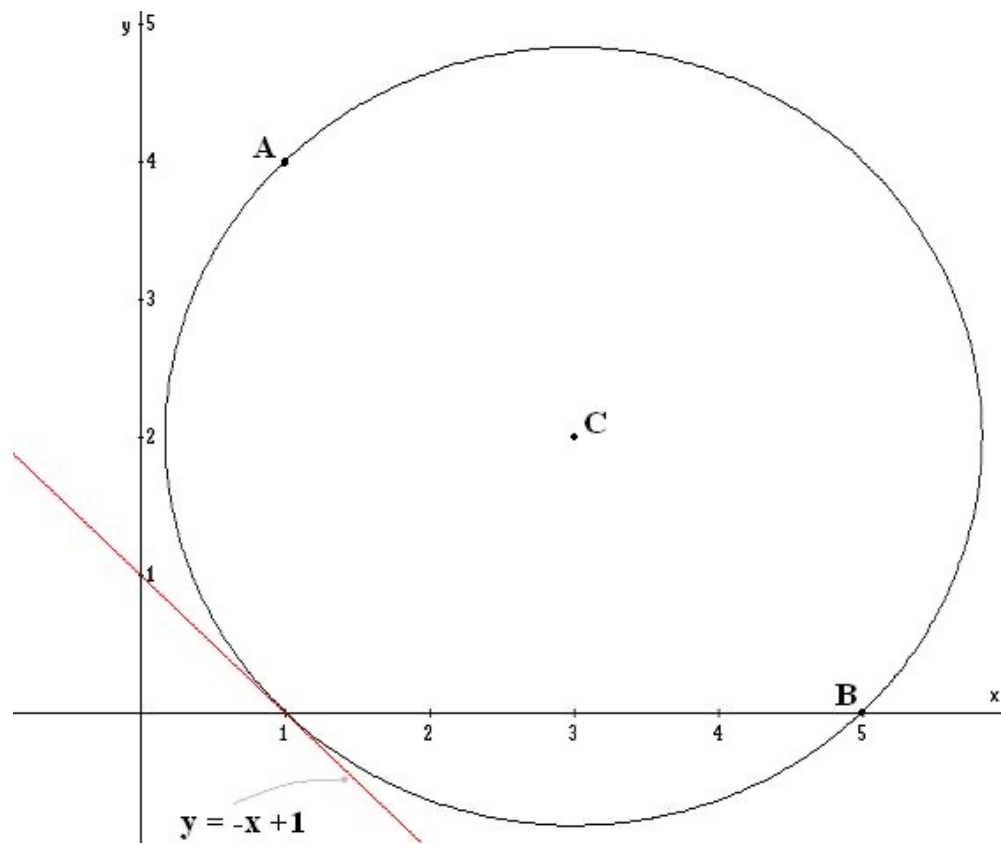
$$\Delta = 0 \Rightarrow 4 - 4(-2a - 11) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a = -6}}$$

In definitiva:

$$\begin{cases} a + 4b + c = -17 \\ 5a + c = -25 \\ a = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = -4 \\ c = 5 \end{cases}$$

equazione circonferenza

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$$



ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'equazione della circonferenza passante per i punti $P(1; 2)$ e $Q(3; 4)$ e tangente alla retta di equazione $y = -3x + 3$.

Imponiamo alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ il passaggio per i punti P e Q :

$$\begin{cases} a + 2b + c = -5 & \text{passaggio per } P \\ 3a + 4b + c = -25 & \text{passaggio per } Q \end{cases}$$

Ricaviamo due incognite in funzione della terza. Usiamo il metodo di riduzione, sottraendo membro a membro:

$$2a + 2b = -20 \rightarrow a + b = -10.$$

Sostituiamo $b = -a - 10$ nella prima equazione e ricaviamo c in funzione di a :

$$c = a + 15.$$

L'equazione della circonferenza diventa:

$$x^2 + y^2 + ax - (a + 10)y + a + 15 = 0.$$

Giungiamo all'equazione risolvente,

$$5x^2 + 2(a + 3)x - (a + 3) = 0,$$

e imponiamo la condizione di tangenza, cioè $\Delta = 0$:

Ora imponiamo che la retta $y = -3x + 3$ sia tangente alla circonferenza:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax - (a + 10)y + a + 15 = 0 \\ y = -3x + 3 \end{cases}$$

$$(a + 3)^2 + 5(a + 3) = 0,$$

da cui $a = -3$, $a = -8$.

Riprendiamo il sistema

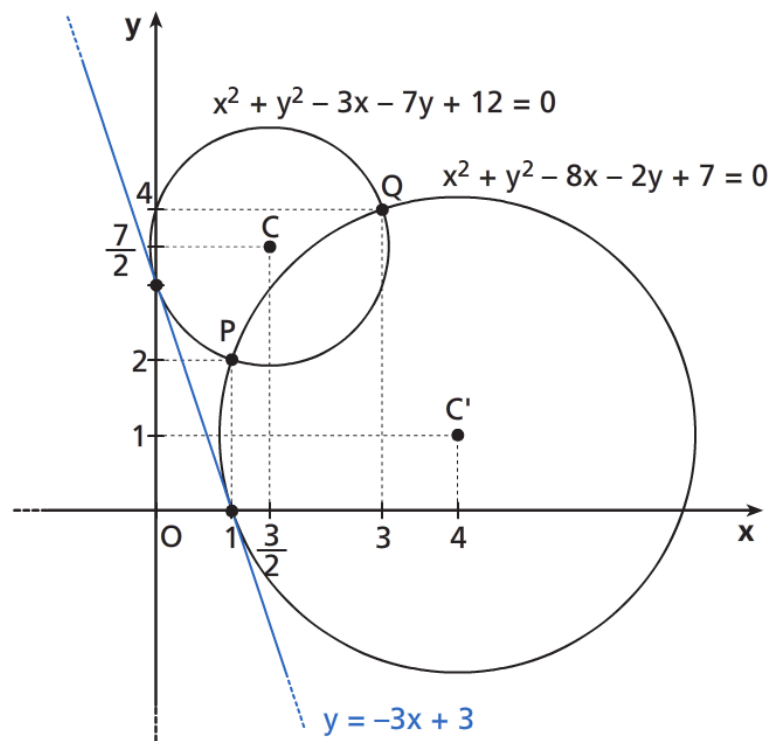
$$\begin{cases} b = -a - 10 \\ c = a + 15 \end{cases}$$

e calcoliamo b e c in corrispondenza dei valori $a = -3$, $a = -8$.

Le circonferenze che soddisfano le condizioni richieste hanno le seguenti equazioni:

$$x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$$



Determinare le equazioni delle circonferenze tangenti agli assi cartesiani, con il centro sulla retta r di equazione $x-5y+12=0$.

Essendo la circonferenza tangente agli assi cartesiani, abbiamo due condizioni (condizioni di tangenza):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 + by + c = 0 \\ x = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{condizione di tangenza}} \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4c = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + ax + c = 0 \\ y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{condizione di tangenza}} \Delta = 0 \Rightarrow a^2 - 4c = 0$$

La terza condizione è data dal fatto che il centro della circonferenza si trova (appartiene) sulla retta r:

$$x_0 - 5y_0 + 12 = 0 \Rightarrow -\frac{a}{2} - 5\left(-\frac{b}{2}\right) + 12 = 0$$

Le tre condizioni trovate formano un sistema di tre equazioni nelle tre incognite a,b,c:

$$\begin{cases} b^2 - 4c = 0 \\ a^2 - 4c = 0 \\ a - 5b - 24 = 0 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ricava che:

