

FISICA

MECCANICA: Principio conservazione energia meccanica

*Autore: prof. Pappalardo Vincenzo
docente di Matematica e Fisica*



Nei fenomeni che osserviamo vi sono molte grandezze che cambiano nel tempo, come la velocità, la posizione, o le stesse forze. Capire un fenomeno significa saper prevedere, istante per istante, come cambiano alcune grandezze significative. I principi della dinamica servono a fare queste previsioni, purché si abbia un quadro dettagliato delle forze che in ogni istante agiscono sul sistema fisico in esame.

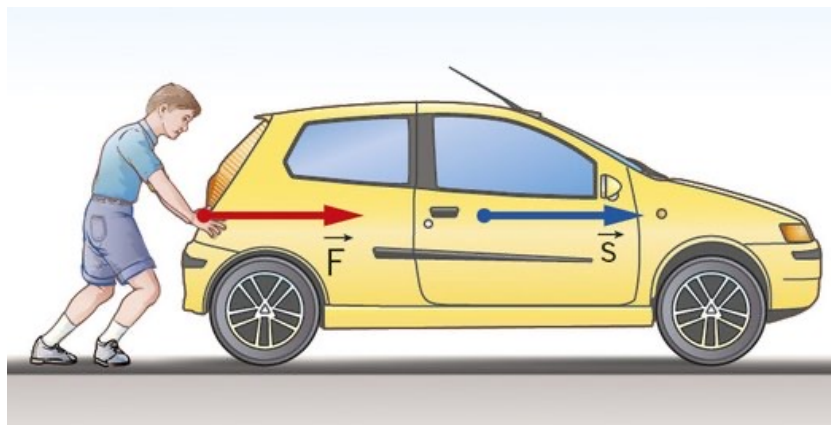
Ovviamente, i problemi possono essere di difficile soluzione quando il sistema è particolarmente complicato da studiare.

Se però cambiamo punto di vista, invece di determinare l'andamento nel tempo di grandezze che variano, possiamo individuare, se esistono, le grandezze che rimangono costanti nel tempo. In altri termini, anziché sulle leggi di variazione ci soffermiamo sulle leggi di conservazione.

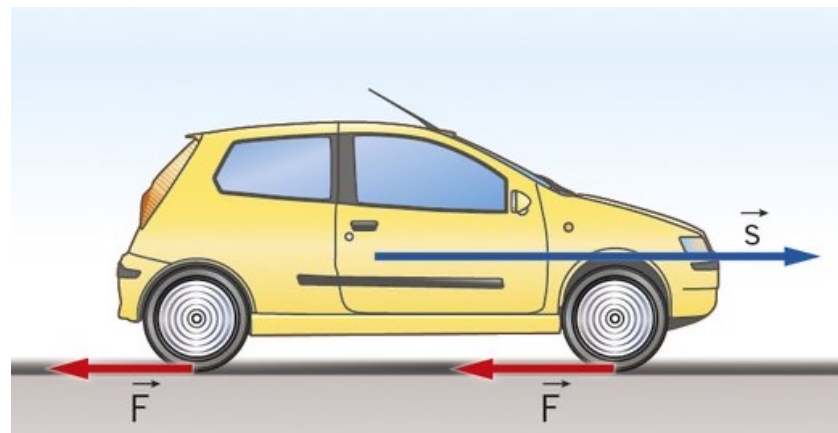
Una legge di conservazione afferma che durante lo svolgimento di un fenomeno qualche grandezza fisica rimane costante.

IL LAVORO

In tutte le macchine vi sono forze che producono spostamenti. Una nuova grandezza, il **lavoro** di una forza, misura l'effetto utile della combinazione di una forza con uno spostamento.



Lavoro motore
(lavoro positivo)

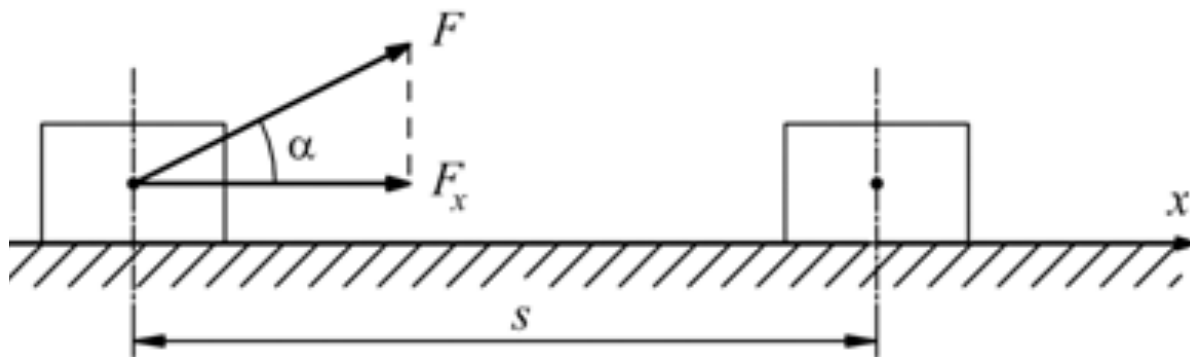


Lavoro resistente
(lavoro negativo)

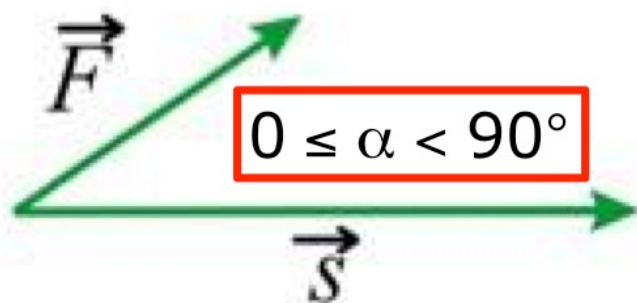
Definizione lavoro

Il lavoro L di una forza costante $\mathbf{F}$ che provoca uno spostamento $\mathbf{s}$ è uguale al prodotto scalare tra i vettori $\mathbf{F}$ ed $\mathbf{s}$:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos \alpha \quad [\text{Joule (J)}]$$

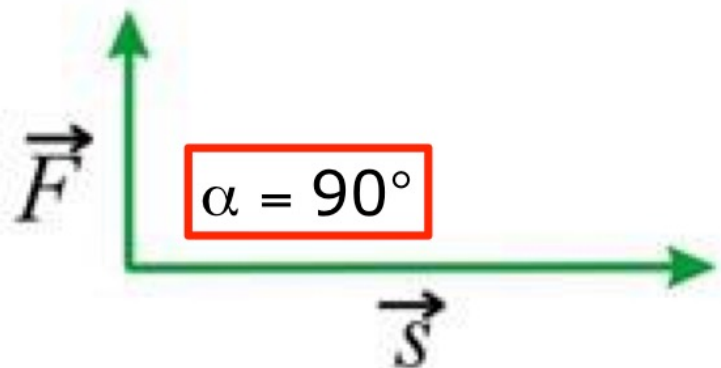


Il lavoro è prodotto dalla forza, o dalla sua componente, che agisce lungo lo spostamento.



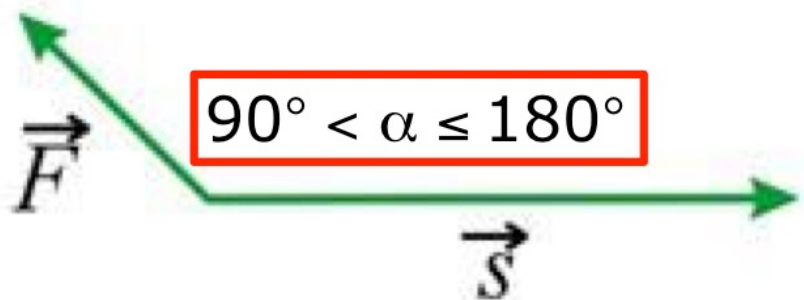
$$L > 0$$

Lavoro motore



$$L = 0$$

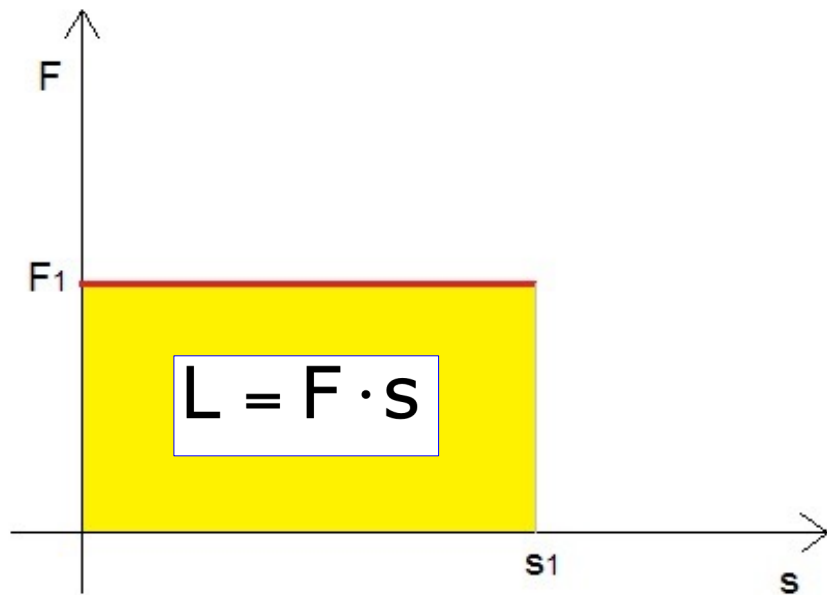
Lavoro nullo



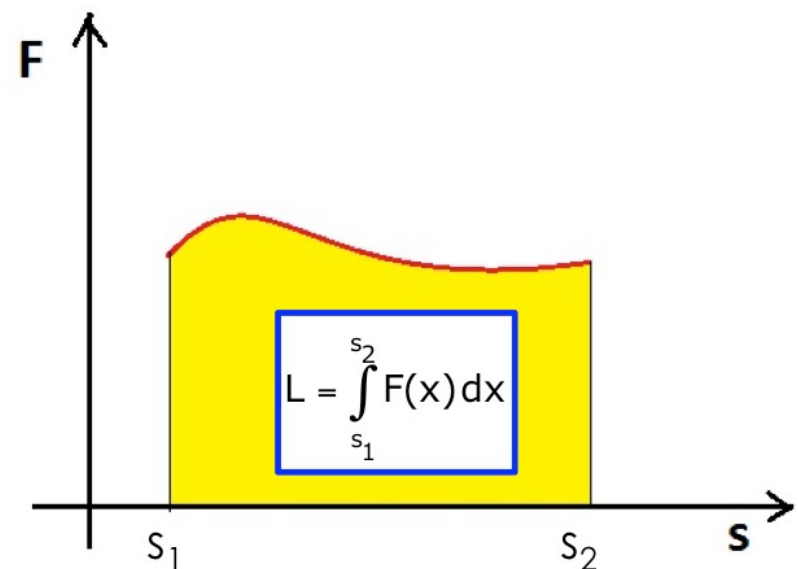
$$L < 0$$

Lavoro resistente

Se riportiamo su un sistema di assi cartesiani la forza applicata ad un corpo in funzione dello spostamento subito dal corpo stesso, allora il **lavoro prodotto è dato dall'area sottesa dal grafico che rappresenta la *funzione forza*.**



E' il caso più semplice, ossia il lavoro prodotto da una forza costante. L'area sottesa dalla funzione forza, rappresentata da una retta orizzontale, è data dall'area di un rettangolo.



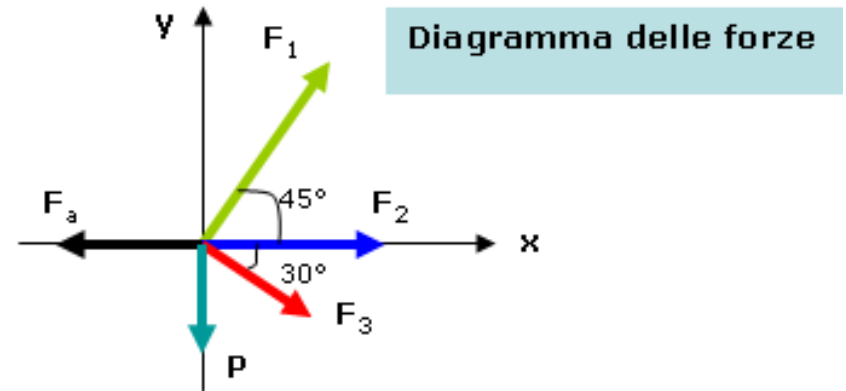
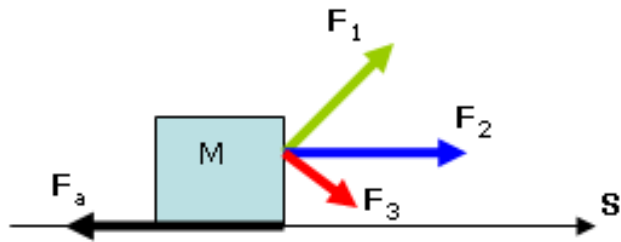
Questo è il caso più generale: il lavoro prodotto da una forza variabile. L'area sottesa dalla funzione forza non ha forma regolare, per cui non possiamo utilizzare nessuna formula della geometria euclidea.

Però ci viene in aiuto l'analisi matematica attraverso uno strumento di calcolo chiamato **integrale definito**. Il lavoro prodotto da una forza variabile sarà quindi calcolato nel seguente modo:

$$L = \int_{s_1}^{s_2} F(x) dx$$

Esempio

Calcolare il lavoro totale prodotto dalle forze $F_1=10\text{N}$ $F_2=5\text{N}$ $F_3=7\text{N}$ $F_a=2\text{N}$ (forza di attrito), che agiscono su un corpo M secondo le direzioni indicate in figura, e che lo spostano di 10m.



Calcoliamo il lavoro il prodotto dalle singole forze, lungo lo spostamento, attraverso l'applicazione della definizione:

$$L_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{s} = F_1 \cdot s \cdot \cos 45^\circ = 70.7\text{N}$$

$$L_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{s} = F_2 \cdot s \cdot \cos 0^\circ = 50\text{N}$$

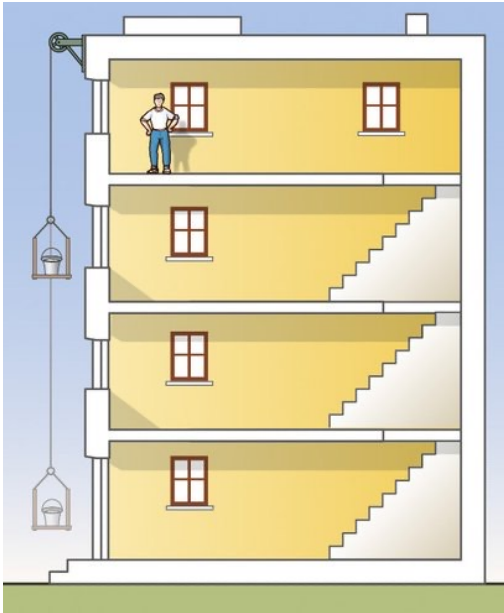
$$L_3 = \vec{F}_3 \cdot \vec{s} = F_3 \cdot s \cdot \cos 30^\circ = 60.6\text{N}$$

$$L_a = \vec{F}_a \cdot \vec{s} = F_a \cdot s \cdot \cos 180^\circ = -20\text{N}$$

Il lavoro totale è dato dalla somma algebrica dei singoli lavori:

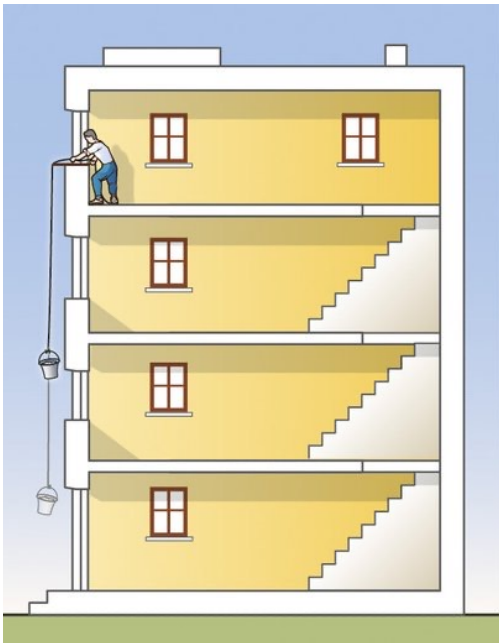
$$L_T = \sum L_i = L_1 + L_2 + L_3 - L_a = 70,7 + 50 + 60,6 - 20 = 161\text{J}$$

LA POTENZA



Il lavoro è lo stesso nelle due situazioni perché:

1. in entrambi i casi viene applicata la stessa forza (quella per vincere il peso del secchio);
2. il secchio compie lo stesso spostamento.



Ma uno stesso lavoro può essere compiuto più o meno rapidamente. Il montacarichi compie lo stesso lavoro più rapidamente.

Per misurare la rapidità con cui una forza compie un lavoro, si introduce la grandezza fisica **potenza**:

definizione potenza

La potenza di un sistema fisico è uguale al rapporto tra il lavoro compiuto dal sistema e l'intervallo di tempo necessario per eseguirlo:

$$P = \frac{L}{\Delta t} \quad [\text{Watt : W}]$$

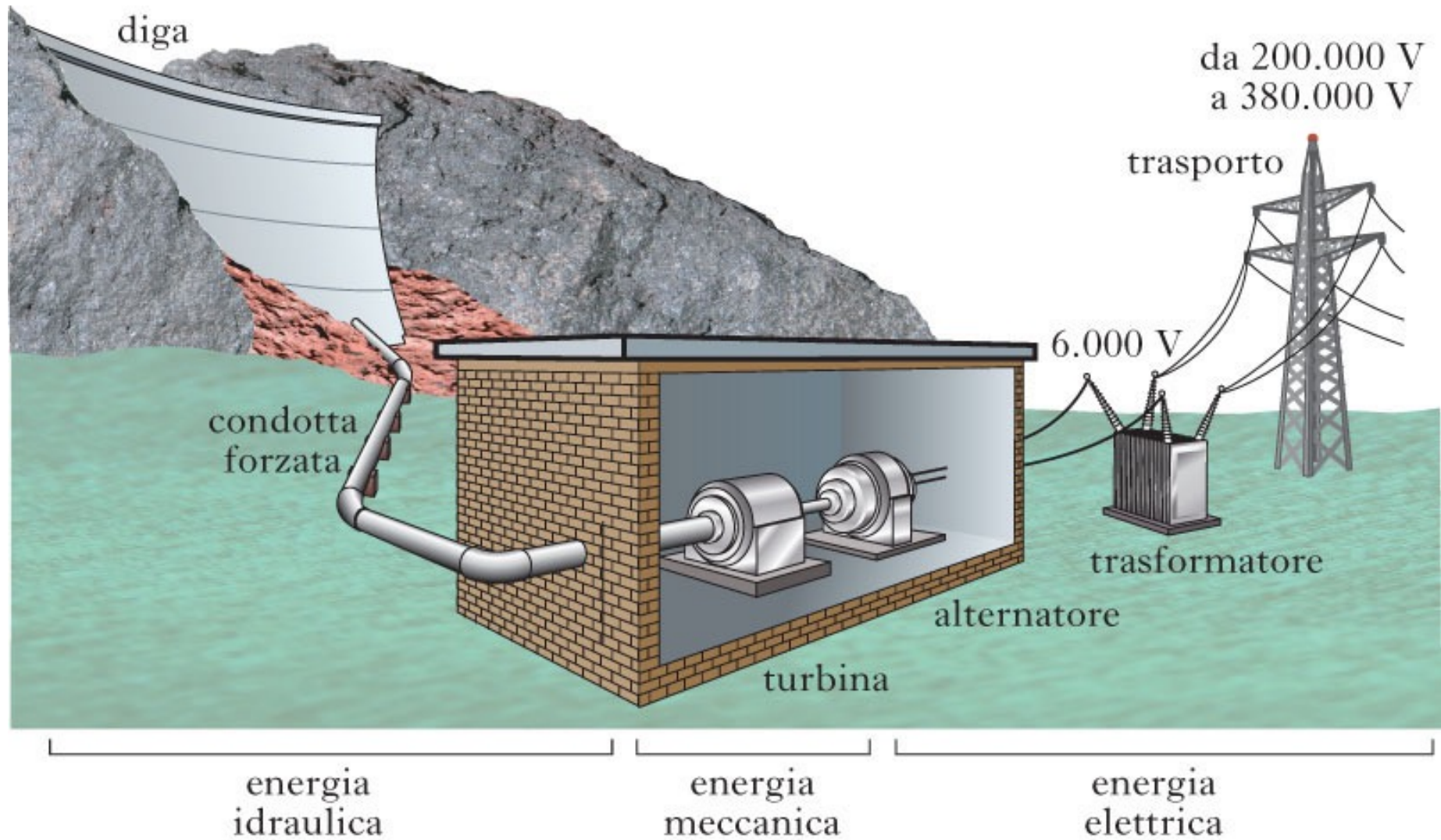
Possiamo mettere in relazione la potenza con la velocità media:

$$P = \frac{L}{\Delta t} = F \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = F \cdot v_m$$

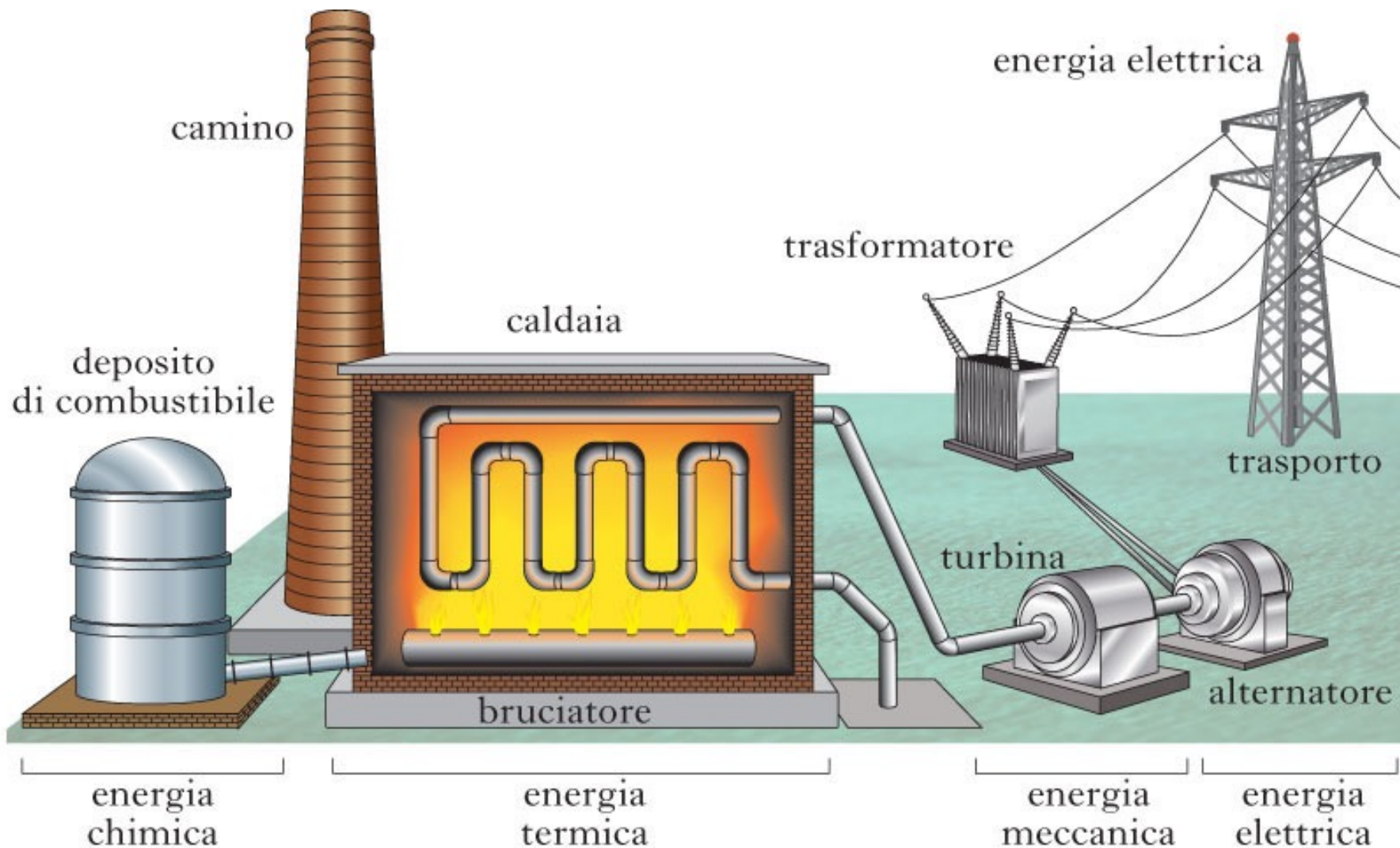
L'energia si presenta in forme diverse (meccanica, termica, elettrica, nucleare, chimica, ecc.) che sono trasformabili l'una nell'altra.

