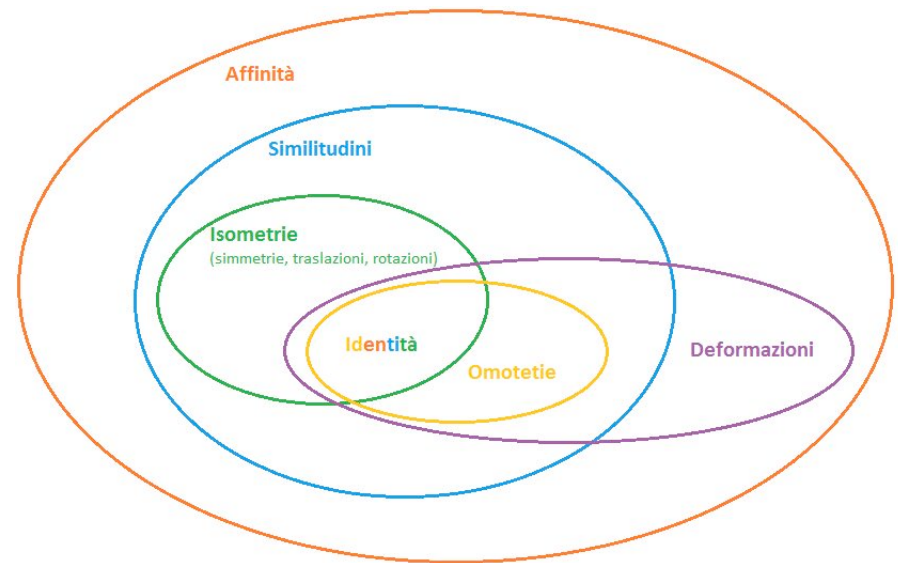


DOCENTE: Vincenzo Pappalardo
MATERIA: Matematica

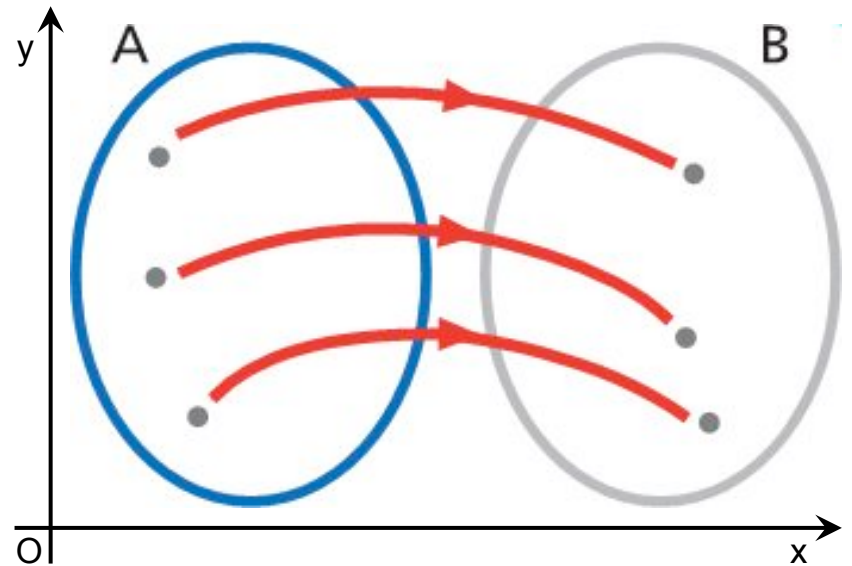
TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

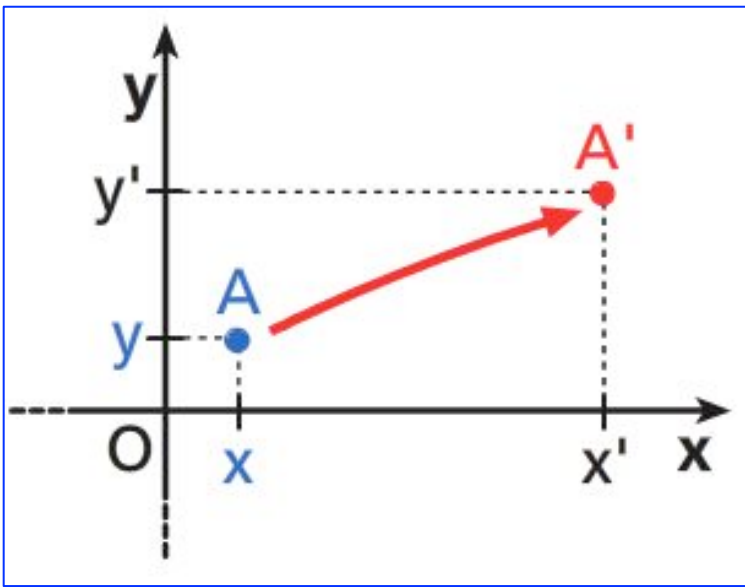


□ EQUAZIONI DELLE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

DEFINIZIONE

Una **trasformazione geometrica** nel piano è una corrispondenza biunivoca che associa a ogni punto del piano uno e un solo punto del piano stesso.





Sia $A(x; y)$ un punto del piano cartesiano e $A'(x'; y')$ il punto corrispondente (**trasformato o immagine di A**) in una trasformazione geometrica g :

$$A(x; y) \mapsto A'(x'; y')$$

Poiché g è una corrispondenza biunivoca, esiste sempre la sua trasformazione inversa g^{-1} che associa a ogni punto del piano A' il punto A (**controimmagine o antitrasmformato di A' rispetto a g**).

$$\begin{cases} x' = F(x; y) \\ y' = G(x; y) \end{cases}$$

EQUAZIONI DELLA TRASFORMAZIONE – A ogni punto $A(x; y)$ viene associato il suo trasformato $A'(x'; y')$.

Verifichiamo se le seguenti equazioni rappresentano delle trasformazioni geometriche:

$$\begin{cases} x' = x - 2y + 6 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$$

Assegnati due valori a x e y , per esempio $P(2,1)$, sono univocamente determinati i valori di x' e y' . Infatti:

$$\begin{cases} x' = x - 2y + 6 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x' = 2 - 2 \cdot 1 + 6 \\ y' = -2 + 1 - 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x' = 6 \\ y' = -2 \end{cases}$$

$\uparrow$
 $P(2; 1)$

$\downarrow$
 $P'(6; -2)$

Al punto $P(2;1)$ corrisponde il punto $P'(6;-2)$ (immagine di P):

$$P(2;1) \mapsto P'(6;-2)$$

Per dimostrare che la corrispondenza è biunivoca, esprimiamo x e y in funzione di x' e y' :

$$\begin{cases} x' = x - 2y + 6 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y = x' - 6 \\ x - y = -y' - 1 \end{cases} \xrightarrow[\text{o altro metodo}]{\text{metodo di Cramer}} \begin{cases} x = -x' - 2y' + 4 \\ y = -x' - y' + 5 \end{cases}$$

La corrispondenza è biunivoca in quanto a ogni coppia $(x'; y')$ è associata una e una sola coppia $(x; y)$.

Le equazioni date rappresentano le equazioni di una trasformazione geometrica g (al punto P associa il punto P' , trasformato o immagine di P); mentre quelle ottenute con il sistema rappresentano le equazioni della trasformazione inversa g^{-1} (al punto P' associa il punto P , antitrasformato o controimmagine di P').

Verifichiamo se le seguenti equazioni rappresentano delle trasformazioni geometriche:

$$\begin{cases} x' = x + 2y + 4 \\ y' = 2x + 4y - 1 \end{cases}$$

Per dimostrare se la corrispondenza è biunivoca, esprimiamo x e y in funzione di x' e y' :

$$\begin{cases} x' = x + 2y + 4 \\ y' = 2x + 4y - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = x' - 4 \\ 2x + 4y = y' + 1 \end{cases}$$

Il sistema non è determinato (non ammette soluzione) per cui le equazioni date non rappresentano una trasformazione geometrica, ossia non garantiscono la corrispondenza biunivoca.

Per esempio, i punti $A(2;-1)$ e $B(4;-2)$ ammettono lo stesso punto $P(4;-1)$ come corrispondente.

DEFINIZIONE

In una trasformazione geometrica (chiamata identità), un punto unito è un punto che ha se stesso per immagine.

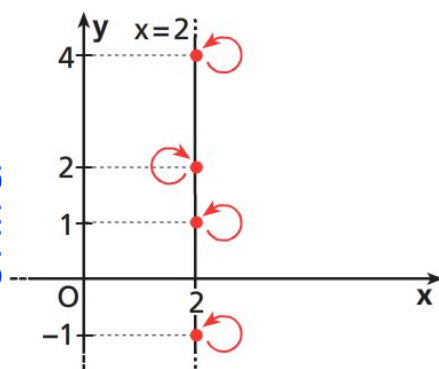
equazioni identità

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

DEFINIZIONE

In una trasformazione geometrica, una figura unita è una figura che ha se stessa per immagine.

puntualmente
unita

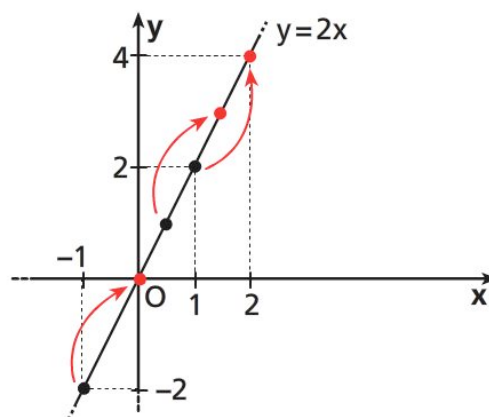


a. Nella trasformazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = y \end{cases}$$

ogni punto della retta di equazione $x=2$ corrisponde a se stesso.

globalmente
unita



b. Nella trasformazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$$

ogni punto della retta di equazione $y=2x$ corrisponde a un diverso punto della retta stessa.

In entrambi i casi la trasformazione fa passare da una figura geometrica (una retta) a se stessa. Nel primo caso tutti i punti sono uniti. Nel secondo caso non ci sono punti uniti.

Determinare i punti uniti nella trasformazione:

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 1 \\ y' = x + 3 \end{cases}$$

Perché un punto sia unito, si deve avere $x' = x \wedge y' = y$.
Sostituendo nelle equazioni, si ottiene:

$$\begin{cases} x = 2x + y + 1 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Nella trasformazione c'è un solo punto unito $P(-2;1)$.

Data trasformazione t , determinare l'equazione della curva r' corrispondente alla retta r di equazione $y=(3/2)x-1$:

$$t : \begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

1. Scriviamo le equazioni della trasformazione inversa:

$$t : \begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases} \xrightarrow[\text{in } x \text{ e } y]{\text{risolvere il sistema}} t^{-1} : \begin{cases} x = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' \\ y = -\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' \end{cases}$$

2. Sostituiamo le equazioni di t^{-1} nell'equazione della retta r :

$$-\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right) - 1 \xrightarrow{\text{calcoli}} y = -5x + 4$$

L'equazione della curva trasformata r' è una retta

❑ LA COMPOSIZIONE DI TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

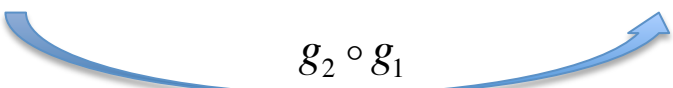
Consideriamo la trasformazione geometrica g_1 che trasformi il punto $P(3;2)$ nel punto $P_1(6;4)$:

$$P(3;2) \xrightarrow{g_1} P_1(6;4) \quad \text{dove } g_1 : \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}$$

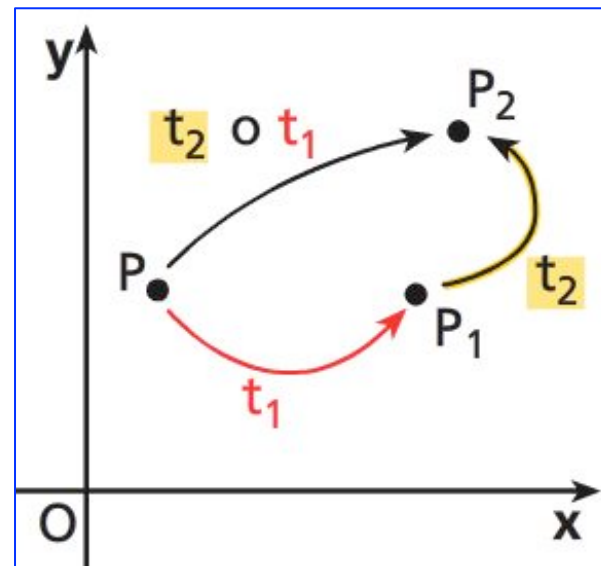
e la trasformazione geometrica g_2 che trasformi il punto $P_1(6;4)$ nel punto $P_2(7;6)$:

$$P_1(6;4) \xrightarrow{g_2} P_2(7;6) \quad \text{dove } g_2 : \begin{cases} x'' = x' + 1 \\ y'' = y' + 2 \end{cases}$$

La trasformazione geometrica $g_2 \circ g_1$ che trasforma il punto $P(3;2)$ nel punto $P_2(7;6)$, si chiama **trasformazione composta**:

$$P(3;2) \xrightarrow{g_1} P_1(6;4) \xrightarrow{g_2} P_2(7;6) \quad \text{dove } g_2 \circ g_1 : \begin{cases} x'' = 2x + 1 \\ y'' = 2y + 2 \end{cases}$$


Infatti, generalizzando il problema, le equazioni delle trasformazioni composte si ottengono come:



$$P(x; y) \xrightarrow{t_1} P_1(2x; 2y) \xrightarrow{t_2} P_2(2x+1; 2y+2) \quad \text{dove } t_2 \circ t_1 : \begin{cases} x'' = 2x + 1 \\ y'' = 2y + 2 \end{cases}$$

$t_2 \circ t_1$

Il trasformato di P rispetto a $g_1 \circ g_2$ è invece:

$$P(3; 2) \xrightarrow{t_2} P_1(4; 4) \xrightarrow{t_1} P_2(8; 8) \quad \text{dove } t_1 \circ t_2 : \begin{cases} x'' = 2(x+1) = 2x+2 \\ y'' = 2(y+2) = 2y+4 \end{cases}$$

$t_1 \circ t_2$

Quindi, non vale la proprietà commutativa: $t_2 \circ t_1 \neq t_1 \circ t_2$

Invece, dalla composizione di una trasformazione con la sua inversa si ottiene l'identità:

$$g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = i$$

DEFINIZIONE

In una trasformazione geometrica si dice **involutoria** se componendola con se stessa si ottiene l'identità.

Una trasformazione involutoria è una trasformazione che ha come inversa se stessa.

esempio

Dimostriamo che la seguente trasformazione è involutoria:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

$$P(x; y) \xrightarrow{g} P_1(-x; -y) \xrightarrow{g^{-1}} P(x; y) \Rightarrow g = g^{-1}$$

Tra le trasformazioni geometriche studieremo quelle rappresentate da equazioni lineari.

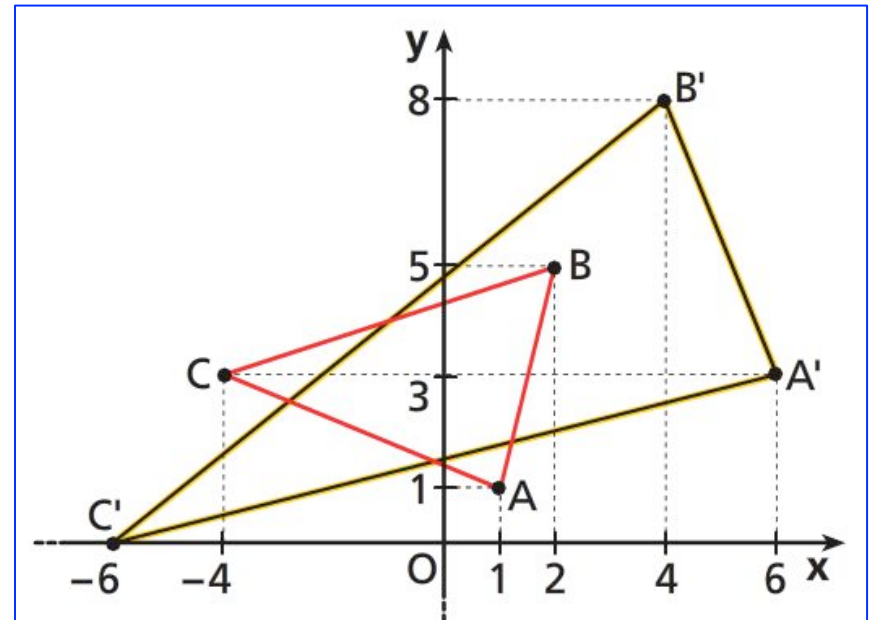
definizione

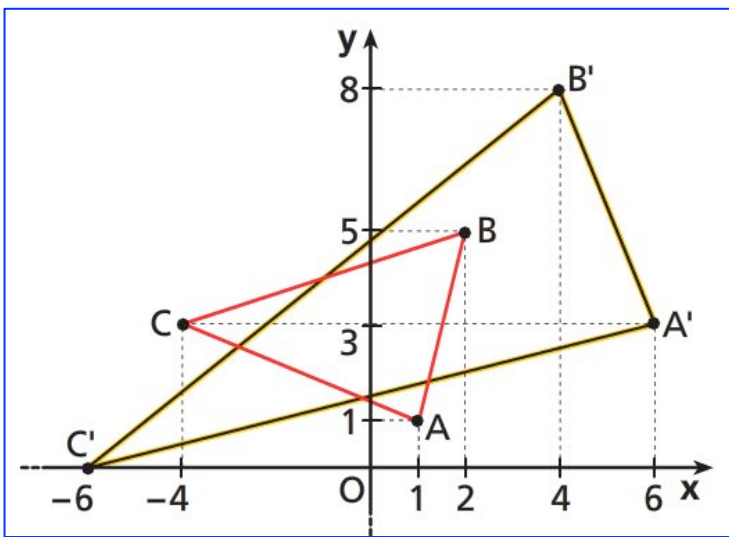
Le affinità sono trasformazioni geometriche descritte da equazioni di primo grado, del tipo:

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$$

Consideriamo la seguente trasformazione (affinità):

$$g : \begin{cases} x' = 2x - y + 5 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$$





In questa **affinità**, la **distanza non si conserva**, ossia la distanza fra due punti è diversa da quella dei loro trasformati:

$$\overline{EB} \neq \overline{E'B'} \quad \overline{AB} \neq \overline{A'B'}$$

Per ogni trasformazione è utile cercare le **proprietà invarianti**, ossia le proprietà che si conservano nella trasformazione.

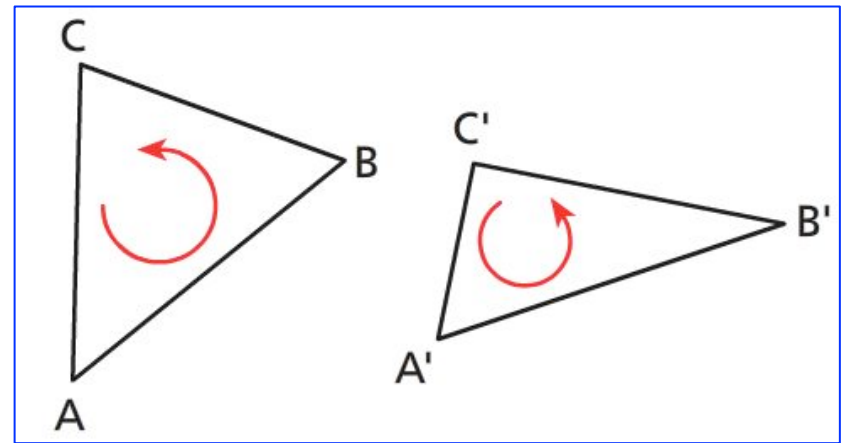
Si dimostra che ogni affinità trasforma rette in rette, segmenti in segmenti, poligoni in poligoni con lo stesso numero di lati.

La **forma delle figure non è una proprietà invariante**; infatti nella trasformazione g , il triangolo ABE non ha la stessa forma del triangolo $A'B'E'$.

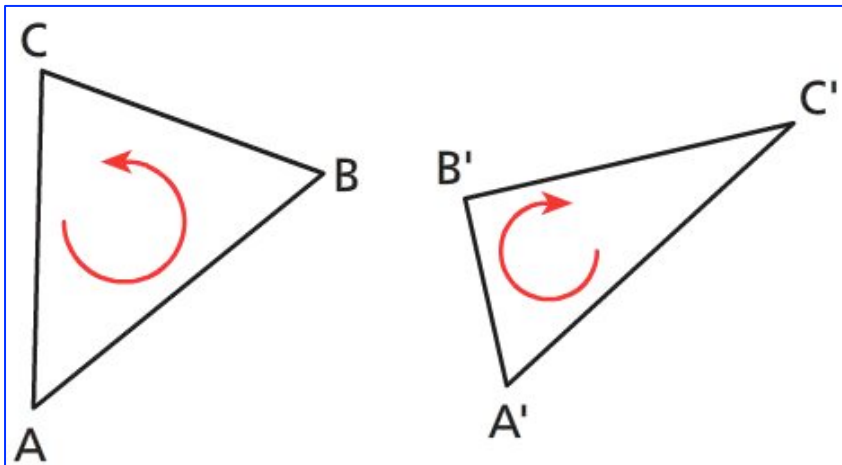
$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} > 0$$

Affinità diretta

si conserva l'orientamento dei vertici di un poligono



a. Affinità diretta: in ABC e nella sua immagine $A'B'C'$ i punti sono ordinati nello stesso verso (nel caso della figura è il verso antiorario).



b. Affinità indiretta: in ABC e $A'B'C'$ i punti sono ordinati nei due diversi versi (antiorario e orario).

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} < 0$$

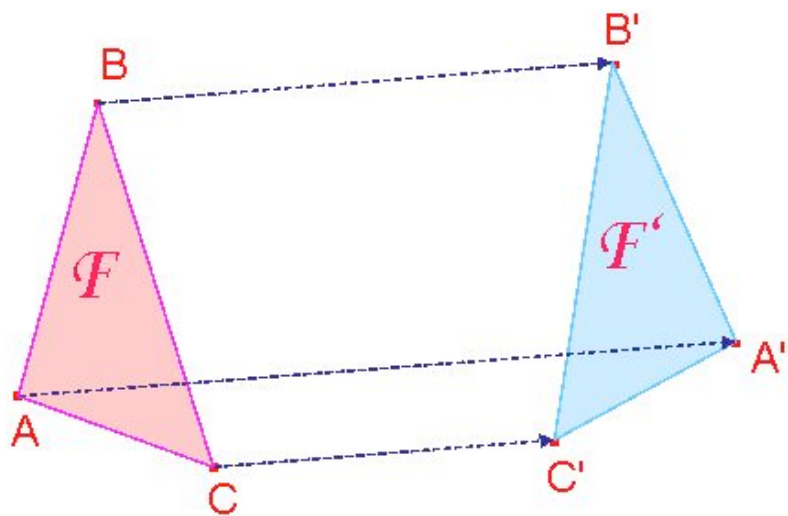
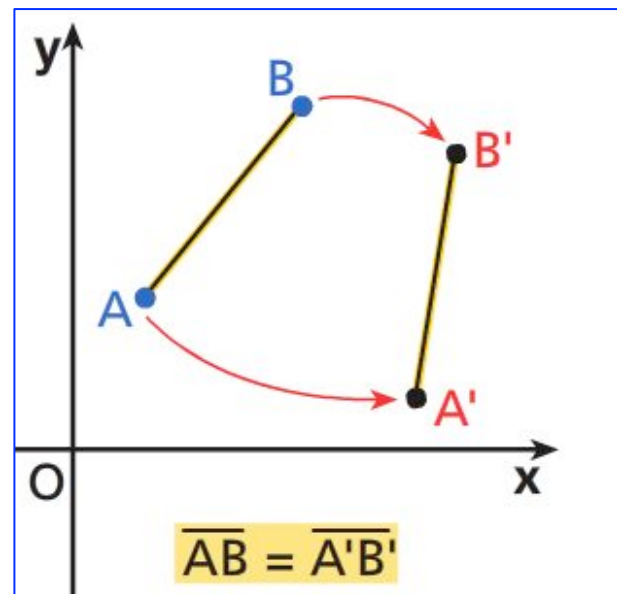
Affinità indiretta

l'orientamento dei vertici di un poligono si inverte

Una **isometria** è una affinità nella quale la distanza fra due qualunque punti del piano A e B è uguale a quella fra le loro immagini A' e B':

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

LE ISOMETRIE



Una isometria trasforma una figura geometrica in una figura congruente.