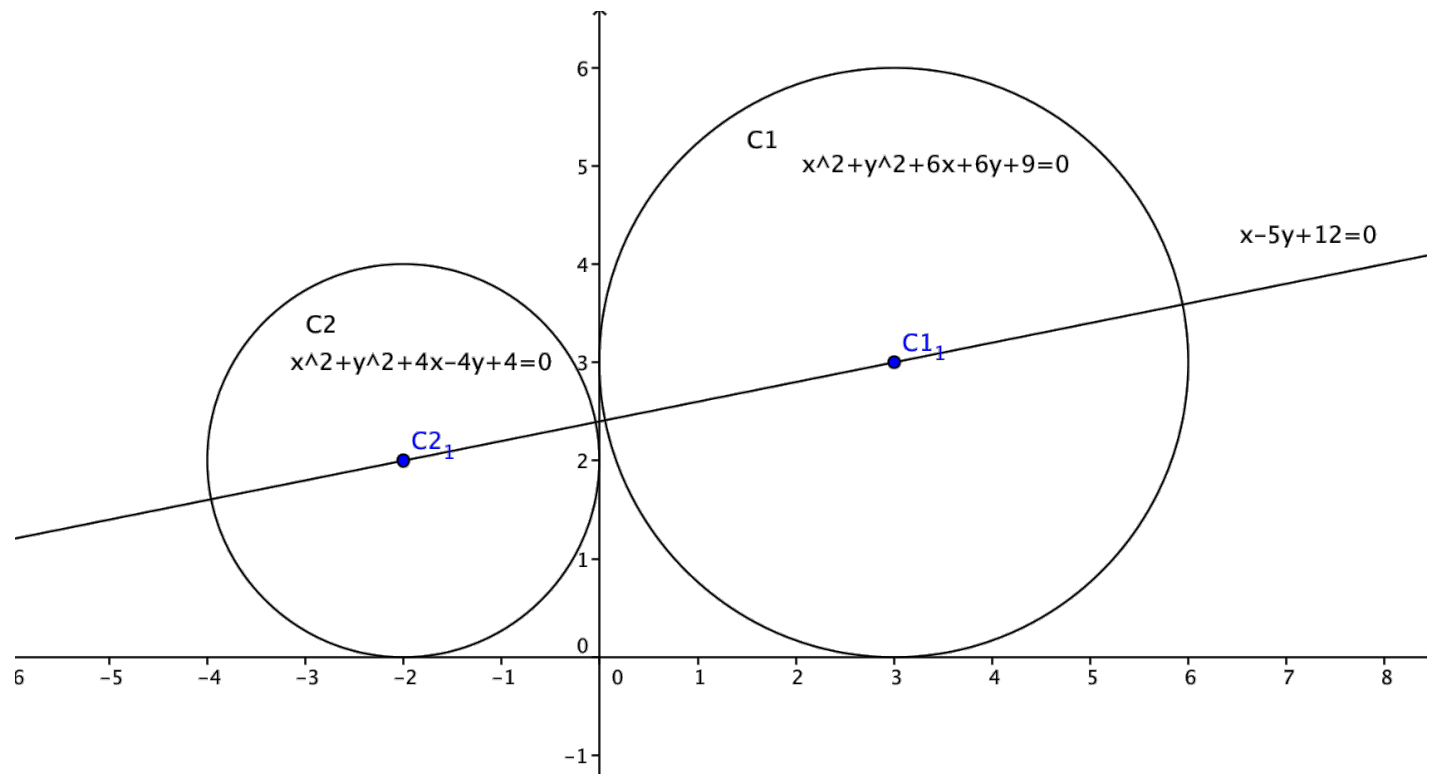
$$a^2 = 4c \rightarrow b^2 = 4c \Rightarrow a^2 = b^2 \rightarrow \pm a = \pm b$$

Quindi, la prima circonferenza è:

$$\begin{cases} a = b \\ a^2 = 4c \\ a = 5a + 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -6 \\ c = 9 \\ a = -6 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$$

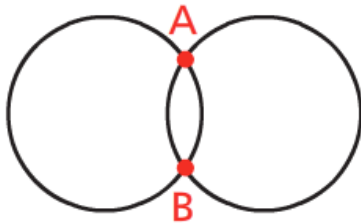
Mentre, la seconda circonferenza è:

$$\begin{cases} a = -b \\ a^2 = 4c \\ a = -5a + 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -4 \\ c = 4 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$$

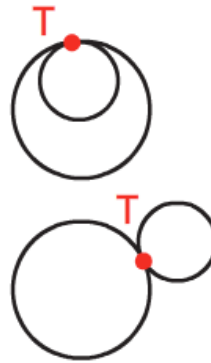


LA POSIZIONE DI DUE CIRCONFERENZE

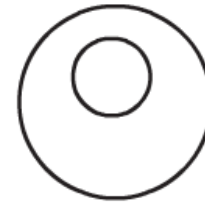
I casi che si possono presentare:



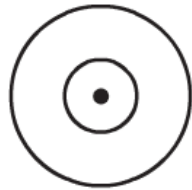
a. Circonferenze secanti.



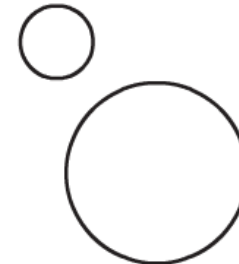
b. Circonferenze tangenti.



c. Circonferenze una interna all'altra.



d. Circonferenze concentriche.



e. Circonferenze esterne.

Per determinare gli eventuali punti d'intersezione o il punto di tangenza, occorre risolvere il sistema di quarto grado formato dalle equazioni delle due circonferenze:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Metodo di riduzione:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \end{array} \right. \\ \hline (a-a')x + (b-b')y + c - c' = 0 \end{array}$$

Equazione asse radicale

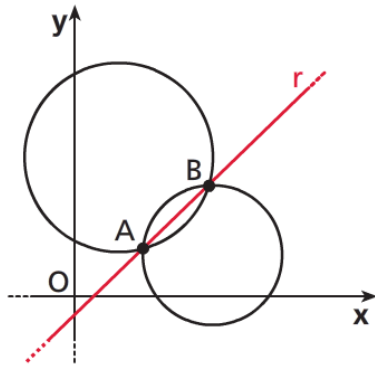
$$(a-a')x + (b-b')y + c - c' = 0$$

Equazione asse radicale in forma esplicita

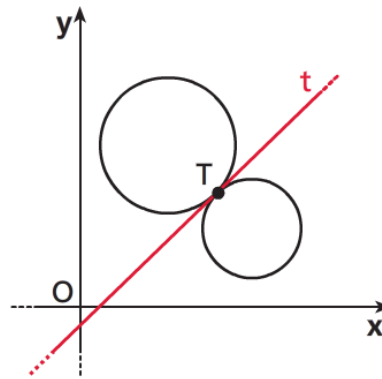
$$y = -\frac{a - a'}{b - b'}x - \frac{c - c'}{b - b'} \quad m = -\frac{a - a'}{b - b'}$$

Osserva che se $a = a'$ e $b = b'$ non si ottiene l'equazione della retta “asse radicale”; in questo caso le due circonferenze sono concentriche e non hanno punti in comune o sono coincidenti.

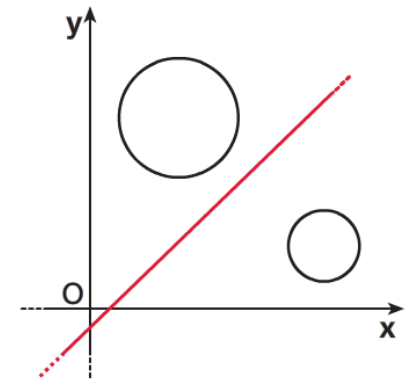
I casi che si possono presentare:



a. L'**asse radicale** è la retta r passante per i punti di intersezione delle due circonferenze.



b. L'**asse radicale** è la retta t passante per il punto di tangenza delle due circonferenze.



c. L'**asse radicale** esiste anche se le circonferenze non sono secanti.