- I combustibili, bruciando, liberano sotto forma di calore l'energia chimica immagazzinata nelle loro molecole;
- Nelle centrali termoelettriche il calore viene trasformato in energia meccanica, che, a sua volta, viene poi convertita in energia elettrica;
- Nelle centrali nucleari l'energia prodotta dalle reazioni nucleari viene convertita in energia elettrica;
- Nelle auto, l'energia termica ricavata dalla combustione della benzina viene convertita in energia meccanica.

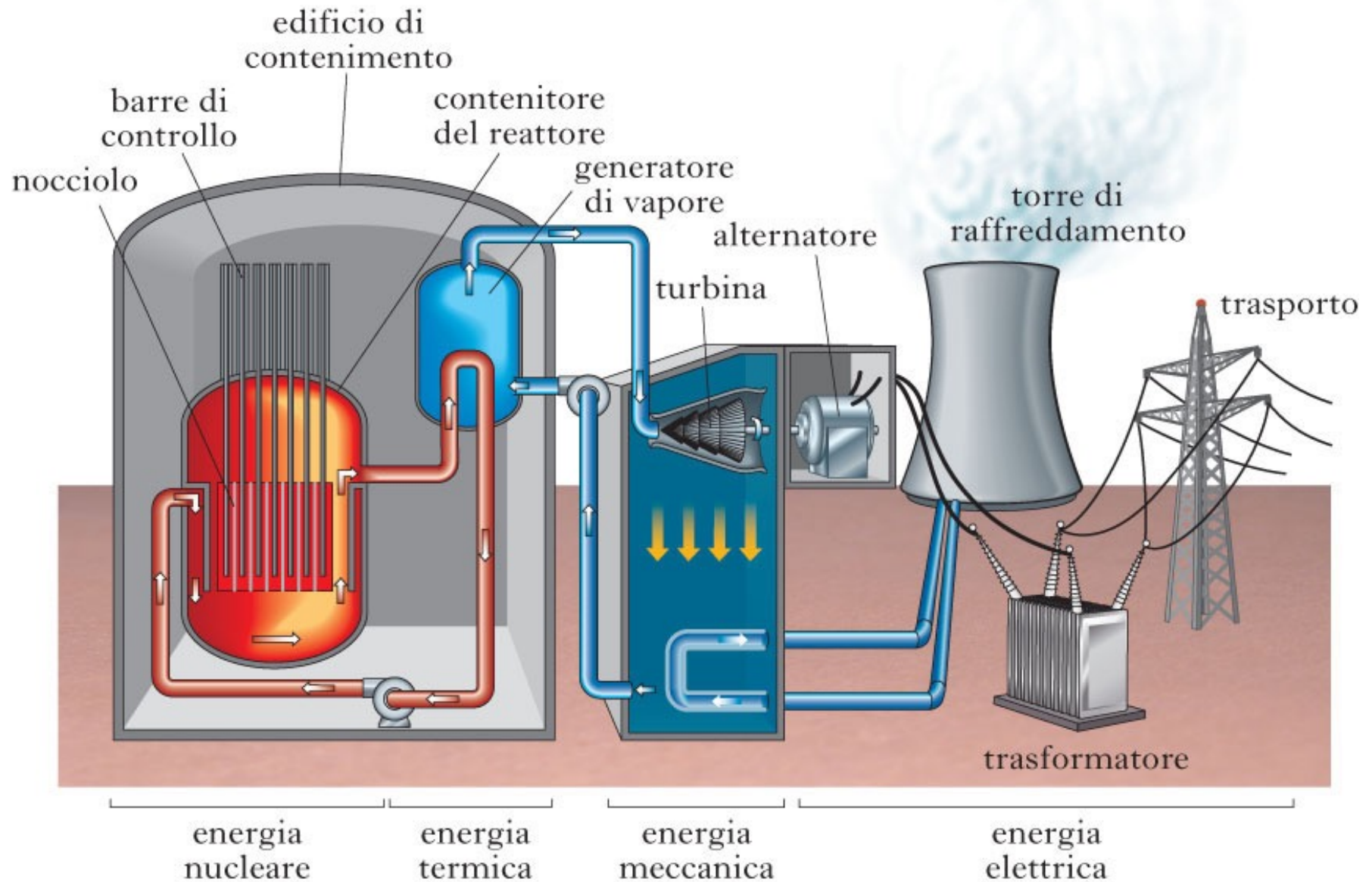
Centrale idroelettrica



Centrale termoelettrica



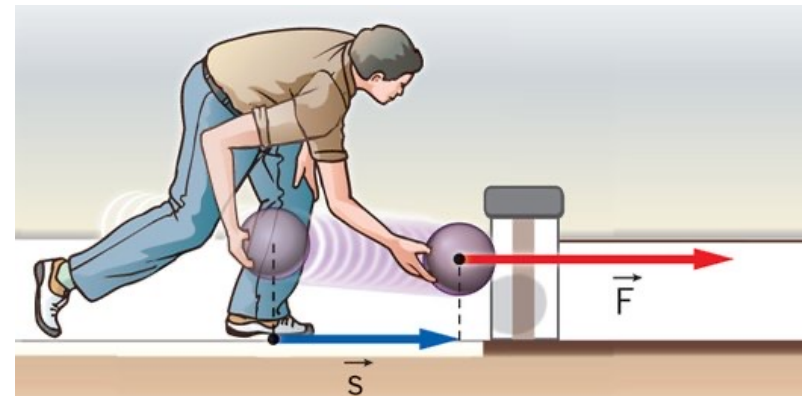
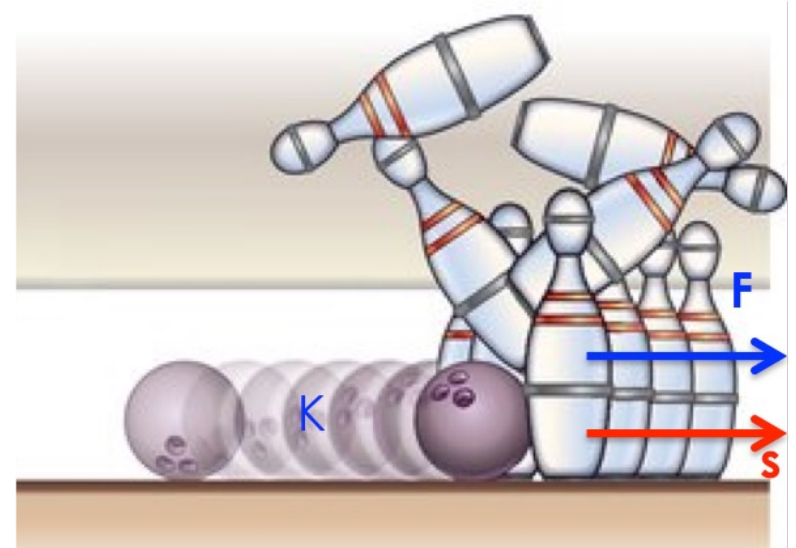
Centrale nucleare



L'energia è definita come la capacità di compiere un lavoro.

Un corpo in movimento può compiere lavoro su un altro corpo perché possiede una forma di energia (cinetica) grazie alla quale questo è possibile.

Viceversa, eseguendo lavoro su un corpo (boccia), si conferisce al corpo energia (cinetica).



ATTENZIONE - Il lavoro di una forza permette di trasformare una parte dell'energia da una forma a un'altra, ma:

Il lavoro non è una forma di energia, ma è energia in transito.

CONSEGUENZA IMPORTANTE

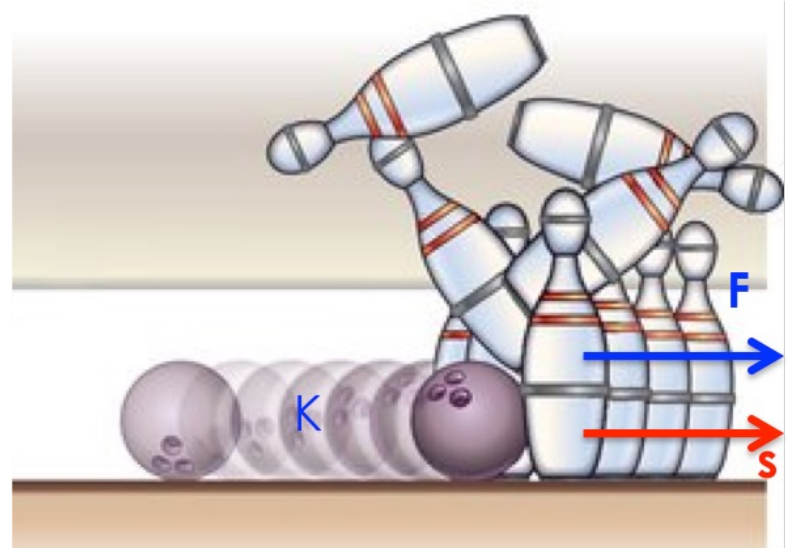
**LAVORO ED ENERGIA
SONO EQUIVALENTI**

In meccanica prenderemo in considerazione due forme di energia:

ENERGIA MECCANICA = ENERGIA CINETICA + ENERGIA POTENZIALE

ENERGIA CINETICA

Una boccia da bowling compie un lavoro positivo sui birilli, perché esercita su di essi una forza mentre li sposta.



È evidente che questo lavoro è in qualche modo “trasportato” dalla boccia da bowling che si muove. Per rendere quantitativa questa osservazione, si introduce una nuova grandezza fisica, **l'energia cinetica K**.

Un oggetto in movimento è in grado di compiere lavoro. Questo lavoro avviene a spese di una forma di energia immagazzinata nell'oggetto e legata al suo stato di moto (velocità v) e alla sua massa m . Per definizione, l'energia cinetica è definita come:

definizione energia cinetica

The diagram shows the formula for kinetic energy, $K = \frac{1}{2}mv^2$, centered within a yellow rectangular box. Three leader lines extend from the text labels around the box to the corresponding variables in the formula: one from 'energia cinetica (J)' to the letter 'K', one from 'massa (kg)' to the letter 'm', and one from 'velocità m/s' to the letter 'v'. To the right of the yellow box, the unit '[Joule : J]' is displayed.

energia cinetica (J) — $K = \frac{1}{2}mv^2$ — massa (kg)

[Joule : J]

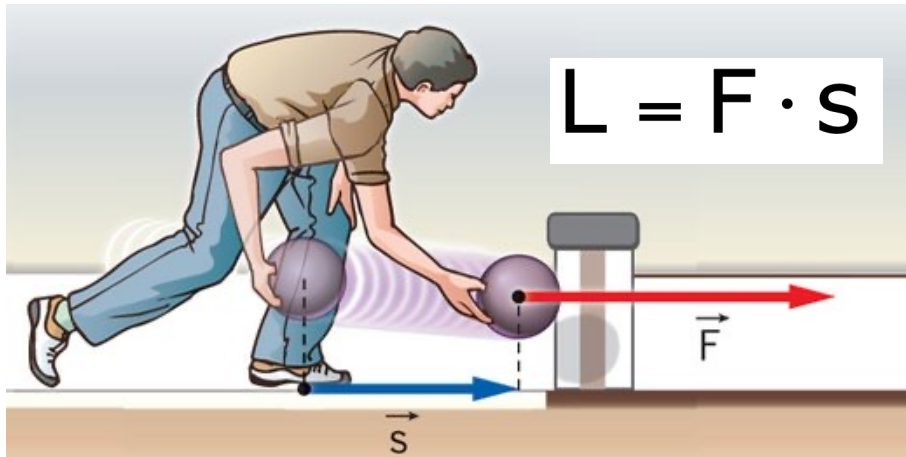
— velocità m/s

Avendo sostenuto che l'energia ed il lavoro sono due concetti equivalenti e che il lavoro è energia in transito, allora possiamo affermare che:

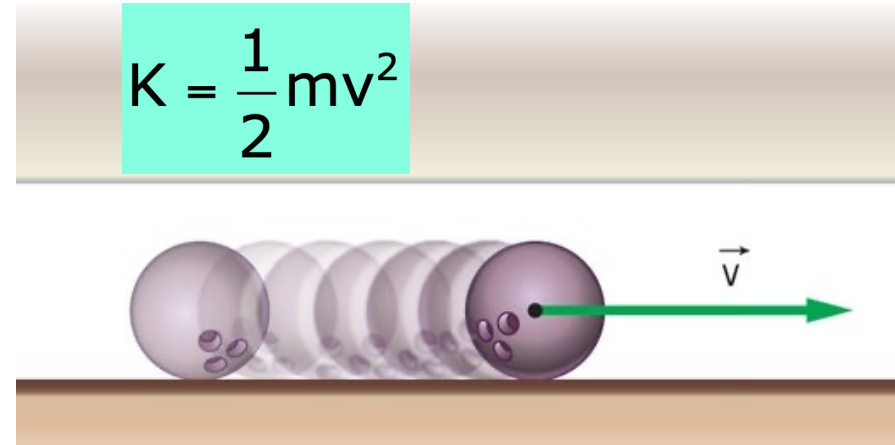
L'energia cinetica K è uguale al lavoro che una forza deve compiere per portare un corpo di massa m , inizialmente fermo, fino alla velocità v :

$$K=L$$

Infatti:



La forza continua ad agire
mentre la boccia si sposta
con moto rettilineo
uniformemente
accelerato per un tratto s .



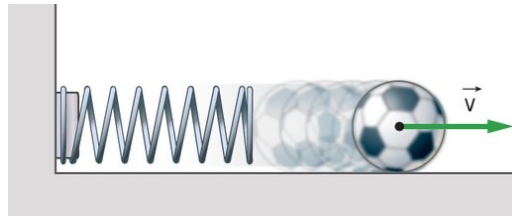
Dopo che la forza ha
smesso di agire, la boccia
si muove di moto rettilineo
uniforme con velocità
costante v .

In modo analogo si dimostra che:

L'energia cinetica è anche uguale al lavoro che un corpo di massa m , in moto a velocità v , compie quando viene fermato



La palla ha richiesto un lavoro $L = (1/2)mv^2$ per giungere alla velocità v partendo da ferma.



Muovendosi a velocità costante per il primo principio della dinamica, ha «portato con sé» la capacità di compiere un lavoro.



La palla ha «restituito» il lavoro quando è stata fermata dall'azione di un altro sistema fisico.

In generale, possiamo affermare che se su un corpo in moto con velocità v viene eseguito un lavoro, la sua velocità cambia e quindi anche la sua energia cinetica. Vale quindi il seguente teorema:

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

Il lavoro compiuto da una forza su un corpo è uguale alla variazione dell'energia cinetica subita dal corpo:

$$L = \Delta K = K_{\text{finale}} - K_{\text{iniziale}}$$

Esempio

Un'auto di massa 1000 kg accelera da 0 a 100 km/h in 6s. Calcolare la potenza, trascurando gli attriti.

In base al teorema dell'energia cinetica sappiamo che il lavoro è legato alla variazione dell'energia cinetica dalla relazione:

$$L = \Delta E_C = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Sostituendo i dati forniti dal problema e tenendo conto che l'auto parte da ferma ($v_1 = 0$), operando la conversione $100 \text{ km/h} \cong 28 \text{ m/s}$, otteniamo:

$$\begin{aligned} L &= \Delta E_C = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot (28 \text{ m/s})^2 = 392\,000 \text{ J} \end{aligned}$$

e quindi:

$$L = 3,92 \cdot 10^5 \text{ J}$$

La potenza del motore vale perciò:

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{3,92 \cdot 10^5 \text{ J}}{6 \text{ s}} \cong 65\,330 \text{ W} \cong 65 \text{ kW}$$

La potenza che l'auto sviluppa per raggiungere quella velocità è in realtà maggiore, perché il motore, oltre ad accelerare l'auto, deve vincere anche gli attriti, sia interni (motore, meccanismi di trasmissione, ...) sia esterni (asfalto e aria).

Calcolare l'intensità media delle forze di attrito dei freni di un'auto durante una frenata, sapendo che la massa dell'auto è di 1000 kg, la sua velocità iniziale 30 m/s e lo spazio di frenata 150 m.

■ LEGGI ED EQUAZIONI

Dalla relazione:

$$L = \Delta E_C = E_{CF} - E_{CI} = \frac{1}{2} m v_F^2 - \frac{1}{2} m v_I^2$$

conoscendo la massa, la velocità iniziale e quella finale dell'auto si può ricavare il lavoro. Quindi, dalla relazione:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos \alpha$$

conoscendo il lavoro, lo spostamento e l'angolo (uguale a 180°, perché la forza di attrito è parallela allo spostamento, ma di verso opposto) si ottiene l'intensità della forza.

■ SOLUZIONE ALGEBRICA

Le equazioni che permettono la soluzione del problema sono dunque:

$$L = \frac{1}{2} m v_F^2 - \frac{1}{2} m v_I^2 \quad \text{e} \quad F = \frac{L}{s \cos \alpha}$$

dove F rappresenta l'intensità della forza di attrito.

■ SOLUZIONE NUMERICA

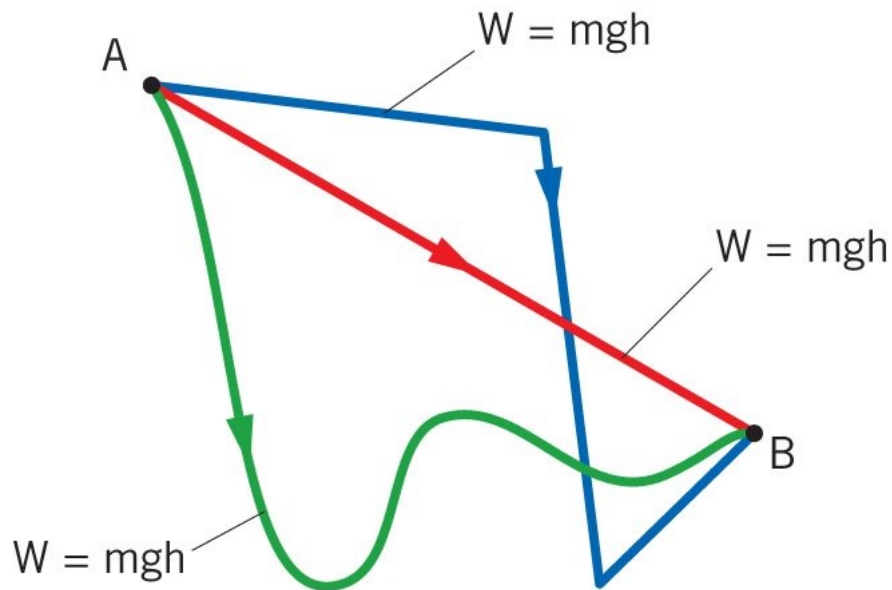
Sostituendo i dati forniti dal problema si ottiene:

$$L = \frac{1}{2} m v_F^2 - \frac{1}{2} m v_I^2 = -\frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot (30 \text{ m/s})^2 = -450\,000$$

e quindi:

$$F = \frac{L}{s \cos \alpha} = \frac{-450\,000 \text{ J}}{150 \text{ m} \cdot (-1)} = 3000 \text{ N}$$

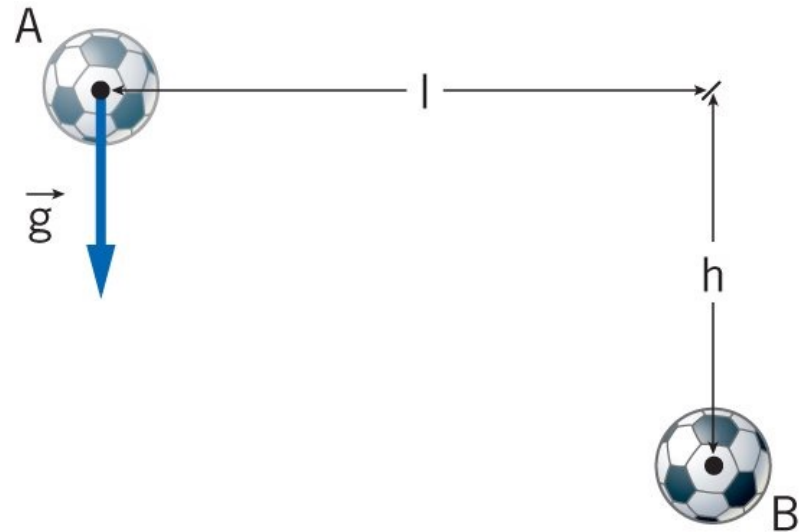
FORZE CONSERVATIVE E NON CONSERVATIVE



Una forza si dice **conservativa** se il lavoro che essa fa su un corpo, nel spostarlo da un punto A a un punto B, dipende soltanto dagli estremi A e B, ma non dal particolare percorso seguito durante lo spostamento.