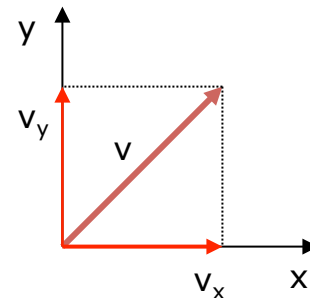
Le **isometrie** sono tutte le trasformazioni (movimenti, spostamenti) che mantengono inalterate le figure, ossia mantengono inalterate le caratteristiche misurabili (la lunghezza dei lati, l'ampiezza degli angoli).

Vi sono quattro tipi di isometrie:

- la traslazione
- la simmetria assiale
- la simmetria centrale
- la rotazione

✓ Qualche richiamo sui vettori

Un vettore $\mathbf{v}$ può essere espresso tramite delle coordinate cartesiane $\mathbf{v}=(\mathbf{v}_x;\mathbf{v}_y)$.

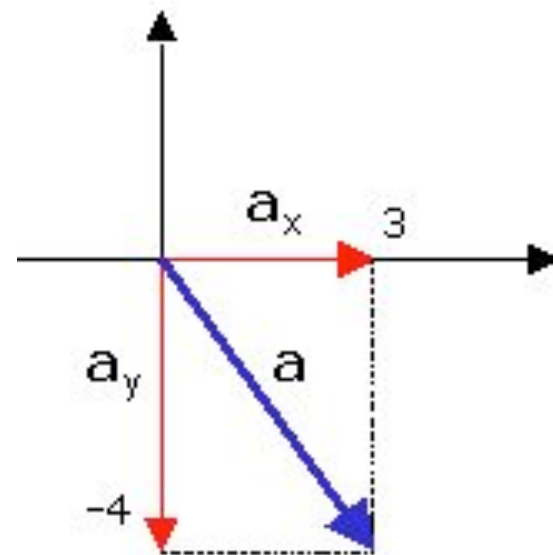


ESEMPIO

Rappresentare nel piano cartesiano il vettore $\mathbf{a}=(3;-4)$:

Poiché a è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti a_x e a_y , allora il suo modulo è dato dal teorema di Pitagora:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$



La traslazione di vettore **v** è quella trasformazione geometrica (isometria) che associa al punto P del piano il punto P', attraverso le equazioni:

$$t : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \quad \text{affinità diretta}$$

Le equazioni permettono di trovare le coordinate di un punto P'(x';y') note quelle del punto P(x;y).

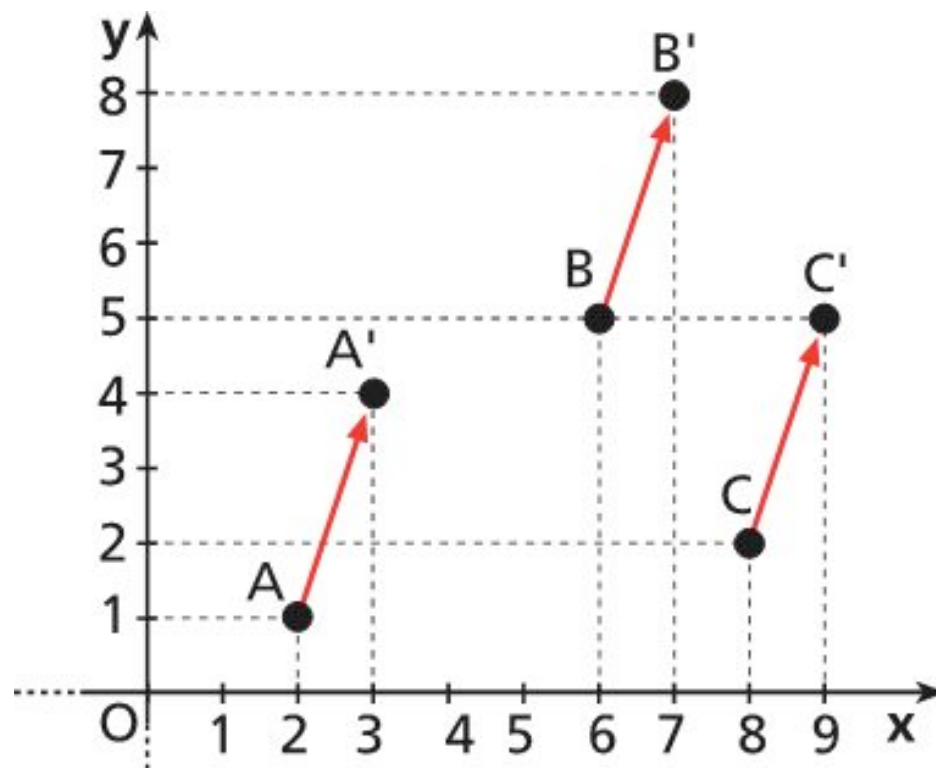
$$P(x; y) \xrightarrow{t} P'(x'; y')$$

In una traslazione **non ci sono punti uniti**.

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 3 \end{cases}$$

Ogni punto viene traslato aumentando di 1 unità la sua ascissa e di 3 unità la sua ordinata.

I vettori AA' , BB' , CC' sono tutti equipollenti (stesso modulo).



Riconoscere quale tra le seguenti trasformazioni rappresenta una traslazione e scrivere il vettore di traslazione:

$$t_1 : \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y \end{cases} \quad t_2 : \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = -y \end{cases} \quad t_3 : \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$$

Le equazioni di una traslazione di vettore $\mathbf{v}(a,b)$ sono del tipo:

$$t : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Le trasformazioni t_1 e t_2 non rappresentano una traslazione in quanto i coefficienti di x e y non sono uguali a 1, come richiesto dalle equazioni della traslazione t .

La trasformazione t_3 , invece, rappresenta una traslazione (soddisfa le equazioni della traslazione t) di vettore $\mathbf{v}(-1;2)$

I punti $A(3;2)$ e $A'(-5;8)$ si corrispondono in una traslazione. Determinare le equazioni della traslazione e il vettore di traslazione.

Le equazioni di una traslazione di vettore $\mathbf{v}(a,b)$ sono del tipo:

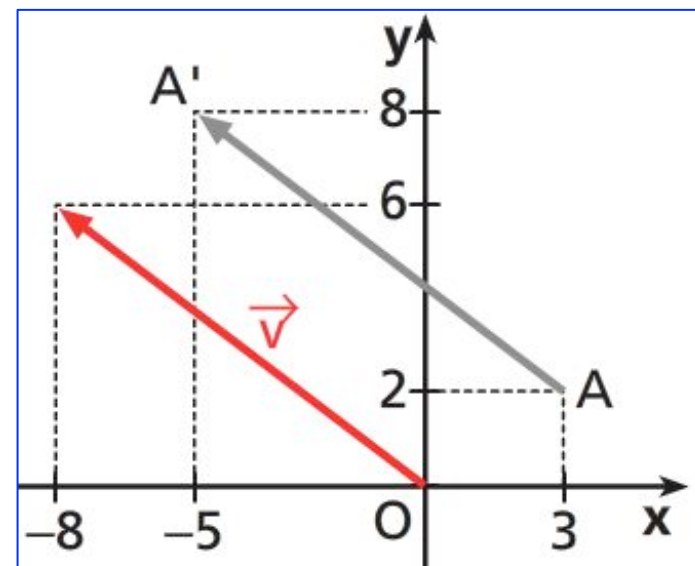
$$t : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Sostituiamo in t le coordinate di A' e A :

$$\begin{cases} -5 = 3 + a \\ 8 = 2 + b \end{cases} \xrightarrow{\text{soluzione}} \begin{cases} a = -8 \\ b = 6 \end{cases}$$

Le equazioni della traslazione e il vettore di traslazione, sono:

$$t : \begin{cases} x' = x - 8 \\ y' = y + 6 \end{cases} \quad \vec{v}(-8;6)$$



ESERCIZIO GUIDA

Trasliamo il triangolo di vertici $A(1; 0)$, $B(2; 5)$ e $C(-1; 3)$ secondo il vettore $\vec{v}(3; -4)$.

Scriviamo le equazioni della traslazione:

$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 4 \end{cases}$$

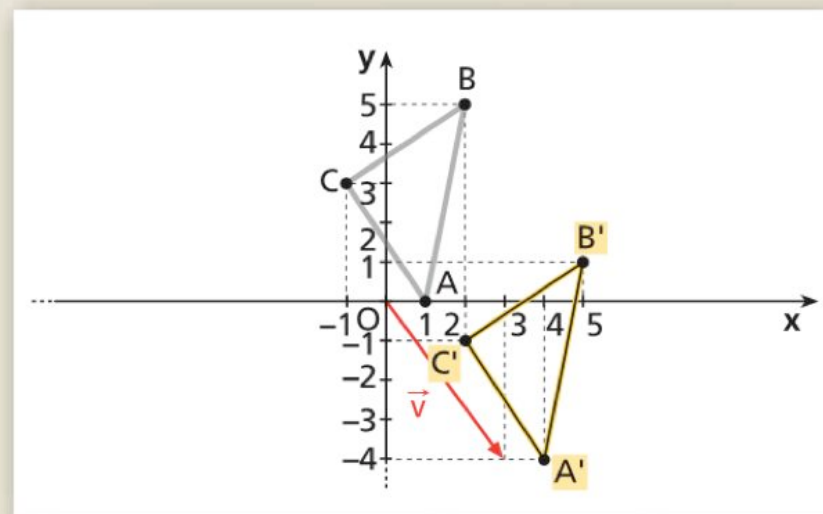
Determiniamo le coordinate dei punti corrispondenti ai dati:

$$A(1; 0) \rightarrow A'(4; -4)$$

$$B(2; 5) \rightarrow B'(5; 1)$$

$$C(-1; 3) \rightarrow C'(2; -1)$$

Disegniamo il vettore $\vec{v}$ con il primo estremo nell'origine e i due triangoli corrispondenti.



Traslare la retta r di equazione $y=2x-1$ secondo il vettore $\mathbf{v}(-5;3)$.

1. Scriviamo le equazioni della traslazione di vettore $\mathbf{v}$:

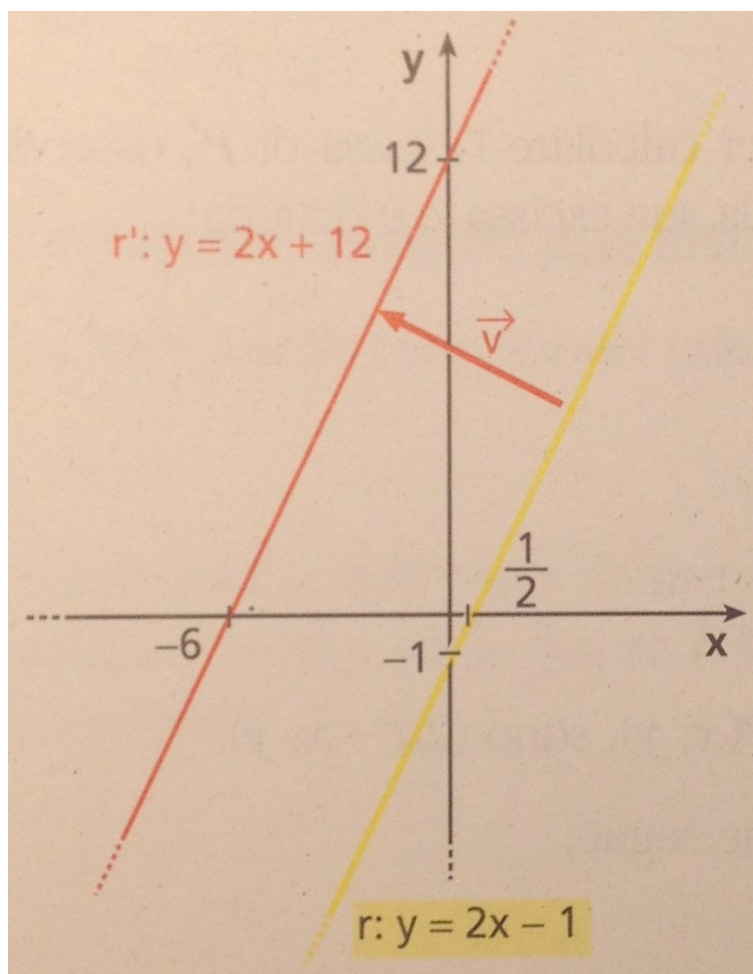
$$t : \begin{cases} x' = x - 5 \\ y' = y + 3 \end{cases}$$

2. Ricaviamo dal sistema le variabili x e y :

$$\begin{cases} x = x' + 5 \\ y = y' - 3 \end{cases}$$

3. Sostituiamo nell'equazione della retta r le espressioni di x e y :

$$y' - 3 = 2(x' + 5) - 1 \xrightarrow{\text{da cui}} y' = 2x' + 12$$



- $y=2x-1$ equazione retta r

- $y=2x+12$ equazione retta r' ,
traslata della retta r

Le due rette r e r' sono parallele:

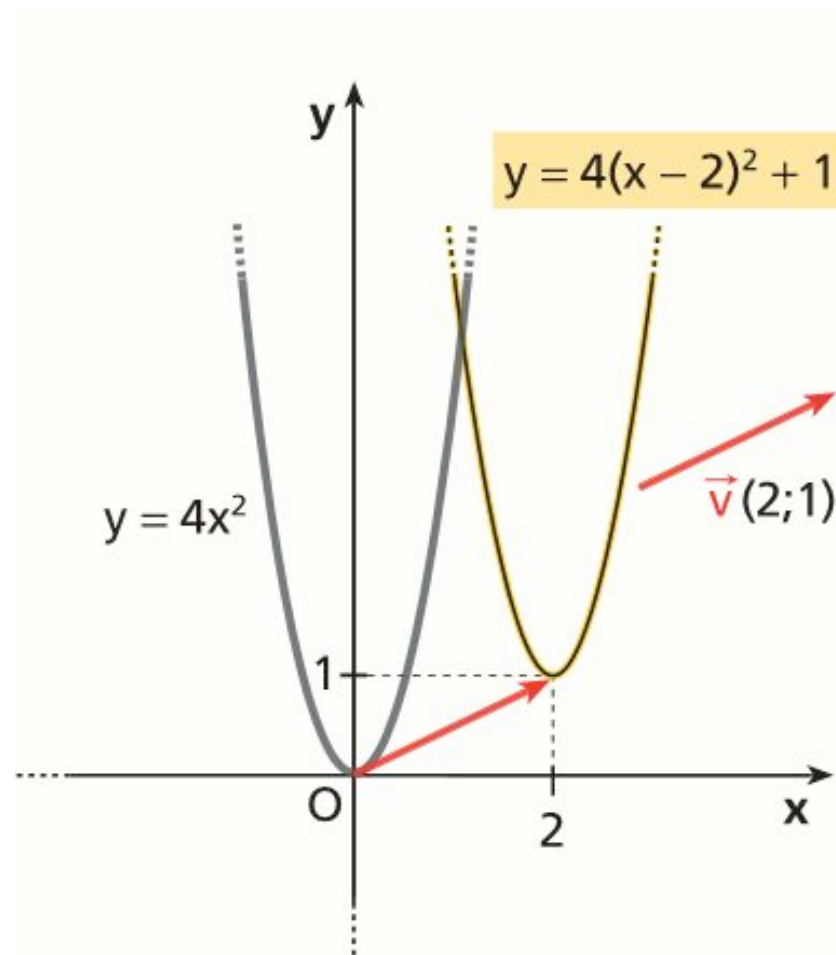
➤ **Proprietà generale:** le rette che si corrispondono in una traslazione sono parallele.

Traslare la funzione (parabola) $y=4x^2$ secondo il vettore $\mathbf{v}(2;1)$.

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' - 1 \end{cases}$$

$$y' - 1 = 4(x' - 2)^2 \longrightarrow y' = 4(x' - 2)^2 + 1$$

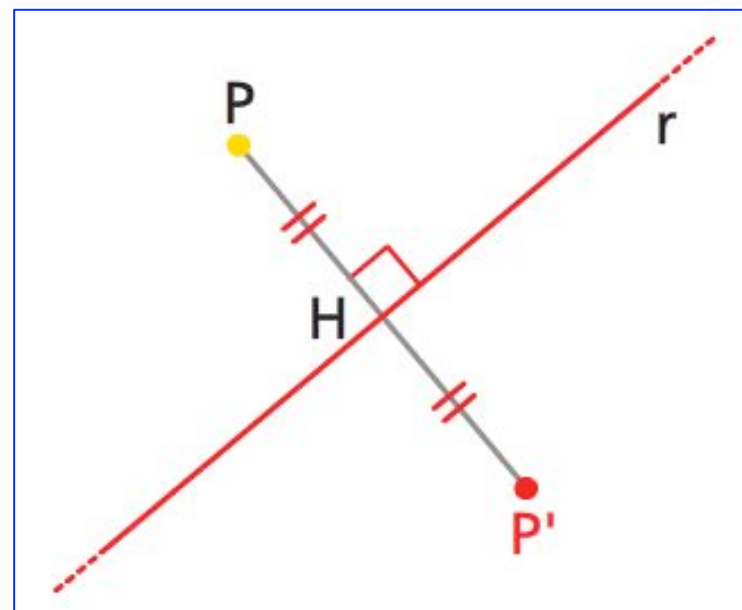
$$y = 4(x - 2)^2 + 1 \rightarrow y = 4x^2 - 16x + 17$$



La simmetria assiale rispetto alla retta r è quella trasformazione geometrica (isometria) che a ogni punto P fa corrispondere il punto P' , nel semipiano opposto rispetto a r tale che r sia asse del segmento (asse di simmetria) PP' , ossia:

- ✧ r passa per il punto medio di PP'
- ✧ PP' è perpendicolare a r

LA SIMMETRIA ASSIALE

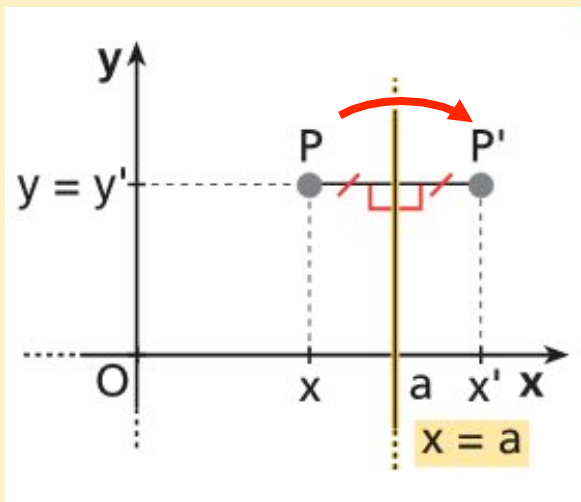


La simmetria assiale è una trasformazione involutoria (componendola con se stessa si ottiene l'identità).

I punti uniti sono i punti dell'asse di simmetria (retta unita).

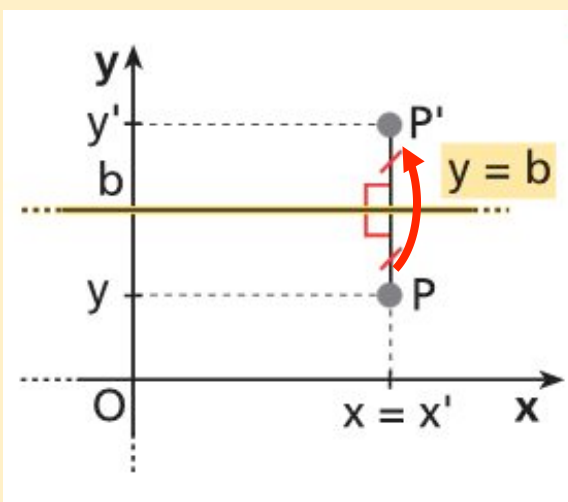
Simmetria rispetto
all'asse $x = a$

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$$



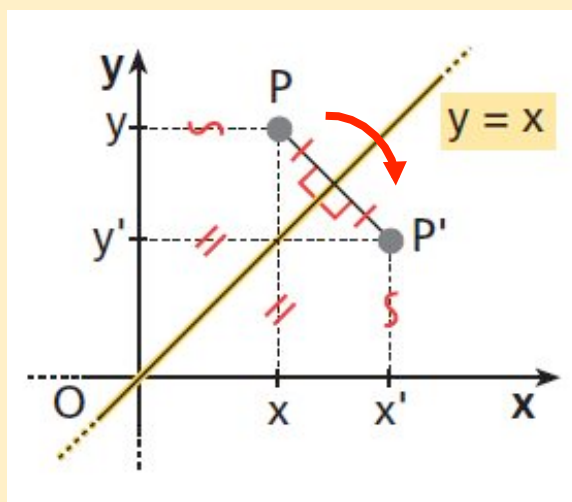
Simmetria rispetto
all'asse $y = b$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$



Simmetria rispetto
all'asse $y = x$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$



affinità indiretta

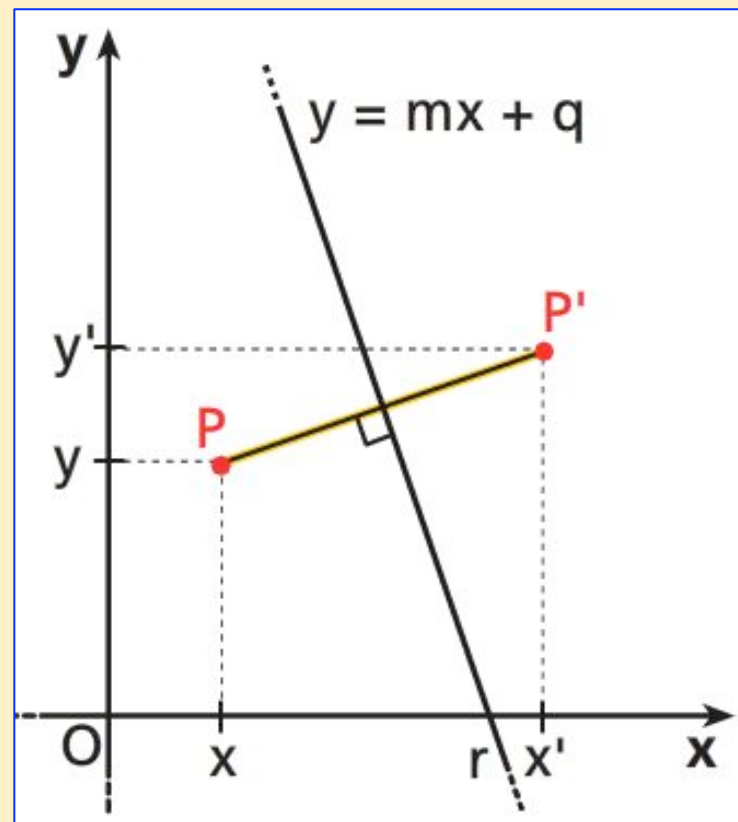
$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

Simmetria rispetto alla retta $y=mx+q$

$$\begin{cases} x' = \frac{1-m^2}{1+m^2}x + \frac{2m}{1+m^2}y - \frac{2mq}{1+m^2} \\ y' = \frac{2m}{1+m^2}x + \frac{1-m^2}{1+m^2}y + \frac{2q}{1+m^2} \end{cases}$$

affinità indiretta

$$\begin{vmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & -\frac{1-m^2}{1+m^2} \end{vmatrix} = -1 < 0$$