Proprietà dell'asse radicale:

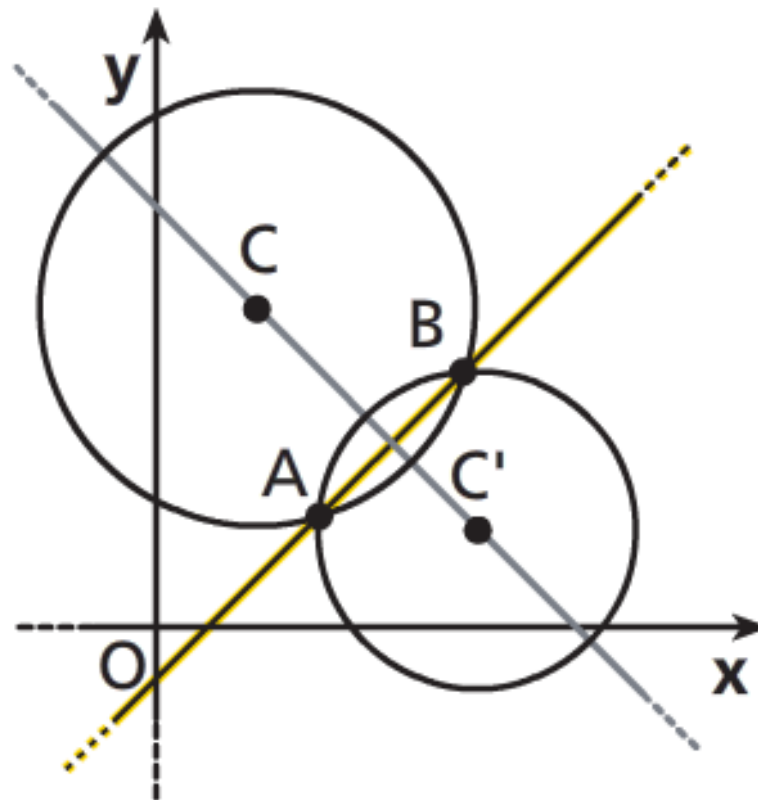
- Il coefficiente angolare m_a dell'asse radicale è $-\frac{a-a'}{b-b'}$. Il coefficiente angolare m_c della retta passante per i centri $C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$ e $C'\left(-\frac{a'}{2}; -\frac{b'}{2}\right)$ è:

$$m_c = \frac{-\frac{b}{2} + \frac{b'}{2}}{-\frac{a}{2} + \frac{a'}{2}} = \frac{-b + b'}{-a + a'} = \frac{-(b - b')}{-(a - a')} = \frac{b - b'}{a - a'}.$$

Poiché $m_a \cdot m_c = -\frac{a-a'}{b-b'} \cdot \frac{b-b'}{a-a'} = -1$, l'asse radicale risulta perpendicolare alla retta passante per i centri delle due circonferenze (figura 13).

Si deduce, quindi, che nel caso di circonferenze tangenti (figura 12b) l'asse radicale coincide con la retta tangente alle circonferenze nel loro comune punto di tangenza T .

L'asse radicale è
perpendicolare alla
retta passante per i
centri delle due
circonferenze.



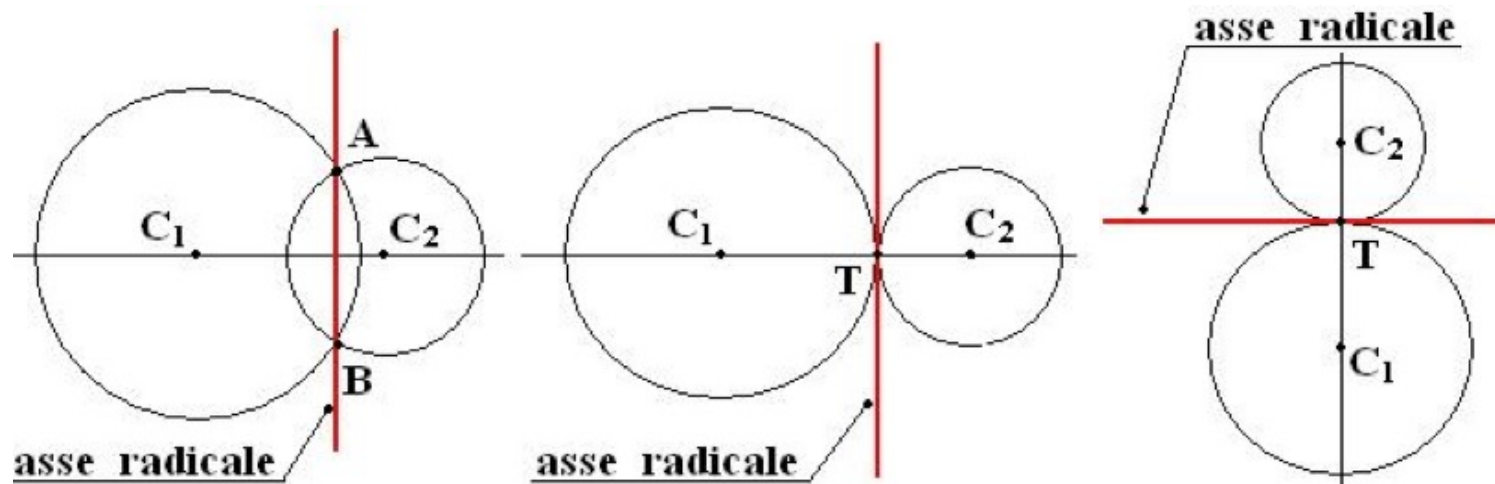
La conoscenza dell'equazione dell'asse radicale consente di calcolare gli eventuali punti di intersezione tra due circonferenze.

Il sistema iniziale (di 4° grado) è equivalente al sistema (di 2° grado) formato dall'equazione di una delle due circonferenze e da quella dell'asse radicale:

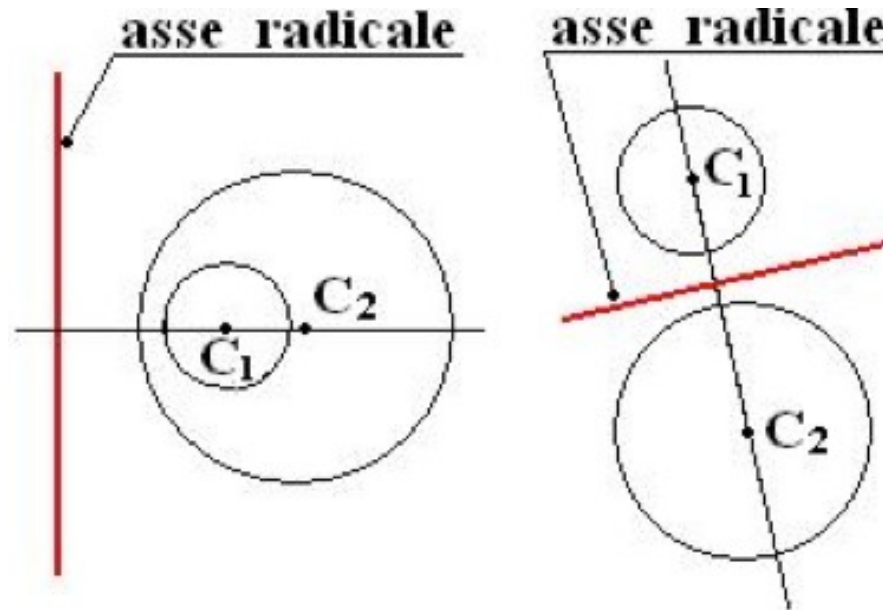
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ (a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0 \end{cases}$$

Tale sistema ammette:

- ✧ due soluzioni se le circonferenze sono secanti;
- ✧ una soluzione se le circonferenze sono tangenti;



✧ nessuna soluzione se le circonferenze non sono secanti, né tangenti.



ESERCIZI

Determinare gli eventuali punti d'intersezione delle due circonferenze di equazione:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 + 2x - 16y + 13 = 0$$

Trovo l'asse radicale risolvendo il seguente sistema con il metodo di riduzione:

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 16y + 13 = 0 \end{cases} & & \\ \hline & 12y - 24 = 0 & \rightarrow y = 2 \end{array}$$