Un esempio di **forza conservativa** è la **forza-peso** (e anche la **forza elastica**). Infatti:

Consideriamo una palla di massa m che, soggetta alla forza di gravità, si sposta da un punto di partenza A a un punto di arrivo B spostato di l a destra di A e di h sotto di esso.



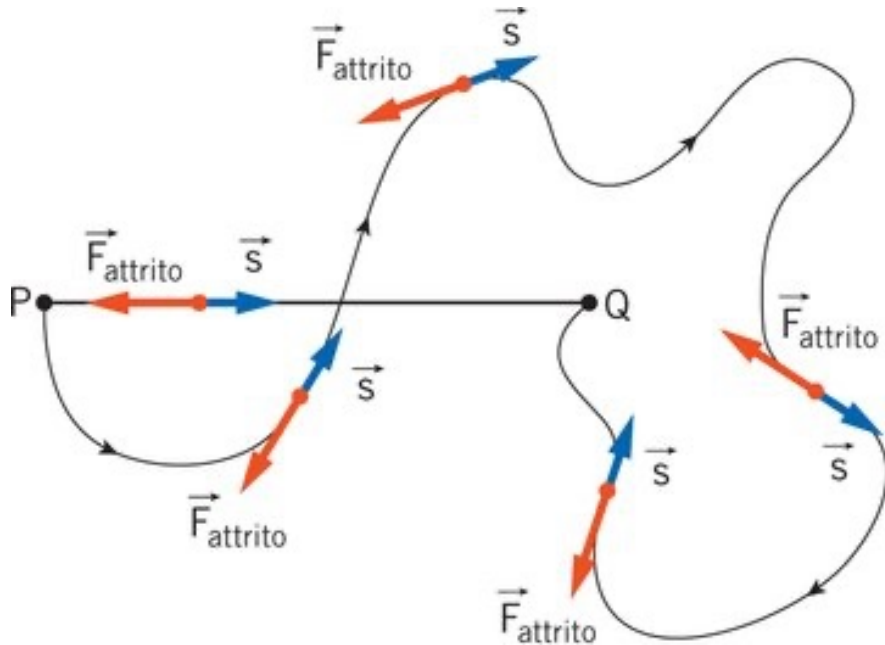
Calcoliamo il lavoro fatto dalla forza-peso F_P lungo l e lungo h :

$$L_l = F_P \cdot l \cdot \cos \alpha = 0 \quad \text{in quanto } \alpha = 90^\circ \text{ e quindi } \cos 90^\circ = 0$$

$$L_h = F_P \cdot h \cdot \cos \alpha = F_P \cdot h \quad \text{in quanto } \alpha = 0^\circ \text{ e quindi } \cos 0^\circ = 1$$

Quindi il lavoro dipende solo dal dislivello h e non dal particolare percorso che unisce A con B.

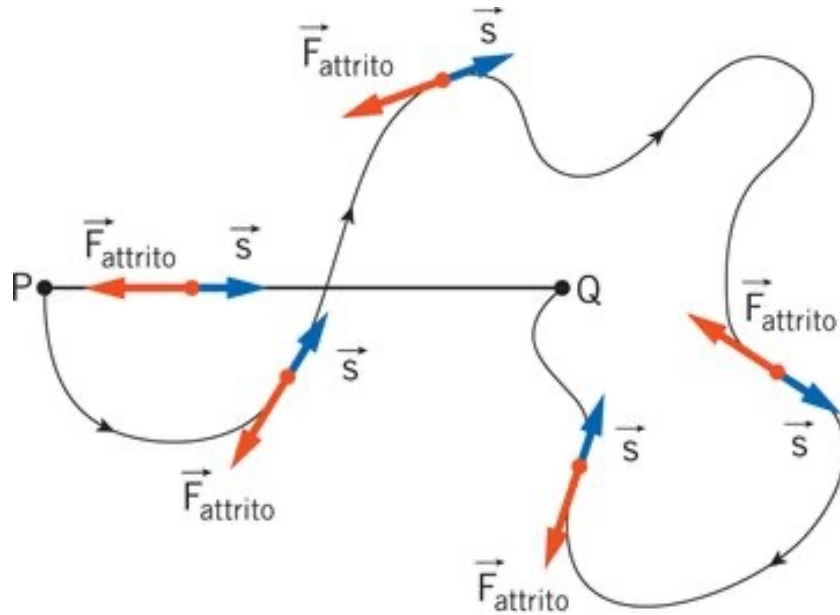
Un esempio di **forza non conservativa** è la **forza di attrito**.
Infatti:



Consideriamo il lavoro compiuto dalla forza di attrito su un corpo dal punto P fino a un punto Q.

La forza di attrito è diretta in senso contrario allo spostamento e, quindi, compie un lavoro negativo.

Il valore assoluto di tale lavoro è tanto più grande quanto più lungo risulta il percorso seguito per passare da P e Q. Infatti, ogni tratto di cammino in più aggiunge un nuovo termine negativo al lavoro totale.



Quindi, il valore assoluto del lavoro compiuto dalla forza di attrito durante lo spostamento rettilineo da P a Q è decisamente minore del valore assoluto del lavoro compiuto, sempre dalla forza di attrito, nel corso dello spostamento curvilineo.

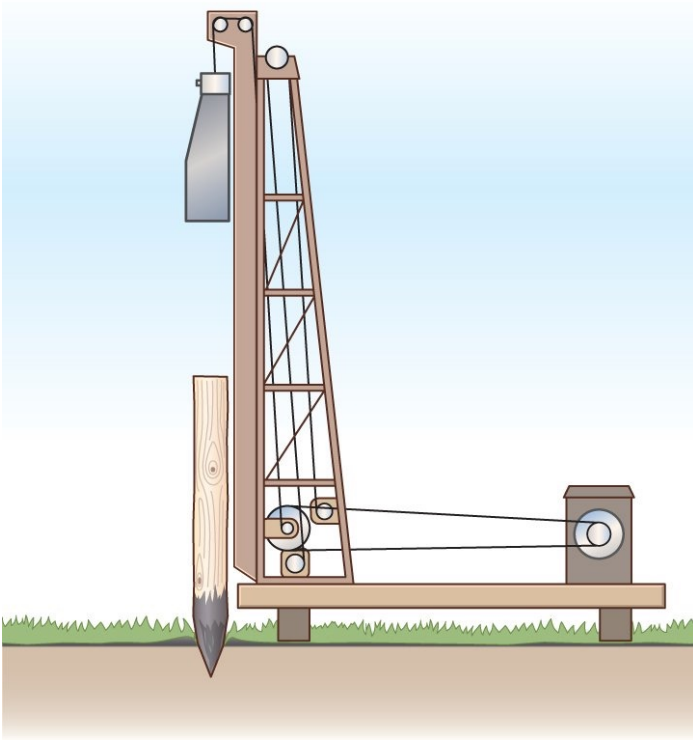
Conclusione: il lavoro prodotto dalle forze non conservative dipende dal percorso seguito durante lo spostamento

Energia potenziale gravitazionale

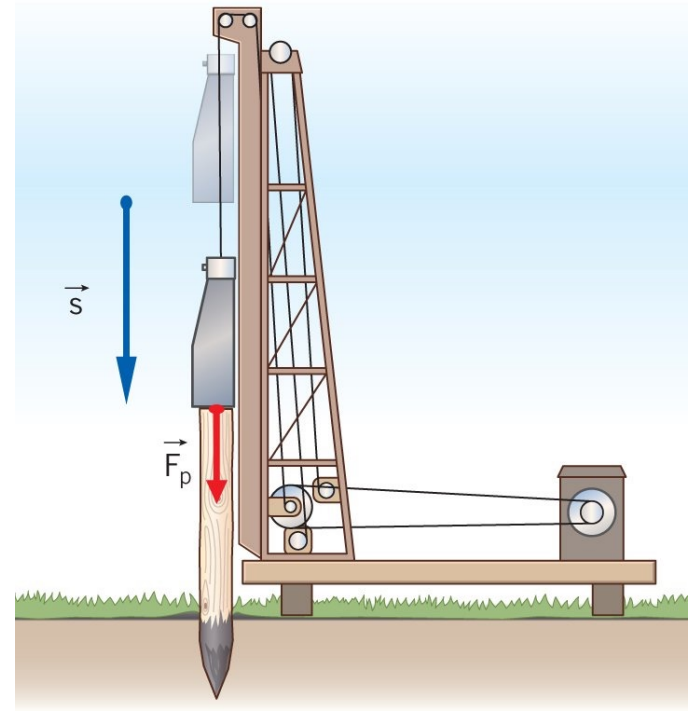
Un corpo che si trova in alto è in grado di compiere lavoro quando scende. Quindi un oggetto fermo può possedere un'energia per il semplice fatto di occupare una certa posizione rispetto al suolo.

Questo tipo di energia è detta **energia potenziale gravitazionale**, perché nasce dall'attrazione gravitazionale della Terra.

Si può definire l'energia potenziale perché la forza-peso è conservativa.



Un grande maglio è sollevato fino a una certa altezza e poi lasciato andare.



Tornando a terra, il maglio è in grado di compiere un lavoro, cioè conficcare un palo nel terreno.

Il lavoro fatto nel conficcare il palo è uguale all'energia cinetica che il maglio ha acquisito a fine corsa.

$$L = K$$

A sua volta questa energia cinetica è uguale al lavoro che la forza-peso compie sul maglio durante la caduta.

$$K = L$$

Calcoliamo il lavoro della forza-peso e quindi il lavoro di conficcamento del palo:

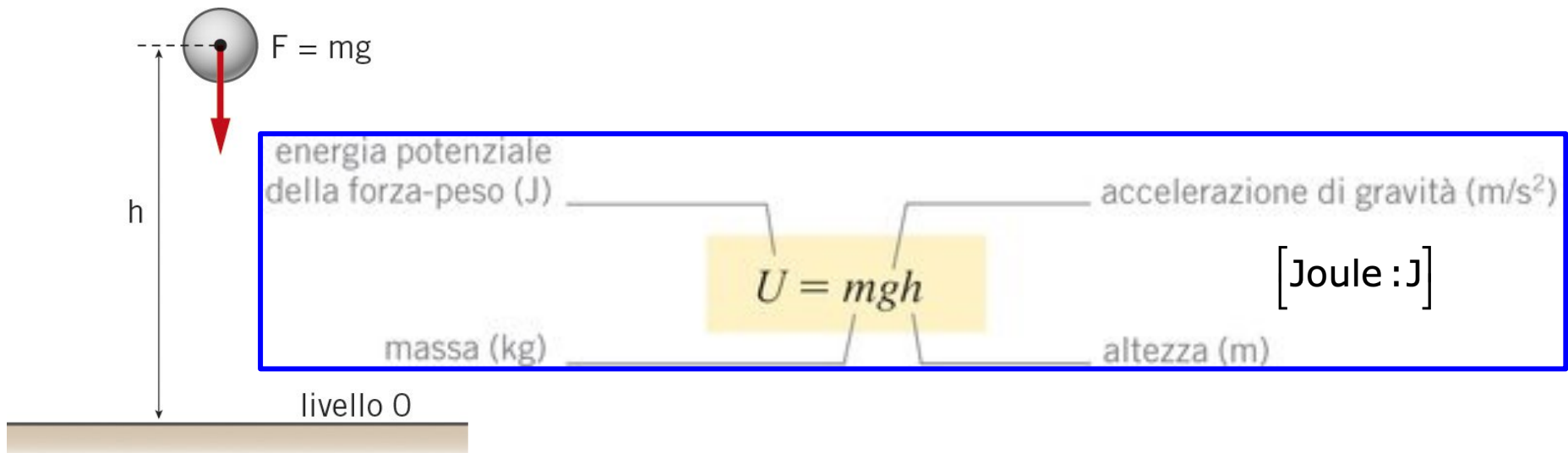
$$L = F_p \cdot s = mgh$$

Il lavoro che il maglio compie per conficcare il palo è direttamente proporzionale alla sua massa e all'altezza da cui è partito.

Possiamo allora dire che, quando il maglio era fermo all'altezza h rispetto alla testa del palo, aveva una capacità di compiere **lavoro uguale a mgh** .

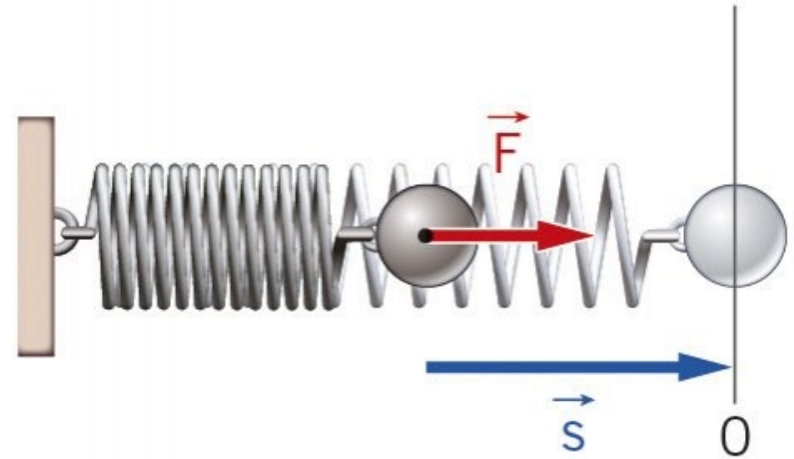
definizione energia potenziale gravitazionale

L'energia potenziale gravitazionale di un corpo è uguale al lavoro compiuto dalla forza-peso quando il corpo stesso si sposta dalla posizione iniziale a quella di riferimento (livello di zero).



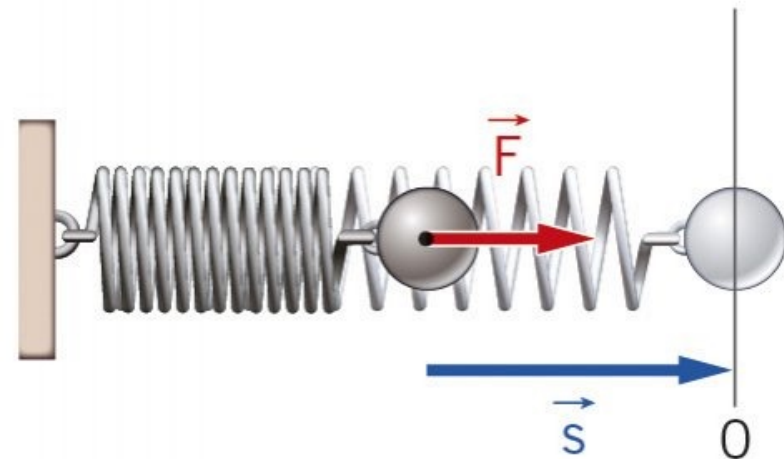
Energia potenziale elastica

Data una molla compressa o allungata, la forza elastica è in grado di compiere lavoro quando viene lasciata andare.



Poiché la **forza elastica** è una **forza conservativa**, possiamo dire che anche una molla deformata **possiede** un'**energia potenziale elastica**, esattamente come un oggetto sollevato rispetto alla quota di riferimento possiede un'energia potenziale gravitazionale.

Scegliamo lo zero dell'energia potenziale della molla nella situazione in cui essa è a riposo. In questo modo possiamo definire l'energia potenziale nel seguente modo:



definizione energia potenziale elastica

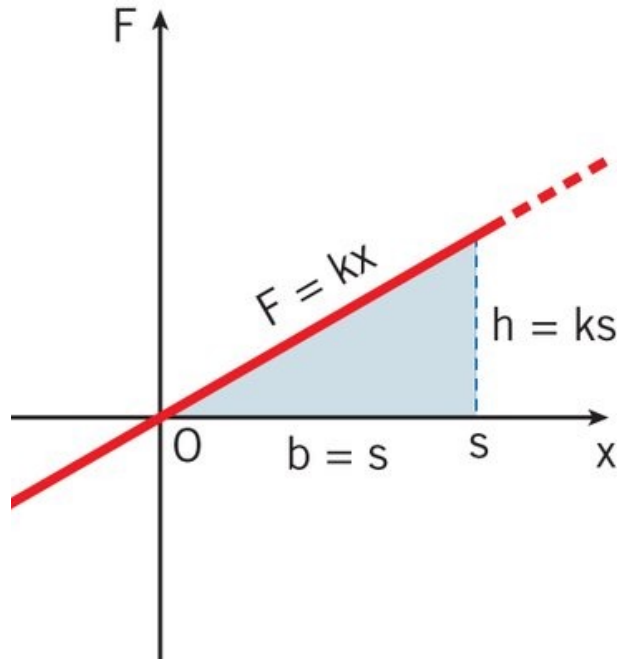
L'energia potenziale elastica di una molla deformata è uguale al lavoro compiuto dalla forza elastica quando la molla si riporta nella sua posizione di riposo (livello di zero).

$$U_e = \frac{1}{2} k s^2$$

energia potenziale elastica (J) ————— costante elastica (N/m)

————— spostamento (m)

Infatti, ricordando che il lavoro è dato dall'area sottesa dalla funzione forza, si ottiene:



La forza elastica $F=kx$ è rappresentata da una retta passante per l'origine, e l'area sottesa è un triangolo. Per cui il lavoro compiuto dalla forza elastica è dato dall'area del triangolo:

$$L = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1}{2}ks^2$$

Questo lavoro non è altro che l'energia potenziale elastica della molla deformata con uno spostamento s .

Definizione generale energia potenziale

L'energia potenziale può essere introdotta per tutte le forze conservative.

Consideriamo un sistema fisico che è soggetto alla forza conservativa **F**. Esso si trova nella condizione iniziale *A* e passa ora nella condizione finale *B*.

definizione energia potenziale

Definiamo la **variazione di energia potenziale**

$$\Delta U = U - U_A$$

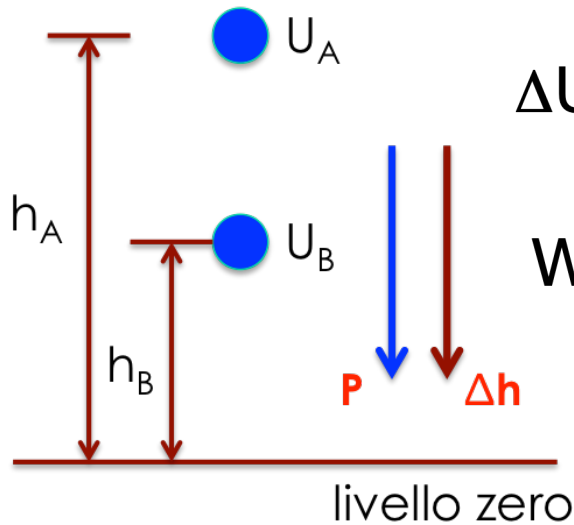
come l'opposto del lavoro fatto dalla forza **F** durante il passaggio dalla posizione *A* alla posizione *B*:

variazione di energia
potenziale (J)

$$\Delta U = -W_{A \rightarrow B}$$

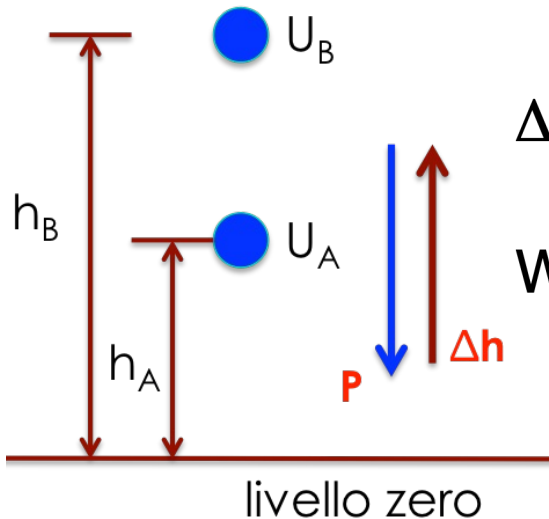
lavoro compiuto
dalla forza conservativa (J)

Infatti, consideriamo le seguenti situazioni:



$$\Delta U = U_B - U_A = mg(h_B - h_A) \xrightarrow{h_B < h_A} \Delta U < 0$$

$$W_{A \rightarrow B} = P \cdot \Delta h \cdot \cos 0^\circ \xrightarrow{\cos 0^\circ = 1} W_{A \rightarrow B} > 0$$



$$\Delta U = U_B - U_A = mg(h_B - h_A) \xrightarrow{h_B > h_A} \Delta U > 0$$

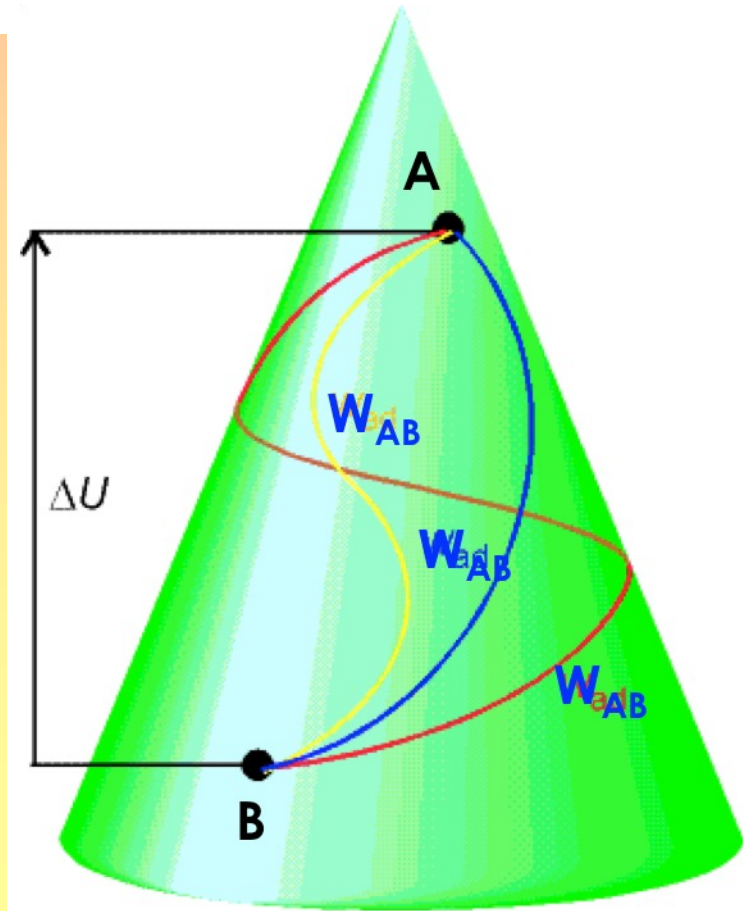
$$W_{A \rightarrow B} = P \cdot \Delta h \cdot \cos 180^\circ \xrightarrow{\cos 180^\circ = -1} W_{A \rightarrow B} < 0$$

In entrambi i casi:

$$\Delta U = - W_{A \rightarrow B}$$

Generalizzando, l'energia potenziale fa parte delle cosiddette **funzioni di stato**.