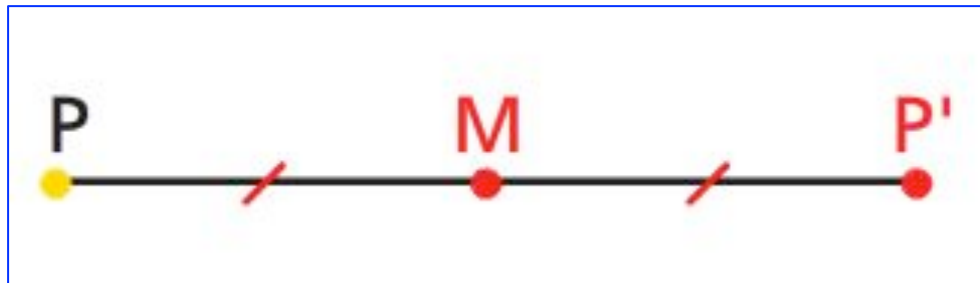
Le equazioni si ottengono dal seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{y+y'}{2} = m \frac{x+x'}{2} + q & \text{punto medio } PP' \text{ appartiene alla retta } r \\ \frac{y'-y}{x'-x} = -\frac{1}{m} & \text{retta } PP' \text{ perpendicolare alla retta } r \end{cases}$$

La simmetria centrale di centro M è la trasformazione geometrica (isometria) che a ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P' tale che M è il punto medio del segmento PP' . Le equazioni della trasformazione sono:

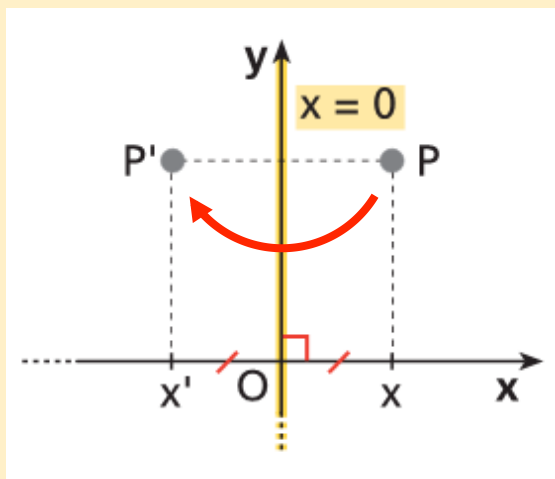
$$s_M : \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \quad \text{affinità diretta}$$



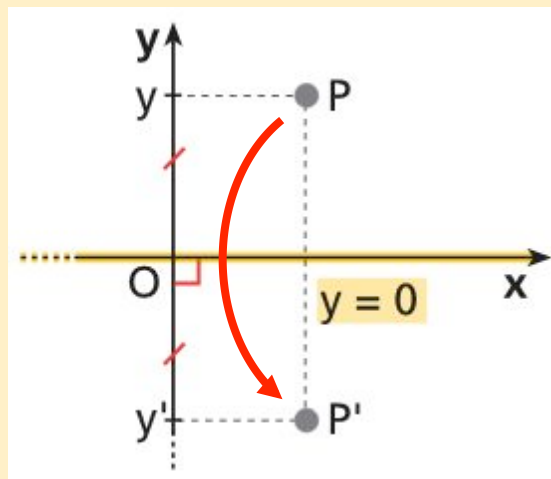
Simmetria rispetto
all'asse $x = 0$

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$



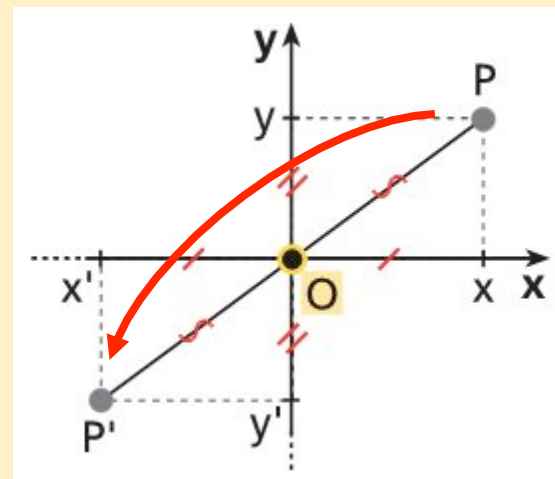
Simmetria rispetto
all'asse $y = 0$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$



Simmetria
centrale

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$



ESERCIZIO GUIDA

Date le equazioni

$$\text{a) } \begin{cases} x' = -4 - x \\ y' = y \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x' = -6 + x \\ y' = y \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 8 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x' = x \\ y' = -2y \end{cases}$$

riconosciamo quali tra queste rappresentano una simmetria, individuando le simmetrie rispetto a rette parallele all'asse x o all'asse y , o rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante o rispetto all'origine.

Le equazioni delle simmetrie sono del tipo:

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$$

Simmetria rispetto
alla retta $x = a$
parallela all'asse y

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$

Simmetria rispetto
alla retta $y = b$
parallela all'asse x

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

Simmetria rispetto
alla bisettrice $y = x$

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Simmetria rispetto
all'origine O

Le equazioni a) rappresentano una simmetria rispetto alla retta $x = -2$.

Le equazioni b) non rappresentano una simmetria ma una traslazione di vettore $\vec{v}(-6; 0)$.

Le equazioni c) rappresentano una simmetria rispetto alla retta $y = 4$.

Le equazioni d) non rappresentano una simmetria.

Data la retta r di equazione $x=-2$, scrivere le equazioni della simmetria rispetto a r e determinare le coordinate dei punti corrispondenti ai vertici del quadrilatero ABCD, dove $A(-12;-4)$, $B(-6;-4)$, $C(-8;3)$, $D(-11;1)$.

Le equazioni della simmetria rispetto a $x=-2$, sono:

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases} \xrightarrow{a=-2} \begin{cases} x' = -4 - x \\ y' = y \end{cases}$$

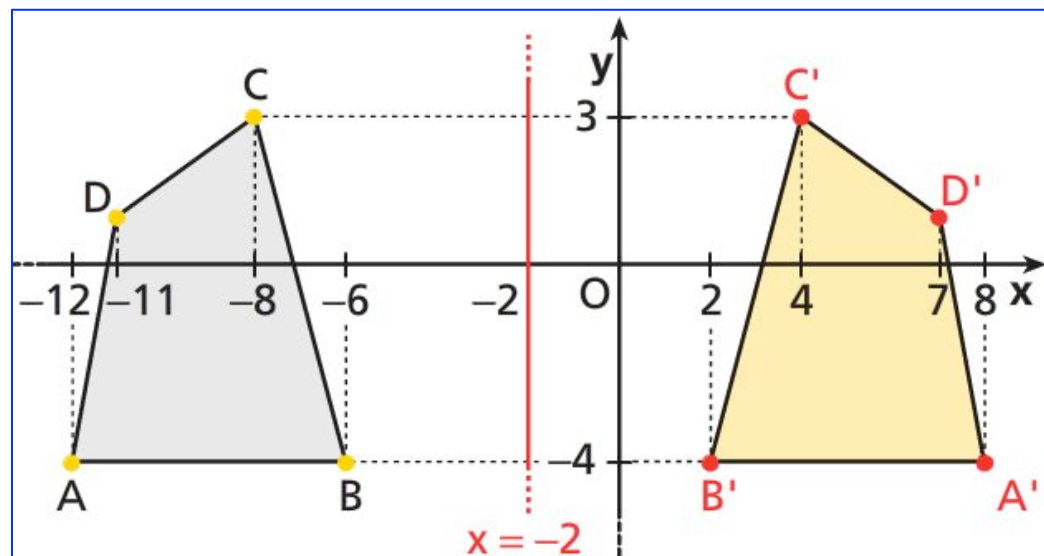
Le coordinate dei punti corrispondenti nella simmetria assiale sono:

$$A(-12;-4) \mapsto A'(8;-4)$$

$$B(-6;-4) \mapsto B'(2;-4)$$

$$C(-8;3) \mapsto C'(4;3)$$

$$D(-11;1) \mapsto D'(7;1)$$



ESERCIZI

I punti $P(3;4)$ e $P'(-7;4)$ si corrispondono in una simmetria assiale. Individuare l'asse di simmetria e le equazioni della trasformazione.

Dalla figura notiamo che l'asse di simmetria è la retta perpendicolare a PP' nel suo punto medio M , le cui coordinate sono:

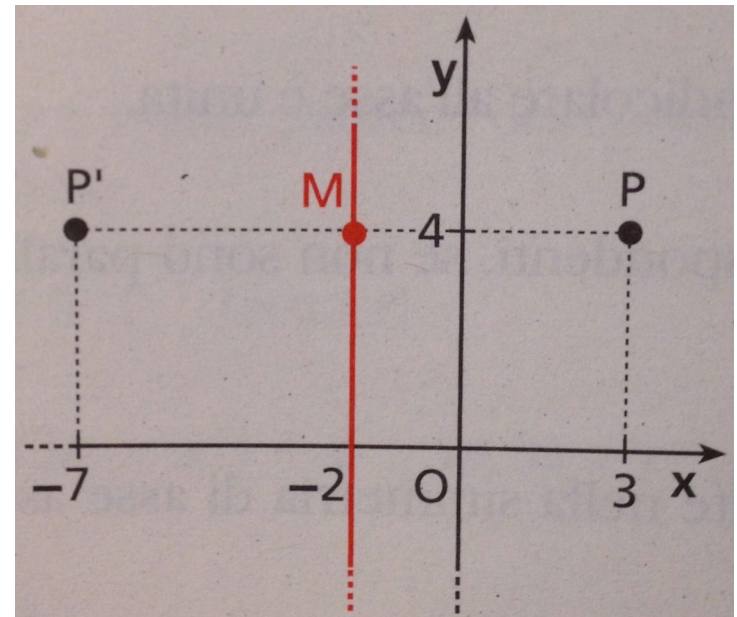
$$x_M = \frac{x_P + x_{P'}}{2} = \frac{3 + (-7)}{2} = -2 \quad y_M = 4$$

Pertanto, l'asse di simmetria ha equazione:

$$x = -2$$

Le equazioni della simmetria rispetto a $x=-2$, sono:

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases} \xrightarrow{a=-2} \begin{cases} x' = -4 - x \\ y' = y \end{cases}$$



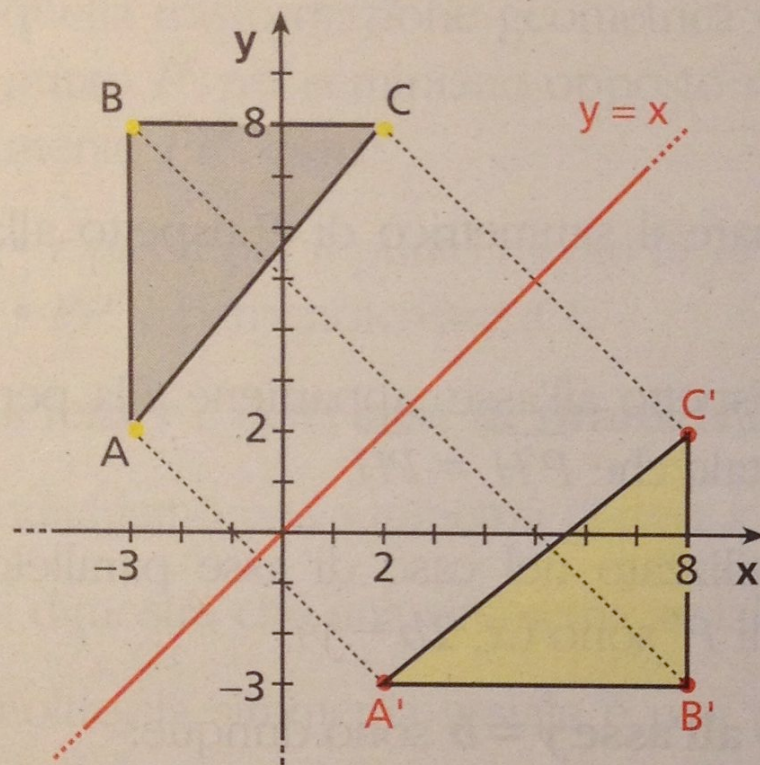
Applichiamo la simmetria rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante al triangolo ABC di vertici $A(-3; 2)$, $B(-3; 8)$, $C(2; 8)$.

Le corrispondenze fra i punti sono:

$$A(-3; 2) \mapsto A'(2; -3);$$

$$B(-3; 8) \mapsto B'(8; -3);$$

$$C(2; 8) \mapsto C'(8; 2).$$



◀ **Figura 8.** I simmetrici dei punti A , B e C sono $A'(2; -3)$, $B'(8; -3)$ e $C'(8; 2)$. I due triangoli ABC e $A'B'C'$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$. Dalla figura possiamo notare che la simmetria assiale è una affinità indiretta.

Le rette $r: x-2y+6=0$ e $r': 2x-y-6=0$ si corrispondono in una simmetria assiale, rispetto a una delle bisettrici dei quadranti. Stabilire di quale asse di simmetria si tratta.

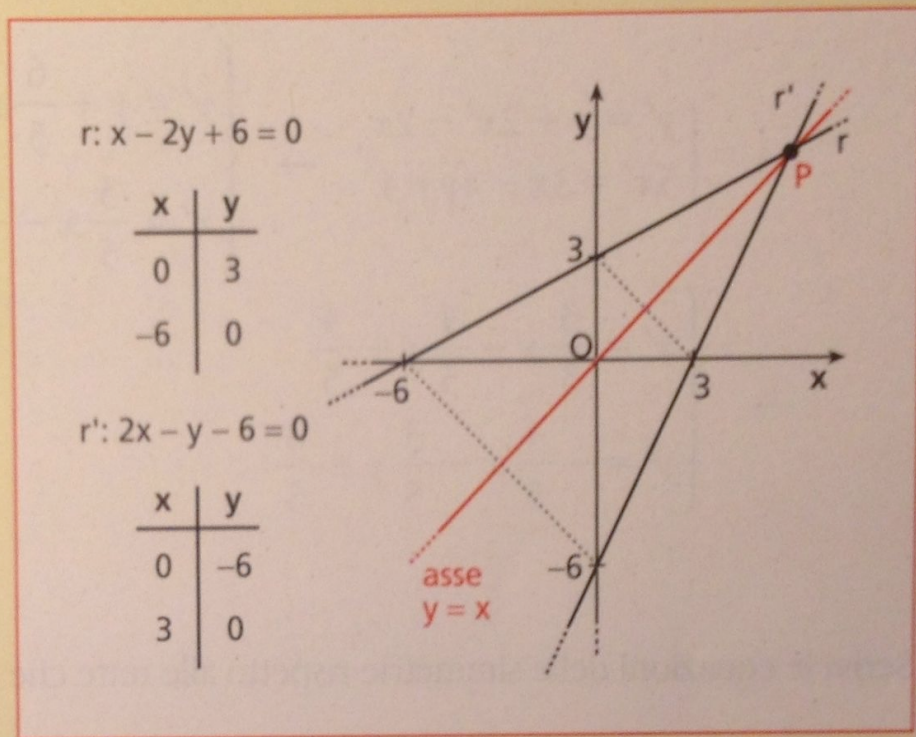
Poiché due rette corrispondenti in una simmetria assiale, se non sono parallele, si intersecano in un punto dell'asse, cerchiamo le coordinate del punto di intersezione di r con r' . Risolviamo quindi il sistema formato dalle equazioni delle due rette:

$$\begin{cases} x - 2y + 6 = 0 \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2y - 6 \\ 2(2y - 6) - y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y - 6 \\ 3y - 18 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 6 \end{cases}$$

Il punto di intersezione è $P(6; 6)$.

Il punto P ha coordinate uguali, quindi appartiene alla retta di equazione $y = x$. Pertanto l'asse di simmetria è la bisettrice del I e del III quadrante.



Cerchiamo le equazioni della simmetria di asse $y = 2x$.

Se $P(x; y)$ ha come immagine $P'(x'; y')$, si ha:

$$\begin{cases} \frac{y+y'}{2} = 2\left(\frac{x+x'}{2}\right) & \text{punto medio del segmento } PP' \text{ appartenente all'asse} \\ \frac{y'-y}{x'-x} = -\frac{1}{2} & \text{retta } PP' \text{ perpendicolare all'asse.} \end{cases}$$

Ricaviamo x' e y' :

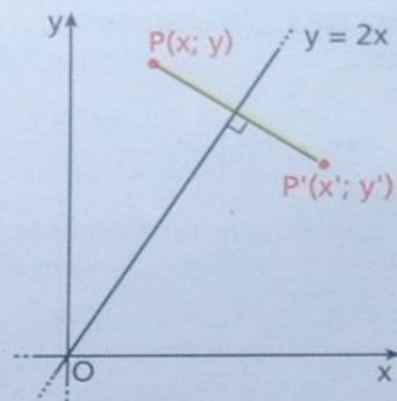
$$\begin{cases} y + y' = 2x + 2x' \\ 2y' - 2y = -x' + x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x' - y' = y - 2x \\ x' + 2y' = x + 2y \end{cases}$$

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} y-2x & -1 \\ x+2y & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2y-4x+x+2y}{4+1} = \frac{-3x+4y}{5};$$

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} 2 & y-2x \\ 1 & x+2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2x+4y-y+2x}{5} = \frac{4x+3y}{5}.$$

Quindi le equazioni della simmetria sono:

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases}$$



Determinare l'equazione dell'asse di simmetria note le equazioni della simmetria assiale:

$$\begin{cases} x' = y - 4 \\ y' = x + 4 \end{cases}$$

Poiché l'asse di simmetria è il luogo dei punti uniti, per i suoi punti deve essere:

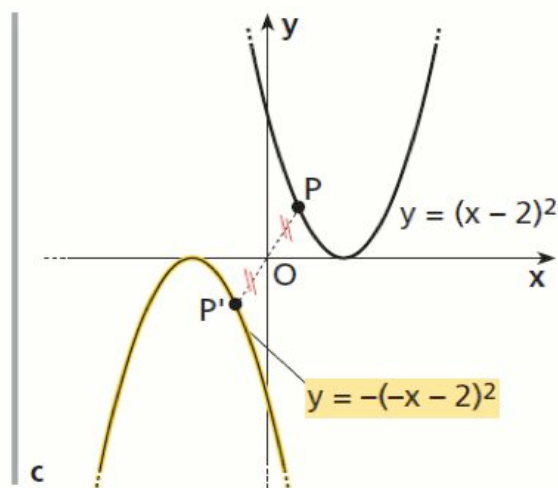
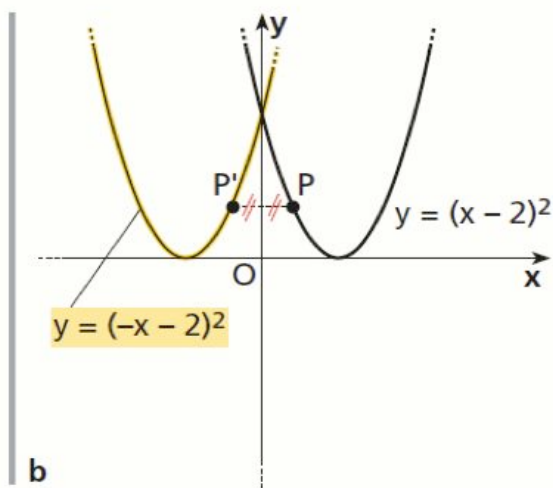
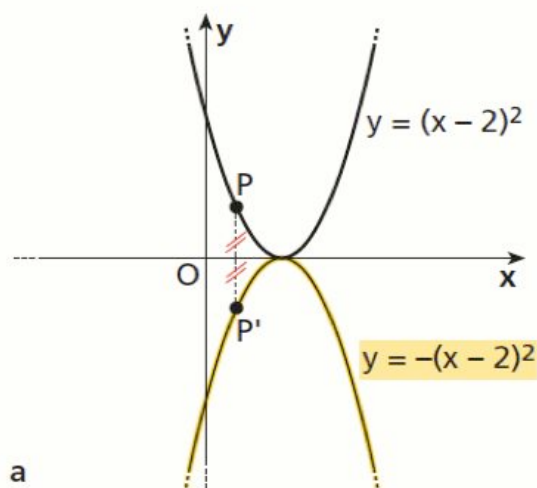
$$\begin{cases} x = y - 4 \\ y = x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ y = x + 4 \end{cases} \Rightarrow y = x + 4$$

Tutti e soli i punti della retta di equazione $y=x+4$ sono punti uniti. La retta è quindi l'asse di simmetria.

ESERCIZIO GUIDA

Consideriamo la funzione di equazione $y = (x - 2)^2$. Determiniamo l'equazione e il grafico della funzione simmetrica a) rispetto all'asse x , b) rispetto all'asse y , c) rispetto all'origine.

- a) La funzione simmetrica rispetto all'asse x ha equazione $y = -f(x)$, quindi $y = -(x - 2)^2$.
- b) La funzione simmetrica rispetto all'asse y ha equazione $y = f(-x)$, quindi $y = (-x - 2)^2$.
- c) La funzione simmetrica rispetto all'origine ha equazione $y = -f(-x)$, quindi $y = -(-x - 2)^2$.

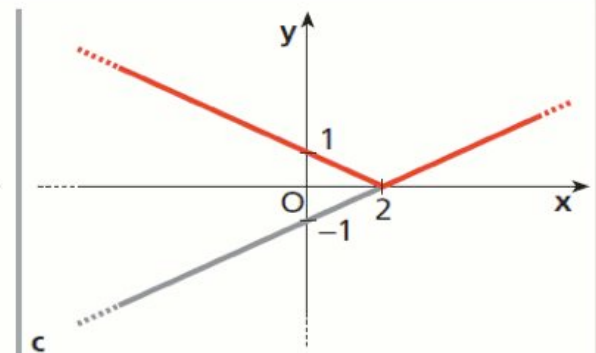
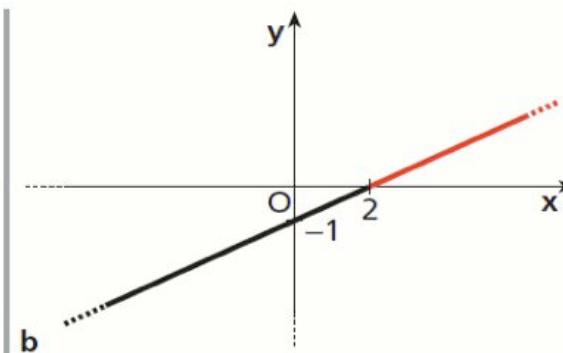
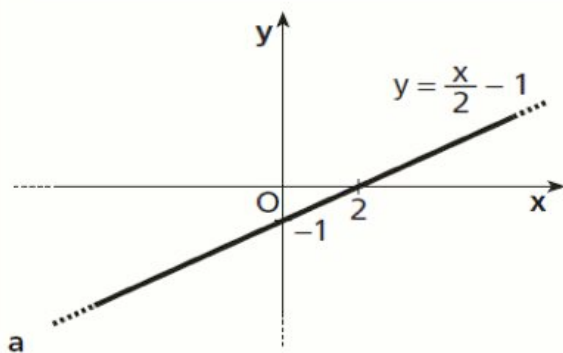


ESERCIZIO GUIDA

Disegniamo il grafico della funzione $y = \left| \frac{x}{2} - 1 \right|$.

Per ottenere il grafico:

- disegniamo quello di $y = \frac{x}{2} - 1$ (figura a);
- confermiamo il grafico precedente nell'intervallo in cui le ordinate dei punti sono positive o nulle, ossia per $x \geq 2$ (figura b);
- consideriamo il simmetrico rispetto all'asse x del grafico precedente nell'intervallo in cui le ordinate sono negative, ossia per $x < 2$ (figura c).
- consideriamo il simmetrico rispetto all'asse x del grafico precedente nell'intervallo in cui le ordinate sono negative, ossia per $x < 2$ (figura c).