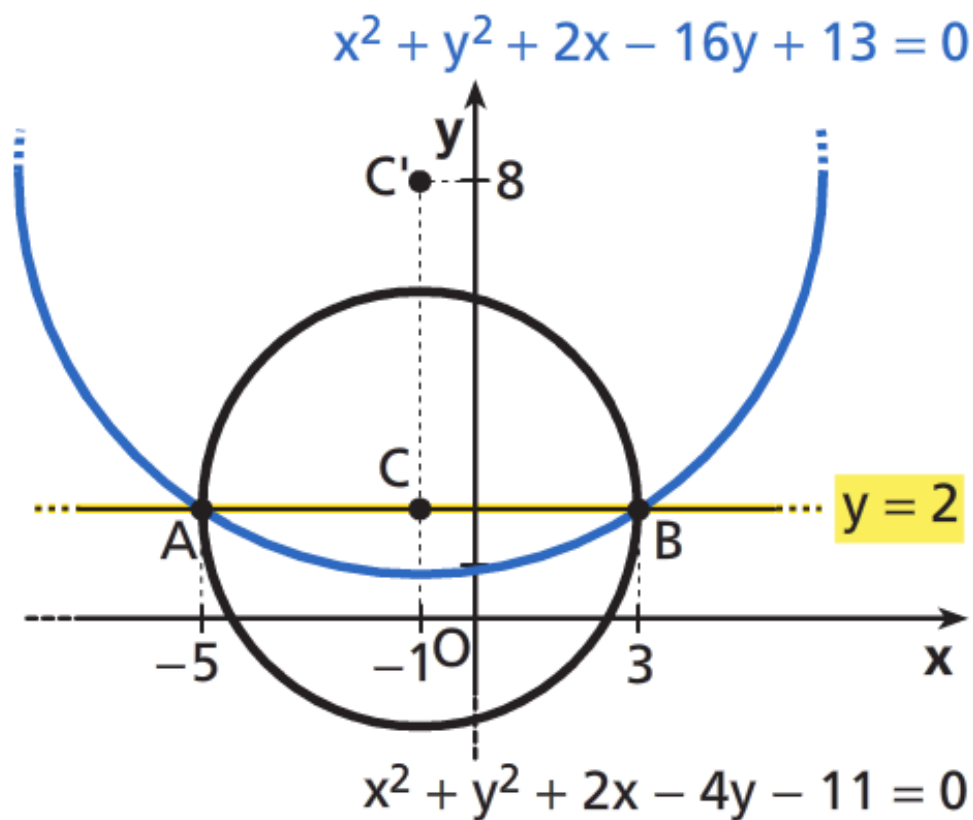
Il sistema iniziale è equivalente al sistema formato dall'equazione di una delle due circonferenze e da quella dell'asse radicale:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$x^2 + 4 + 2x - 8 - 11 = 0$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Le due circonferenze sono secanti nei punti A(-5;2) e B(3;2). I centri sono $C_1(-1;8)$ e $C_2(-1;2)$.



Determinare gli eventuali punti d'intersezione delle due circonferenze di equazione:

$$x^2+y^2-1=0 \quad \text{e} \quad x^2+y^2-3x+2=0$$

Trovo l'asse radicale risolvendo il seguente sistema con il metodo di riduzione:

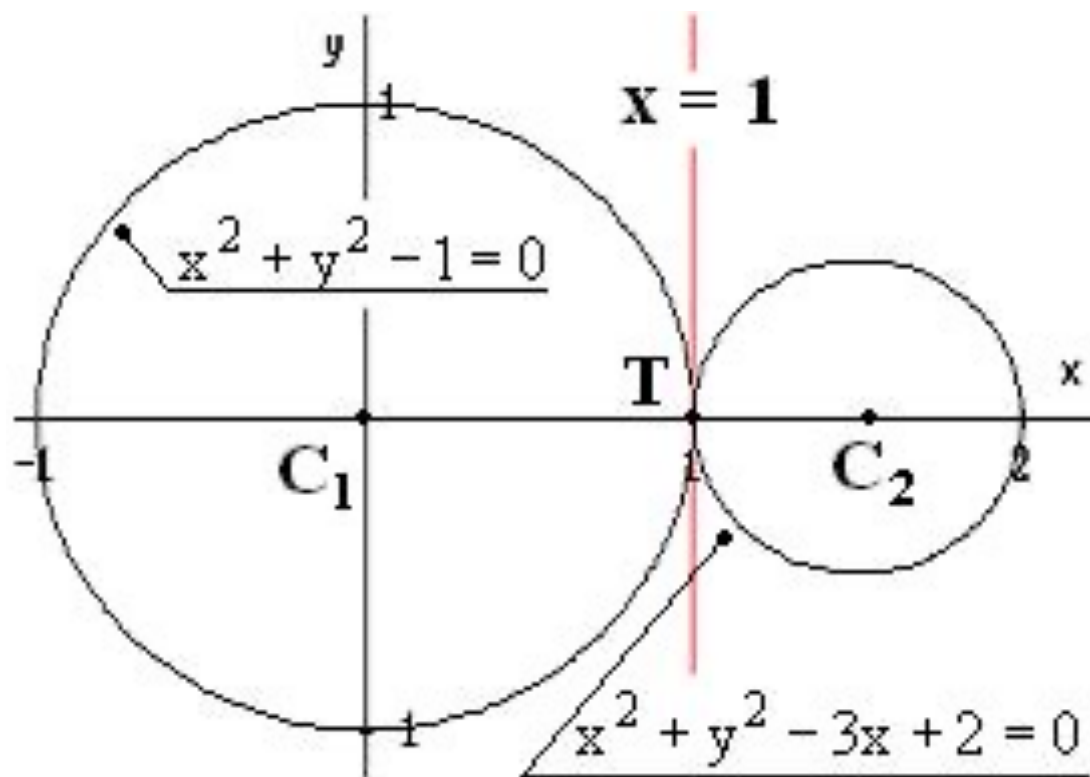
$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 3x + 2 = 0 \end{array} \right. \\ \hline 3x - 3 = 0 \rightarrow x = 1 . \end{array}$$

Il sistema iniziale è equivalente al sistema formato dall'equazione di una delle due circonferenze e da quella dell'asse radicale:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow 1 + y^2 - 1 = 0 \rightarrow y = 0$$

quindi c'è una sola soluzione : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Cioè le circonferenze sono tangenti in $T(1;0)$ e la retta tangente è l'asse radicale di equazione $x=1$. I centri sono $C_1(0;0)$ e $C_2(3/2;0)$.



Determinare gli eventuali punti d'intersezione delle due circonferenze di equazione:

$$x^2+y^2-1=0 \quad \text{e} \quad x^2+y^2-4x-12=0$$

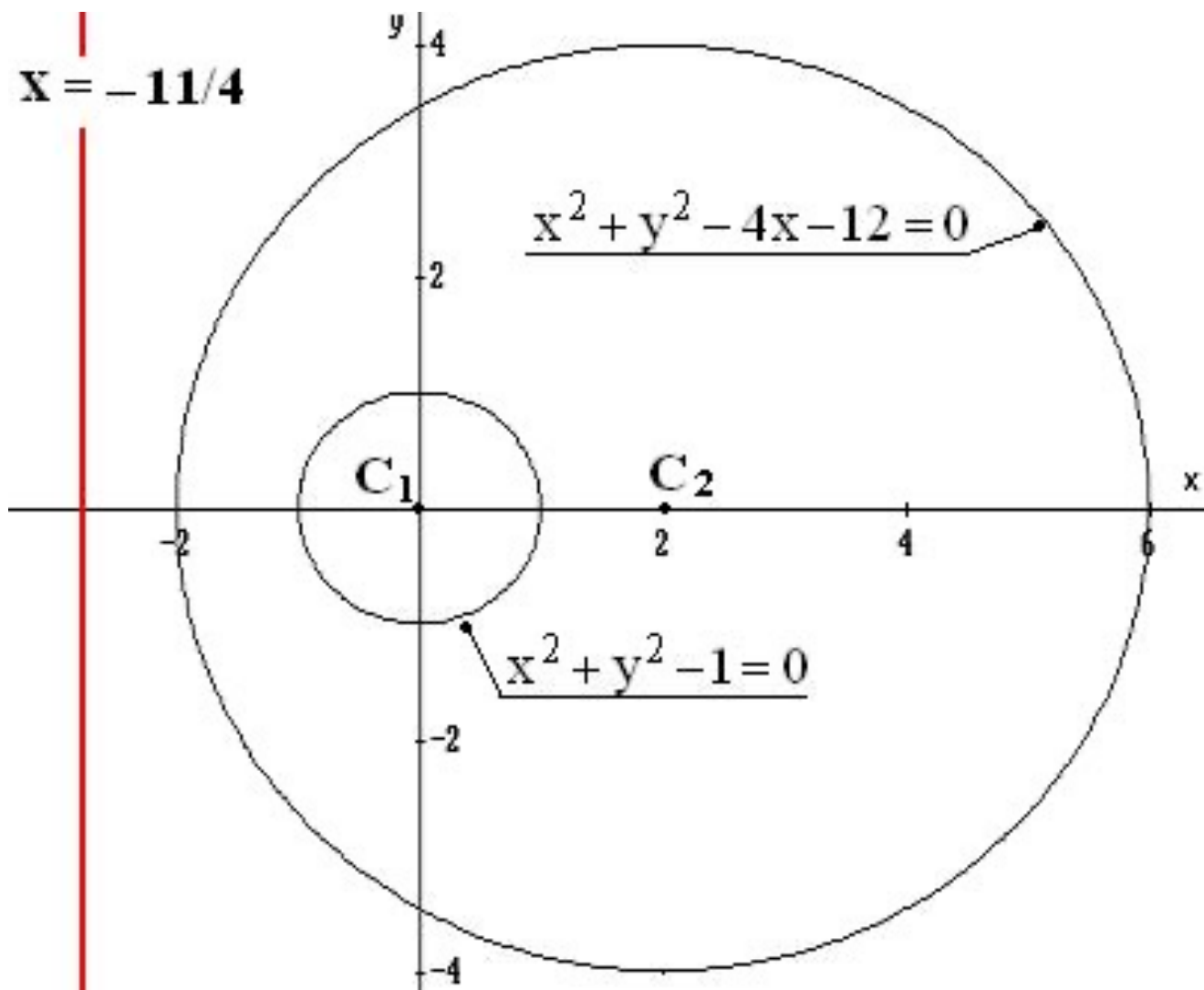
Trovo l'equazione dell'asse radicale:

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0 \end{cases} & & \\ \hline 4x + 11 = 0 & \rightarrow & x = -11/4 \end{array}$$

Il sistema iniziale è equivalente al sistema formato dall'equazione di una delle due circonferenze e da quella dell'asse radicale:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x = -11/4 \end{cases} \rightarrow \frac{121}{16} + y^2 - 1 = 0 ; y^2 = -\frac{105}{16}$$

Il sistema non ammette soluzione, per cui le due circonferenze, di centri $C_1=(0;0)$ e $C_2=(2;0)$, non hanno punti in comune.



ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo gli eventuali punti di intersezione delle due circonferenze di equazioni:

$$x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0.$$

Troviamo l'equazione dell'asse radicale sottraendo membro a membro le due equazioni:

$$\ominus \begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$8x + 4y - 16 = 0$$

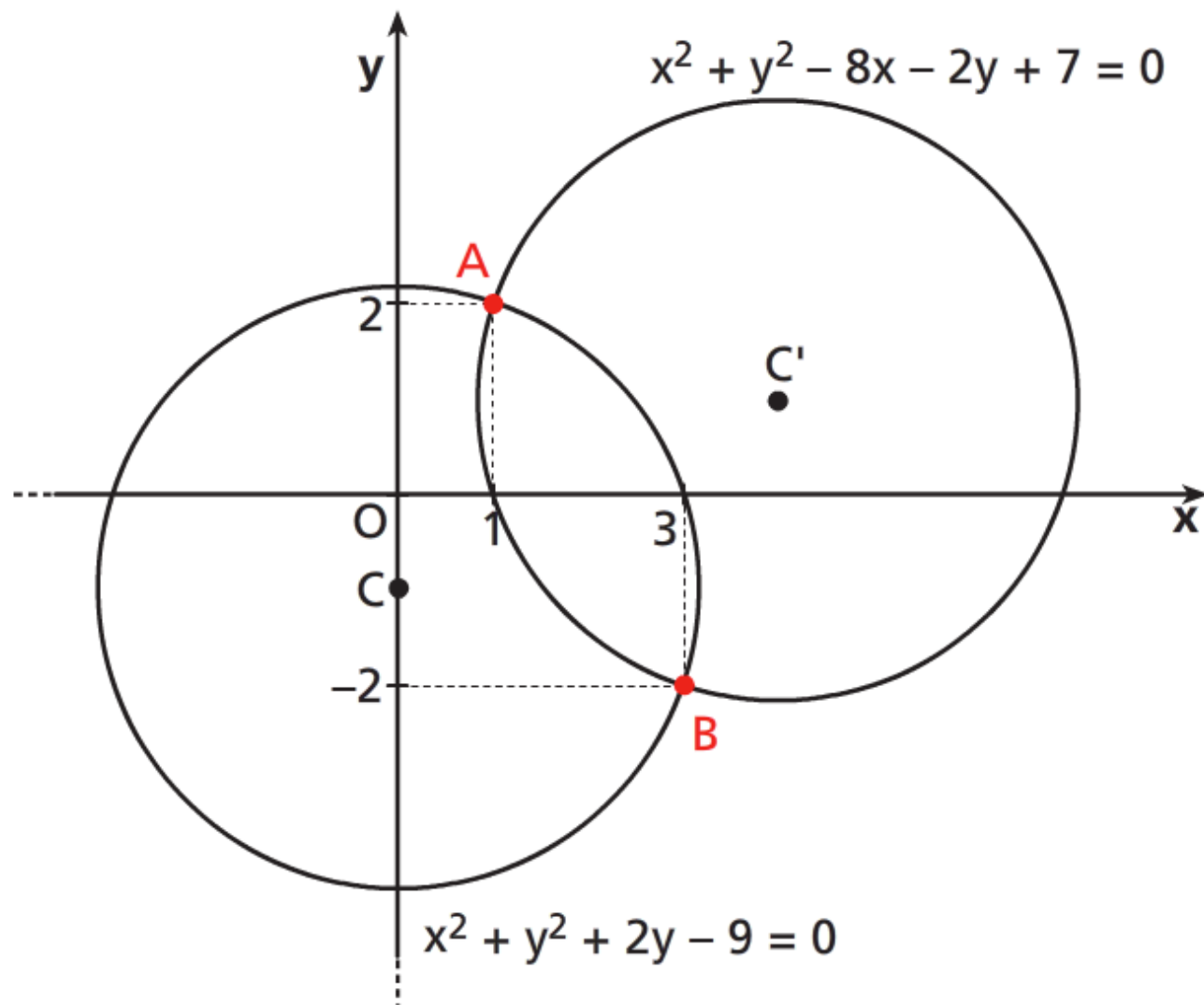
L'asse radicale ha equazione $y = -2x + 4$.

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$

Le due circonferenze si intersecano nei punti:

$$A(1; 2) \quad \text{e} \quad B(3; -2).$$



FASCI DI CIRCONFERENZE

Date due circonferenze C e C' , di equazioni:

$$C: x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad \text{e} \quad C': x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$$

si chiama **fascio di circonferenze** definito da C e C' (*generatrici del fascio*), l'insieme di C' e di tutte le circonferenze rappresentate dall'equazione:

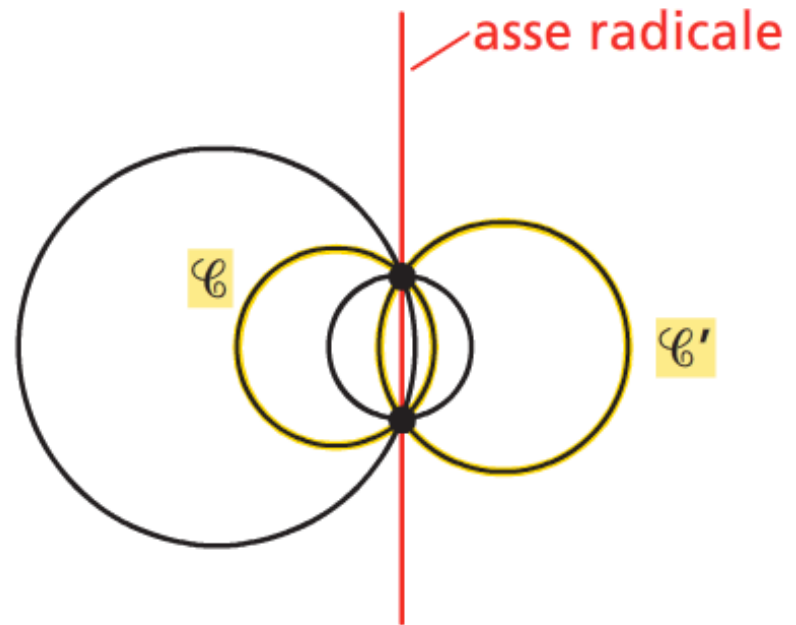
Equazione fascio di circonferenze

$$x^2 + y^2 + ax + by + c + k(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0$$

Per $k=-1$ l'equazione del fascio diventa l'equazione dell'**asse radicale** del fascio:

$$(a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0$$

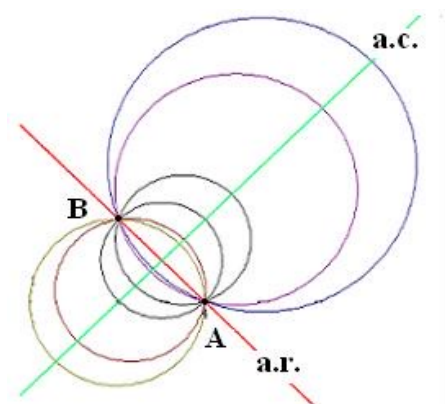
L'asse radicale è una particolare circonferenza con raggio infinito (circonferenza degenera).