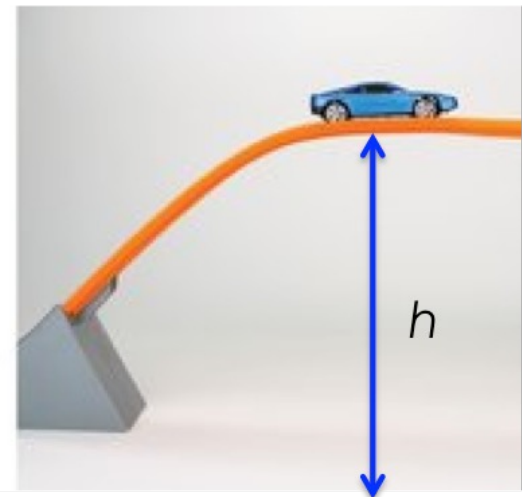
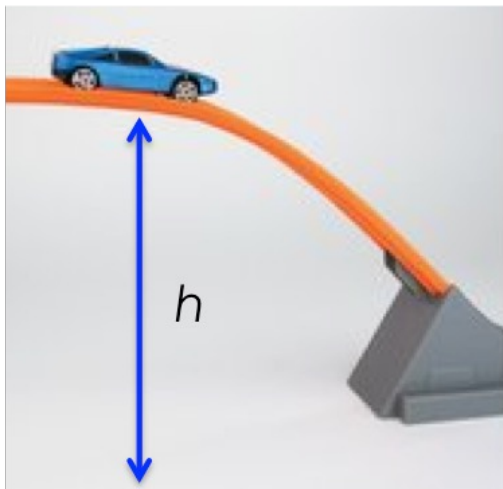
Una **FUNZIONE DI STATO** è una grandezza fisica dipendente soltanto dalle variabili (la posizione nel nostro caso) che servono per descrivere gli stati A e B del sistema fisico, e non dal processo (la traiettoria nel nostro caso) attraverso il quale il sistema passa da A a B.

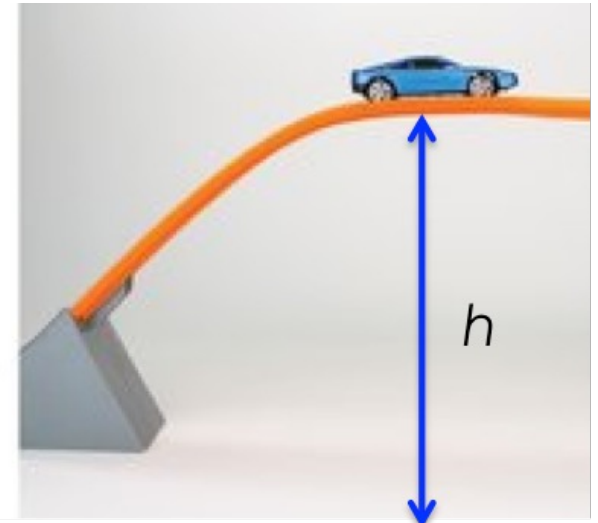
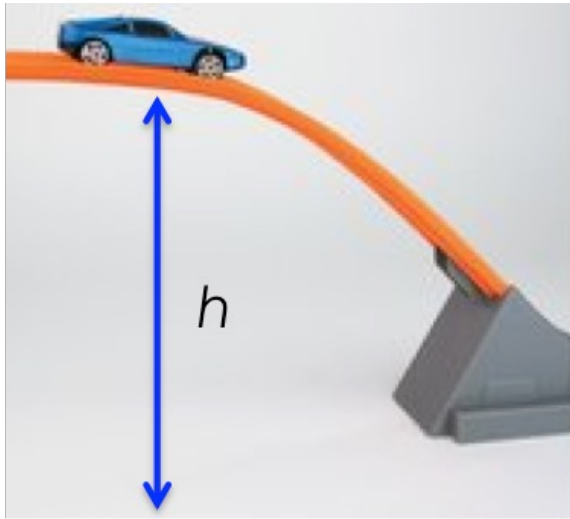


$$\Delta U = U_B - U_A$$

PRINCIPIO CONSERVAZIONE ENERGIA MECCANICA

Realizziamo un esperimento con un carrellino che si muova sotto l'azione di sole forze conservative, come la forza-peso, quindi senza attrito. Esso è lasciato andare lungo il binario a partire da una determinata quota h e, dopo un certo tempo, risale dalla parte opposta raggiungendo la stessa quota.





$$\begin{array}{ccccc} K = 0 & & K = \frac{1}{2}mv^2 & & K = 0 \\ U = mgh & = & U = 0 & = & U = mgh \end{array}$$

Le variazioni di energia cinetica e di energia potenziale non sono casuali: se le forze in gioco sono conservative, durante il moto l'energia cinetica e quella potenziale del carrello variano, ma la loro somma rimane costante.

Questa proprietà così importante suggerisce di definire una nuova grandezza fisica:

$$\text{ENERGIA MECCANICA} = \text{ENERGIA CINETICA} + \text{ENERGIA POTENZIALE}$$

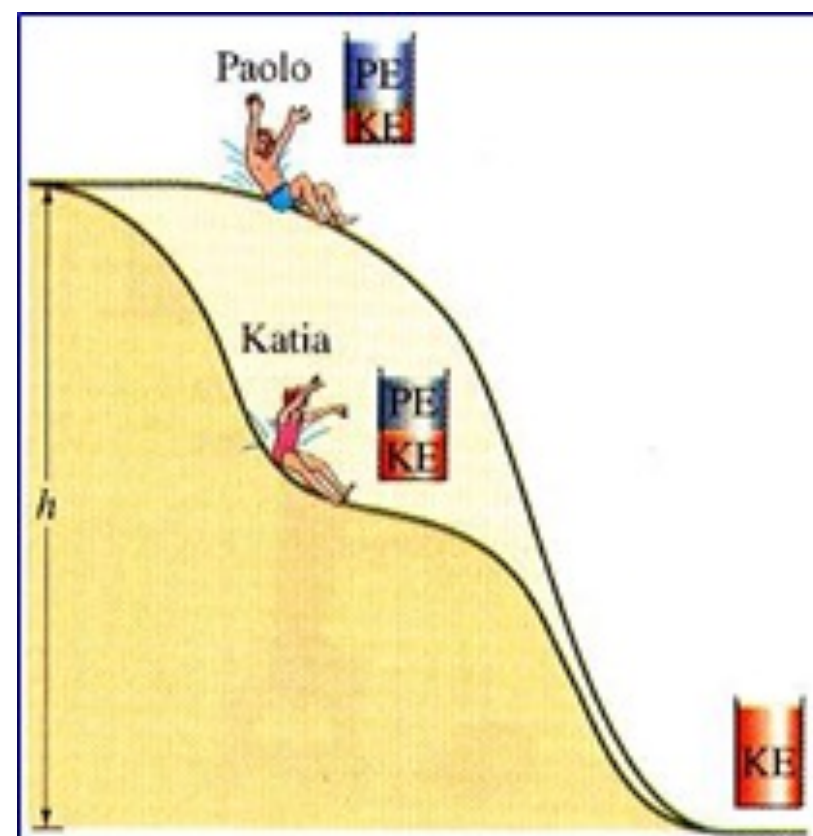
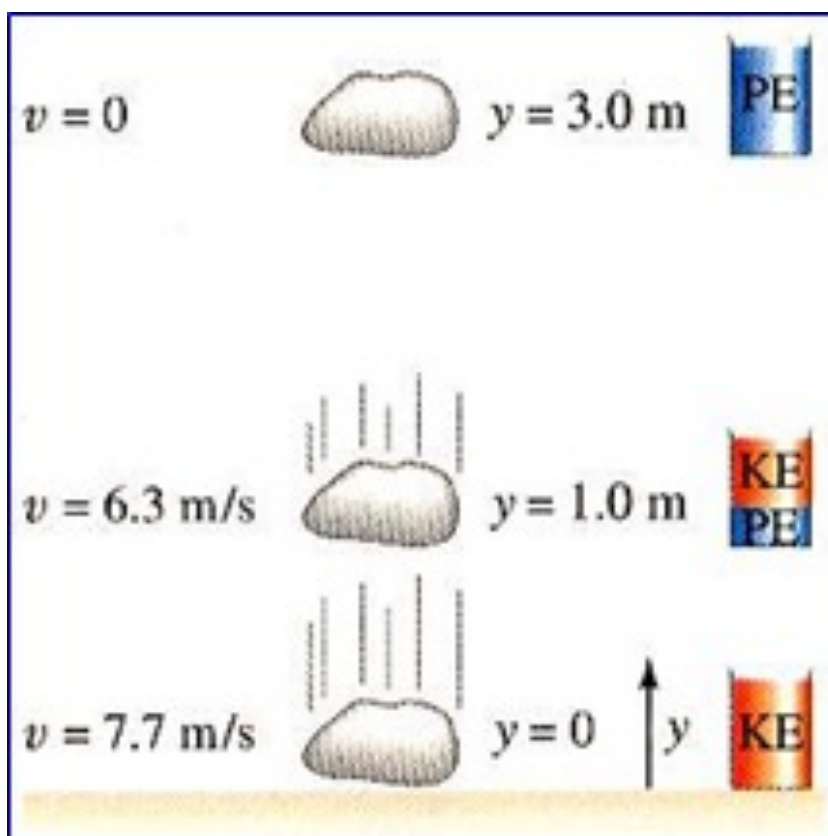
e il seguente principio:

PRINCIPIO CONSERVAZIONE ENERGIA MECCANICA

In un sistema isolato (sistema su cui non agiscono forze esterne) in cui sono presenti soltanto forze conservative l'energia meccanica si conserva, ossia la somma dell'energia potenziale e cinetica iniziale è uguale alla somma dell'energia cinetica e potenziale finale:

The diagram shows the equation $U_i + K_i = U_f + K_f$ centered within a yellow rectangular box. Four lines extend from the corners of this box to labels outside. The top-left line connects to the label "energia potenziale iniziale (J)". The top-right line connects to the label "energia potenziale finale (J)". The bottom-left line connects to the label "energia cinetica iniziale (J)". The bottom-right line connects to the label "energia cinetica finale (J)".

$$U_i + K_i = U_f + K_f$$



energia potenziale
iniziale (J)

energia cinetica
iniziale (J)

$$U_i + K_i = U_f + K_f$$

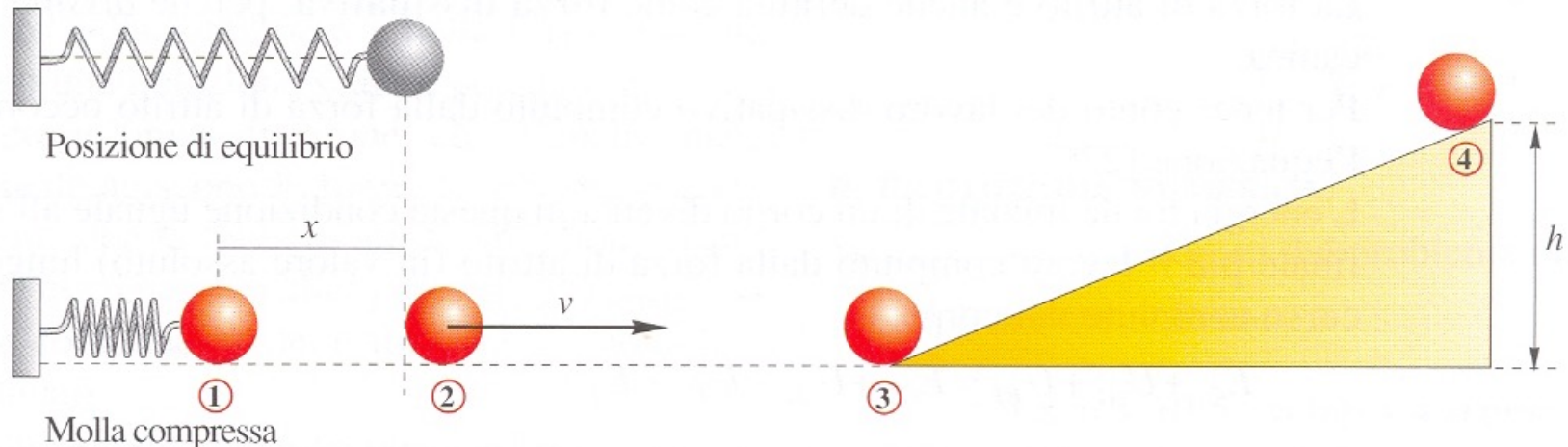
energia potenziale
finale (J)

energia cinetica finale (J)

Esempio

Una molla compressa di 10 cm, tornando alla sua posizione di equilibrio, lancia lungo un piano orizzontale senza attrito, una pallina di massa $m=200\text{g}$. Successivamente la pallina, risalendo lungo un piano inclinato senza attrito, raggiunge l'altezza di 20 cm. Calcolare la costante elastica della molla.

MODELLO FISICO



Possiamo distinguere due diverse *trasformazioni di energia*:

- nella prima l'energia potenziale elastica della molla compressa (1) si trasforma in energia cinetica della pallina che si muove lungo il piano orizzontale (2) con velocità v ;
- nella seconda l'energia cinetica della pallina si trasforma, risalendo il piano inclinato (3), in energia potenziale gravitazionale (4).

■ LEGGI ED EQUAZIONI

In base alla legge generale di conservazione dell'energia meccanica possiamo scrivere:

$$E_C + U_G + U_E = \text{costante}$$

e applicarla separatamente alle due trasformazioni di energia.

Poiché tuttavia il problema ci chiede solamente di determinare la costante elastica della molla (e quindi l'energia potenziale elastica iniziale) conoscendo

l'altezza finale raggiunta dalla pallina (e quindi l'energia potenziale gravitazionale finale) possiamo scrivere semplicemente:

$$\frac{1}{2} kx^2 = mgh$$

poiché inizialmente l'energia è solamente elastica, mentre alla fine è solo gravitazionale.

■ RISOLUZIONE ALGEBRICA

Dalla precedente equazione si può ricavare la costante elastica k :

$$k = \frac{2mgh}{x^2}$$

■ RISOLUZIONE NUMERICA

Sostituendo i dati forniti dal problema si ottiene:

$$k = \frac{2mgh}{x^2} = \frac{2 \cdot 0,2 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 0,2 \text{ m}}{(0,1 \text{ m})^2} \cong 78 \text{ N/m}$$

PRINCIPIO CONSERVAZIONE ENERGIA TOTALE

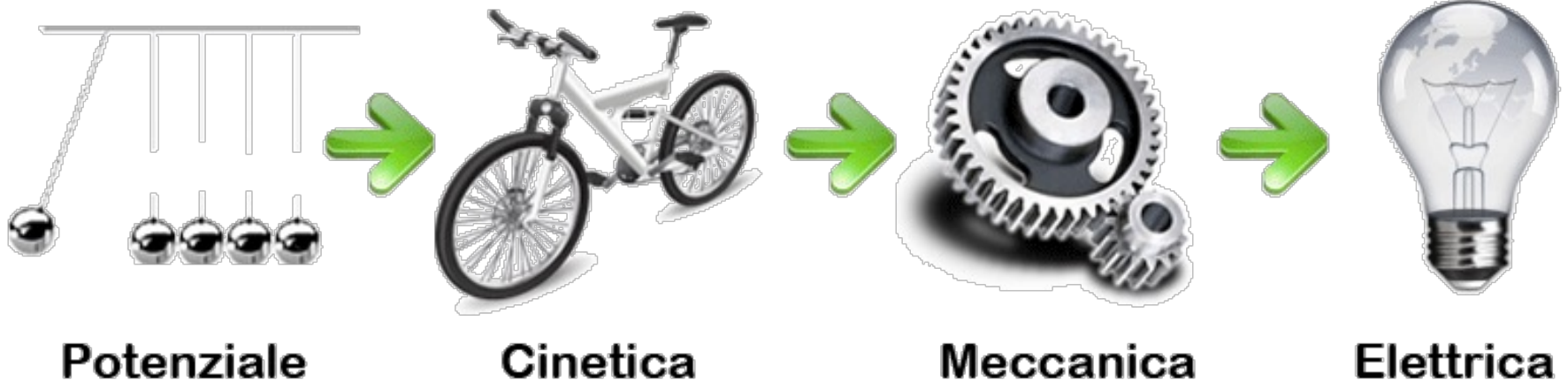
Durante una frenata, tutta l'energia cinetica si riduce a zero, ma non c'è nessuna energia potenziale che aumenta, in quanto le forze in gioco (forza di attrito) sono non conservative: a causa dell'attrito dei freni, l'energia meccanica del sistema non si conserva, ma si dissipa.

Però, se potessimo misurare con precisione la temperatura dei freni, delle ruote e dell'aria prima e dopo la frenata vedremmo che essa è aumentata, anche se di pochissimo: ciò significa che l'energia meccanica non è sparita, ma è stata trasformata in un'altra forma di energia (calore), pari proprio a quella meccanica.

Allora possiamo affermare il seguente principio:

PRINCIPIO CONSERVAZIONE ENERGIA TOTALE

In un sistema isolato l'energia totale si conserva.



L'energia si trasforma

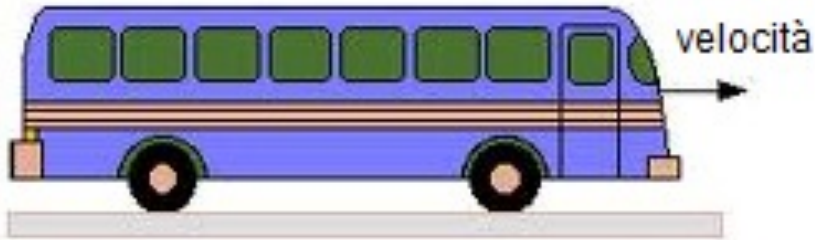
FISICA

MECCANICA: Principio conservazione quantità di moto

*Autore: prof. Pappalardo Vincenzo
docente di Matematica e Fisica*



LA QUANTITA' DI MOTO



Massa x Velocità = **Q. di Moto**

Un autobus può avere una grande quantità di moto anche se possiede bassa velocità, poichè ha una grande massa

QUANTITA' DI MOTO

Consideriamo un corpo di massa m che si muove con velocità $\mathbf{v}$. Definiamo quantità di moto $\mathbf{p}$ il prodotto della massa per la velocità:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Diagram illustrating the equation $\vec{p} = m\vec{v}$ with labels for the variables:

- $\vec{p}$ is labeled as "quantità di moto (kg·m/s)".
- m is labeled as "massa (kg)".
- $\vec{v}$ is labeled as "velocità (m/s)".

La quantità di moto è un vettore che ha la stessa direzione e lo stesso verso del vettore velocità.