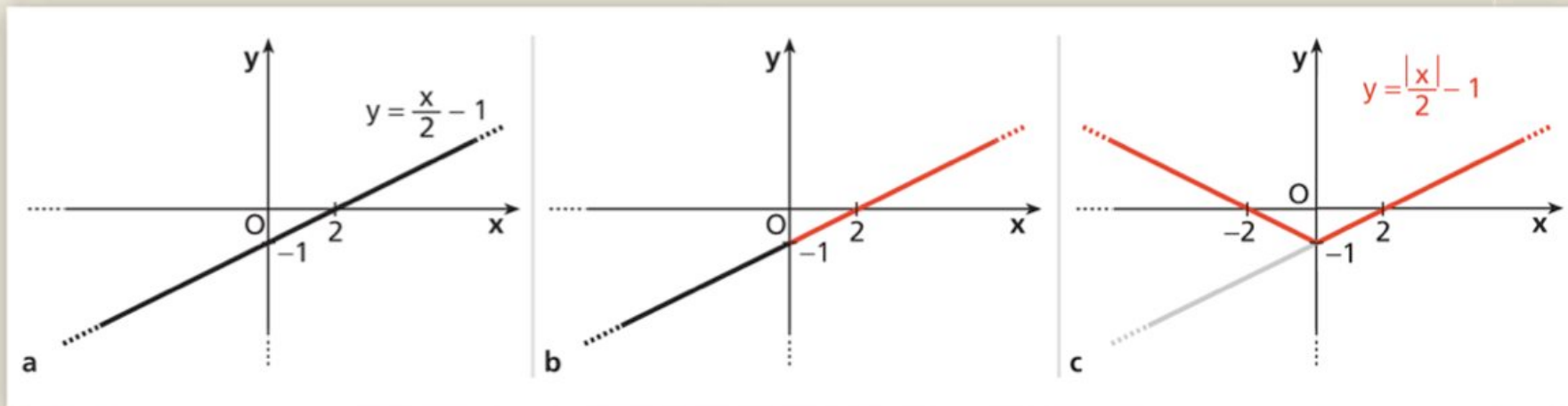


ESERCIZIO GUIDA

Disegniamo il grafico della funzione $y = \frac{|x|}{2} - 1$.

Per ottenere il grafico:

- disegniamo quello di $y = \frac{x}{2} - 1$ (figura a);
- confermiamo il grafico precedente nell'intervallo in cui le ascisse dei punti sono positive o nulle, ossia per $x \geq 0$ (figura b);
- consideriamo il simmetrico rispetto all'asse y del grafico precedente nell'intervallo in cui le ascisse sono negative, ossia per $x < 0$ (figura c).

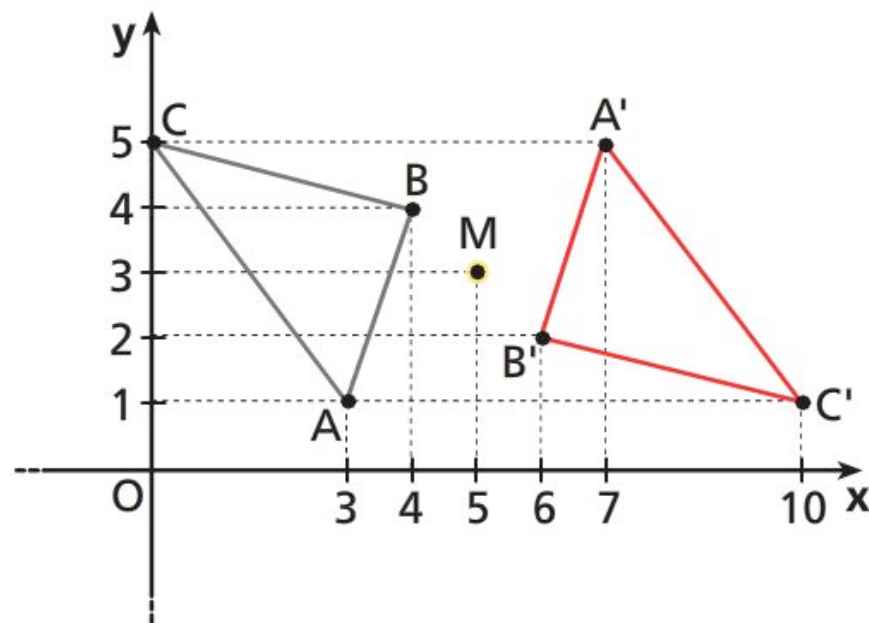


ESEMPIO

Le equazioni della simmetria centrale di centro $M(5; 3)$ sono:

$$\begin{cases} x' = 10 - x \\ y' = 6 - y \end{cases}$$

► **Figura 13** Verifica che i punti della figura si corrispondono mediante le equazioni della simmetria di centro M .



ESERCIZI

Determinare la retta corrispondente alla retta r di equazione $y=3x-2$ nella simmetria di centro l'origine degli assi cartesiani.

Le equazioni della simmetria di centro l'origine degli assi:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Ricaviamo x e y dalle equazioni precedenti:

$$\begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases}$$

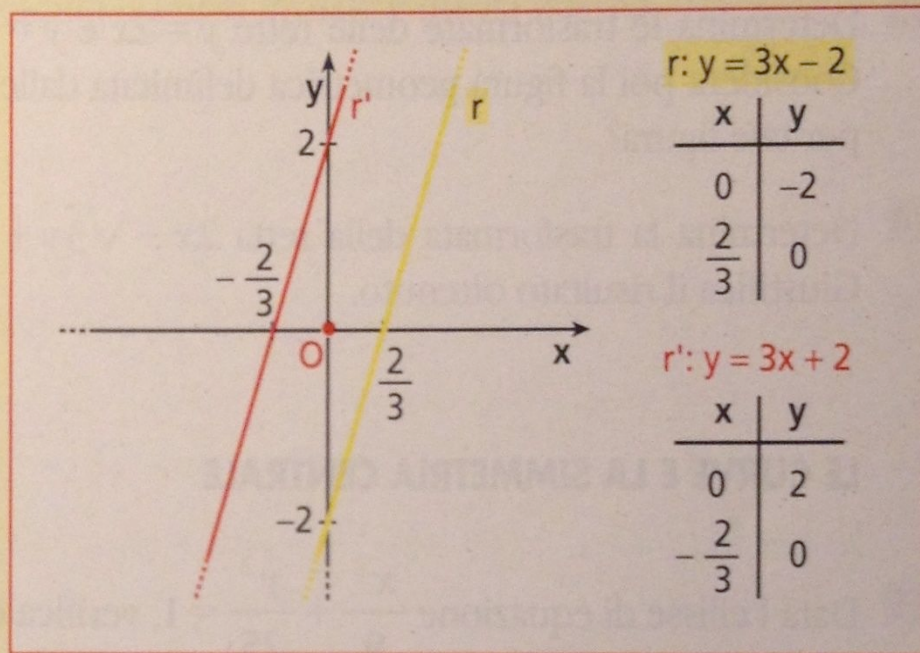
Nell'equazione della retta r sostituiamo a x e y le espressioni trovate:

$$-y' = 3(-x') - 2.$$

Togliamo gli apici e otteniamo, cambiando i segni: $y = 3x + 2$.

Questa è l'equazione della retta r' . Disegniamo il grafico.

Le due rette r e r' sono parallele. Infatti le loro equazioni hanno lo stesso coefficiente angolare 3.



ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo la retta r' corrispondente alla retta r di equazione $y = 2x - 4$ nella simmetria di centro $M(1; 2)$.

Le equazioni della simmetria di centro M sono:

$$\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 4 - y \end{cases}$$

Ricaviamo x e y

$$\begin{cases} x = 2 - x' \\ y = 4 - y' \end{cases}$$

e sostituiamo nell'equazione di r :

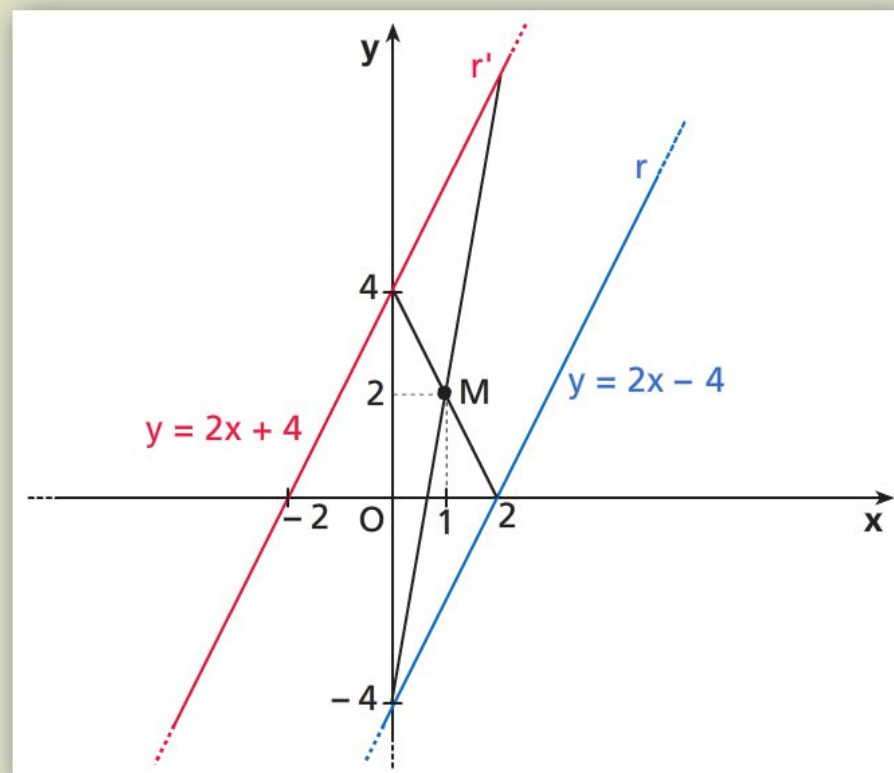
$$4 - y' = 2(2 - x') - 4.$$

Svolgiamo i calcoli e togliamo gli apici. Si ha:

$$\begin{aligned} -y &= \cancel{4} - 2x - \cancel{4} - 4 \rightarrow -y = -2x - 4 \rightarrow \\ &\rightarrow y = 2x + 4. \end{aligned}$$

Questa è l'equazione di r' .

Osserviamo che le due rette r e r' sono parallele.



Determinare il centro di simmetria della curva di equazione:

$$x^2 + 9y^2 - 4x - 18y + 4 = 0$$

Scriviamole le equazioni della simmetria di centro generico $C(x_C; y_C)$:

$$s_C : \begin{cases} x' = 2x_C - x \\ y' = 2y_C - y \end{cases} \xrightarrow{\text{ricaviamo le equazioni della trasformazione inversa}} s_C^{-1} : \begin{cases} x = 2x_C - x' \\ y = 2y_C - y' \end{cases}$$

Sostituiamo le equazioni della trasformazione inversa nell'equazione della curva (togliamo gli apici):

$$(2x_C - x)^2 + 9(2y_C - y)^2 - 4(2x_C - x) - 18(2y_C - y) + 4 = 0 \xrightarrow{\text{semplifichiamo e ordiniamo}} x^2 + 9y^2 - 4x(x_C - 1) - 18y(-1 + 2y_C) + 4x_C^2 + 36y_C^2 - 8x_C - 36y_C + 4 = 0$$

L'equazione ottenuta è quella della curva simmetrica a quella data. Se questa ha centro di simmetria, essa deve coincidere con la sua simmetrica, quindi confrontando le due equazioni dobbiamo avere:

$$x_C - 1 = 1 \rightarrow x_C = 2$$

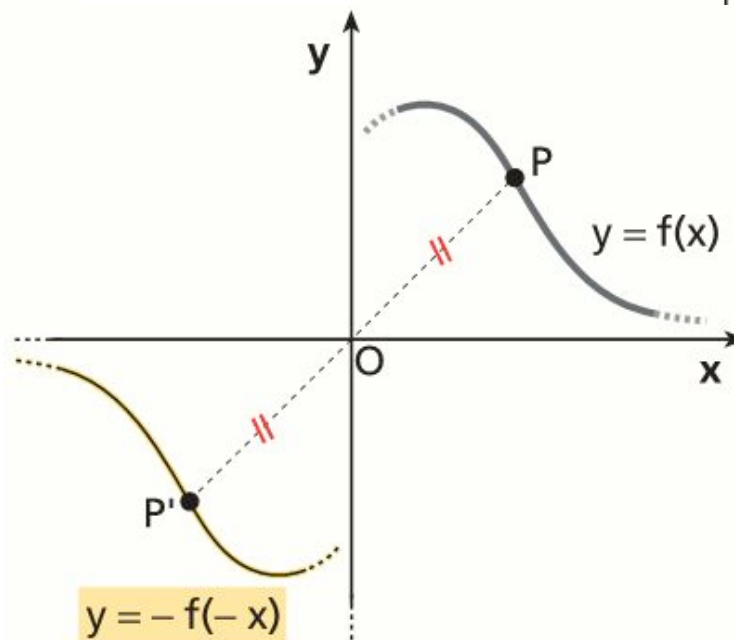
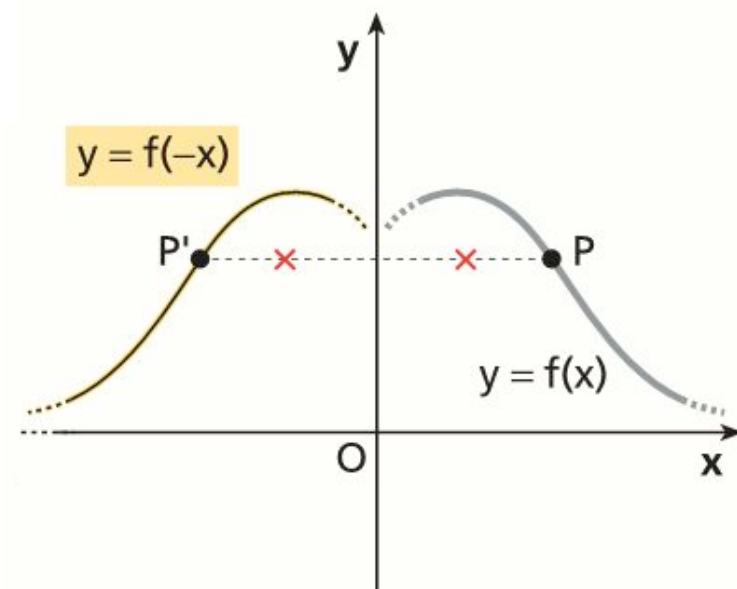
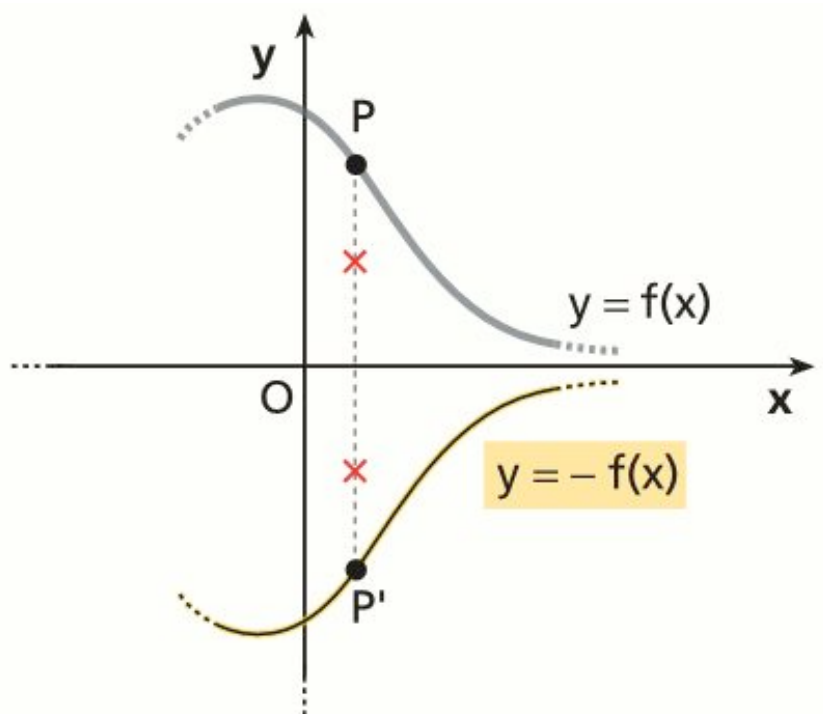
$$2y_C - 1 = 1 \rightarrow y_C = 1$$

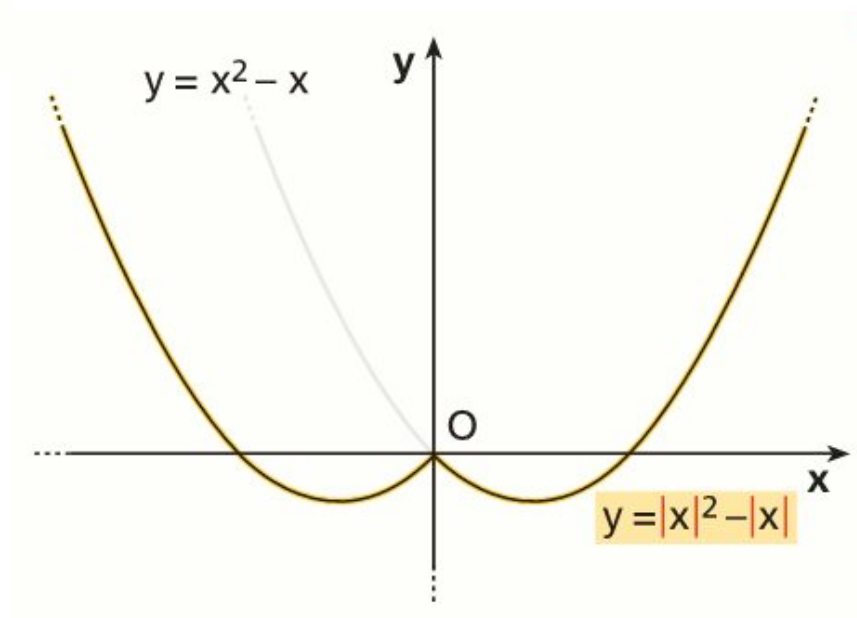
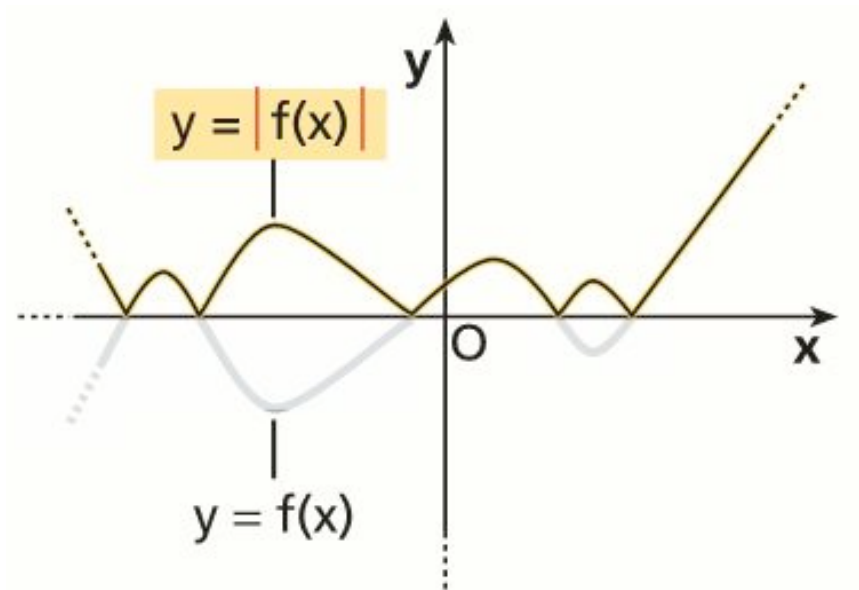
Sostituendo tali valori nel termine noto, otteniamo:

$$16 + 36 - 16 - 36 + 4 = 4$$

Concludiamo che la curva è simmetrica rispetto al punto $C(2;1)$.

Le simmetrie e il grafico delle funzioni

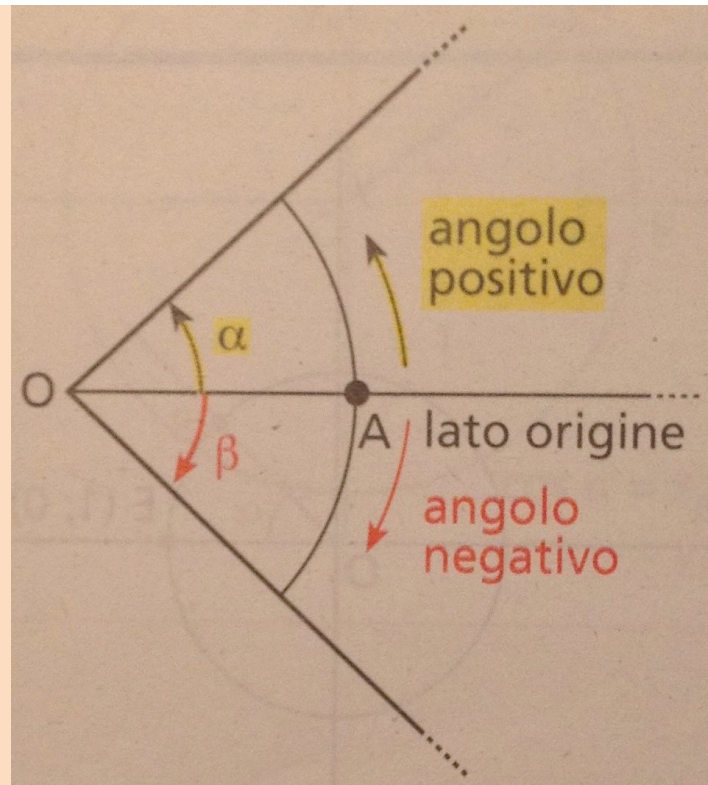




La definizione di angolo che ci serve per i nostri scopi è quella di *angolo orientato*.

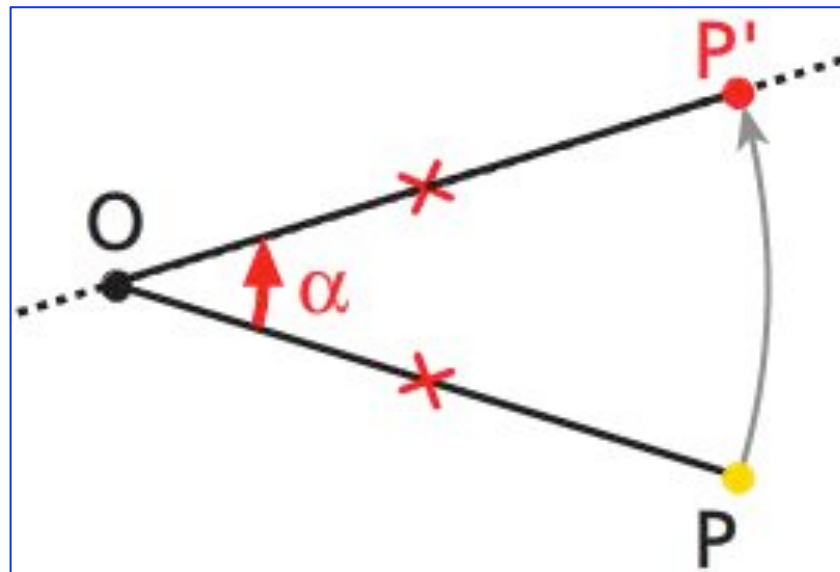
definizione

Un angolo si dice orientato quando è stato scelto uno dei due lati come lato origine e un senso di rotazione. Un angolo orientato si dice *positivo* quando è descritto mediante una rotazione in senso antiorario; si dice *negativo* quando la rotazione è in senso orario.