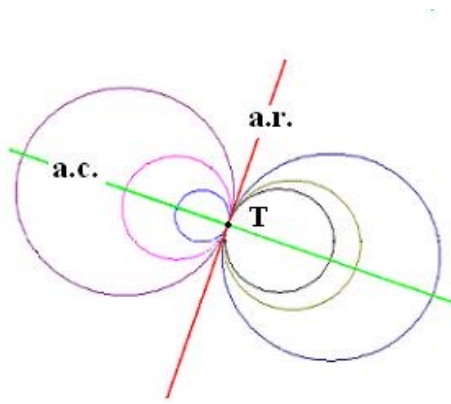
Le generatrici C e C' possono avere uno o due punti comuni; tali punti si chiamano **punti base** del fascio.

Il luogo dei centri delle circonferenze del fascio è una retta perpendicolare all'asse radicale e si chiama **asse centrale**.

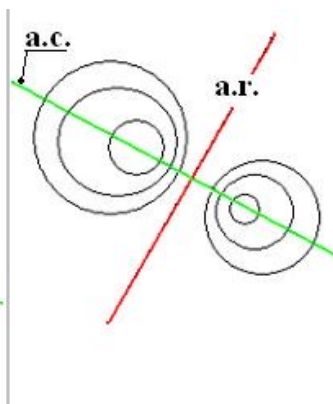
Si possono avere i seguenti tipi di fasci:



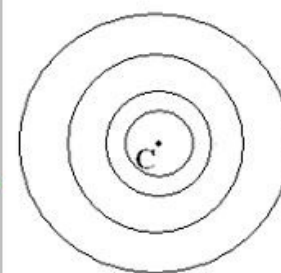
Fascio con due punti base A e B



Fascio con un punto base T



Fascio senza punti base



Fascio di circonf.
concentriche

a.r. = asse radicale
a.c. = asse centrale

STUDIO DI UN FASCIO DI CIRCONFERENZE

Per **studiare un fascio di circonferenze** occorre trovare:

- a) centro e raggio in funzione del parametro k ;
- b) le due generatrici;
- c) gli eventuali punti base;
- d) l'asse radicale e l'asse centrale;
- e) eventuali circonferenze degeneri.

ESERCIZIO GUIDA

Studiamo il fascio di circonferenze di equazione:

$$(1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 + (2 - 4k)x - 6y - 1 + 2k = 0$$

Scriviamo l'equazione del fascio di circonferenze in forma canonica, dividendo entrambi i membri per $1 + k$ (perché ciò abbia senso, poniamo $1 + k \neq 0$, ossia $k \neq -1$):

$$x^2 + y^2 + \frac{2 - 4k}{k + 1}x - \frac{6}{1 + k}y + \frac{2k - 1}{1 + k} = 0.$$

- Le coordinate dei centri, al variare di k , sono:

$$C\left(\frac{2k - 1}{1 + k}; \frac{3}{1 + k}\right).$$

- Determiniamo la misura del raggio, sempre in funzione di k :

$$r = \sqrt{\frac{(2k-1)^2}{(k+1)^2} + \frac{9}{(1+k)^2} - \frac{2k-1}{1+k}} = \frac{\sqrt{2k^2 - 5k + 11}}{|k+1|}.$$

Tale espressione è reale quando il radicando è positivo o nullo, cioè quando:

$$2k^2 - 5k + 11 \geq 0.$$

Dato che $\Delta = 25 - 88 < 0$, il trinomio è positivo $\forall k \in \mathbb{R}$ e non si annulla mai.

- Troviamo le due circonferenze generatrici e gli eventuali punti base del fascio.

Raccogliamo il parametro k nell'equazione del fascio assegnato:

$$kx^2 + x^2 + ky^2 + y^2 - 4kx + 2x - 6y - 1 + 2k = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 + k(x^2 + y^2 - 4x + 2) = 0.$$

Le due circonferenze generatrici sono:

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0.$$

Risolvi il sistema, formato dalle due equazioni, per trovare i punti base:

$$\ominus \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$+ 6x - 6y - 3 = 0 \rightarrow 2x - 2y - 1 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0 \\ 2x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x^2 - 20x + 9 = 0 \\ 2x - 2y - 1 = 0 \end{cases} \quad x = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{4}$$

I punti base del fascio sono $A\left(\frac{5 + \sqrt{7}}{4}; \frac{3 + \sqrt{7}}{4}\right)$ e $B\left(\frac{5 - \sqrt{7}}{4}; \frac{3 - \sqrt{7}}{4}\right)$.

- $2x - 2y - 1 = 0$ è l'equazione dell'asse radicale e si ottiene anche ponendo $k = -1$ nell'equazione del fascio.

Disegniamo alcune circonferenze del fascio, attribuendo alcuni valori a k :

$k = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 = 0$,
 $C_0(-1; 3)$, $r_0 = \sqrt{11}$ (è la prima circonferenza generatrice);

$k = 1 \rightarrow x^2 + y^2 - x - 3y + \frac{1}{2} = 0$,

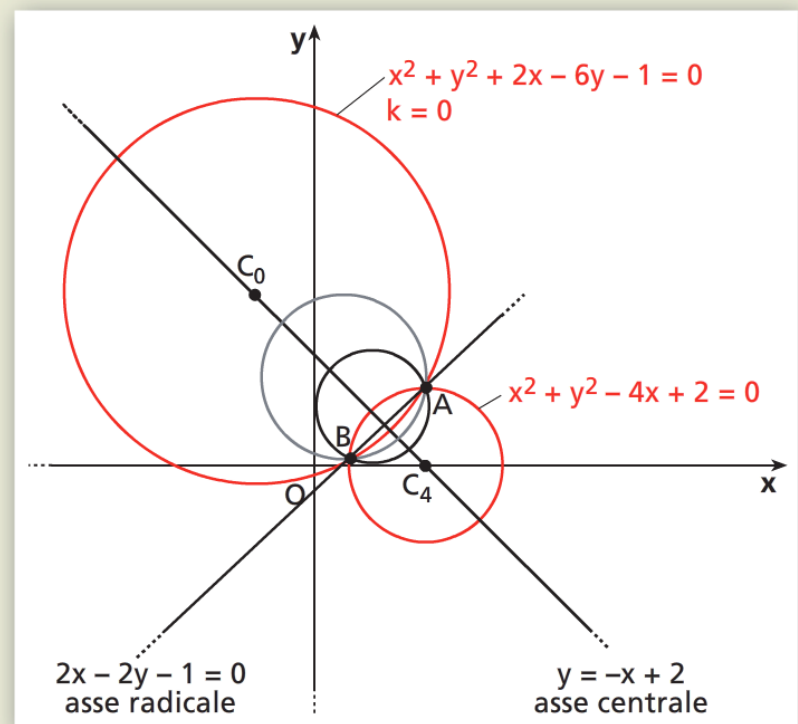
$C_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $r_1 = \sqrt{2}$;

$k = 2 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$,

$C_2(1; 1)$, $r_2 = 1$.

La seconda circonferenza generatrice ha centro $C_4(2; 0)$ e raggio $r_4 = \sqrt{2}$.

- L'asse centrale è $y = -x + 2$ (è la retta passante per C_1 e C_2).



Studiare il fascio di circonferenze di equazione:

$$x^2 + y^2 - 3(2 - k)x + 4ky - 16 - 34k = 0 .$$

1. Scriviamo l'equazione del fascio nel seguente modo:

$$x^2 + y^2 - 6x - 16 + k(3x + 4y - 34) = 0$$

Quindi il fascio è generato dalla circonferenza:

$$x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \quad \text{di centro } C(3 ; 0)$$

e dall'asse radicale (circonferenza degenera):

$$3x + 4y - 34 = 0$$

2. Il fascio rappresenta circonferenze reali per:

$$\Delta \geq 0 \rightarrow \frac{9}{4}(2-k)^2 + 4k^2 + 16 + 34k \geq 0 \quad \text{cioè per } \underline{k \neq -2}$$

Per $k = -2$ si ha la circ. degenera, che coincide con il punto $T(6 ; 4)$; infatti , per $k = -2$ si ha:

$$x^2 + y^2 - 12x - 8y + 52 = 0 , \quad \text{circ. di centro } T(6 ; 4) \\ \text{e raggio} = 36 + 16 - 52 = 0 .$$

3. Eventuali punti base :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \\ 3x + 4y - 34 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases} \rightarrow T(6 ; 4)$$

Il sistema ammette una sola soluzione , quindi l'asse radicale coincide con la tangente in T.