Con l'introduzione della quantità di moto, il 2° principio della dinamica può essere scritto nel seguente modo:

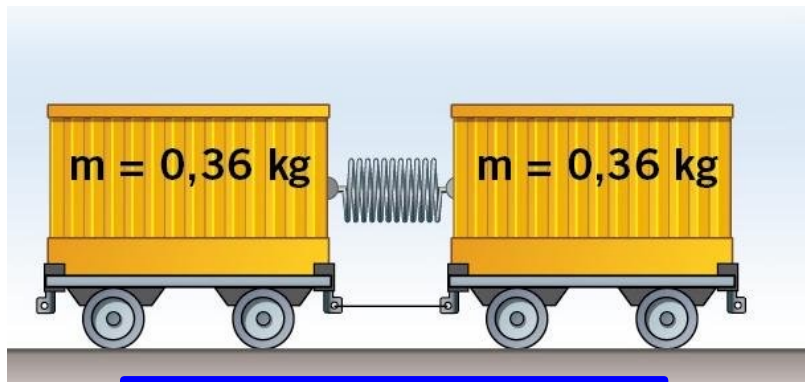
$$\vec{F} = m\vec{a} \xrightarrow{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}} \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \xrightarrow{d\vec{p} = m d\vec{v}} \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

2° principio della dinamica

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

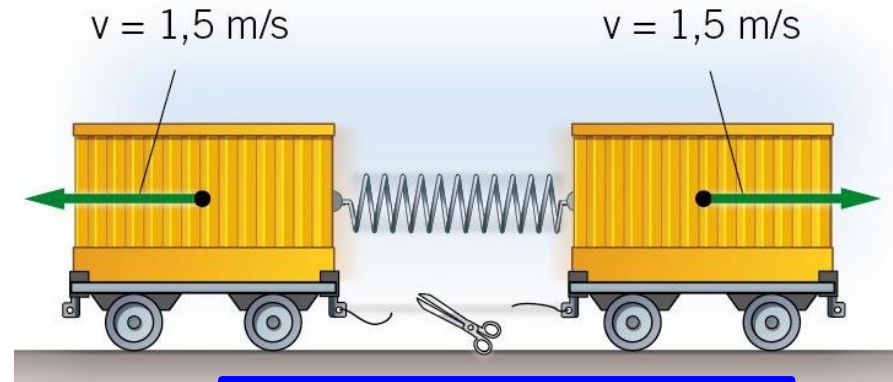
PRINCIPIO CONSERVAZIONE QUANTITA' DI MOTO

Esaminiamo, dal punto di vista della quantità di moto, un esperimento di disintegrazione, in cui un unico oggetto «esplode» in due frammenti.



$$p_{Ti} = p_{1i} + p_{2i} = 0$$

Due carrelli di massa uguale, collegati da una molla, sono tenuti fermi da un filo. Ciascun carrello ha quantità di moto zero, perché è fermo.



$$p_{Tf} = p_{1f} + p_{2f} = 0$$

Dopo aver tagliato il filo, i due carrelli si allontanano con velocità uguali in modulo. I due carrelli hanno quantità di moto dello stesso valore ma di verso opposto.

La quantità di moto totale dei due carrelli era zero all'inizio e rimane zero alla fine (somma di vettori opposti); quindi si conserva.

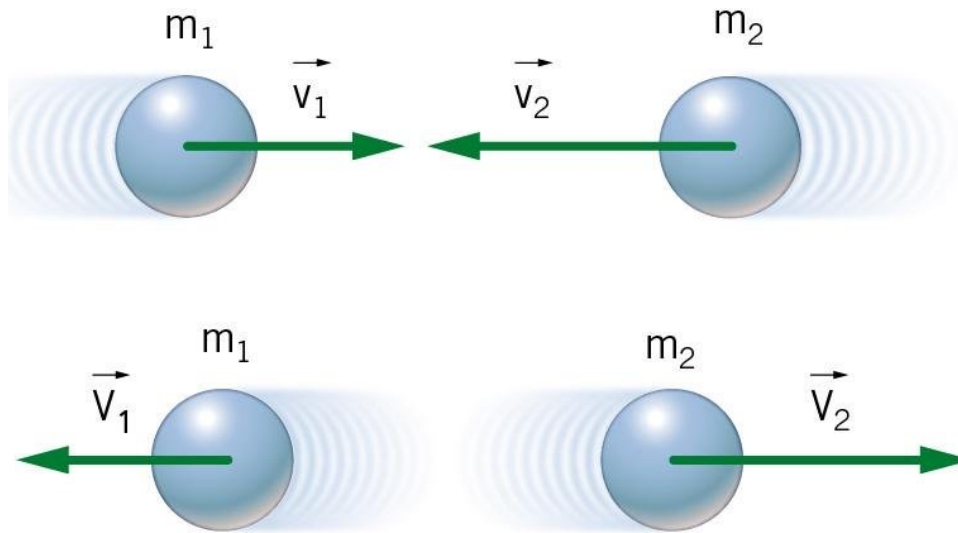
L'esperimento può essere ripetuto per carrelli di diversa massa e in diverse condizioni dinamiche prima e dopo, ma il risultato non cambia, ossia la quantità di moto totale si conserva. Si noti bene che le quantità di moto di ciascun corpo possono cambiare; ciò che rimane invariata è la quantità di moto totale del sistema fisico (i due carrelli).

Considerando i due carrelli come parti di un unico sistema di corpi, possiamo enunciare il seguente principio:

PRINCIPIO CONSERVAZIONE QUANTITA' DI MOTO

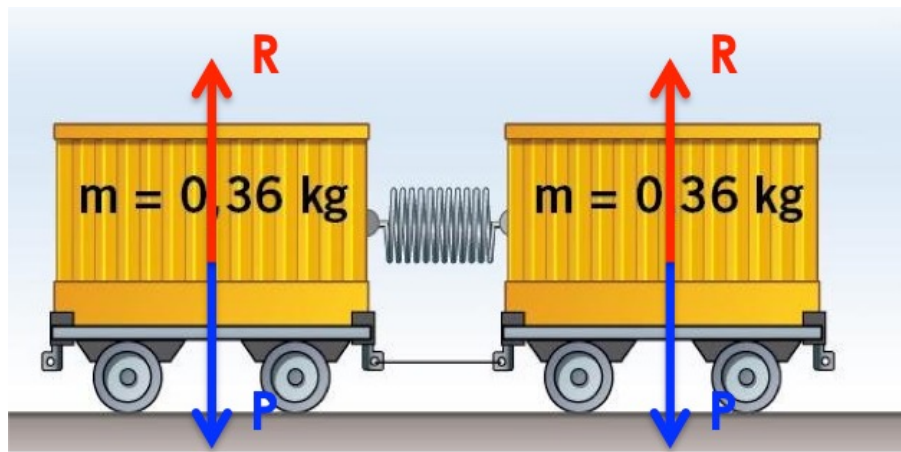
Se su un sistema non agiscono forze esterne, la quantità di moto totale del sistema si conserva:

$$p_{Ti} = p_{Tf} \Rightarrow p_T = \text{costante}$$

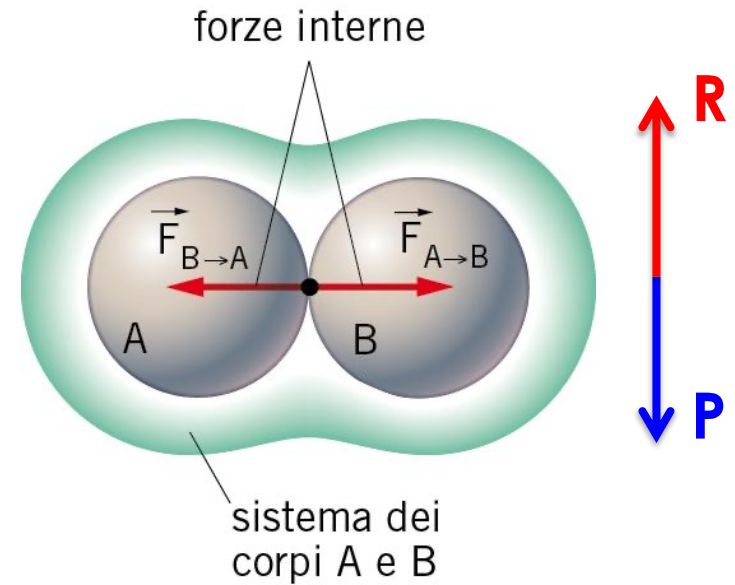


$$\begin{aligned}\vec{P}_{\text{prima urto}} &= \vec{P}_{\text{dopo urto}} \\ \vec{P}_{T\text{iniziale}} &= \vec{P}_{T\text{finale}} \\ m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 &= m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2\end{aligned}$$

La conservazione della quantità in un sistema isolato è una conseguenza dei principi della dinamica.



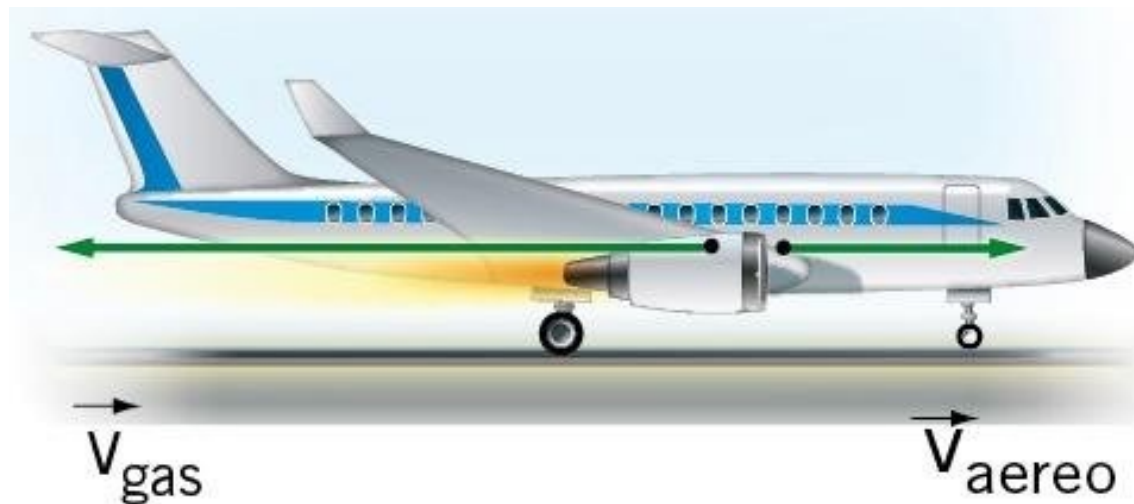
Nei due carrelli agisce solo la forza elastica della molla, che è interna al sistema. La forza esterna è uguale a zero, perché la forza-peso dei carrelli è controbilanciata dalla reazione vincolare del piano.



Nell'urto agiscono solo le forze di contatto, che sono interne al sistema. La forza esterna è uguale a zero, perché la forza-peso delle palline è controbilanciata dalla reazione vincolare del piano.

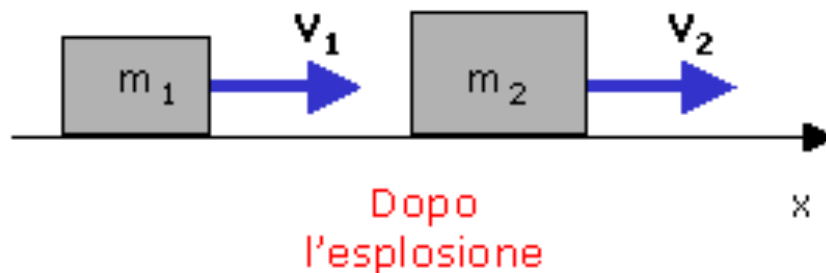
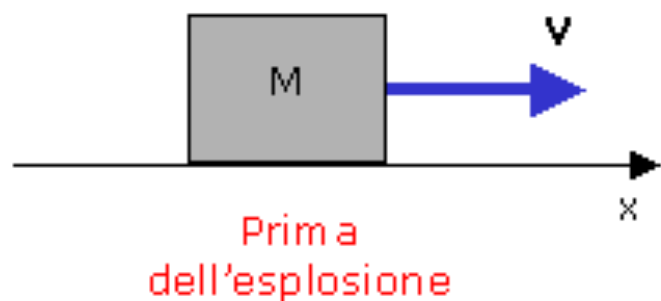
Esempio

Sullo questo principio è basato il funzionamento dei motori a reazione. Quando l'aereo è fermo sulla pista, la sua quantità di moto totale (compresa quella del carburante e dell'aria contenuta nei motori) è pari a zero. Quando i motori vengono accesi, essi aspirano aria dal davanti ed espellono i gas combusti all'indietro a grande velocità. Per la conservazione della quantità di moto l'aereo si muove in avanti.



Esempio

Una scatola di massa $m=6$ kg scivola con velocità $v=4$ m/s su un pavimento privo di attrito nel verso positivo dell'asse x . Improvvisamente esplode in due pezzi. Un pezzo, di massa $m_1=2$ kg, si muove nel verso positivo dell'asse x con velocità $v_1=8$ m/s. Qual è la velocità del secondo pezzo di massa $m_2=4$ kg?



La forza peso che agisce sulle masse è controbilanciata dalle reazioni vincolari del pavimento, per cui non possono influenzare la componente orizzontale della quantità di moto del sistema.

Pertanto è possibile applicare il principio di conservazione della quantità di moto:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow m\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \Rightarrow v_2 = \frac{mv - m_1v_1}{m_2} = 2,0 \text{ m / s}$$

Abbiamo rappresentato l'espressione finale attraverso i moduli delle velocità in quanto il moto è unidimensionale. Il valore della velocità è positivo per cui il moto del pezzo m_2 dopo l'urto avviene lungo l'asse positivo delle x .

IMPULSO DI UNA FORZA

La seconda legge della dinamica può essere riscritta dal punto di vista della quantità di moto:

TEOREMA DELL'IMPULSO

La variazione della quantità di moto è uguale all'impulso della forza che agisce su un corpo:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{I}$$

La quantità vettoriale $\mathbf{I}$ si chiama *impulso*, definito come il prodotto della forza $\mathbf{F}$ per l'intervallo di tempo Δt durante il quale essa agisce:

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

Esempio: Perché, quando si cade, si attutisce l'urto piegandosi sulle gambe?

Quando si cade, si acquisisce una grande quantità di moto, grazie all'aumento della velocità, che subito dopo l'urto deve diventare zero, in quanto ci si ferma (velocità zero).



Per il teorema dell'impulso: $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{I} = \mathbf{F} \Delta t$

A parità di $\Delta \mathbf{p}$, quanto più è grande il tempo Δt in cui avviene l'impatto, tanto più è piccola la forza dell'urto, e viceversa.

Analogamente, per ridurre la forza d'urto negli incidenti automobilistici, si aumenta il tempo dell'impatto mediante gli airbag, che fanno diminuire più lentamente la quantità di moto del passeggero che sta a bordo.

Esempio: Perché con un colpo di karate si riesce a spezzare una pila di mattoni?



Perché si esercita una grande forza in un tempo molto piccolo.

Infatti, la mano del karateka acquisisce una grande quantità di moto, che subito dopo l'urto diventa zero.

Come prima: $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{I} = \mathbf{F} \Delta t$

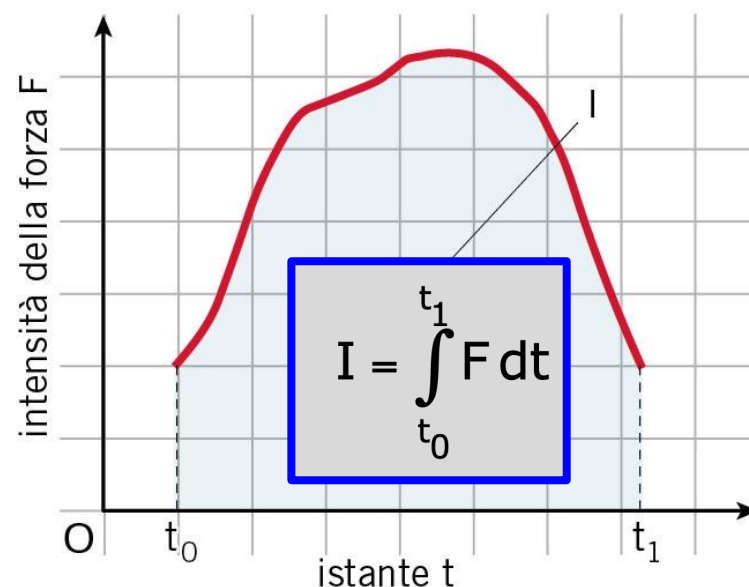
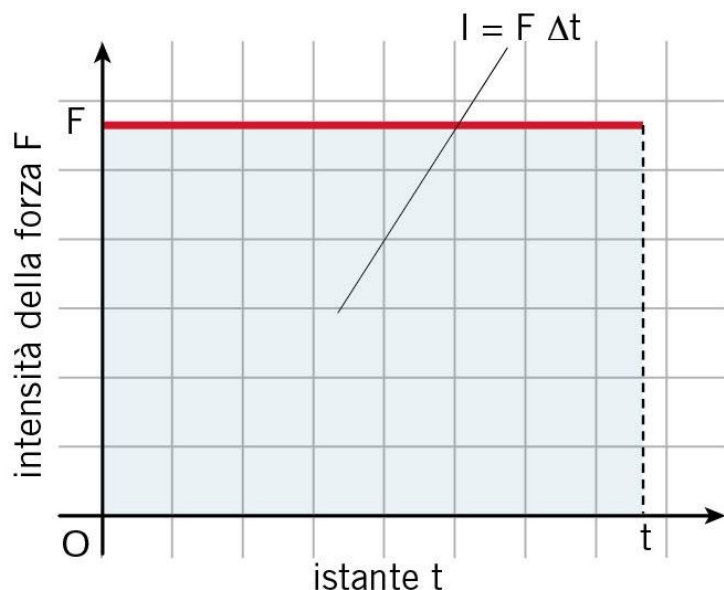
Però, in questo caso, vogliamo che la forza sia molto grande. Per questo motivo bisogna esercitarla in un tempo molto piccolo: il colpo deve essere molto secco.

osservazione

La formula:

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

vale solo se nell'intervallo di tempo Δt la forza $\mathbf{F}$ è costante.

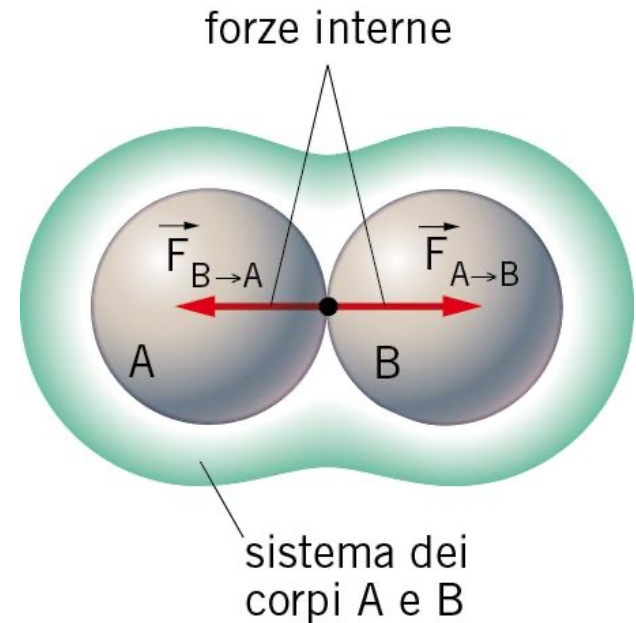


In generale: se $\mathbf{F}$ è variabile, il valore dell'impulso è dato dall'area sottesa dalla funzione forza.

URTI UNIDIMENSIONALI

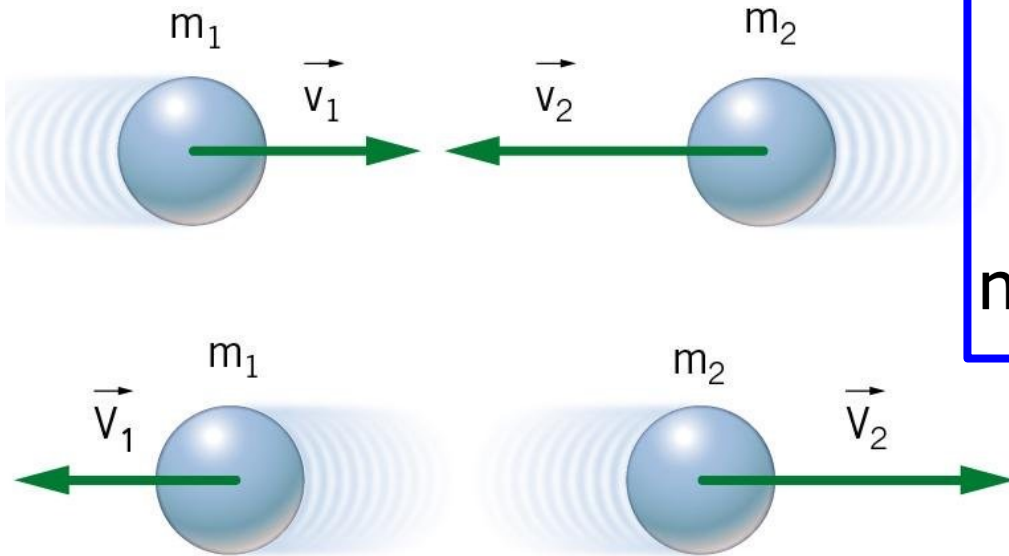
Durante un urto, tra i due oggetti che collidono si generano forze intense che agiscono per un tempo molto breve.

Così, nella breve durata di un urto le altre forze presenti (come l'attrito radente o quello con l'aria) risultano trascurabili rispetto a quelle di interazione (che sono forze interne al sistema). Possiamo quindi dire che:



durante un urto i due corpi che collidono si comportano come un sistema isolato e, quindi, la loro quantità di moto totale si conserva.

Il caso più semplice di urto è quello unidimensionale. In questo caso possiamo evitare di usare le velocità vettoriali; al loro posto utilizziamo i loro valori scalari (con segno positivo o negativo) come abbiamo fatto nel caso dei moti rettilinei.



$$\vec{P}_{\text{prima urto}} = \vec{P}_{\text{dopo urto}}$$

$$\vec{P}_{T\text{iniziale}} = \vec{P}_{T\text{finale}}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2$$

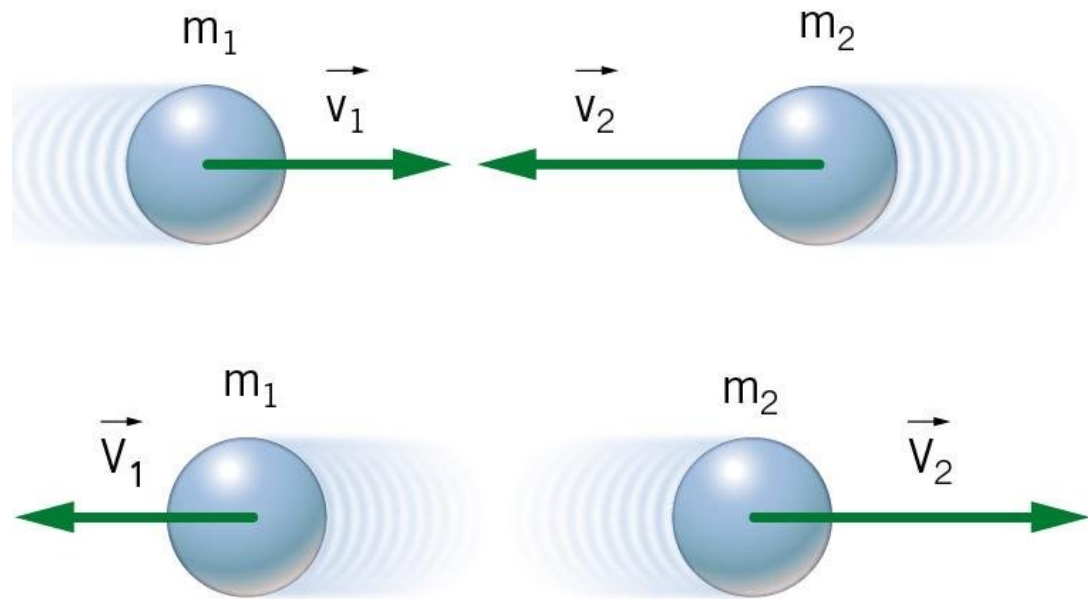
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2$$

Dal punto di vista matematico, note le velocità iniziali (v_1, v_2) e le masse (m_1, m_2), abbiamo due incognite (le velocità finali V_1 e V_2) ed una sola equazione; quindi il problema non è determinato e, per la sua risoluzione, occorrono altre informazioni.