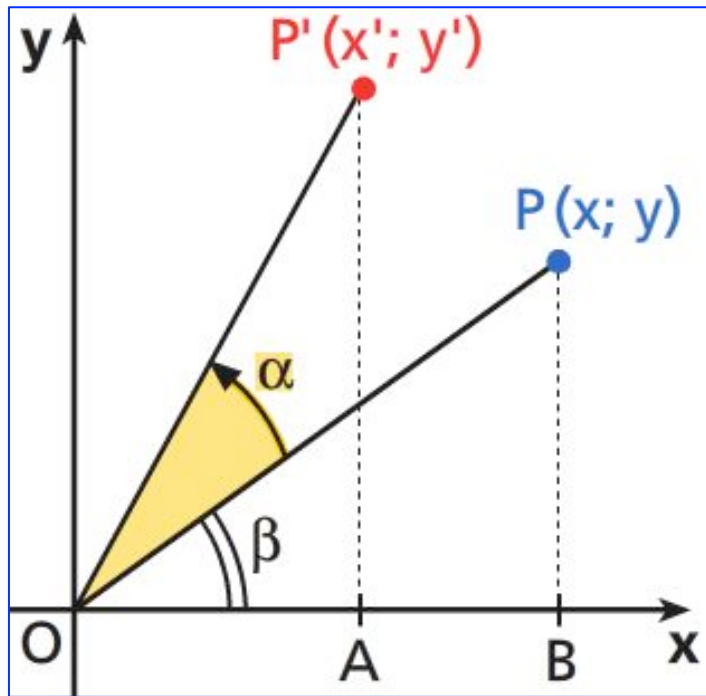
Fissati nel piano un punto O (centro di rotazione) e un angolo α , **la rotazione di angolo α** è la trasformazione geometrica r (isometria) che a ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P' tale che:

1. $OP=OP'$
2. L'angolo POP' è congruente ad α e ugualmente orientato.



Scriviamo le equazioni che descrivano la rotazione.

❑ Rotazione di centro l'origine degli assi



$$x = \overline{OB} = \overline{OP} \cos \beta \quad y = \overline{PB} = \overline{OP} \sin \beta$$

$$x' = \overline{OP'} \cos(\alpha + \beta) \xrightarrow[\text{addizione}]{\text{formule}}$$

$$x' = \overline{OP} \cos \alpha \cos \beta - \overline{OP} \sin \alpha \sin \beta = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

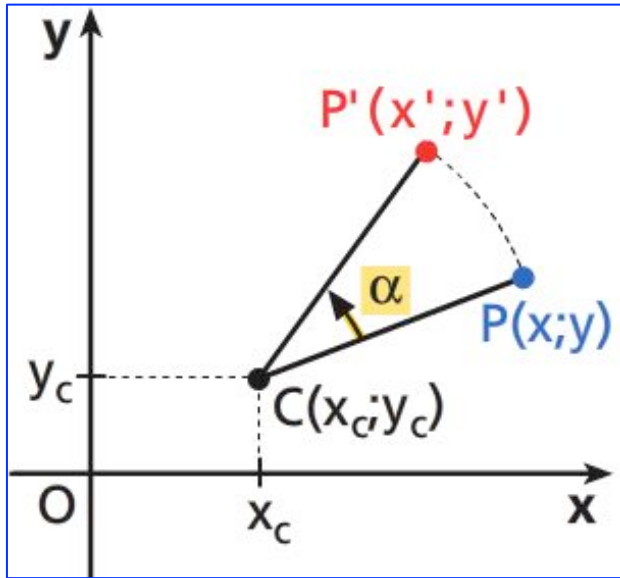
$$y' = \overline{OP'} \sin(\alpha + \beta) \xrightarrow[\text{addizione}]{\text{formule}}$$

$$y' = \overline{OP} \sin \alpha \cos \beta + \overline{OP} \cos \alpha \sin \beta = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

$$r_{0,\alpha} : \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

Equazioni della rotazione $r_{0,\alpha}$
di un angolo α e di centro 0

❑ Rotazione con centro C qualunque



Le equazioni di una rotazione di un angolo α intorno a un centro qualunque $C(x_C; y_C)$ sono il risultato della composizione di tre trasformazioni:

la traslazione di vettore $\mathbf{v}(-x_C; -y_C)$ che porti C nell'origine O;

✓ la rotazione di centro O e angolo α ;

✓ la traslazione di vettore $\mathbf{v}_1(x_C; y_C)$ che riporti C alla posizione iniziale

$$\begin{aligned} P(x; y) &\xrightarrow{t_v} \begin{cases} x - x_C \\ y - y_C \end{cases} \xrightarrow{r_{O, \alpha}} \begin{cases} (x - x_C) \cos \alpha - (y - y_C) \sin \alpha \\ (x - x_C) \sin \alpha + (y - y_C) \cos \alpha \end{cases} \xrightarrow{t_{v1}} \\ &\xrightarrow{t_{v1}} P(x'; y') : \begin{cases} x' = (x - x_C) \cos \alpha - (y - y_C) \sin \alpha + x_C \\ y' = (x - x_C) \sin \alpha + (y - y_C) \cos \alpha + y_C \end{cases} \end{aligned}$$

Equazioni della rotazione $r_{C,\alpha}$ di centro $C(x_C; y_C)$ e angolo α

$$r_{C,\alpha} \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha + p \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha + q \end{cases} \quad \text{dove:} \begin{cases} p = x_C - x_C \cos \alpha + y_C \sin \alpha \\ q = y_C - x_C \sin \alpha - y_C \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 > 0 \quad \text{affinità diretta}$$

❖ proprietà

- La trasformazione inversa di $r_{C,\alpha}$ è ancora una rotazione di centro C ma con angolo $-\alpha$: $r_{C,\alpha}^{-1} = r_{C,-\alpha}$
- La composizione di due rotazioni con lo stesso centro C ma angoli diversi α_1 e α_2 , è ancora una rotazione di centro C e angolo $\alpha_1 + \alpha_2$.

Determinare la retta corrispondente di $y=x$ in una rotazione di 30° intorno all'origine .

Le equazioni della rotazione di 30° intorno all'origine sono:

$$r_{O,30^\circ}: \begin{cases} x' = x \cos 30^\circ - y \sin 30^\circ \\ y' = x \sin 30^\circ + y \cos 30^\circ \end{cases}$$

Ricaviamo le equazioni della trasformazione inversa, che non è altro una rotazione di un angolo opposto:

$$r_{O,-30^\circ}^{-1}: \begin{cases} x = x' \cos(-30^\circ) - y' \sin(-30^\circ) \\ y = x' \sin(-30^\circ) + y' \cos(-30^\circ) \end{cases} \xrightarrow{\text{calcoli}} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} x' + \frac{1}{2} y' \\ y = -\frac{1}{2} x' + \frac{\sqrt{3}}{2} y' \end{cases}$$

Applichiamo le trasformazioni inverse alla retta $y=x$:

$$-\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'$$

Facciamo un po' di calcoli, togliamo gli apici e otteniamo la retta trasformata:

$$y = (2 + \sqrt{3})x$$

Il coefficiente angolare ottenuto indica che la retta trasformata forma un angolo di 75° con l'asse x :

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(2 + \sqrt{3}) \xrightarrow{\text{da cui}} \alpha = \operatorname{arctg}(2 + \sqrt{3}) =$$

- La composizione di due isometrie è ancora una isometria;
- Date le equazioni di una isometria:

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases} \quad \text{con } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

- Il determinante $\Delta=1$ se l'isometria è una traslazione, una simmetria centrale o una rotazione, il determinante;
- Il determinante $\Delta=-1$ se l'isometria è una simmetria assiale.

➤ Le condizioni affinché una affinità, con $\Delta \neq 0$, sia una isometria, sono:
$$\begin{cases} a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = 1 \\ ab + a'b' = 0 \end{cases}$$

- ✓ nella traslazione non ci sono punti uniti;
- ✓ nella simmetria assiale i punti uniti sono quelli dell'asse;
- ✓ nella simmetria centrale e nella rotazione il centro è l'unico punto unito

- ✧ nella traslazione le rette globalmente unite sono quelle parallele al vettore associato;
- ✧ nella simmetria assiale sono quelle perpendicolari all'asse;
- ✧ nella simmetria centrale sono quelle passanti per il centro;
- ✧ nella rotazione non ce ne sono.

Verificare che l'affinità, descritta dalle seguenti equazioni, è una isometria:

$$g : \begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = x - 3 \end{cases}$$

Studiare l'isometria e cercare i punti uniti e le rette unite.

L'affinità è una isometria perché soddisfa le seguenti condizioni:

Si tratta di una isometria indiretta in quanto:

$$\begin{cases} a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = 1 \\ ab + a'b' = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Cerchiamo i punti uniti:

$$\xrightarrow[\text{definizione punto unito}]{} \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \xrightarrow[\text{le equazioni della trasformazione diventano}]{} \text{Il luogo dei punti uniti è una retta, quindi l'isometria è una simmetria assiale di asse } y=x-3.$$
$$\begin{cases} x = y + 3 \\ y = x - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ y = x - 3 \end{cases} \Rightarrow y = x - 3$$

Verifichiamo che le uniche **rette globalmente unite** sono le **rette perpendicolari all'asse**:

$$g^{-1} : \begin{cases} x = y' + 3 \\ y = x' - 3 \end{cases} \xrightarrow[\text{trasformiamo la retta } y=mx+q]{} x' - 3 = m(y' + 3) + q$$
$$\xrightarrow[\text{da cui}]{} y = \frac{1}{m}x' - \frac{3m + q + 3}{m}$$

Per avere una retta unita, deve essere:

$$\begin{cases} \frac{1}{m} = m \\ -\frac{3m+q+3}{m} = q \end{cases} \xrightarrow{\text{risolviamo}} \begin{cases} m = 1 \\ q = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} m = -1 \\ q = q \rightarrow \forall q \end{cases}$$

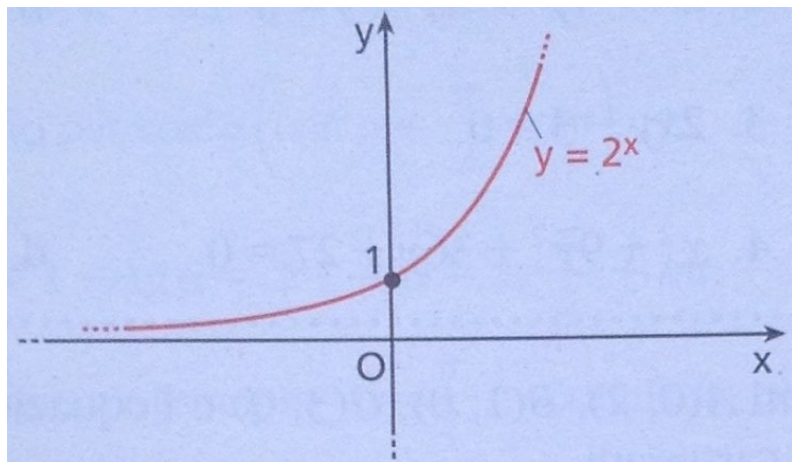
Conclusione:

$$y = x - 3 \quad \text{asse di simmetria}$$

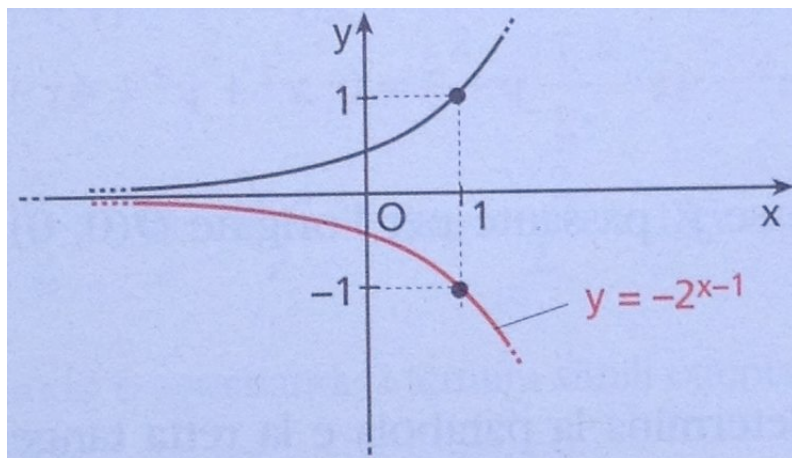
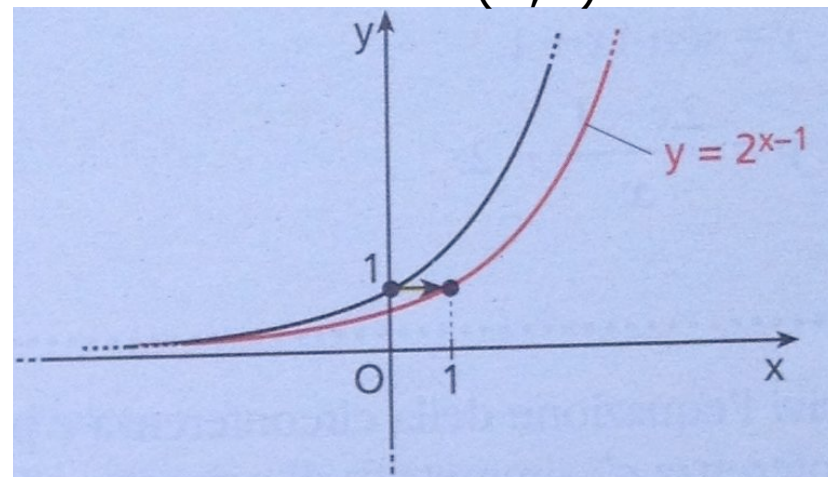
$$y = -x + q \quad \text{rette perpendicolari all'asse}$$

Disegnare il grafico della funzione $y = -2^{x-1} + 3$, a partire dal grafico di $y = 2^x$, applicando delle isometrie.

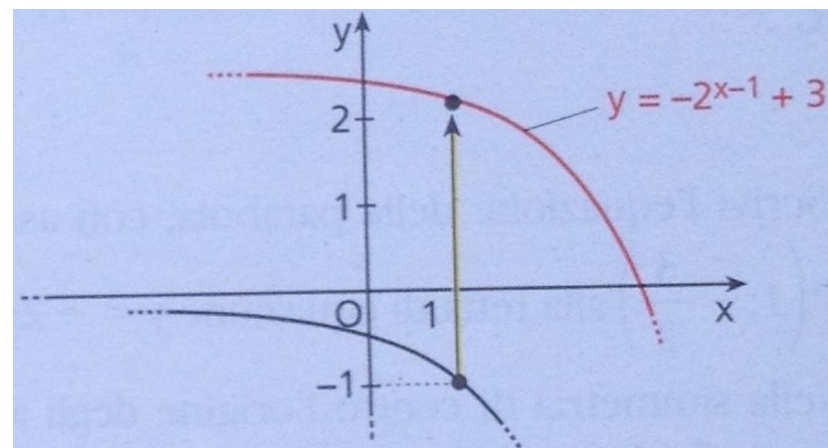
disegnare $y = 2^x$



applicare la traslazione di vettore $\mathbf{v}(1;0)$



applicare una simmetria assiale rispetto all'asse x

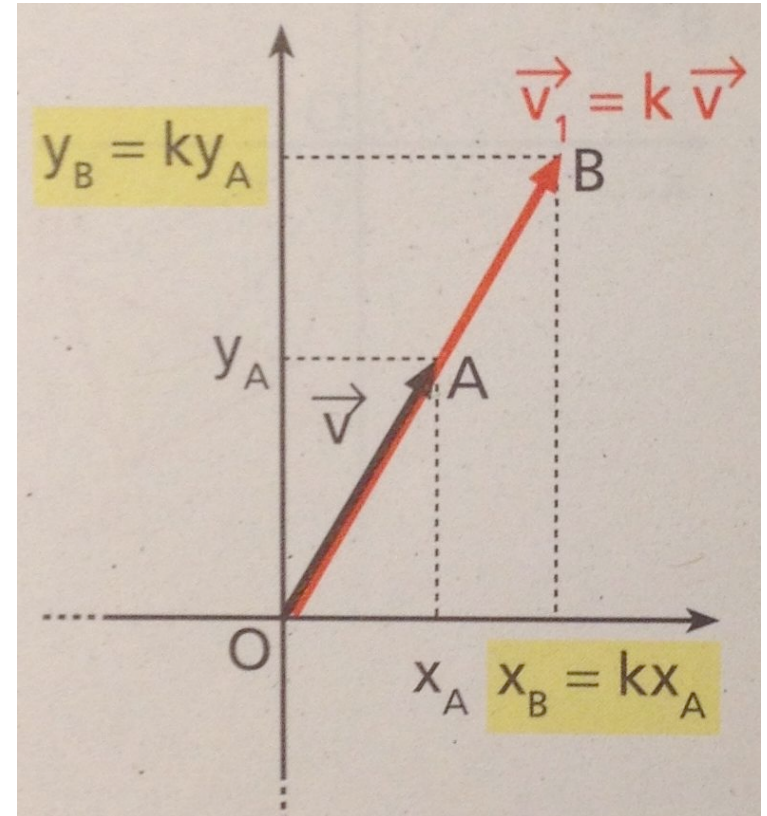


applicare la traslazione di vettore $\mathbf{v}_1(0;3)$

✓ Qualche richiamo sui vettori

Il prodotto di un numero k per un vettore $\mathbf{v}$ dà come risultato un vettore $\mathbf{v}_1$ che ha lo stesso punto di applicazione, direzione e verso del vettore $\mathbf{v}$ e modulo k volte maggiore:

$$\vec{v}_1 = k\vec{v} \xrightarrow{\text{ossia}} k\vec{v}(x_A; y_A) = \vec{v}_1(kx_A; ky_A)$$



❑ Omotetia con centro nell'origine degli assi

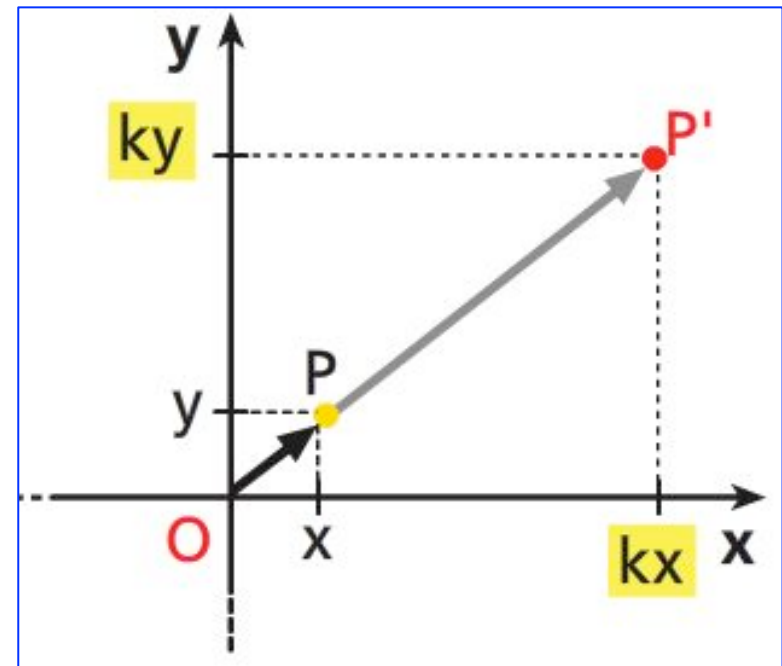
definizione

Dati un numero reale $k \neq 0$ (rapporto di omotetia) e un punto P del piano, **l'omotetia di rapporto k e centro O** è quella trasformazione che associa a P il punto P' (chiamato omotetico) tale che:

$$\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP} \xrightarrow{\text{ossia}} P(x; y) \mapsto P'(kx; ky)$$

Equazioni dell'omotetia $\omega_{0,k}$
di centro O e rapporto k

$$\omega_{0,k} : \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$



✓ OSSERVAZIONI

1. Se $k=1 \rightarrow$ omotetia=identità e tutti i punti del piano sono punti uniti della trasformazione.

$$\omega_{0,k} : \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \xrightarrow{k=1} \omega_{0,1} : \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow P(x; y) \mapsto P(x; y)$$

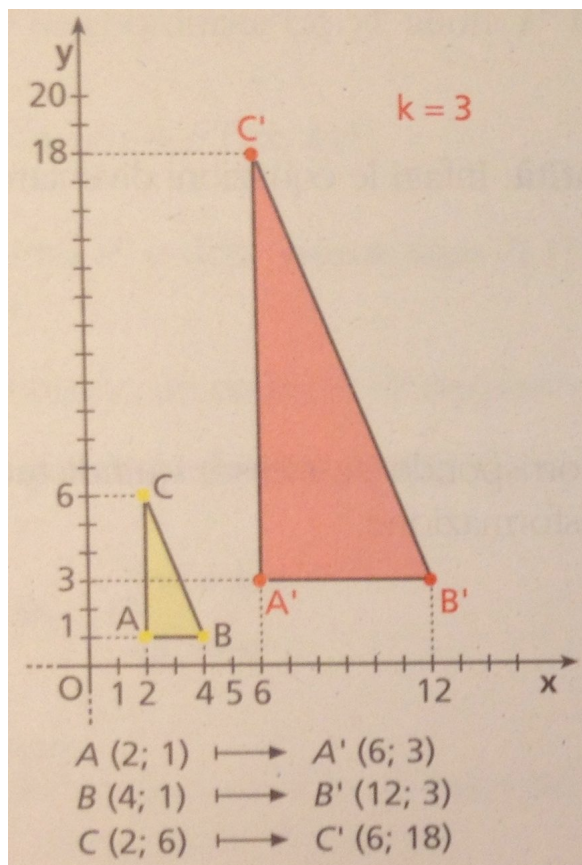
2. Se $k=-1 \rightarrow$ omotetia=simmetria di centro $O(0;0)$ e il centro è l'unico punto unito della trasformazione.

$$\omega_{0,k} : \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \xrightarrow{k=-1} \omega_{0,1} : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow P(x; y) \mapsto P'(-x; -y)$$

3. Se $k \neq 1$ ($k \neq 0$) $\rightarrow$ il centro $O(0;0)$ è l'unico punto unito dell'omotetia di rapporto k .

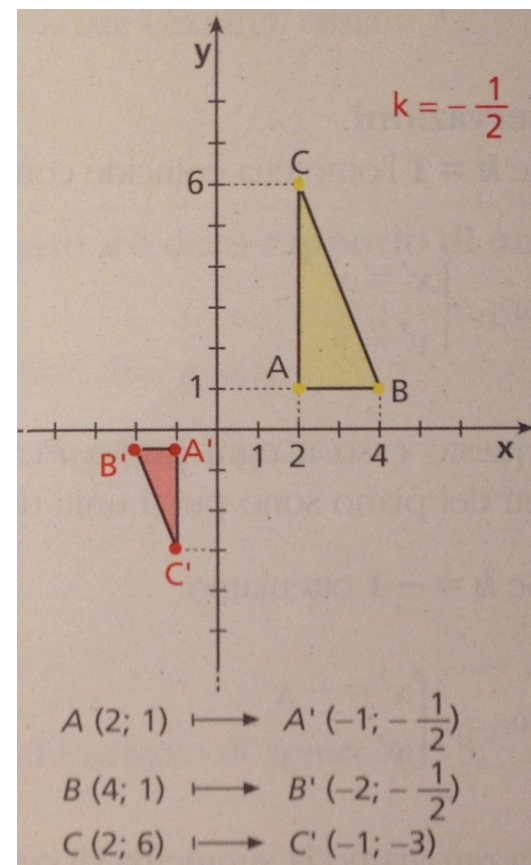
L'omotetia permette di ingrandire o ridurre una figura, lasciandone inalterata la forma:

- Se $|k| > 1$ l'omotetia ingrandisce la figura
- Se $|k| < 1$ l'omotetia riduce la figura



$k=3$, l'omotetia ingrandisce la figura

$K=-1/2$, l'omotetia riduce la figura

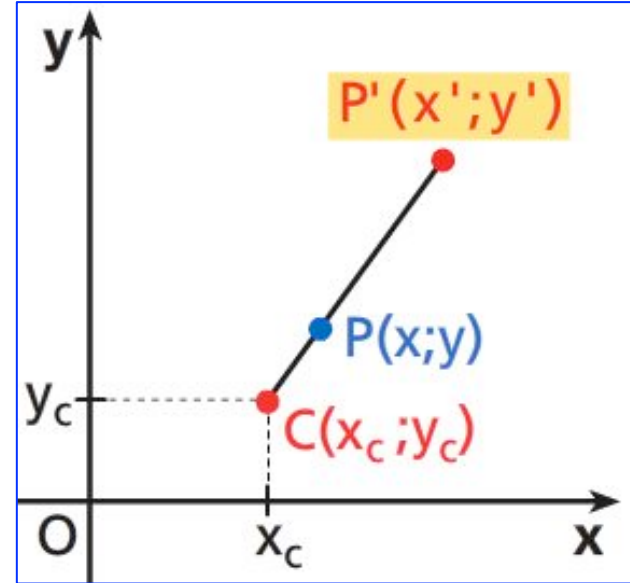


□ Omotetia con centro C qualunque

definizione

Dato un numero reale $k \neq 0$, l'omotetia di rapporto k e centro $C(x_c; y_c)$ è quella trasformazione che associa al punto P il punto P' tale che:

$$\overrightarrow{CP'} = k \cdot \overrightarrow{CP} \xrightarrow{\text{ossia}} P(x; y) \mapsto P'(x'; y')$$



Equazioni dell'omotetia $\omega_{C,k}$ con centro qualunque $C(x_c; y_c)$ e rapporto k

$$\omega_{C,k} : \begin{cases} x' = k(x - x_c) + x_c \\ y' = k(y - y_c) + y_c \end{cases} \xrightarrow[p=y_c(1-k)]{p=x_c(1-k)} \omega_{C,k} : \begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$$

□ proprietà dell'omotetia

Una omotetia:

- trasforma un segmento in un segmento proporzionale;
- conserva le ampiezze degli angoli;
- Trasforma una retta in una retta a essa parallela.