Conclusione:

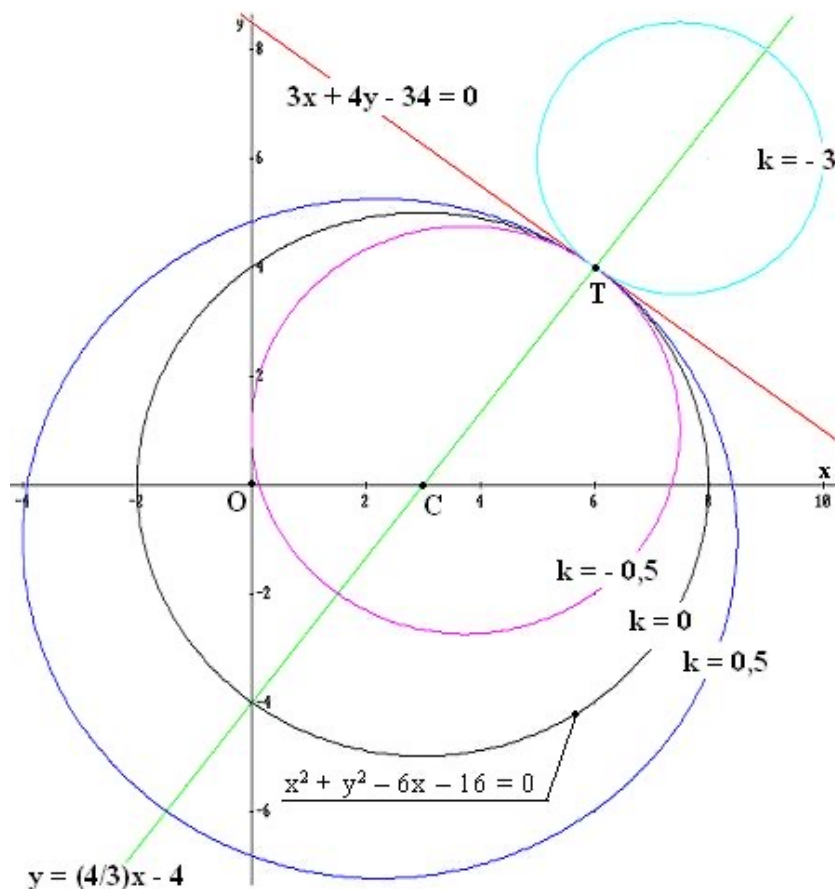
L'equazione del fascio rappresenta:

per $k \neq -2$ un fascio di circonferenze tangenti in T e i centri delle circonferenze si trovano sulla retta "asse centrale" passante per CT, di equazione:

$$\frac{y - y_T}{x - x_T} = \frac{y_C - y_T}{x_C - x_T}$$

$$\frac{y - 4}{x - 6} = \frac{0 - 4}{3 - 6} \rightarrow y = \frac{4}{3}x - 4$$

Equazione fascio: $x^2 + y^2 - 6x - 16 + k(3x + 4y - 34) = 0$



Studiare il fascio di circonferenze di equazione:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + k - 3 = 0$$

1. Si osserva che le coordinate del centro:

$$C = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right) = (2; -1)$$

sono costanti, indipendenti dal parametro k .

Quindi si tratta di un fascio di circonferenze concentriche di centro $C(2; -1)$.

2. Il fascio rappresenta circonferenze reali per:

$$\Delta \geq 0 \rightarrow 4 + 1 - k + 3 = 0, \text{ cioè per } k = 8$$

Per $k = 8$ si ha la circonferenza degenera, che coincide con il punto $C(2;-1)$. Infatti, per $k = 8$ si ha:

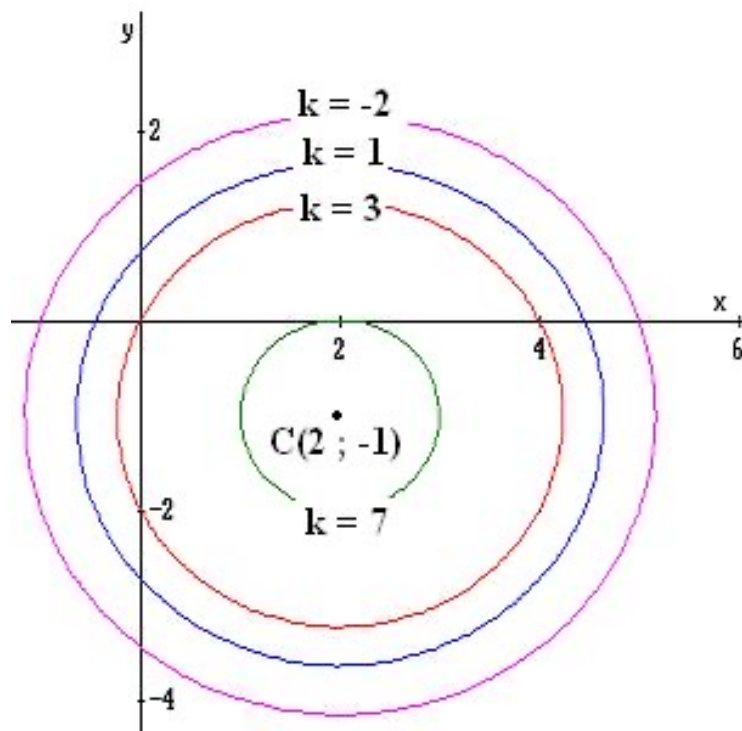
$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$$

equazione che rappresenta una circonferenza di centro $C(2;-1)$ e raggio $= 4 + 1 - 5 = 0$.

Conclusione

L'equazione data
rappresenta, per
 $k=8$, un fascio di
circonferenze
concentriche, di
centro $C(2;-1)$.

Fascio di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 2y + k - 3 = 0$



Date le circonferenze:

$$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 24 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 4x = 0$$

determinare:

1. l'equazione del fascio di circonferenze;
2. l'equazione dell'asse radicale del fascio;
3. l'equazione dell'asse centrale del fascio.

1. Equazione del fascio di circonferenze:

$$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 24 + k(x^2 + y^2 - 4x) = 0$$