Nel seguito vedremo i due casi più semplici in cui il problema dell'urto risulta determinato: quello dell'**urto elastico** e quello dell'**urto completamente anelastico**.

Urto elastico

Un urto si dice **elastico** se in esso si conserva, oltre alla quantità di moto, anche l'energia cinetica totale dei corpi che interagiscono.

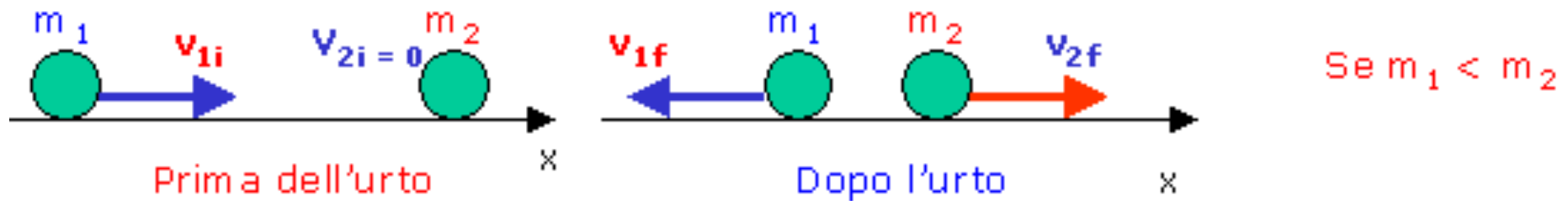


$$\begin{cases} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \end{cases}$$

Il sistema di equazioni è determinato perché contiene due equazioni e due incognite.

Esempio

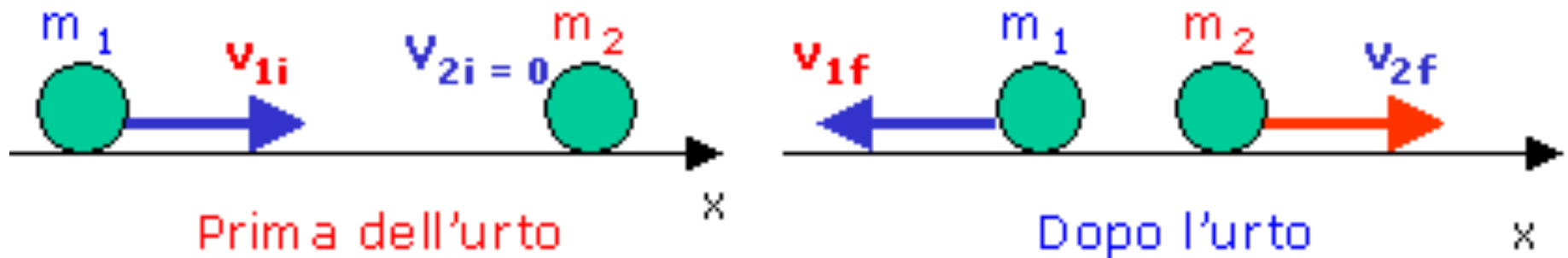
La sfera 1, con massa $m_1=30\text{g}$ e velocità iniziale $v_{1i}=1,25\text{m/s}$, urta elasticamente la sfera 2, di massa $m_2=75\text{g}$ ed inizialmente ferma $v_{2i}=0\text{m/s}$. Calcolare le velocità delle sfere dopo l'urto.



Poiché siamo in presenza di urto elastico, possiamo utilizzare il principio di conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica (due equazioni) per calcolare le velocità dopo l'urto (due incognite):

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + 0 = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{soluzione sistema}} \begin{cases} v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} = -0,54 m / s \\ v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} = 0,72 m / s \end{cases}$$

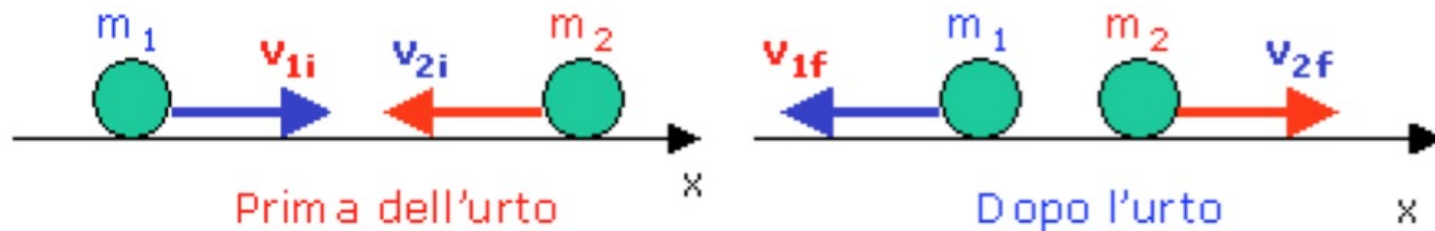
Il segno meno della velocità della sfera 1 dopo l'urto indica che si sta muovendo verso sinistra, in direzione opposta alla sfera 2.



urti elastici unidimensionali: vari casi

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} & \text{conservazione quantità di moto} \\ \frac{1}{2} m v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 & \text{conservazione energia cinetica} \end{cases}$$

Bersaglio mobile $v_{2i} \neq 0$



$$(1) \quad v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{2i}$$

$$(2) \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{2i}$$

Bersaglio fisso $v_{2i}=0$

❖ L'equazione (1) diventa:

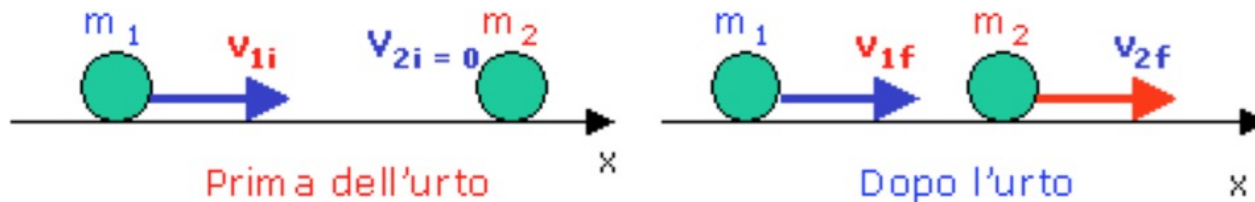
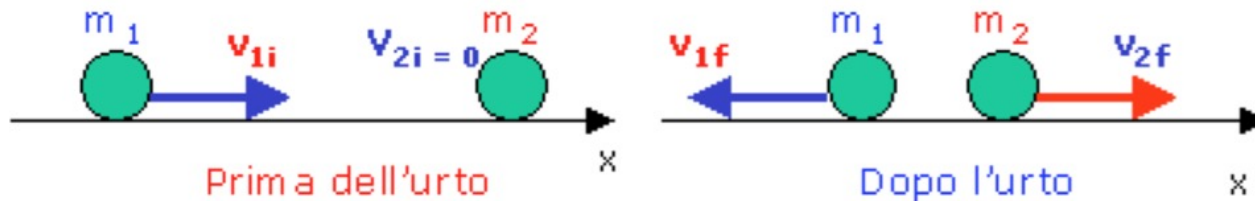
$$(3) \quad v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i}$$

dove risulta che: v_{1f} è positiva, ossia il corpo di massa m_1 prosegue in avanti, se $m_1 > m_2$;
 v_{1f} è negativa, ossia il corpo di massa m_1 prosegue all'indietro, se $m_1 < m_2$;

❖ L'equazione (2) diventa:

$$(4) \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i}$$

risulta che v_{2f} è sempre positivo, ossia il bersaglio di massa m_2 si muove sempre in avanti.

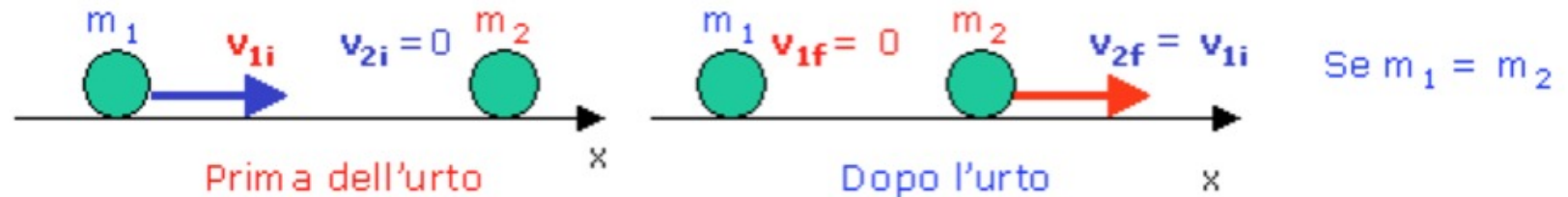


Bersaglio fisso $v_{2i}=0$ e masse uguali $m_1=m_2$

❖ Le equazioni (3) e (4) diventano:

$$v_{1f} = 0 \quad v_{2f} = v_{1i}$$

dove risulta che il corpo m_1 si arresta sul punto dell'urto, mentre il corpo m_2 si allontana alla velocità iniziale del corpo m_1 .

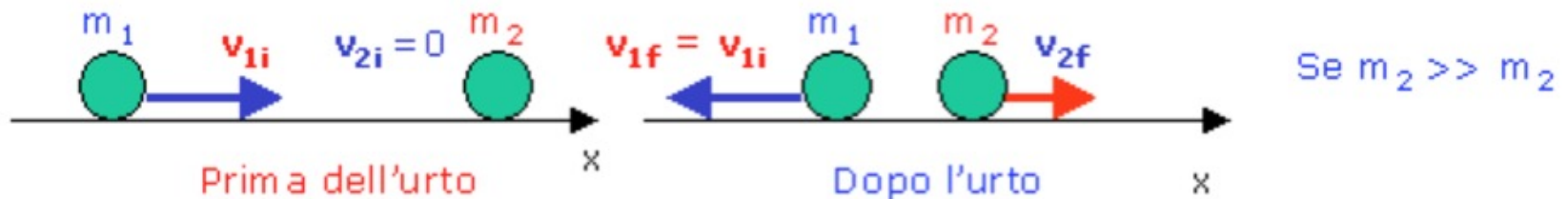


Bersaglio fisso $v_{2i}=0$ e massiccio $m_2 \gg m_1$

❖ Le equazioni (3) e (4) diventano:

$$v_{1f} \approx -v_{1i} \quad v_{2f} \approx \left(\frac{2m_1}{m_2} \right) \cdot v_{1i}$$

dove risulta che il corpo m_1 rimbalza all'indietro a velocità invariata; il corpo m_2 si muove in avanti molto lentamente.

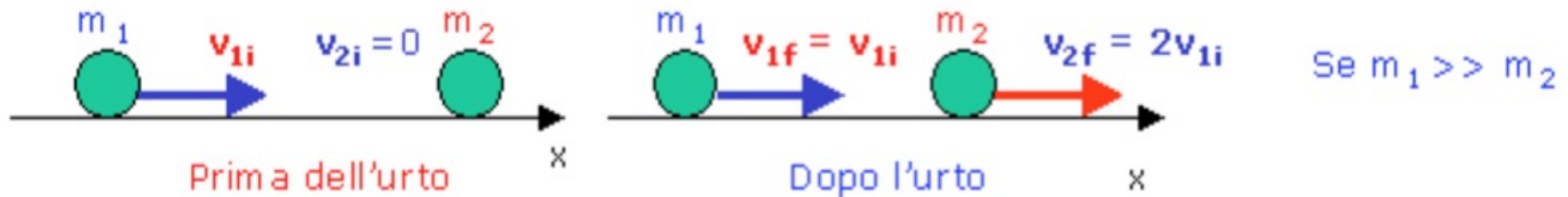


Bersaglio fisso $v_{2i}=0$ e proiettile massiccio $m_1 \gg m_2$

❖ Le equazioni (3) e (4) diventano:

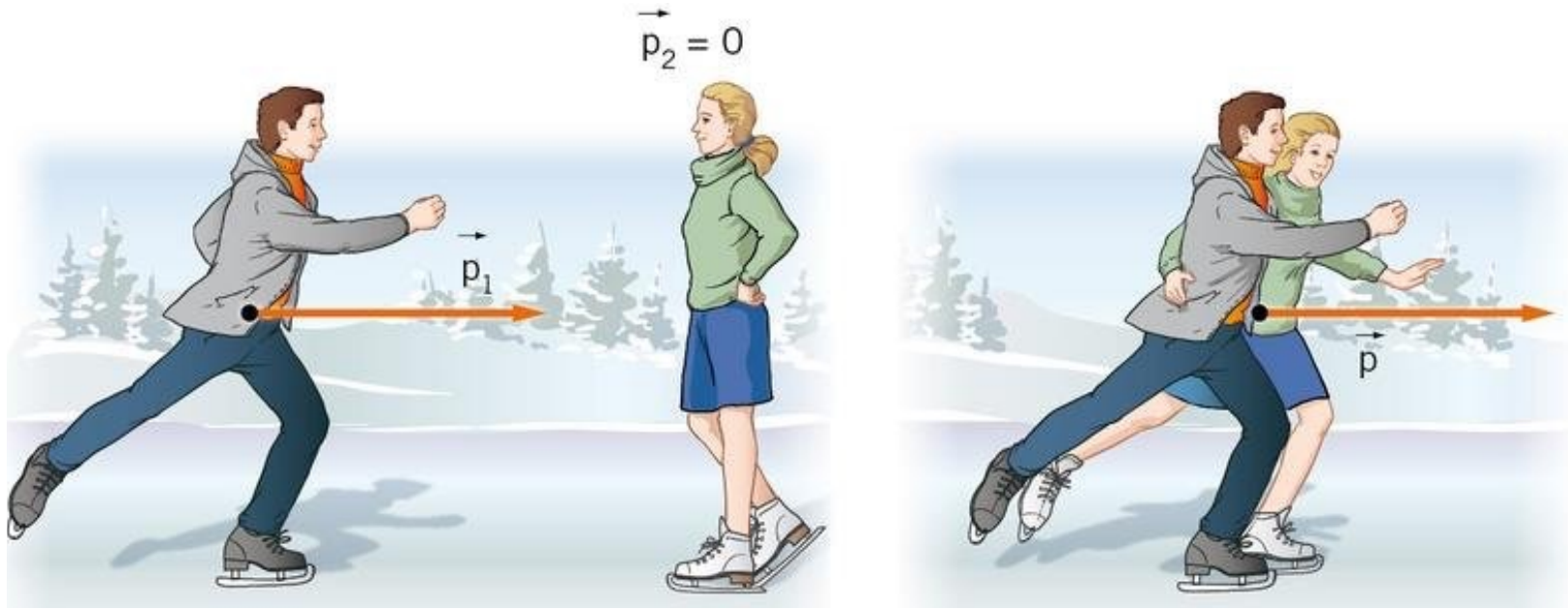
$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad v_{2f} \approx 2v_{1i}$$

dove risulta che il corpo m_1 prosegue praticamente indisturbato nel suo moto in avanti, mentre il corpo m_2 scatta in avanti a velocità doppia di quella del corpo m_1 .



Urto completamente anelastico

Un pattinatore si avvicina a una pattinatrice ferma e, dopo l'urto, i due pattinatori si allontanano insieme.



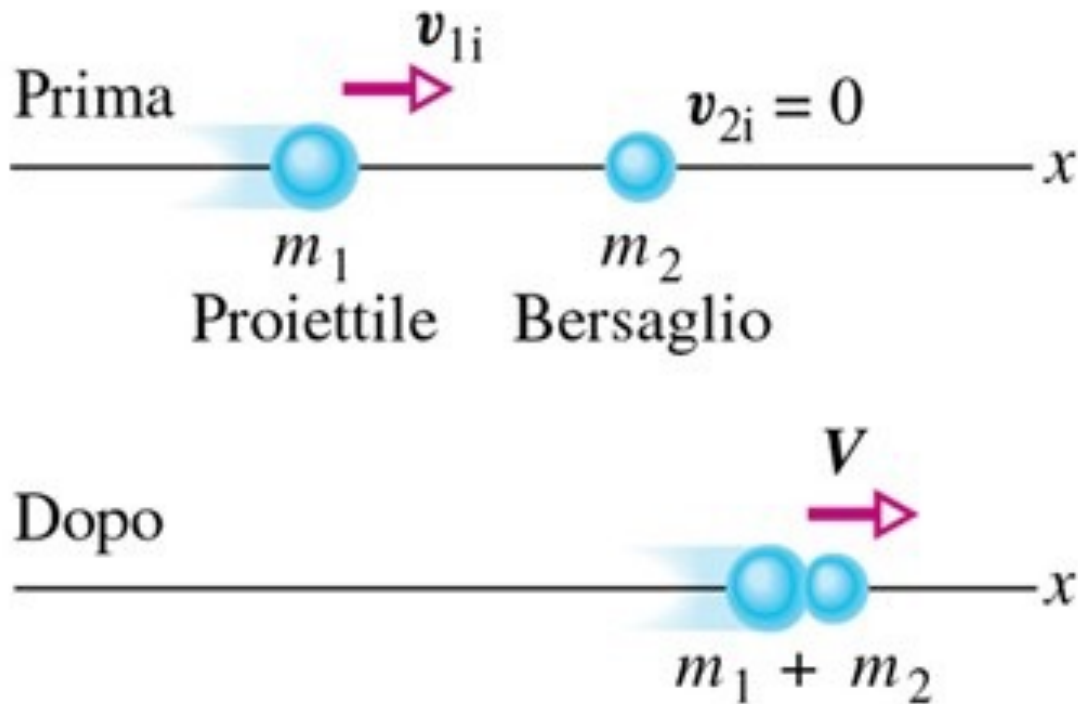
Urti di questo tipo, in cui i due oggetti che collidono rimangono uniti dopo l'urto, si dicono **completamente anelastici**.

In un urto
**completamente
anelastico** la velocità
finale dei due corpi è
determinata dalla sola
conservazione della
quantità di moto.

$$P_{Ti} = P_{Tf}$$

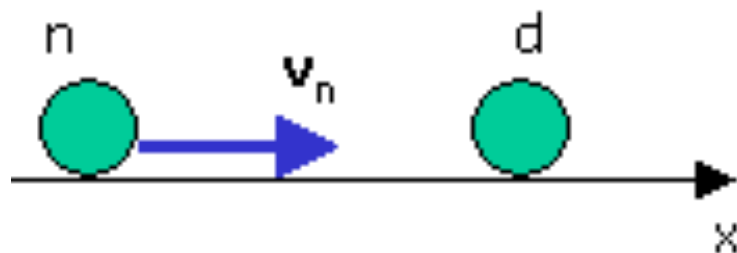
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V$$

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

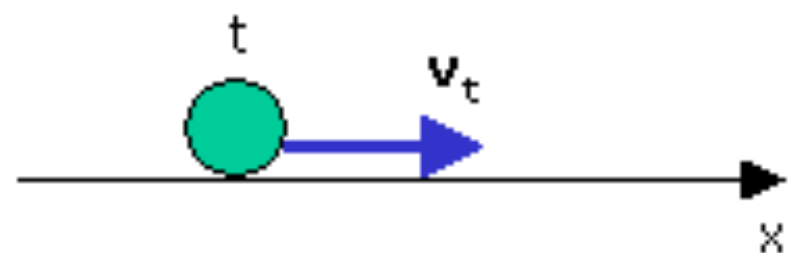


Esempio

Un nucleo di deuterio ($m_d = 3,347 \cdot 10^{-27}$ kg), inizialmente fermo, cattura un neutrone ($m_n = 1,675 \cdot 10^{-27}$ kg) che sta muovendosi alla velocità $v_n = 10^6$ m/s, originando un nucleo di trizio. Calcolare la velocità del nucleo di trizio.