✧ la composizione di due omotetie con stesso centro C ,
è ancora un'omotetia di centro C e con rapporto
 $k=k_1k_2$;

✧ la composizione di due omotetie con centri C_1 e C_2 ,
origina:

a) una traslazione se $k_1k_2=1$

b) una omotetia se $k_1k_2 \neq 1$

ESEMPIO

Applichiamo l'omotetia con centro nell'origine e rapporto $k = 2$ al triangolo di vertici $A(-3; -2)$, $B(5; 0)$ e $C(1; 4)$ (figura 21).

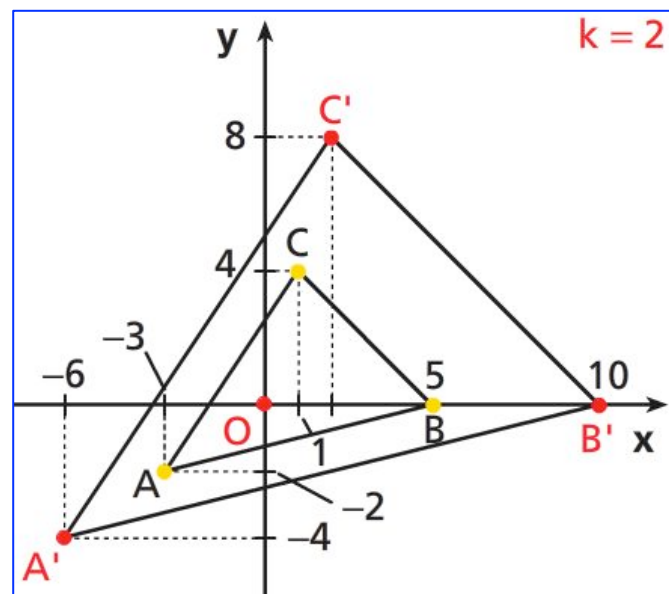
Le equazioni della trasformazione sono:

$$\omega_{O,2}: \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}$$

Per disegnare il triangolo omotetico $A'B'C'$, calcoliamo le coordinate dei vertici corrispondenti:

$$A(-3; -2) \mapsto A'(-6; -4); \quad B(5; 0) \mapsto B'(10; 0); \quad C(1; 4) \mapsto C'(2; 8).$$

► **Figura 21** Disegniamo il triangolo ABC . Puoi verificare che il triangolo omotetico $A'B'C'$ ha i lati doppi rispetto ai lati di ABC , perché il rapporto di omotetia è $k = 2$. Inoltre i lati corrispondenti sono paralleli.



Il rapporto fra i lati corrispondenti $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$, $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$, $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$ è uguale a 2, ossia al rapporto di omotetia. Per verificarlo basta calcolare le distanze fra i punti. In generale il rapporto fra lati corrispondenti è uguale al valore assoluto del rapporto di omotetia. È possibile anche verificare che i lati corrispondenti sono paralleli, cioè $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ e $AC \parallel A'C'$: basta determinare le equazioni delle rette passanti per due vertici.

Si definisce **similitudine** una particolare affinità che mantiene costante il rapporto k ($k > 0$ chiamato rapporto di similitudine) tra segmenti corrispondenti, ossia comunque si scelgano A e B , considerati i loro trasformati A' e B' si ha:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = k$$

similitudine diretta

$$\sigma_1 : \begin{cases} x' = mx - ny + c \\ y' = nx + my + c' \end{cases}$$

$$\text{con } \begin{vmatrix} m & -n \\ n & m \end{vmatrix} = m^2 + n^2 > 0$$

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = k = \sqrt{m^2 + n^2} \quad \forall (A, B)$$

equazioni della
similitudine

similitudine indiretta

$$\sigma_2 : \begin{cases} x' = mx + ny + c \\ y' = nx - my + c' \end{cases}$$

$$\text{con } \begin{vmatrix} m & n \\ n & -m \end{vmatrix} = -m^2 - n^2 < 0$$

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = k = \sqrt{m^2 + n^2} \quad \forall (A, B)$$

Verificare che le seguenti equazioni sono quelle di una similitudine e determinare il rapporto di similitudine:

$$\begin{cases} x' = -3x - 4y + 1 \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$$

Calcoliamo il determinante della matrice associata alla trasformazione:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 25$$

Essendo verificate le seguenti proprietà:

si tratta di una similitudine con rapporto di similitudine:

$$\begin{cases} a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = 25 \\ ab + a'b' = 0 \end{cases}$$

$$k = \sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

Studiare la trasformazione di equazioni:

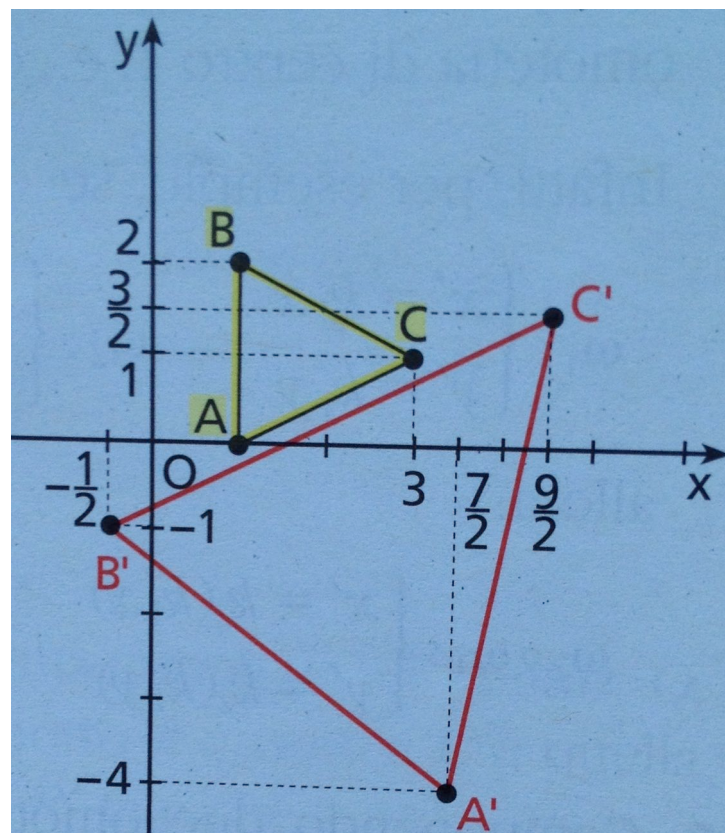
$$\begin{cases} x' = \frac{3}{2}x - 2y + 2 \\ y' = 2x + \frac{3}{2}y - 6 \end{cases}$$

disegnando il triangolo ABC di vertici A(1;0), B(1;2), C(3;1) e il suo trasformato A'B'C'.

Sostituendo le coordinate di A,B,C, nelle equazioni ricaviamo quelle di A',B',C':

$$A'\left(\frac{7}{2}; -4\right) \quad B' = \left(-\frac{1}{2}; -1\right) \quad C'\left(\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

Disegniamo i triangoli:



Determiniamo le misure dei lati (distanza tra due punti):

$$\overline{AB} = 2 \quad \overline{AC} = \sqrt{5} \quad \overline{BC} = \sqrt{5}$$

$$\overline{A'B'} = 5 \quad \overline{A'C'} = \frac{5}{2}\sqrt{5} \quad \overline{B'C'} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$$

Osserviamo che:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{5}{2}$$

$$k = \frac{5}{2} \text{ rapporto di similitudine}$$

quindi i lati sono in proporzione e i triangoli simili.

✓ **OSSERVAZIONI**

1. Tutte le isometrie sono similitudini di rapporto $k=1$. Le traslazioni e le rotazioni sono similitudini dirette; la simmetria assiale è una similitudine indiretta.
2. Le omotetie sono casi particolari di similitudini ($m=k$; $n=0$);
3. Ogni similitudine conserva il rapporto fra le lunghezze; conserva l'ampiezza degli angoli (trasforma un angolo in uno congruente); trasforma rette perpendicolari in rette perpendicolari e rette parallele in rette parallele; trasforma circonferenze in circonferenze;
4. Se F' è la figura trasformata di F , allora:

$$\text{perimetro } (F') = k \cdot \text{perimetro } (F)$$

$$\text{area } (F') = k^2 \cdot \text{area } (F)$$

5. La composizione di una omotetia e di una isometria è sempre una similitudine;
6. La composizione di due similitudini, di rapporti k_1 e k_2 , è ancora una similitudine;
7. Ogni omotetia è una similitudine;
8. Ogni isometria è una similitudine.

teorema

Una affinità descritta dalle equazioni:

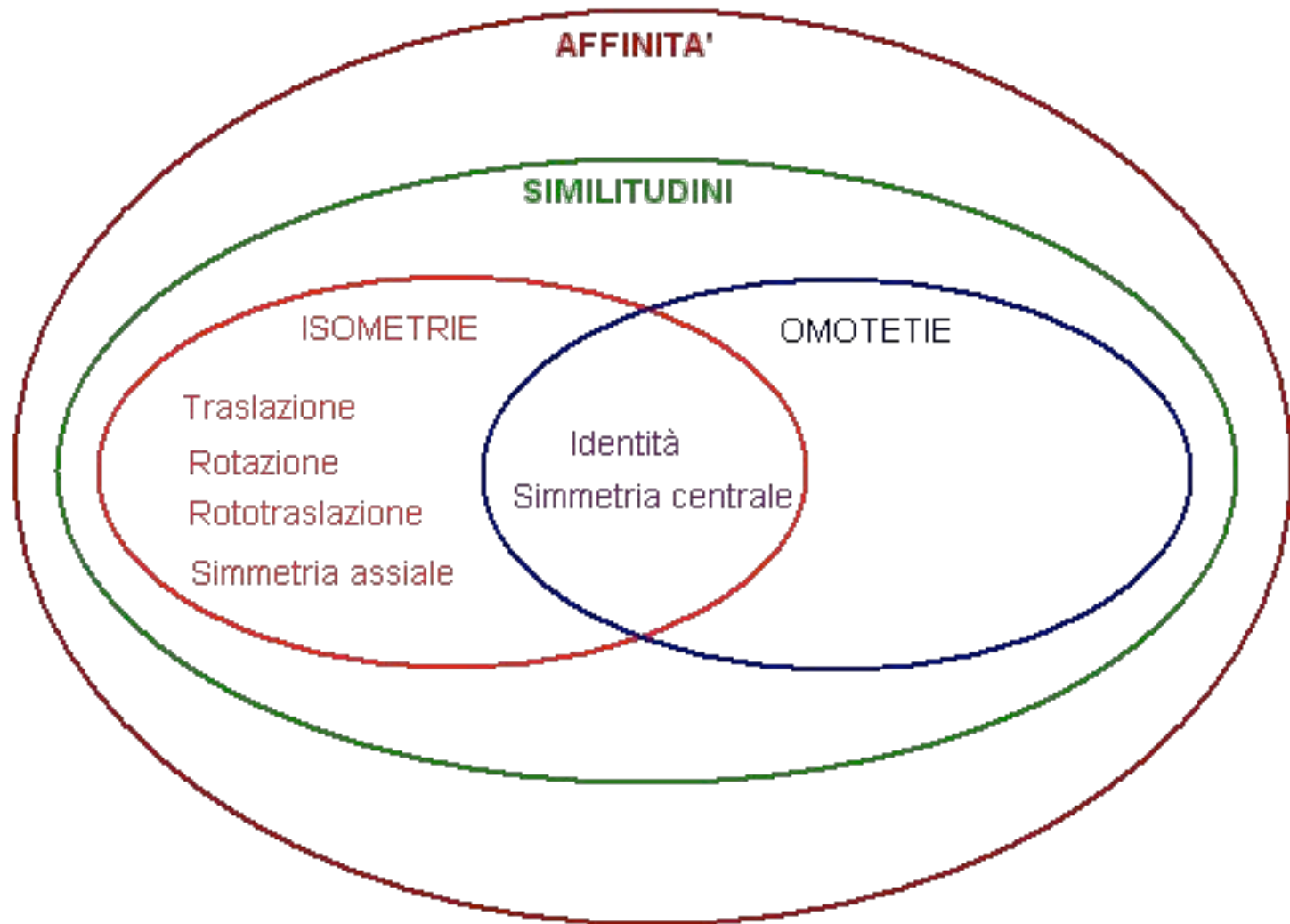
$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$$

è una similitudine se sono verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 \\ ab + a'b' = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad k = \sqrt{a^2 + a'^2} = \sqrt{b^2 + b'^2}$$

INSIEME DELLE AFFINITA'

Vale il seguente schema



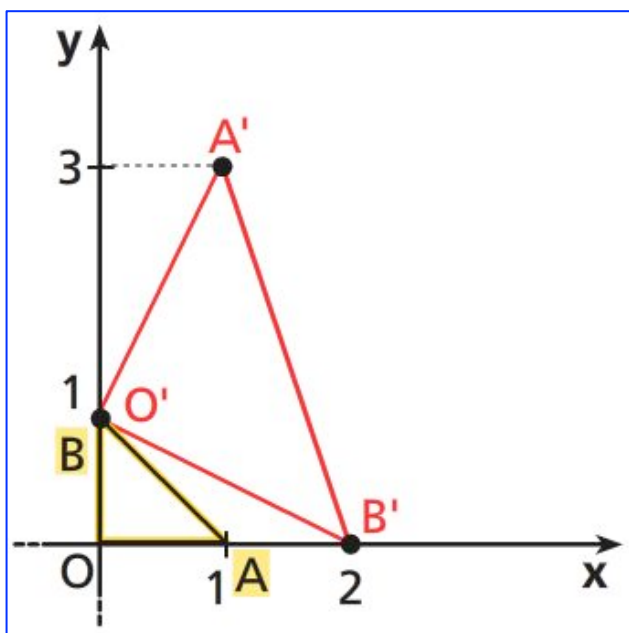
ESERCIZI

Data la similitudine di equazione:
verifichiamo alcune proprietà.

$$\sigma : \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x - y + 1 \end{cases}$$

1° proprietà - Se F' è la figura trasformata di F , allora:
perimetro (F') = $k \cdot$ perimetro (F) area (F') = $k^2 \cdot$ area (F)

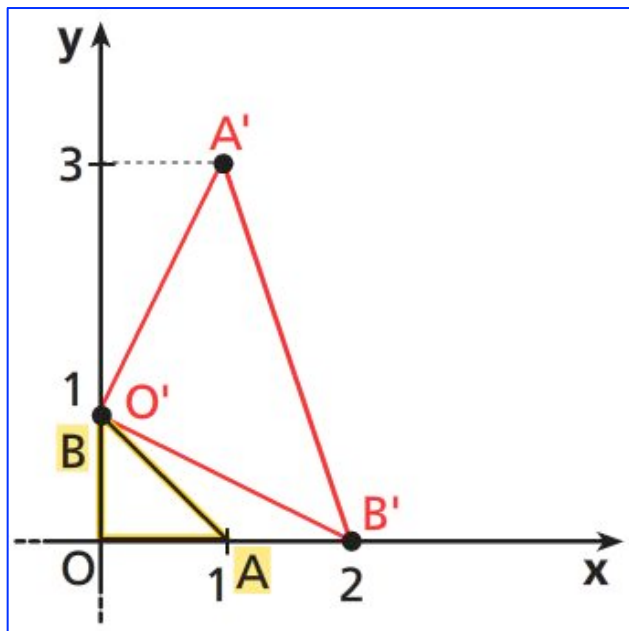
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \quad k = \sqrt{|\Delta|} = \sqrt{5} \quad \text{Si tratta di una similitudine indiretta.}$$



Osserviamo la figura. Il perimetro e l'area del triangolo OAB , valgono:

$$P = OA + OB + AB = 1 + 1 + \sqrt{1+1} = 2 + \sqrt{2}$$

$$A = \frac{OA \cdot OB}{2} = \frac{1}{2}$$



Trasformiamo il triangolo OAB utilizzando le equazioni della similitudine:

$$O(0;0) \mapsto O'(0,1)$$

$$A(1;0) \mapsto A'(1,3)$$

$$B(0;1) \mapsto B'(2,0)$$

Il perimetro e l'area del triangolo O'A'B' valgono:

$$P' = O'A' + O'B' + A'B' = \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{10} = 2\sqrt{5} + \sqrt{10} \quad A' = \frac{O'B' \cdot O'A'}{2} = \frac{5}{2}$$

Quindi:

$$P' = k \cdot P = \sqrt{5} \cdot (2 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{5} + \sqrt{10}$$

$$A' = k^2 \cdot A = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

2° proprietà - La similitudine trasforma circonferenze in circonferenze.

Cerchiamo la trasformata della circonferenza di equazione:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ricaviamo le equazioni inverse da quelle di partenza:

$$\sigma : \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x - y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = x' \\ 2x - y = y' - 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{metodo Cramer}} \sigma^{-1} : \begin{cases} x = \frac{x' + 2y' - 2}{5} \\ y = \frac{2x' - y' + 1}{5} \end{cases}$$

E sostituiamole nell'equazione della circonferenza:

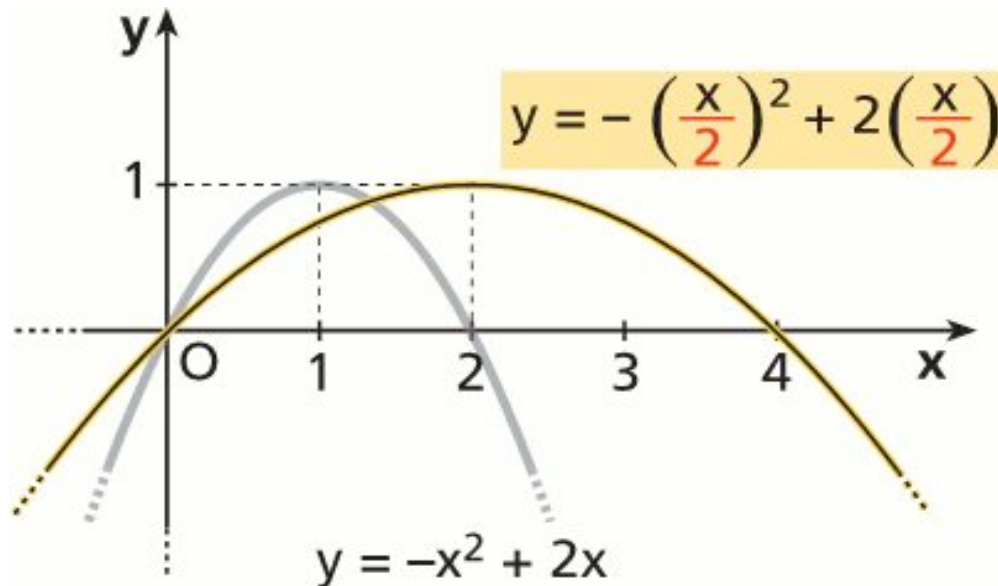
$$\left(\frac{x' + 2y' - 2}{5} \right)^2 + \left(\frac{2x' - y' + 1}{5} \right)^2 = r^2 \xrightarrow{\text{calcoli algebrici}} x^2 + y^2 - 2y + 1 - 5r^2 = 0$$

La trasformata è dunque una circonferenza.