oppure

$$(1+k)x^2 + (1+k)y^2 - (10 + 4k)x - 6y + 24 = 0$$

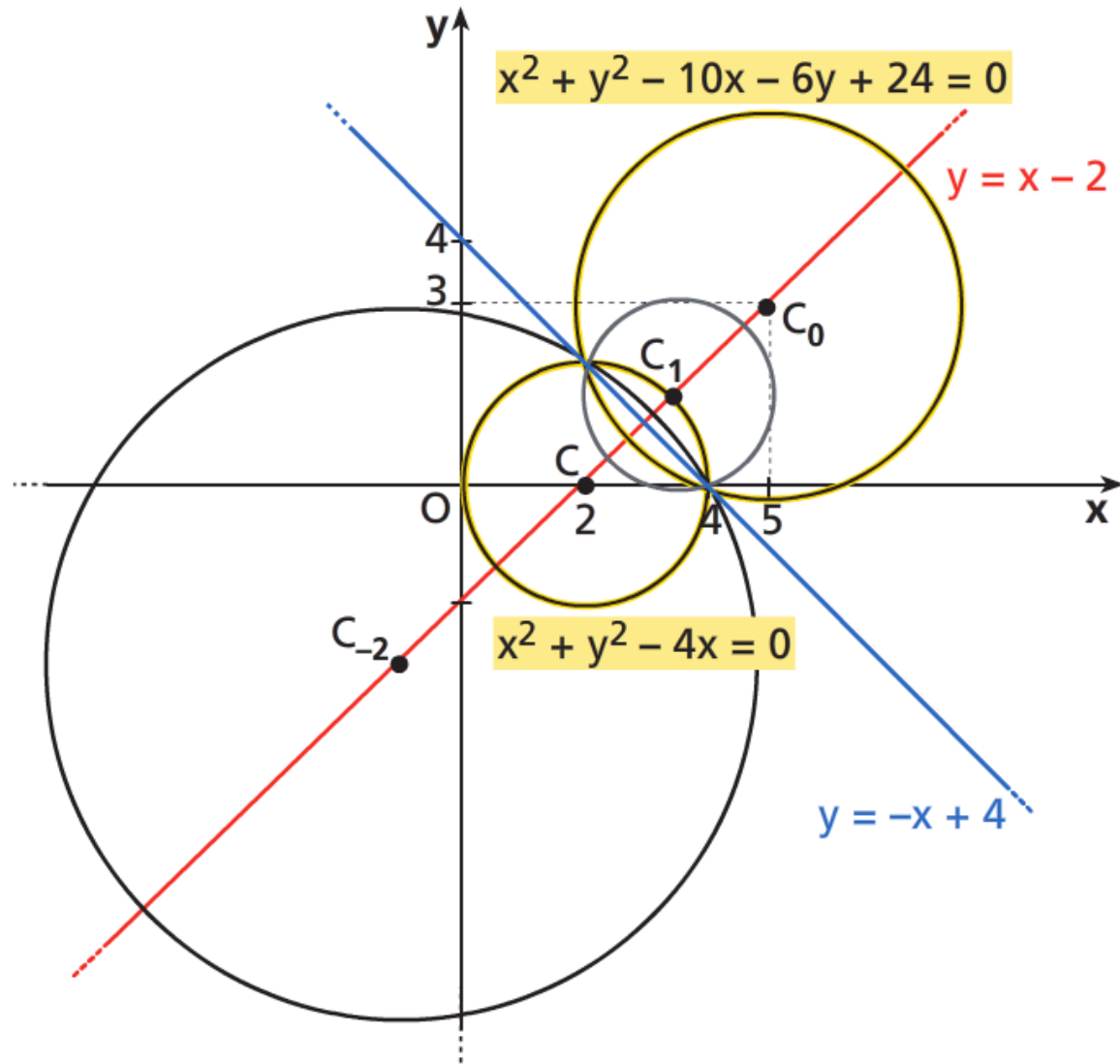
2. L'equazione dell'asse radicale si ottiene per $k = -1$:

$$-6x - 6y + 24 = 0 \quad y = -x + 4$$

3. Equazione asse centrale:

$$\begin{cases} C(2 ; 0) & \text{centro della circ. } x^2 + y^2 - 4x = 0 \\ m = 1 & \text{coeff. ang. (asse centrale } \perp \text{ asse radicale)} \end{cases}$$

$$y = m(x - 2) \quad y = -x + 4$$



Determinare l'equazione del fascio di circonferenze passanti per i punti $A(-1;2)$ e $B(3;0)$.

A e B sono i due punti base del fascio di circonferenze. Andiamo a trovare due elementi del fascio da poter combinare linearmente.

Tali elementi sono: asse radicale (retta AB) e circonferenza di diametro AB.

Asse radicale: distanza tra due punti A e B.

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \rightarrow \frac{y - 2}{0 - 2} = \frac{x + 1}{3 + 1}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad \text{oppure} \quad x + 2y - 3 = 0$$

Circonferenza di diametro AB

$$\left| \begin{array}{l} \text{raggio} = \frac{1}{2} \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 4} = \sqrt{5} \\ \text{centro : } \alpha = \frac{x_A + x_B}{2} = 1 ; \quad \beta = \frac{y_A + y_B}{2} = 1 ; \quad C(1;1) \end{array} \right.$$

$$\text{quindi} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = -2\alpha ; \quad a = -2 \\ b = -2\beta ; \quad b = -2 \\ c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 ; \quad c = 1 + 1 - 5 = -3 \end{array} \right.$$

$$\underline{x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0}$$

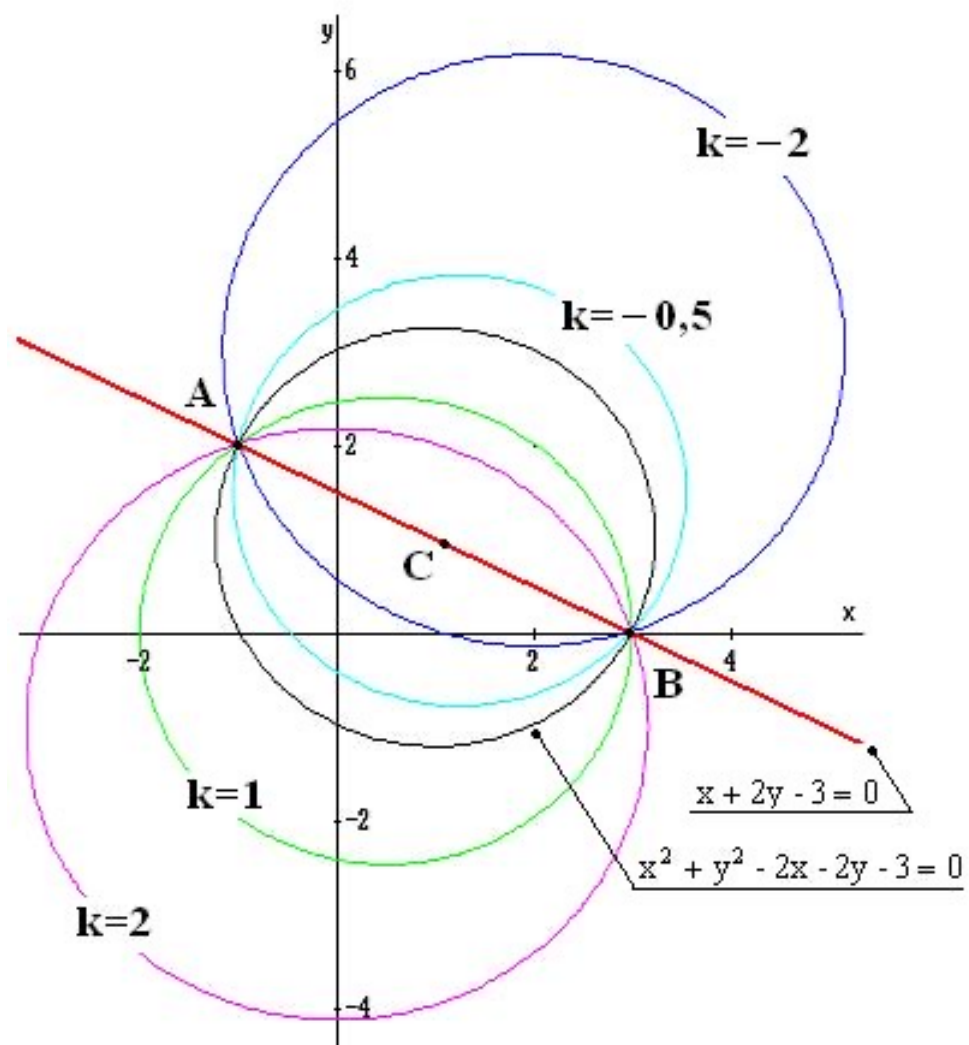
Equazione del fascio di circonferenze

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 + k(x + 2y - 3) = 0$$

oppure

$$x^2 + y^2 + (k-2)x + 2(k-1)y - 3(k+1) = 0$$

Equaz. fascio $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 + k(x + 2y - 3) = 0$



Determinare l'equazione del fascio di circonferenze tangenti nel punto T di ascissa 1 alla retta t di equazione $3x - y - 2 = 0$.

Per determinare l'equazione del fascio, occorre combinare linearmente le equazioni di due circonferenze tangenti nel punto T alla retta t.

Il punto T appartiene alla retta r, per cui la sua ordinata è:

$$y = 3 \cdot 1 - 2 = 1 \rightarrow T = (1; 1)$$

Come prima circonferenza prendiamo quella degenera che ha centro $T=(1;1)$ e raggio nullo:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$$

Come seconda circonferenza prendiamo la retta:

$$t: 3x - y - 2 = 0 \text{ (asse radicale)}$$

che rappresenta una circonferenza degenera di raggio infinito.

Combinando linearmente le equazioni ottenute, otteniamo l'equazione del fascio:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 + k(3x - y - 2) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + y^2 + (3k - 2)x - (k + 2)y - 2k + 2 = 0$$