Prima dell'urto

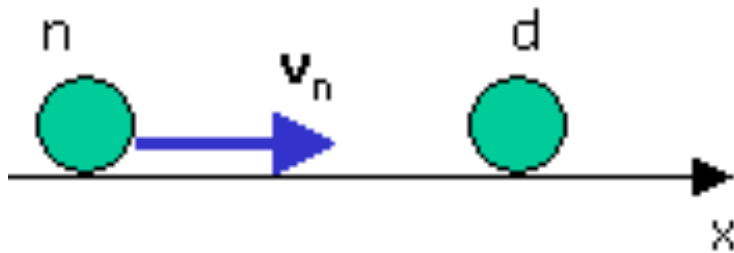


Dopo l'urto

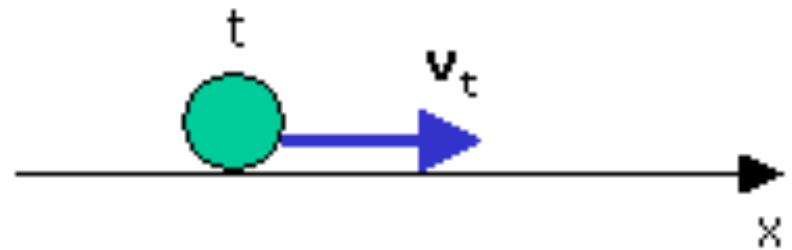
Si tratta di un urto completamente anelastico, per cui possiamo applicare solo il principio di conservazione della quantità di moto, che basta per rispondere al quesito posto dal problema:

$$\vec{P}_{Ti} = \vec{P}_{Tf} \Rightarrow m_n \cdot \vec{v}_n + 0 = (m_n + m_d) \cdot v_t \Rightarrow v_t = \frac{m_n}{m_n + m_d} \cdot v_n =$$

$$\frac{1,675 \cdot 10^{-27}}{1,675 \cdot 10^{-27} + 3,347 \cdot 10^{-27}} \cdot 10^6 = 3,33 \cdot 10^5 \text{ m / s}$$



Prima dell'urto



Dopo l'urto

Esempio: il pendolo balistico

Il **pendolo balistico** è usato per misurare la velocità dei proiettili

- E' un urto completamente anelastico (il proiettile penetra nel blocco):

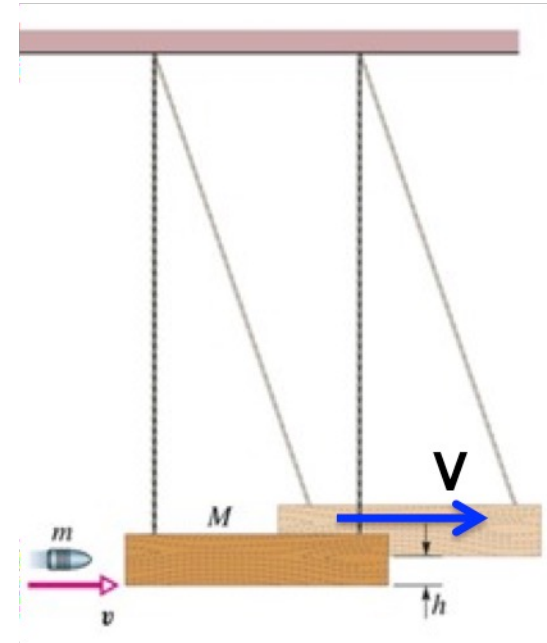
$$\vec{P}_{Ti} = \vec{P}_{Tf} \Rightarrow mv + 0 = (m + M)V \Rightarrow v = \frac{m + M}{m} \cdot V$$

- Il sistema blocco+proiettile oscilla, conservando la sua energia meccanica:

$$\frac{1}{2}(M + m)V^2 = (M + m)gh \xrightarrow{\text{da cui}} V = \sqrt{2gh}$$

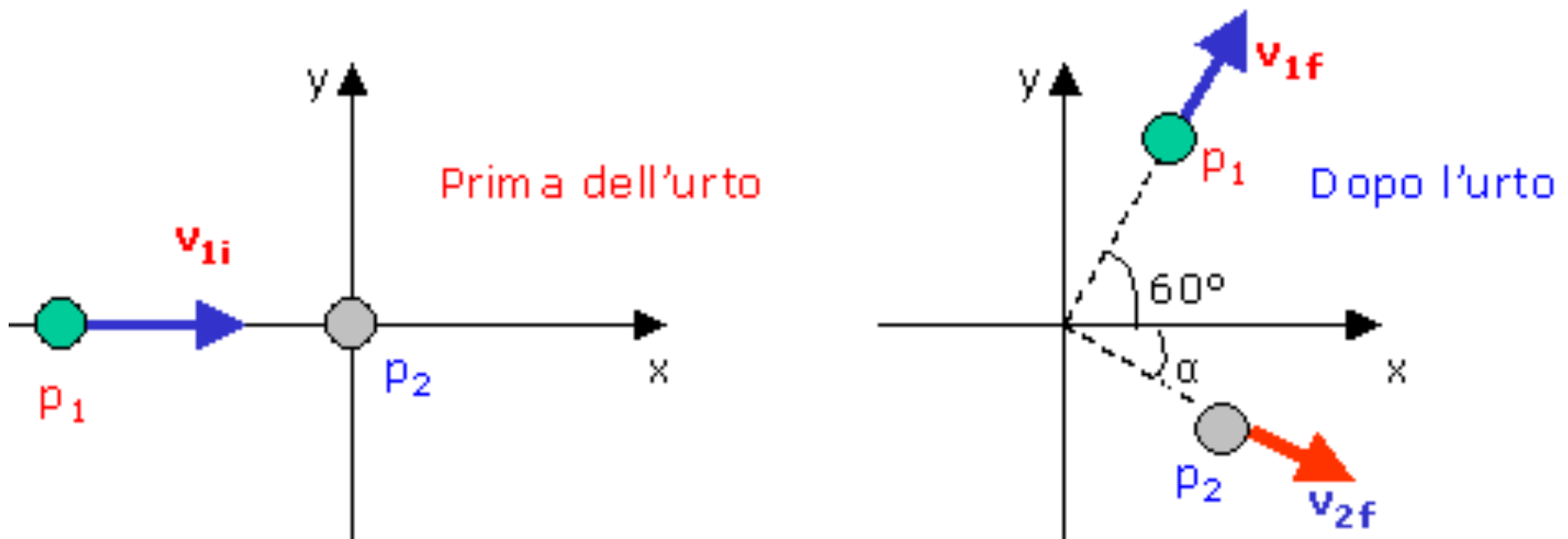
- Quindi:

$$v = \frac{m + M}{m} \cdot \sqrt{2gh}$$



URTI BIDIMENSIONALI

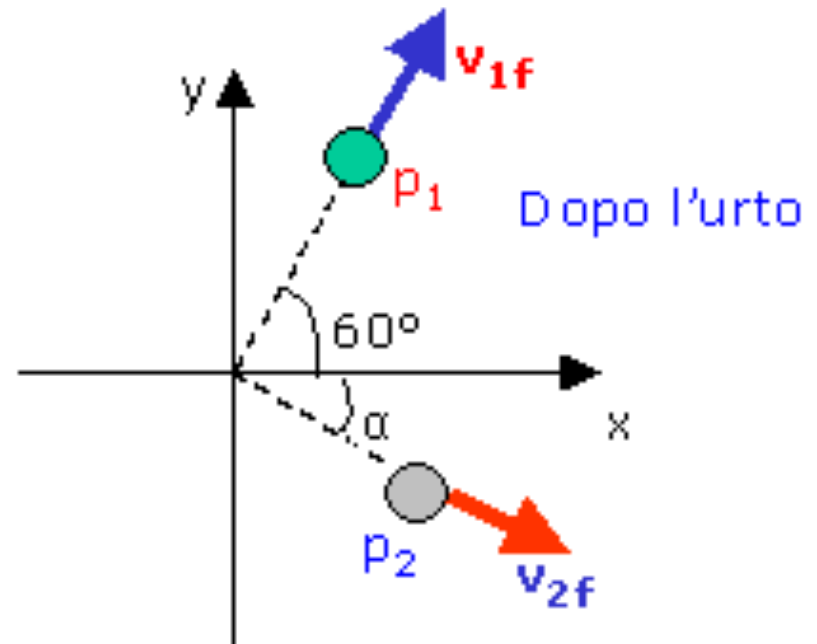
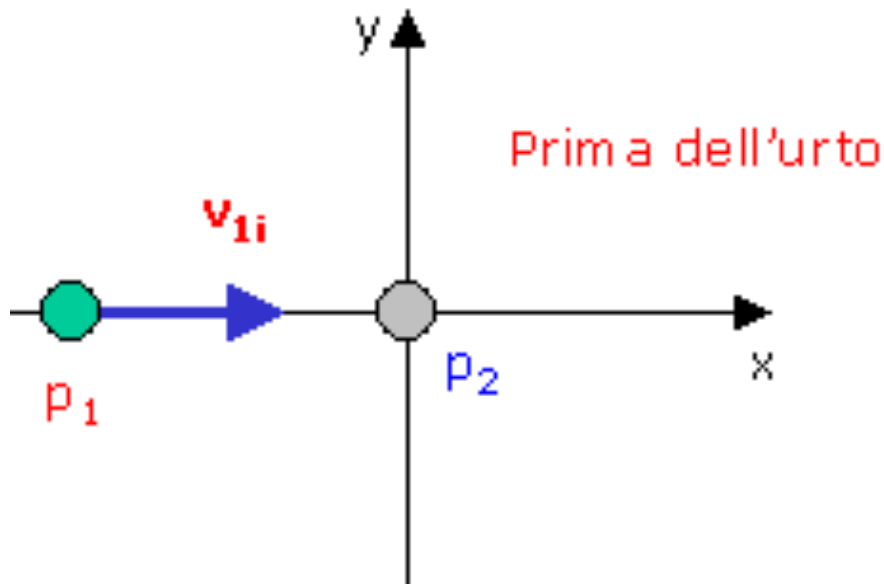
L'urto tra due oggetti nel piano (urto bidimensionale) o nello spazio (urto tridimensionale) è più difficile da trattare rispetto agli urti unidimensionali.



Studiamo gli urti elastici ed anelastici tra due oggetti che si muovono nel piano (urti bidimensionali) attraverso due esempi.

Esempio

Un protone p_1 , di massa atomica $m_p=1u$, alla velocità $v_{1i}=500 \text{ m/s}$, urta elasticamente un altro protone p_2 a riposo. Il primo protone proiettile viene deviato a 60° dalla sua direzione primitiva. Calcolare: a) la velocità dei due protoni dopo l'urto; b) la direzione della velocità del protone bersaglio.



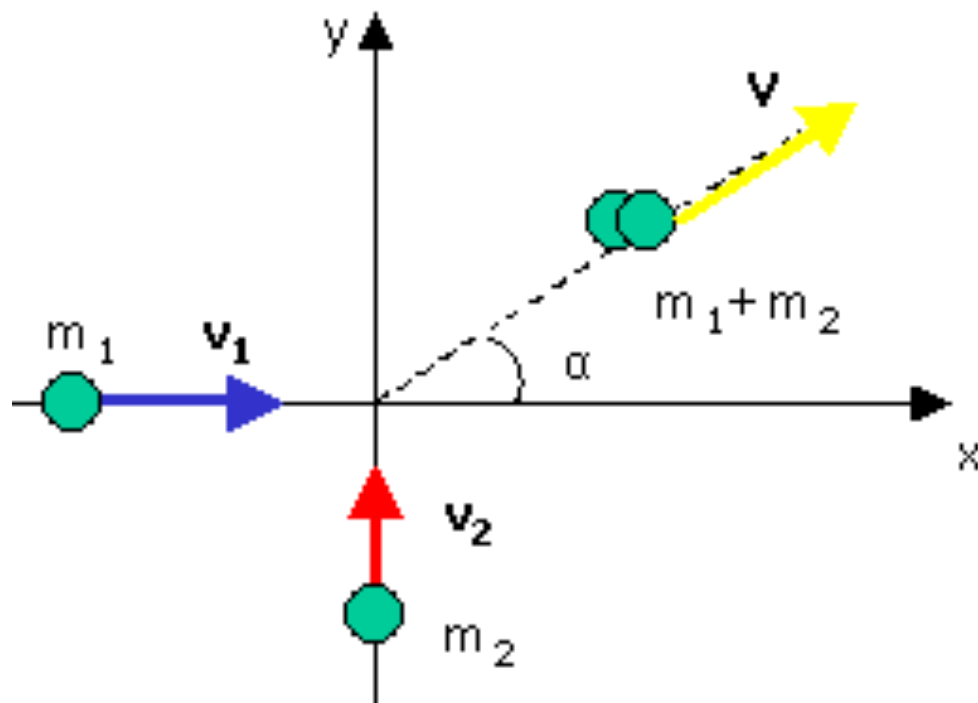
Siamo in presenza di un urto elastico, per cui vale sia il principio di conservazione della quantità di moto, nella sua forma vettoriale visto che ci troviamo di fronte ad un problema bidimensionale, che dell'energia cinetica.

Pertanto, risolvendo il seguente sistema di tre equazioni in tre incognite, calcoleremo le velocità dei protoni dopo l'urto e la direzione della velocità del protone bersaglio:

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos 60^\circ + m_2 v_{2f} \cos \alpha \\ 0 = m_1 v_{1f} \sin 60^\circ - m_2 v_{2f} \sin \alpha \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1f} = 250 \text{ m / s} \\ v_{2f} = 430 \text{ m / s} \\ \alpha = 30^\circ \end{cases}$$

Esempio

Due corpi si scontrano in un urto completamente anelastico. Le masse in gioco sono $m_1=83\text{kg}$ con velocità $v_1=6,2\text{km/h}$ e $m_2=55\text{kg}$ con velocità $v_2=7,8\text{km/h}$. Calcolare la velocità del blocco (m_1+m_2) dopo l'urto.



Applichiamo il principio di conservazione della quantità di moto nella sua forma vettoriale, visto che ci troviamo di fronte ad un problema bidimensionale.

Scomposto, secondo le sue componenti, lungo gli assi cartesiani, diventa:

$$\vec{P}_{Ti} = \vec{P}_{Tf} \Rightarrow m_1 \cdot \vec{v}_{1i} + m_2 \cdot \vec{v}_{2i} = m_1 \cdot \vec{v}_{1f} + m_2 \cdot \vec{v}_{2f} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} P_{xi} = P_{xf} \rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2) \cdot V \cos \alpha \\ P_{yi} = P_{yf} \rightarrow m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \cdot V \sin \alpha \end{cases}$$

Da queste equazioni si ricavano le incognite V e β :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_2 \cdot v_2}{m_1 \cdot v_1} = \frac{55 \cdot 7,8}{83 \cdot 6,2} = 0,834 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}(0,834) = 39,8^\circ$$

$$V = \frac{m_2 \cdot v_2}{(m_1 + m_2) \cdot \sin \alpha} = \frac{55 \cdot 7,8}{(83 + 55) \cdot \sin 39,8^\circ} = 4,9 \text{ km / h}$$

Quando siamo in presenza di un certo numero di punti materiali (particelle), si può definire un punto geometrico, chiamato **centro di massa**, che ha interessanti proprietà.

definizione centro di massa

Il **centro di massa** di un corpo o di un sistema di particelle è il punto geometrico che si muove come se tutta la massa fosse concentrata in tale punto e tutte le forze esterne fossero ad esso applicate.

A quale legge ubbidisce il moto del centro di massa?

L'equazione (vettoriale) che governa il moto del centro di massa di un sistema di particelle è:

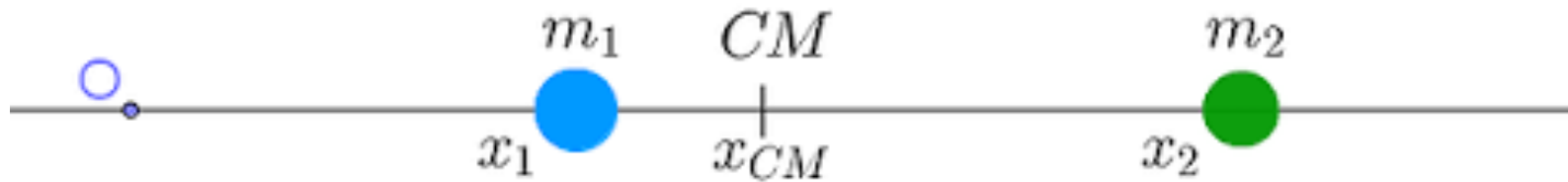
2° legge di Newton per il centro di massa di un sistema di particelle

$$\sum \vec{F}_{esterne} = M \vec{a}_{cm}$$

- Le forze interne non vanno inserite nel computo della somma vettoriale delle forze esterne.
- M è la massa totale del sistema di particelle e deve rimanere costante durante il moto (sistema chiuso).
- L'accelerazione è quella del centro di massa, e l'equazione non dà alcuna informazione sull'accelerazione delle singole particelle.

Ma dove si trova il centro di massa?

Caso di due particelle su una retta



ascissa del centro
di massa (m)

posizione 1 (m)

posizione 2 (m)

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

massa 1(kg)

massa 2 (kg)

Caso generale

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Particelle che si muovono su una retta

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

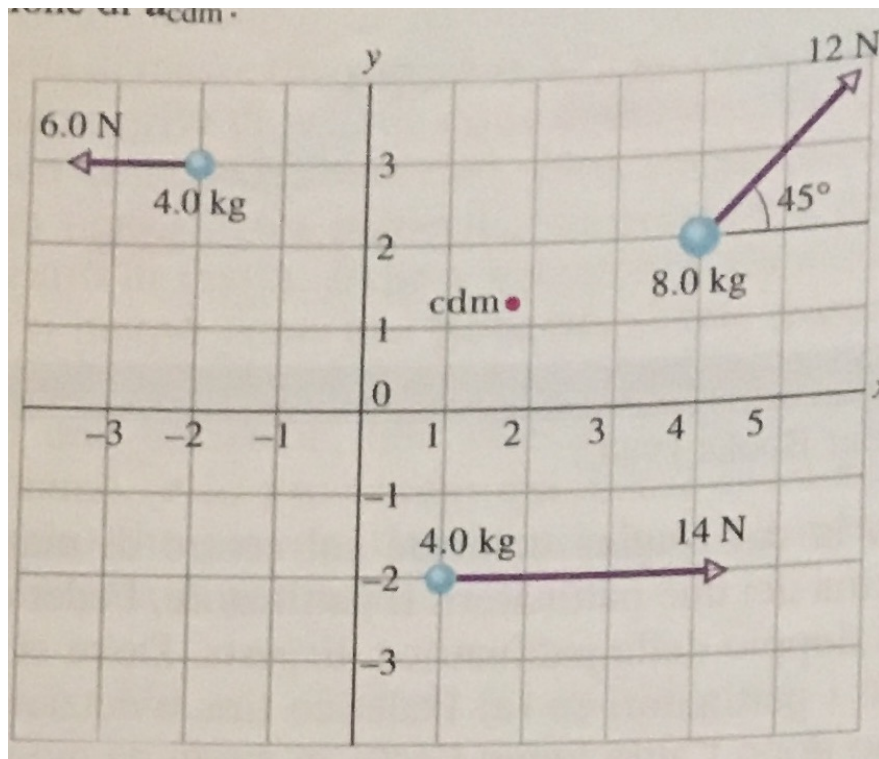
Particelle che si muovono nel piano

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Particelle che si muovono nello spazio

Esempio

Calcolare l'accelerazione del centro di massa del sistema di tre particelle soggette a differenti forze esterne, e inizialmente ferme.



Calcoliamo la posizione del centro di massa:

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{4 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 + 8 \cdot 4}{4 + 4 + 8} = 1,75$$

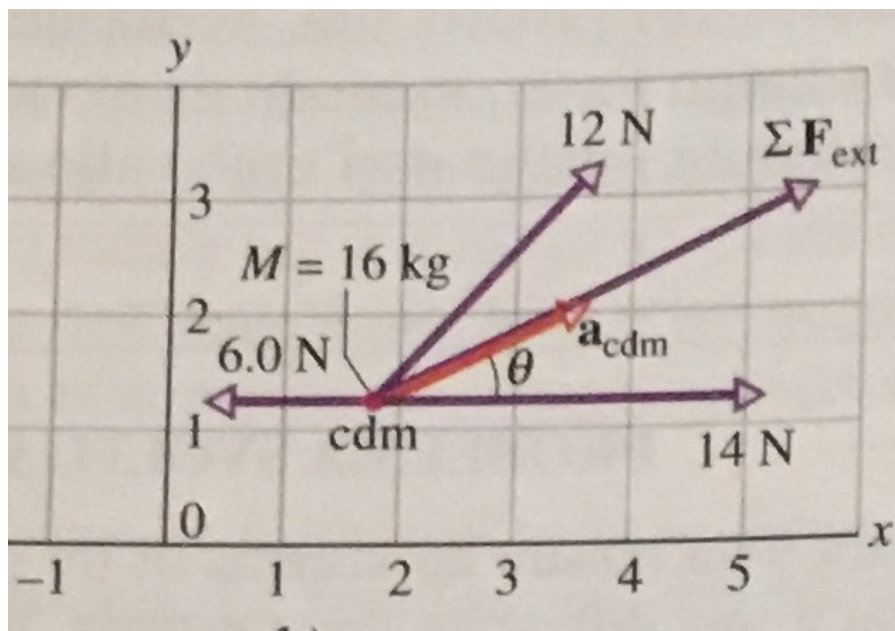
$$y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{4 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) + 8 \cdot 2}{4 + 4 + 8} = 1,25$$

Determiniamo la risultante delle forze esterne:

$$\sum F_{esterna,x} = -6 + 14 + 12 \cos 45^\circ = 16,5 \text{ N}$$

$$\sum F_{esterna,y} = 0 + 0 + 12 \sin 45^\circ = 8,49 \text{ N}$$

$$\sum F_{esterna} = \sqrt{16,5^2 + 8,49^2} = 18,6 \text{ N} \quad \text{tg} \vartheta = \frac{8,49}{16,5} = 0,515 \Rightarrow \vartheta = 27^\circ$$



Il vettore accelerazione $\mathbf{a}_{cm}$ del centro di massa avrà direzione e verso di $\Sigma \mathbf{F}_{esterna}$ e modulo pari a:

$$\sum F_{esterne} = M a_{cm} \Rightarrow$$

$$a_{cm} = \frac{18,6}{16} = 1,2 \text{ m/s}^2$$

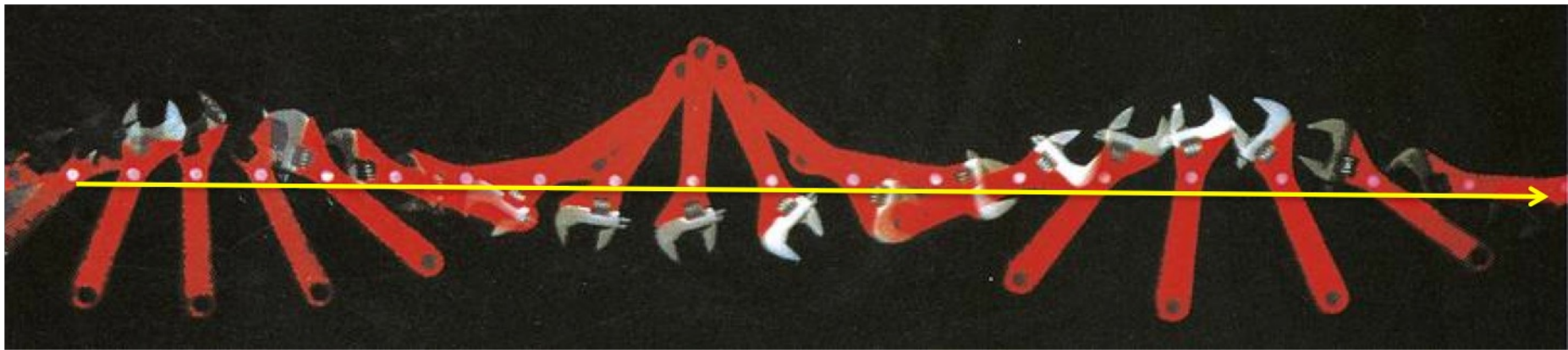
Proprietà del **centro di massa**

➤ Centro di massa sistema isolato

Esaminiamo il moto di un corpo rigido che ha un moto di traslazione e di rotazione con attrito trascurabile su un piano orizzontale.