Le dilatazioni sono particolari affinità descritte dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = hx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$$

con i rapporti di trasformazione $(h, k) \neq 0$

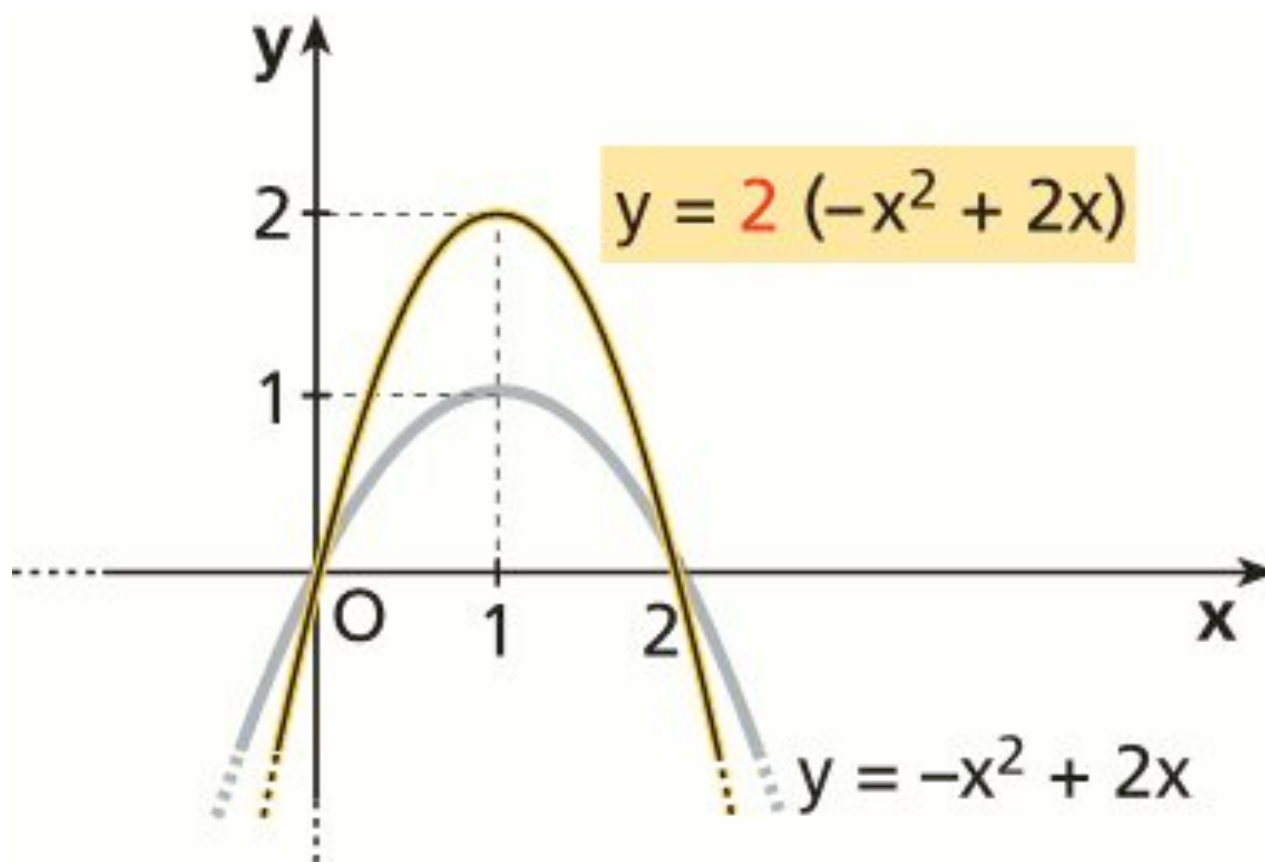


ESEMPIO

$$h = 1 \quad k = 2$$

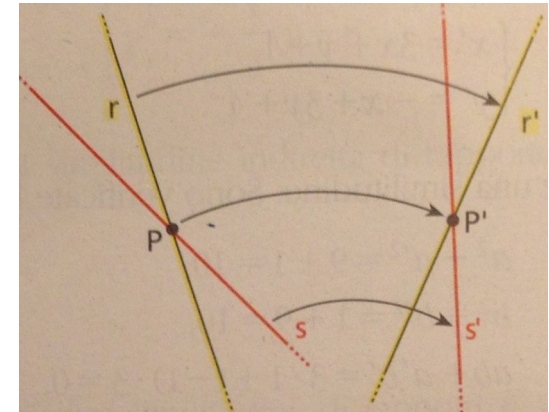
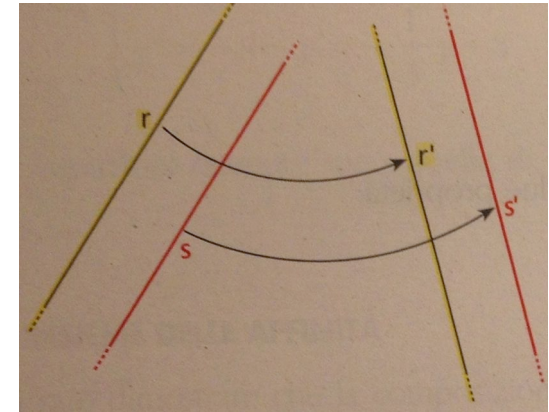
Ricavare il grafico della funzione f' , corrispondente della funzione $y=f(x)$, mediante la dilatazione:

$$y = hf\left(\frac{x}{k}\right) \quad \text{con } h = 1; k = 2$$



RIASSUNTO DELLE PROPRIETA' DELLE AFFINITA'

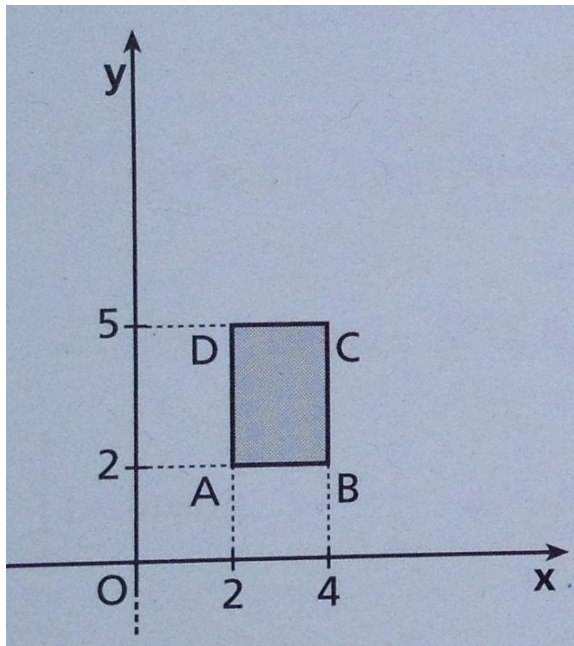
- **Allineamento**: tre o più punti allineati si trasformano in tre o più punti allineati; quindi le rette si trasformano in rette e segmenti in segmenti.
- **Parallelismo**: rette parallele sono trasformate in rette parallele; quindi i parallelogrammi vengono trasformati in parallelogrammi.
- **Incidenza**: se due rette si incontrano nel punto P , le rette loro immagini si incontrano in P' , immagine di P .
- **Coniche**: un'ellisse è trasformata in un'ellisse, una parabola in una parabola, un'iperbole in un'iperbole.



Data l'affinità descritta dalle seguenti equazioni, determinare la figura corrispondente al rettangolo di vertici $A(2;2)$, $B(4;2)$, $C(4;5)$, $D(2;5)$:

$$t: \begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

Disegniamo il rettangolo ABCD:

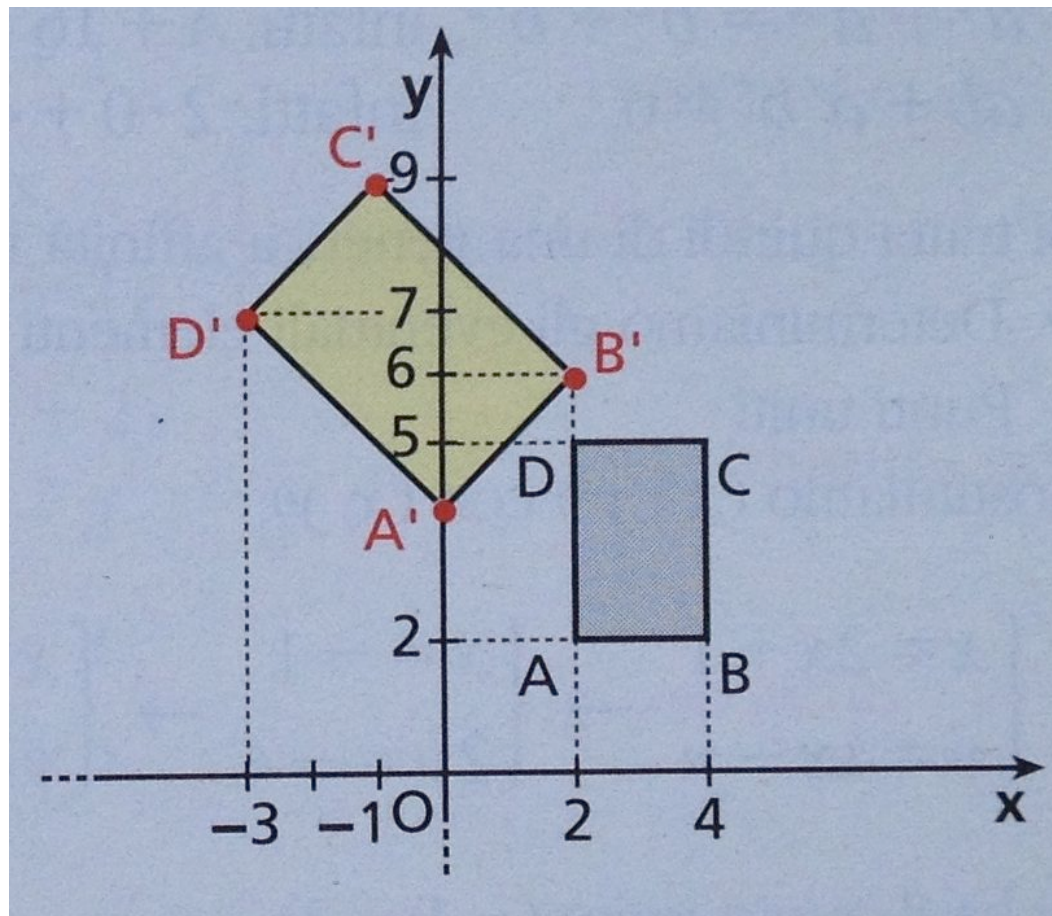


Poiché un'affinità a segmenti fa corrispondere segmenti, per determinare il rettangolo corrispondente nella trasformazione è sufficiente determinare le immagini dei quattro vertici, sostituendo alle coordinate dei vertici $(x;y)$ le equazioni della trasformazione:

$$A(2;2) \mapsto A'(0;4) \quad B(4;2) \mapsto B'(2;6)$$

$$C(4;5) \mapsto C'(-1;9) \quad D(2;5) \mapsto D'(-3;7)$$

La figura del rettangolo $A'B'C'D'$, trasformato del rettangolo $ABCD$, è la seguente:



Studiare la trasformazione geometrica descritta dalle seguenti equazioni, e determinare gli eventuali elementi uniti:

$$t : \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 4x - y \end{cases}$$

1. Tipo di trasformazione

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 \xrightarrow{\Delta \neq 0} \Delta < 0 \quad \text{affinità indiretta}$$

$$\Delta \neq \pm 1 \quad \text{Non è una isometria}$$

$$\begin{cases} a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 \Rightarrow 4 + 16 \neq 0 + 1 \\ ab + a'b' = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) \neq 0 \end{cases} \quad \text{Non è una similitudine}$$

2. Elementi uniti

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2x + 1 \\ y = 4x - y \end{cases} \xrightarrow{\text{da cui}} \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow P(-1; -2) \quad \text{punto unito}$$

Trasformiamo la retta generica $y=mx+q$ usando le equazioni della trasformazione inversa:

$$t : \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 4x - y \end{cases} \Rightarrow t^{-1} : \begin{cases} x = \frac{x' - 1}{2} \\ y = 2x' - y' - 2 \end{cases}$$

$$y = mx + q \Rightarrow 2x' - y' - 2 = m \left(\frac{x' - 1}{2} \right) + q \xrightarrow{\text{togliamo gli apici}} y = \left(-\frac{m}{2} + 2 \right) - 2 + \frac{m}{2} + q$$

Per avere rette unite si deve verificare che:

$$\begin{cases} -\frac{m}{2} + 2 = m \\ -2 + \frac{m}{2} - q = q \end{cases} \xrightarrow{\text{da cui}} \begin{cases} m = \frac{4}{3} \\ q = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \quad \text{retta unita}$$

Ci sono altre rette unite? Trasformiamo la retta generica $x=h$ (non è compresa in quelle del tipo $y=mx+q$):

$$x = h \Rightarrow \frac{x' - 1}{2} = h \xrightarrow{\text{togliamo gli apici}} x = 2h + 1$$

La retta $x=2h+1$ è unita a quella di equazione $x=h$ se:

$$2h + 1 = h \Rightarrow h = -1 \Rightarrow x = -1 \quad \text{retta unita}$$

Matematica e dintorni

La musica è un esercizio occulto di aritmetica dello spirito, ignaro del proprio numerare.

Leibnitz (filosofo e matematico)

La musica è una scienza che deve avere regole certe: queste devono essere astratte da un principio evidente, che non può essere conosciuto senza l'aiuto della matematica.

Rameau (musicista)

La definizione di Leibnitz rappresenta lo spirito di un'epoca della storia europea (tra il XVII e XVIII secolo), in cui musica e matematica vissero un periodo di grande fervore.

La musica di **Bach** (1685-1750) è un esempio di **matematica musicale**. Le opere Bachiane (Variazioni Goldberg o L'arte della fuga) utilizzano in maniera sistematica trasformazioni geometriche che invertono, ribaltano e dilatano temi musicali.

L'opera di Bach rappresenta il vertice di una lunga tradizione musicale (**ars canonica**) che esprime uno degli esempi più splendidi del profondo connubio tra le forme musicali e strutture matematiche.

Il legame tra musica e matematica, anche nel suo aspetto compositivo, ha continuato a interessare e affascinare i musicisti, fino a i giorni nostri. Basti citare **Xenakis** (Musica formalizzata, 1971), **Boulez** e **Glass** (laureati in matematica e da qui hanno tratto ispirazione per la loro arte).

➤ GEOMETRIE MUSICALI

Attraverso il linguaggio della geometria, è possibile descrivere e apprezzare le cosiddette simmetrie musicali:

- Da un tema si possono costruire le varie voci traslandole sull'asse dei tempi, così da farle sovrapporre al tema con un certo ritardo (es: canone di "Fra Martino").
- Una traslazione sull'asse verticale, cambia le note del tema dato e quindi la tonalità.
- Invertendo il segno alla variabile dipendente o a quella indipendente, si esegue una riflessione.
- Uno stiramento, è una variazione di unità di misura sull'asse orizzontale e verticale.

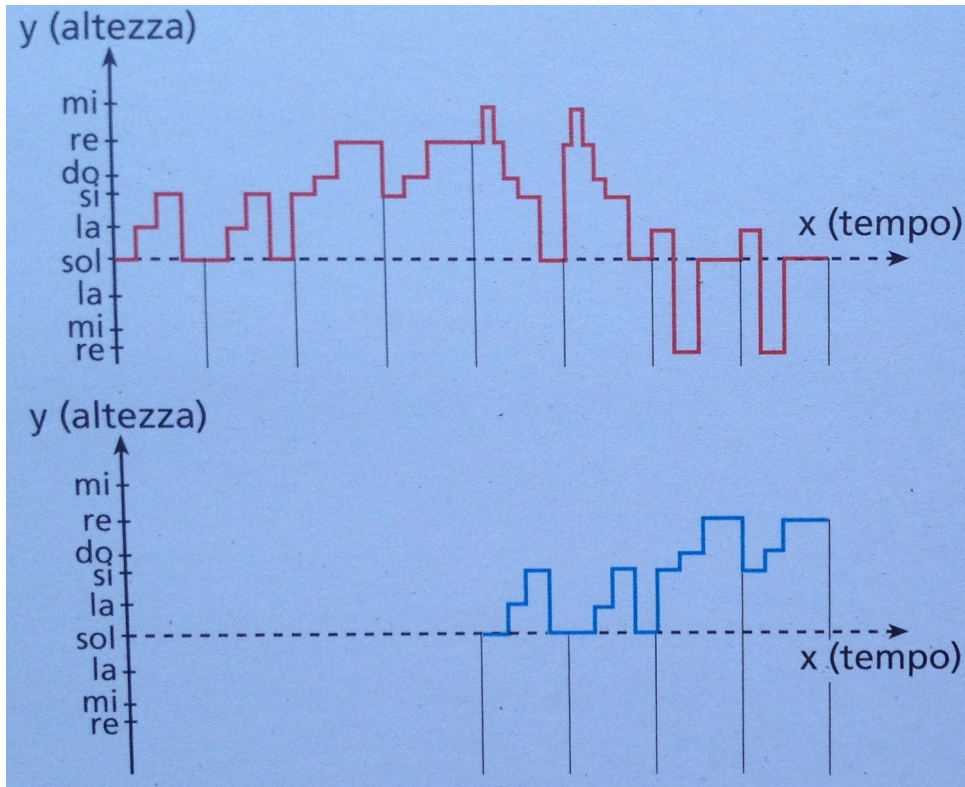
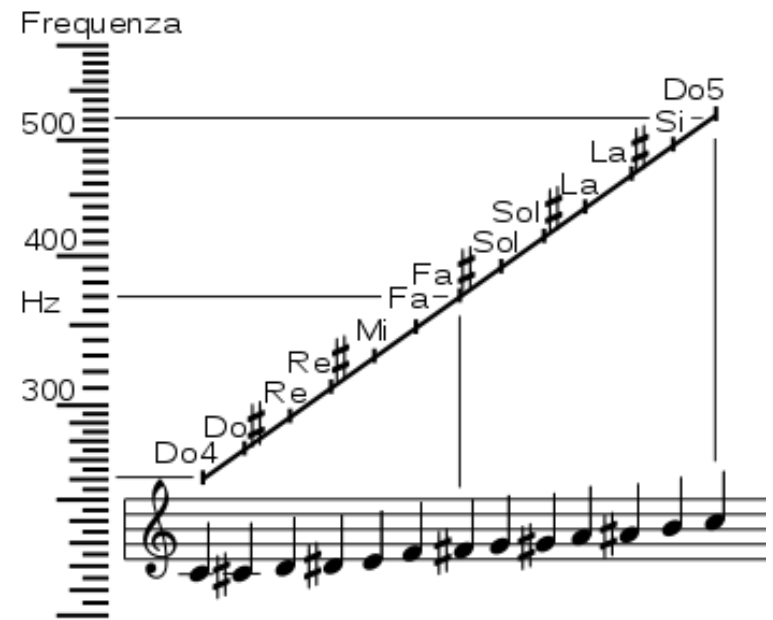
Consapevoli dello stretto legame esistente tra musica e matematica, vediamo qualche esempio, rappresentando questo legame come una qualunque funzione matematica.

esempio

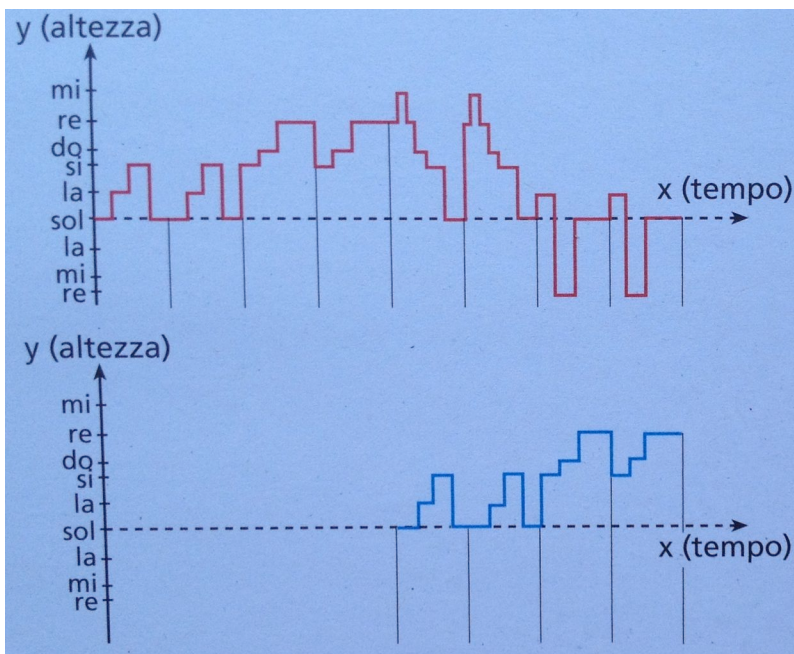
Bach e le trasformazioni geometriche.

Il **canone** è una composizione musicale imitativa in cui una prima voce (detta antecedente) che esegue un tema, viene imitata da una seconda voce (detta conseguente) che entra, cioè inizia, a un certo punto dello svolgimento del tema dell'antecedente. Il tutto, ovviamente, rispettando le regole dell'armonia. Le voci che entrano in successione possono essere più di una, per cui si parla di canone a due, tre, quattro,..., voci.

È possibile rappresentare una qualunque linea melodica ponendo sull'asse delle ordinate i valori relativi alle altezze sonore e su quello delle ascisse la dimensione temporale.



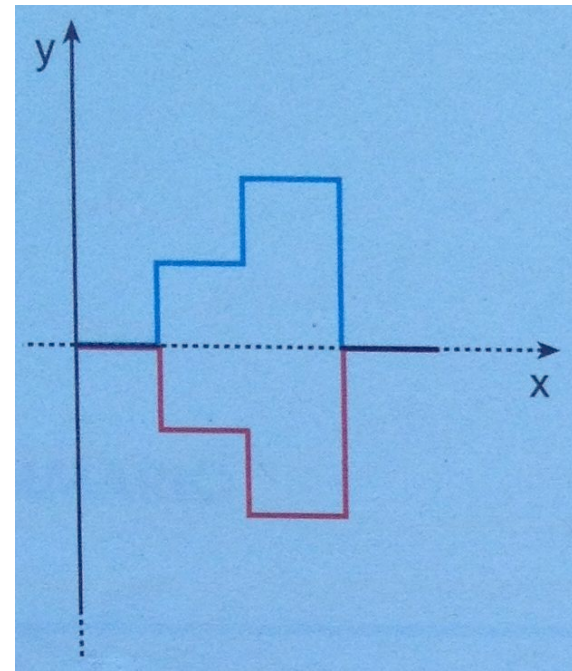
In questo modo si può tradurre il rigo musicale di una melodia nel grafico di una funzione a gradini.



Fra Martino è un esempio di canone diretto a due voci: la voce conseguente, copia esatta del tema, entra a un certo punto dell'esposizione del tema stesso da parte della prima voce. Ossia: il sol della seconda voce armonizza con il re della prima voce, il la della seconda voce con il mi della prima voce, e così via.

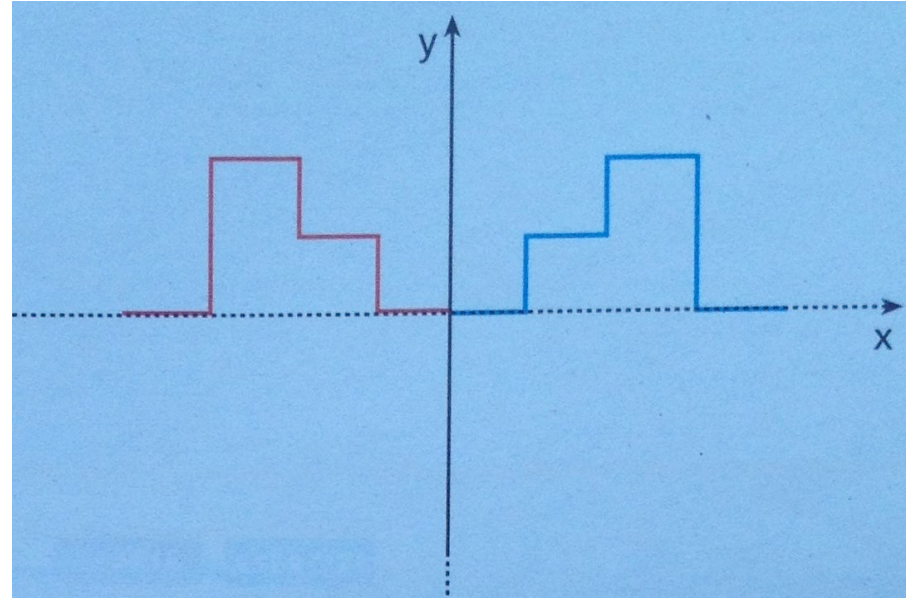
Usando il linguaggio delle trasformazioni geometriche, diremo che: per ottenere la seconda voce (conseguente), la **traslazione** nel tempo di un tema, cioè la sua ripetizione a partire da un istante T , corrisponde a una traslazione lungo l'asse x di vettore $\mathbf{v}(T;0)$ del grafico del tema. L'istante T deve essere scelto in modo che il tema risulti armonico con il traslato di se stesso.

Se utilizziamo una **simmetria rispetto all'asse x**, otteniamo una copia del tema in cui ogni intervallo ascendente viene mutato in un intervallo discendente. Combinando questa inversione con la **traslazione temporale** del tema si ha il **canone inverso**.



Se eseguiamo la stessa melodia a ritroso, partendo cioè dall'ultima nota per arrivare alla prima, il risultato sarebbe invariato (canone inverso).

Se utilizziamo una **simmetria rispetto all'asse y** , si ha un'inversione temporale del tema. Si parla di **canone cancrizzante**, poiché il tema, come il gambero (in latino cancer), nella voce conseguente procede "a ritroso" nel tempo.



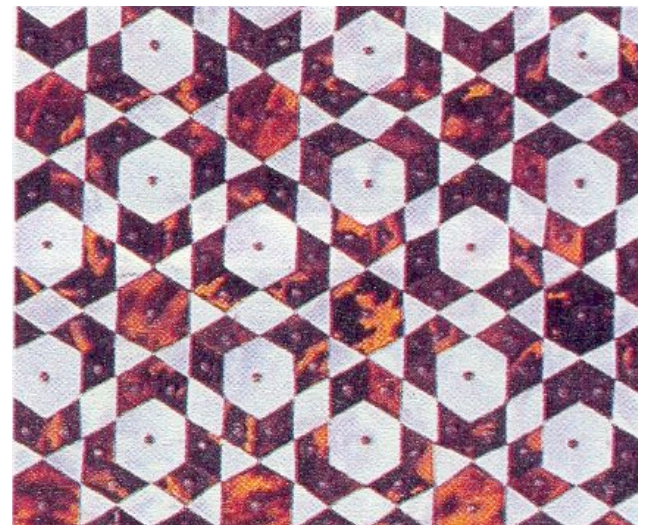
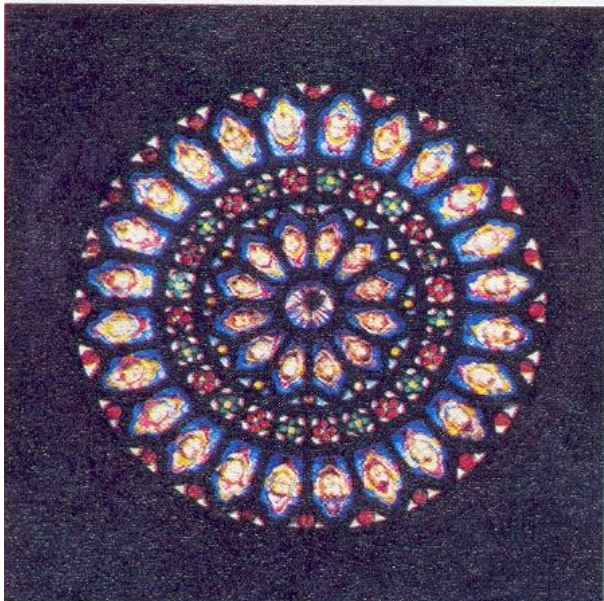
Ci sono anche trasformazioni non isometriche: se il tema conseguente viene eseguito a una velocità diversa rispetto al tema antecedente, è come se fosse applicata al tema una **contrazione o dilatazione lungo l'asse x** (**canone per diminuzione o per aumentazione**).

"La matematica non è soltanto uno dei ricorsi necessari per la conoscenza della realtà circostante, ma anche, nei suoi elementi fondamentali, una scienza delle proporzioni, del comportamento da oggetto ad oggetto, da gruppo a gruppo, da movimento a movimento. E poiché questa scienza ha in sé questi elementi fondamentali e li mette in relazione significativa, è naturale che simili fatti possano essere rappresentati, trasformati in immagini"

(Max Bill - artista)

Nell'arte, sin dall'antichità, le trasformazioni isometriche del piano sono state usate per creare fregi ornamentali, pavimentazioni, rosoni, per decorare soffitti e pareti, realizzare statue e costruire monumenti.

La presenza di simmetrie in un oggetto o in una immagine crea in genere sensazioni di equilibrio, armonia ed ordine.



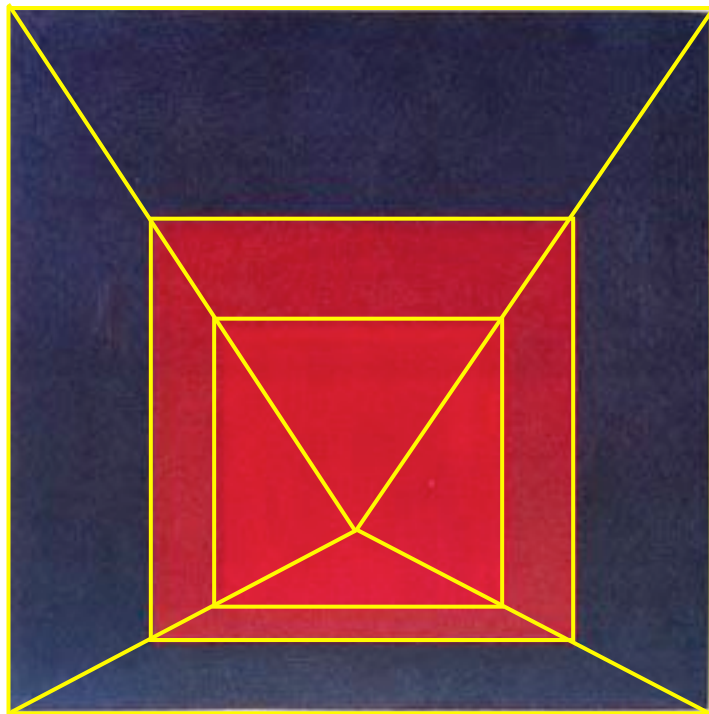
Decorazioni islamiche *Alhambra (Granada)*



Questi disegni geometrici sono rivelatori di concezioni religiose. Solo Dio è infinito e perfetto, per cui creando parti finite di disegni, che sono infiniti, è possibile afferrare solo un frammento del divino.



Il carattere parziale del disegno serviva a sottolineare la finitezza dell'umanità a fronte dell'infinità di Dio. L'arte islamica indirizzava la mente verso l'infinito creando moduli regolari che potevano essere ripetuti senza limite.

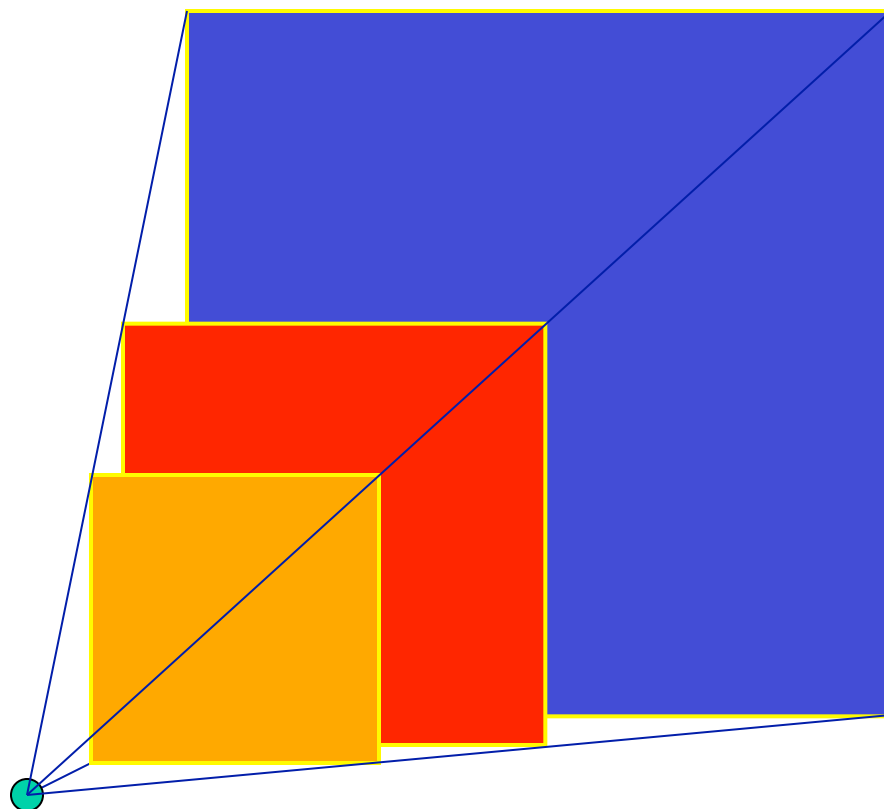
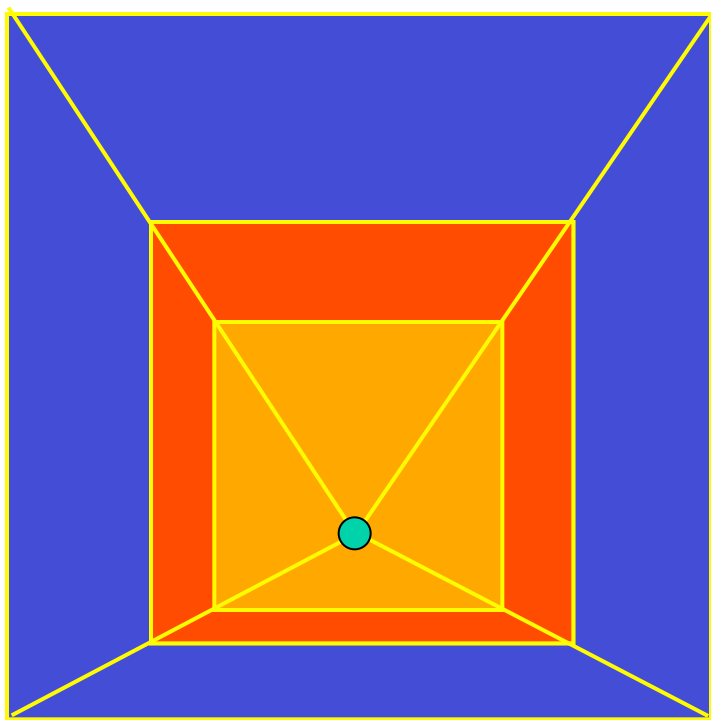


Josef Albers
*Homage to the
Square Series:
Assertive*

1958, New York,
Sidney Janis
Gallery

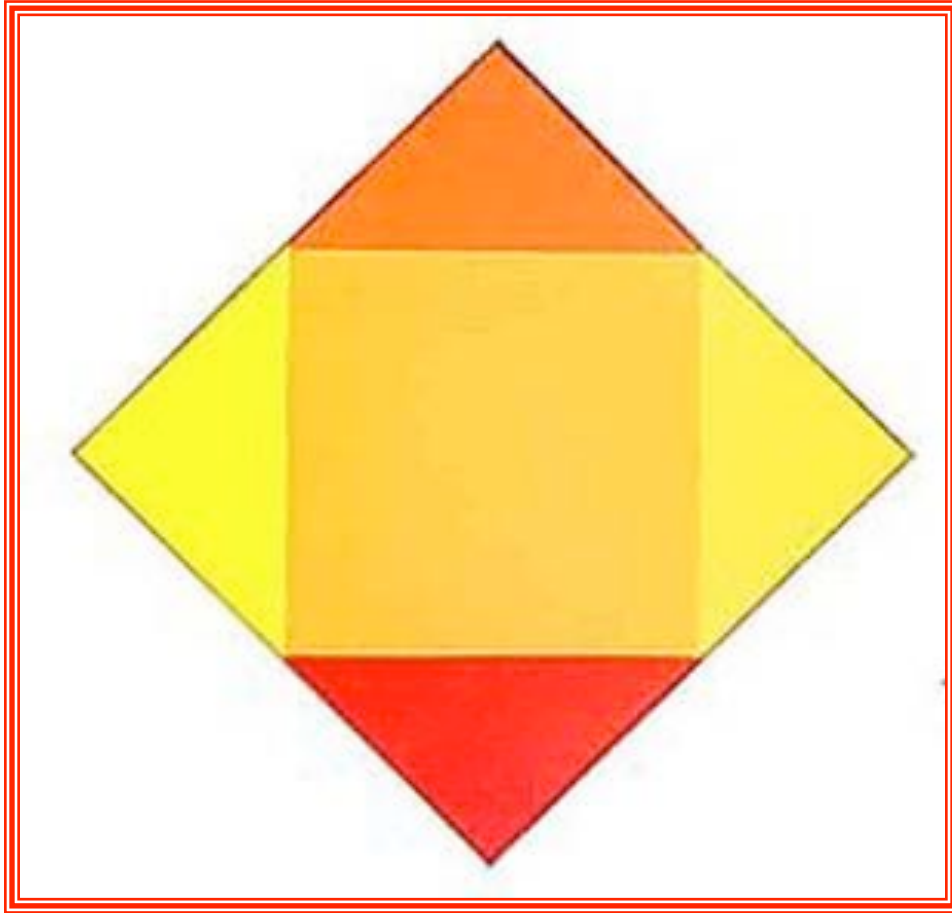
La disposizione dei quadrati rispetta una precisa
costruzione geometrica: sono quadrati omotetici, e le
loro dimensioni sono in rapporto 2:3:5

Le **omotetie** sono delle trasformazioni del piano che **rimpiccioliscono** o **ingrandiscono** una figura, senza deformarla o ruotarla, *proiettandola* da un punto detto **centro di omotetia**.



Max Bill

Strahlende Orange



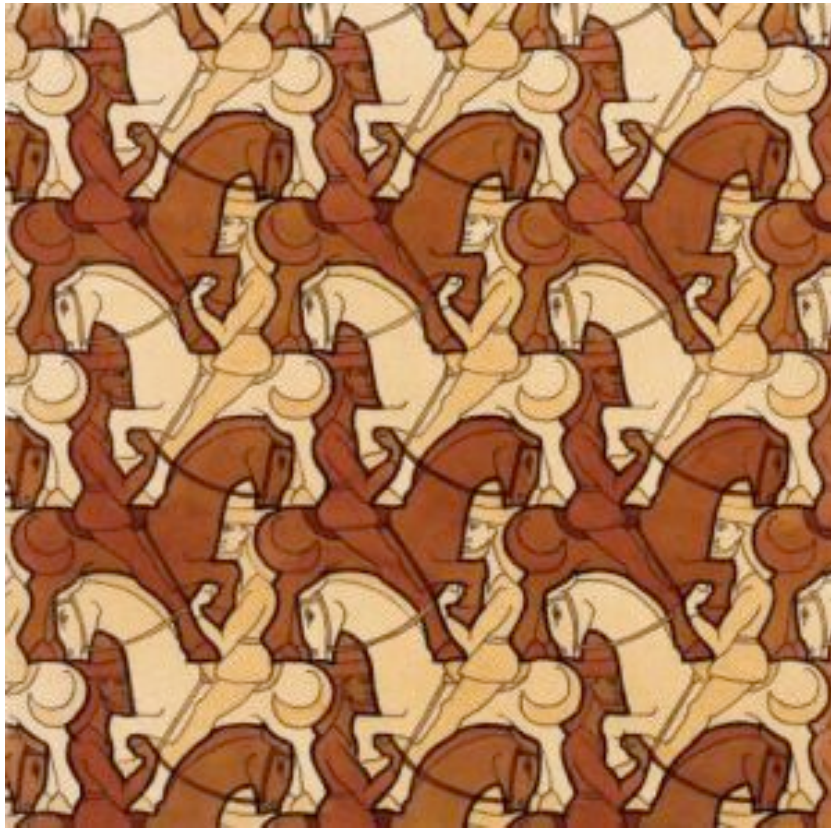
L'arte è *"l'espressione pura della misura e della legge armonica"*.

In questo dipinto il quadrato posto a 45° conferisce estensione e direzionalità allo spazio, mentre quello nel centro conferisce radiazione e tranquillità all'intera composizione.

e le trasformazioni geometriche.

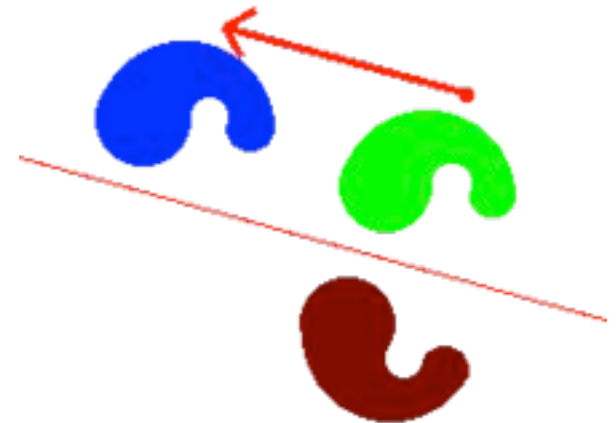


In questo disegno si hanno due figure diverse: le oche bianche e le oche azzurre. Le trasformazioni che si trovano sono le stesse sia che si consideri il colore oppure no. Si nota che le oche seguono una fila e sono in colonna, le simmetrie della figura sono perciò solamente i vettori che generano la cella unitaria e le loro composizioni. In questo caso cella unitaria e dominio fondamentale coincidono.



Il cavaliere bianco e il cavaliere nero sono perfettamente sovrapponibili applicando la giusta trasformazione: una glisso-riflessione trasforma un cavaliere bianco in uno nero e viceversa.

glissoriflessione - E' una trasformazione del piano ottenuta componendo una riflessione (rispetto ad una retta) con una traslazione di vettore parallelo alla retta di riflessione.





Una volta individuato l'elemento base (un rettile) se ne possono scegliere tre di colori diversi e che abbiano un punto in comune (per esempio, quello comune a tre teste) e si possono studiare le trasformazioni degli uni negli altri. Si ritrova così il gruppo delle rotazioni che mutano un triangolo equilatero in sé.

Si può scegliere di lavorare, per esempio, solo con i rettili bianchi e sviluppare il tema delle traslazioni e loro composizione.

Le parole componenti un testo possono esibire **simmetrie** a una o due dimensioni.

La più elementare **simmetria unidimensionale** è data dai testi circolari (analoghi dei canoni perpetui musicali). Alcuni sono stati immaginati da *Borges* (scrittore argentino, 1899-1986), ma la realizzazione più tipica è *Finnegans Wake* (La veglia per Finnegan) di *Joyce* (scrittore irlandese, 1882-1941). Il poema si conclude con la prima metà di una frase (*A way a lone a last a loved a long the*), la cui seconda parte costituisce l'inizio del poema (*ríverrun, past Eve and Adam's*), permettendo così una lettura circolare.

Finnegans Wake 628.15-16

A way a lone a last a loved a long the

Finnegans Wake 3.1-3

riverrun, past Eve and Adam's, from swerve of
shore to bend of bay, brings us by a commodius
vicus of recirculation back to Howth Castle and
Environs.

Una **simmetria bidirezionale** è rappresentata dai **palindromi** (da *palin* “all'indietro” e *dromos* “corsa”) che sono l'analogo dei canoni inversi musicali.

Si tratta di lettere disposte simmetricamente al centro di un testo, pensato come scritto su un'unica linea. Il testo, allora, si può leggere in entrambe le direzioni: dagli inizi alla fine, o viceversa.

Il più lungo palindromo non artificiale italiano è “onorarono” (in francese, “ressasser”, ribadire; in inglese, “redivider”, ridivisore).

Tra le frasi palindrome citiamo:

- ✓ *ablata at alba* (bandita ma illibata), frase pronunciata da una dama scacciata da corte dalla regina Elisabetta I perché ingiustamente accusata di un flirt;
- ✓ νίψον ανομήματα μη μόναν όψιν (famoso palindromo in lingua greca che significa: lava i (miei) peccati, non soltanto la faccia), si tratta di un'iscrizione cristiana incisa sopra i fonti battesimali di diverse chiese tra cui la basilica di Hagia Sophia a Istanbul;
- ✓ *Able was I ere I saw Elba* (Fui valente finché vidi l'Elba) risposta apocrifia attribuita a Napoleone quando gli venne chiesto se sarebbe mai stato in grado di saccheggiare Londra.
- ✓ *Accavalla denari, tirane dalla vacca* (Primo Levi, *Calore vorticoso*)

- ✓ *È fedel non lede fê / e Madonna annoda me* (doppio palindromo, dedica di accompagnamento al dono di un anello offerto ad Eleonora Duse (attrice di teatro), da parte di Arrigo Boito (letterato);
- ✓ *En giro torte sol ciclos et rotor igne ((lo), il sole, col fuoco faccio girare tortamente i cerchi e giro), formula incisa su marmo all'interno del Battistero di San Giovanni in Firenze.*

Opere palindromiche, tutte di circa 5000 parole e, ovviamente, di lettura ostica, sono:

➤ **9691** di **Georges Perec**, ovviamente del 1969;

Inizio - Trace l'inégal palindrome. Neige. Bagatelle, dira Hercule. Le brut repentir, cet écrit né Perec. L'arc lu pèse trop, lis à vice-versa.

Fine - Désire ce trépas rêvé : Ci va ! S'il porte, sépulcral, ce repentir, cet écrit ne perturbe le lucre : Haridelle, ta gabegie ne mord ni la plage ni l'écart.

➤ *Oir a Dario* di **Dario Lancini**;

➤ *11 luglio 1982* di **Giuseppe Varaldo**, il cui titolo è un metapalindromo (se lo scriviamo come 11.7.1982 si interpreta 11 come 2, e 7.1 come 8)

Inizio - Ai lati, a esordir, dama e re, Pertini trepida, tira lieti moccoli,
dialoga - vocina, pipa... -, ricorre alle battute. È durata!... ne patì Trap:
allena - mèritasi lodi testé - Juvitalia, mai amata.

Fine - Mai amai la tivù: jet-set, idoli, satire...; ma nella partita - penata,
rude e tutta bella: erro? - ci rapì: panico vago, lai di locco, mite ilarità
di Pertini... tre pere a Madrid, rosea Italia!

Il concetto di palindromo può essere esteso ad altri livelli,
come sillabe, parole, frasi. Un esempio è il breve racconto
La fine di **Brown** (1961):

Il professor Jones aveva lavorato molti anni alla sua teoria sul tempo. “Finalmente ho trovato l'equazione chiave” disse un giorno a sua figlia. “Il tempo è un campo. La macchina che ho costruito può manipolare questo campo, e anche invertirlo”.

Mentre premere un bottone, disse: “Questo dovrebbe far tornare il tempo indietro tempo il tornare far dovrebbe questo” disse, bottone un premere mentre.

“Invertirlo anche e, campo questo manipolare può costruito ho che macchina la. Campo un è tempo il”. Figlia sua a giorno un disse “chiave equazione l' trovato ho finalmente”.

Tempo sul teoria sua alla anni molti lavorato aveva Jones professor il.

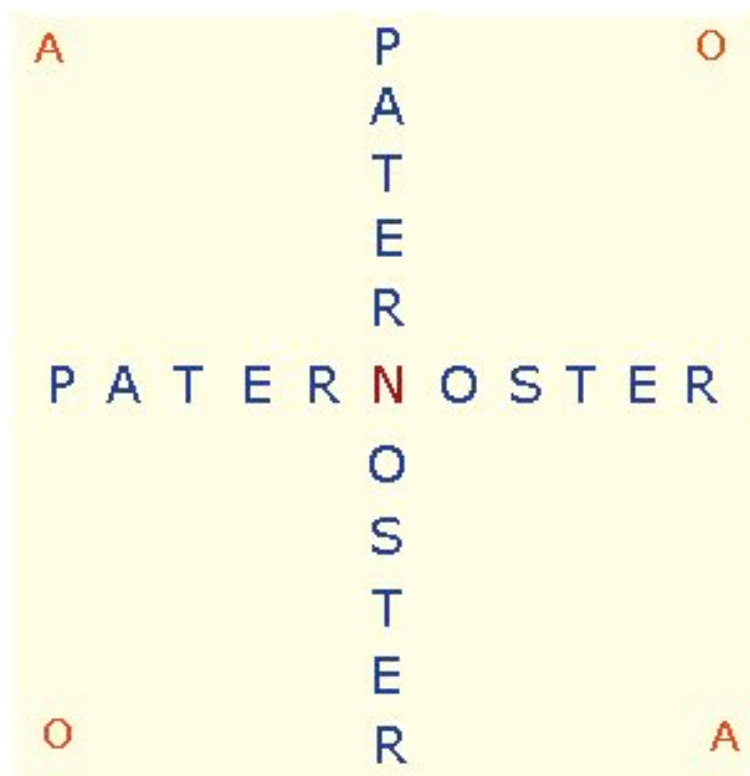
Una diversa estensione, non linguistica ma geometrica, del palindromo si ottiene passando dalla **simmetria** unidimensionale a quella **bidimensionale**, in cui le parole si possono leggere nello stesso modo non solo in due, ma in quattro direzioni.

L'esempio più noto è il **latercolo pompeiano**, chiamato così perché la sua più antica testimonianza è rintracciabile in due graffiti rinvenuti a Pompei:



Il seminatore (SATOR) tiene (TENET) le ruote (ROTAS) accuratamente (OPERA). Il significato di AREPO non è chiaro (significa forse aratro o carro).

Questa ambiguità, unita alle proprietà di simmetria del quadrato, ne hanno suggerito interpretazioni di ogni genere, da quelle religiose fino a quelle magiche.



Il latercolo viene così interpretato come l'anagramma di PATERNOSTER dove la A e la O sono Alfa e Omega (prima e ultima lettera dell'alfabeto greco, e rappresentano un titolo di Cristo o di Dio nell'Apocalisse di Giovanni “Io sono l'alfa e l'omega”).

Umberto Eco ha richiamato il latercolo pompeiano in un dialogo del suo Pendolo di Foucault:

Quid facit Sator Arepo?

Tenet Opera Rotas.

Quid facit Satan Adama?

Tabat Amata Natas.

Hai portato la donna?

Si è qui.

L'ho consegnata a chi mi è
stato ordinato.

Essa è pronta.