La forza totale che agisce sul corpo rigido è nulla in quanto la sua forza-peso e la reazione vincolare del tavolo sono uguali e opposte.



Il moto del corpo rigido è alquanto complesso, ma se osserviamo il bollo chiaro (il centro di massa coincidente con il baricentro del corpo rigido) ci accorgiamo che, con buona approssimazione, si muove di moto rettilineo uniforme, che è proprio il moto di un punto materiale su cui la forza totale è nulla.

L'esperimento mostra la seguente proprietà fondamentale del centro di massa:

Il centro di massa di un sistema fisico isolato, per il quale vale la conservazione della quantità di moto, si muove di moto rettilineo uniforme.

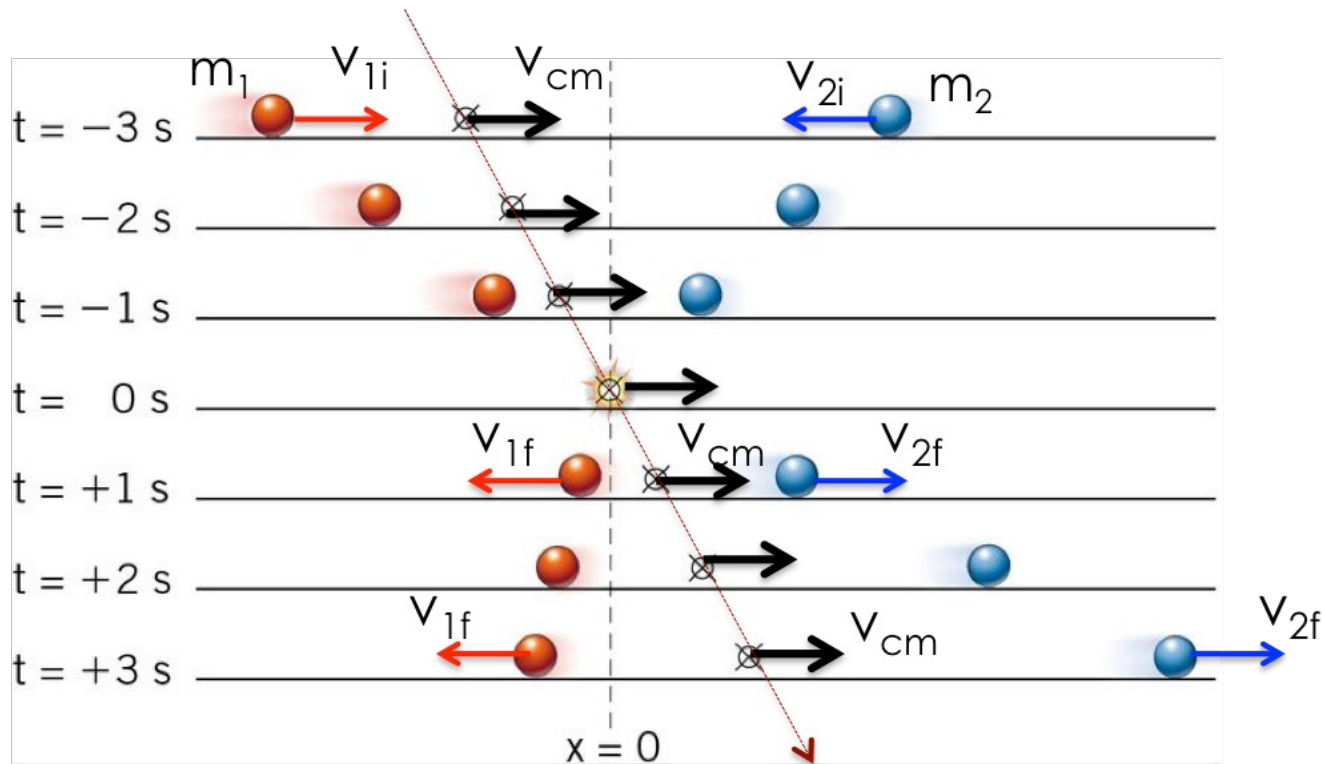
Ovviamente è una proprietà che si dimostra matematicamente utilizzando i principi della dinamica.

Questa proprietà vale anche in presenza di urti.
Infatti, analizziamo la seguente situazione:

Due particelle $m_1=2\text{kg}$ e $m_2=1\text{kg}$ si urtano con velocità iniziali $v_{1i}=5\text{m/s}$ e $v_{2i}=-4\text{m/s}$. Dopo l'urto i corpi invertono il verso del proprio moto: $v_{1f}=-1\text{m/s}$; $v_{2f}=8\text{m/s}$.

Per tutta la durata del fenomeno il centro di massa si muove verso destra con velocità costante pari a (si dimostra):

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{p}_{totale}}{m_{totale}}$$



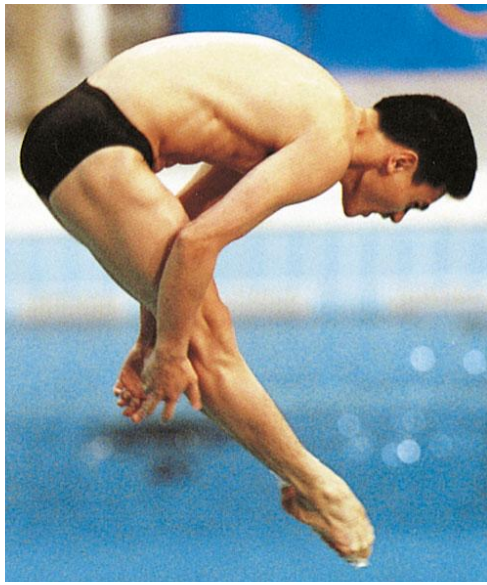
➤ Centro di massa sistema non isolato

Se il sistema non è isolato, significa che agiscono forze esterne e non vale il principio di conservazione della quantità di moto.

In queste condizioni il moto del centro di massa non è rettilineo uniforme.

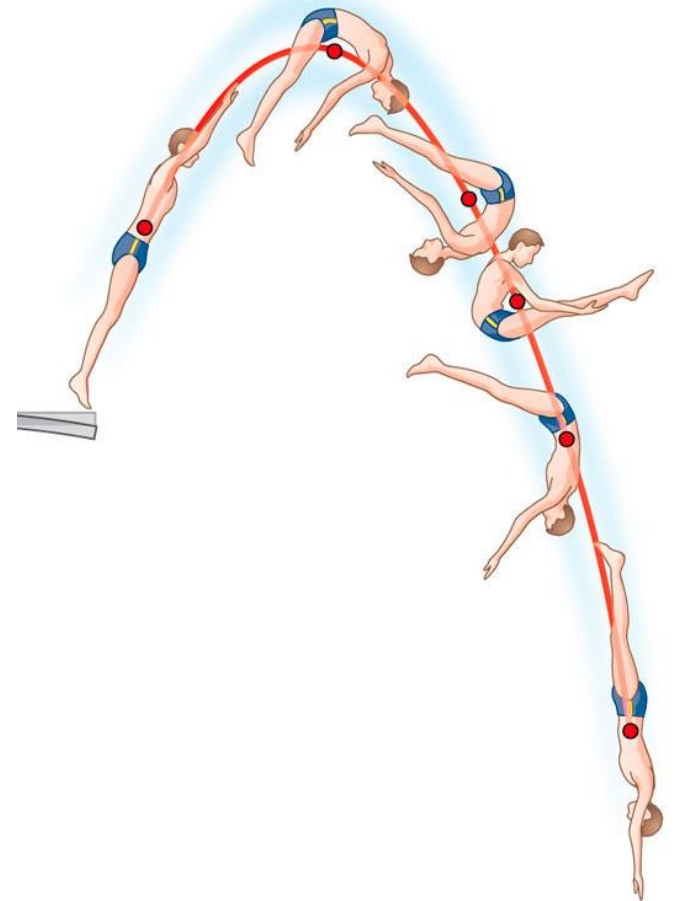
Il suo moto può essere ricavato dalla seguente legge:

Il centro di massa di un sistema fisico non isolato si muove come un punto materiale che possiede tutta la massa del sistema e che è soggetto alla stessa forza esterna risultante a cui è sottoposto il sistema.



Il moto nello spazio di un tuffatore che si lancia con una certa velocità iniziale, è molto complicato da descrivere.

Ma la traiettoria del suo centro di massa è una parabola, la stessa che sarebbe descritta da un corpo puntiforme, di uguale velocità iniziale, su cui agisce la forza-peso del tuffatore (moto proiettile).



Quello che abbiamo enunciato non è altro che il teorema dell'impulso, applicato non a un punto materiale ma a un corpo esteso o a un sistema di particelle: le forze interne, uguali e opposte a coppie, non cambiano la quantità di moto totale.

Soltanto la forza esterna risultante causa il cambiamento della quantità di moto totale:

$$\Delta \vec{p}_{tot} = \vec{F}_{tot} \cdot \Delta t$$

FISICA

MECCANICA:

Principio conservazione momento angolare

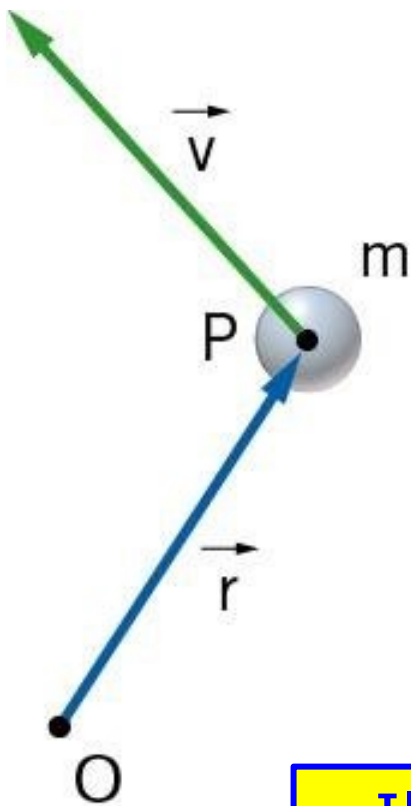
*Autore: prof. Pappalardo Vincenzo
docente di Matematica e Fisica*



Fino a questo punto abbiamo esaminato soltanto moti di traslazione. Passiamo ora a esaminare i moti di rotazione.



Per descrivere la rotazione di un punto materiale si introduce una nuova grandezza fisica, il **momento angolare** L calcolato rispetto a un punto fisso O .



Consideriamo una particella di massa m che si muove con velocità $\mathbf{v}$ e che, a un certo istante, si trova nel punto P .

Indichiamo con $\mathbf{r}$ il vettore che dà la posizione di P rispetto al punto O .

Diamo la seguente definizione:

Il **momento angolare** di una particella è uguale al prodotto vettoriale tra il vettore $\mathbf{r}$ e la quantità di moto $\mathbf{p}$ della particella:

$$\vec{L} = \vec{r} \otimes \vec{p} \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}]$$

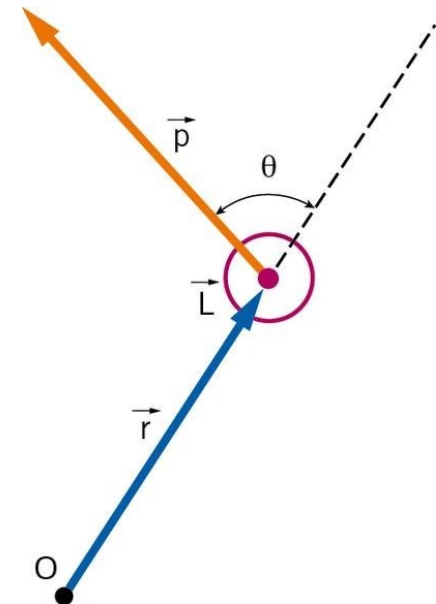
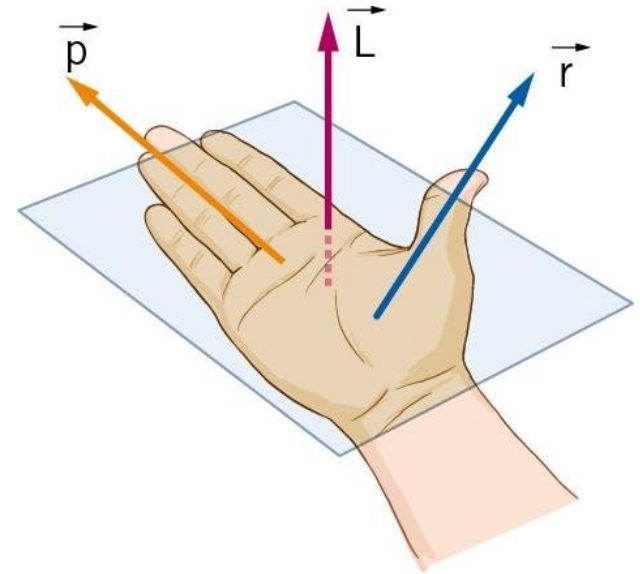
Per la definizione di prodotto vettoriale, il momento angolare ha:

1. direzione perpendicolare al piano che contiene $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$

2. verso dato dalla regola della mano destra

3. modulo L dato dalla formula:

$$L = r \cdot p \cdot \sin\theta$$



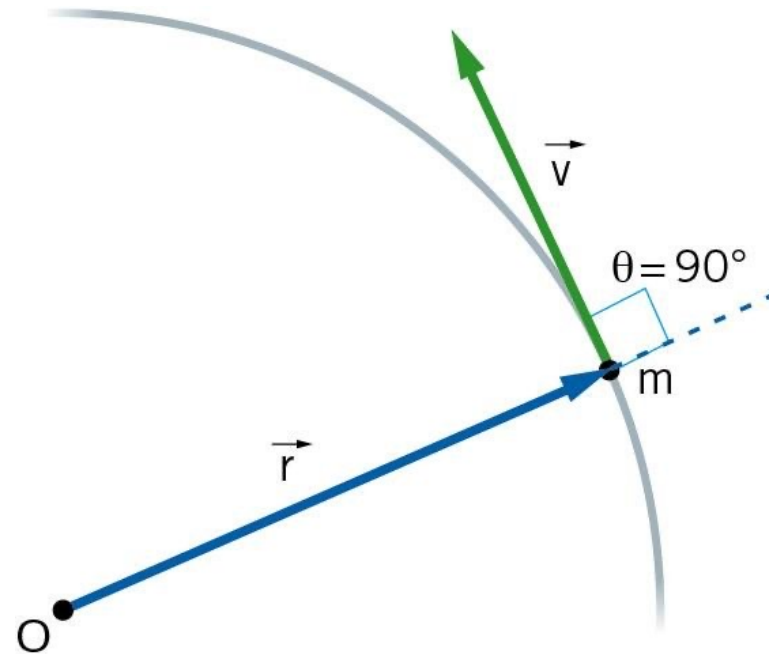
Il caso più semplice è quello in cui l'angolo θ è retto ($\sin\theta=1$).

Esempio – Il momento angolare di un punto materiale m che si muove di moto circolare con velocità $\mathbf{v}$, e che abbia come punto O il centro della traiettoria circolare, è dato da:

$$L = r p \sin\vartheta = r p = r m v = m r^2 \omega$$

Ossia:

$$L = I \omega$$



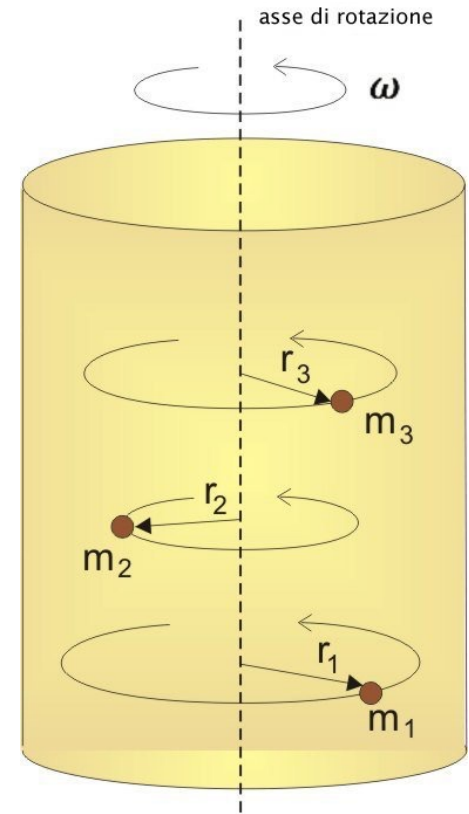
La quantità $I = m r^2$
si chiama
momento d'inerzia

Il momento d'inerzia assume, nel moto rotatorio, un ruolo analogo a quello che ha la massa nel moto rettilineo:

come la massa quantifica la resistenza che un corpo oppone al cambiamento della sua velocità quando è soggetto a una forza, così il momento d'inerzia misura la resistenza del corpo al cambiamento della sua velocità angolare quando è soggetto a un momento torcente.

Consideriamo ora un corpo rigido (di forma qualsiasi) in rotazione intorno a un asse.

Il corpo può essere immaginato come composto da un insieme di particelle, ciascuna assimilabile a un punto materiale in movimento lungo una circonferenza con centro sull'asse.



Il momento angolare del corpo rigido è dato dalla somma vettoriale dei momenti angolari degli n punti materiali che lo compongono, calcolati rispetto allo stesso punto O :

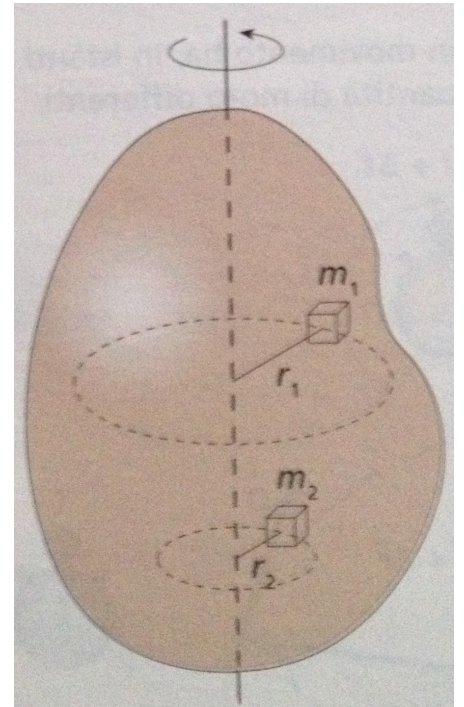
$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i$$

E quindi la somma dei momenti d'inerzia di tutti i punti materiali costituisce il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Se il corpo rigido ha forma irregolare, il calcolo del momento d'inerzia risulta molto complicato e bisogna far uso del calcolo integrale:

$$I = \int r^2 dm$$



Per i solidi simmetrici il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione può essere espresso in modo semplice in funzione della massa e di alcuni parametri geometrici.



$$I = MR^2$$

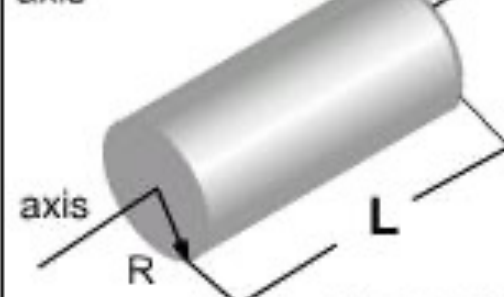
Hoop about central axis

Annular cylinder about central axis



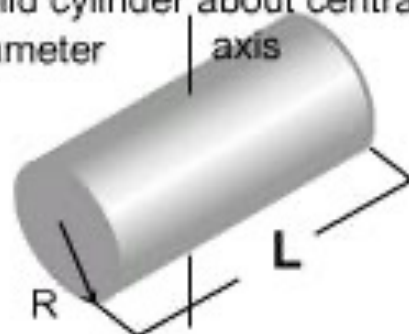
$$I = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$$

Solid cylinder about central axis



$$I = \frac{1}{2} ML^2$$

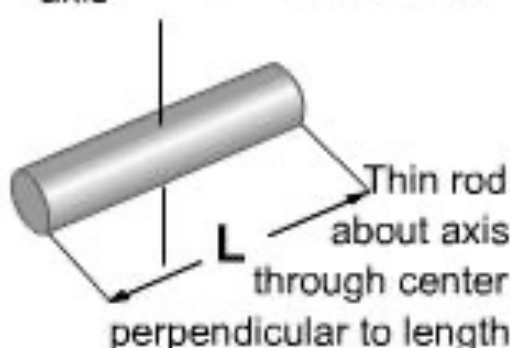
Solid cylinder about central diameter



$$I = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$$

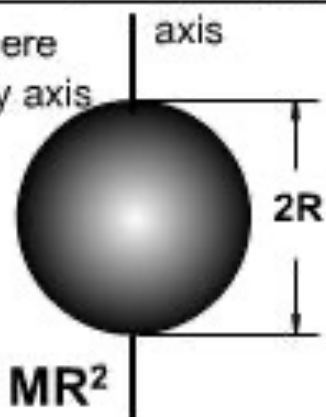
axis

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$



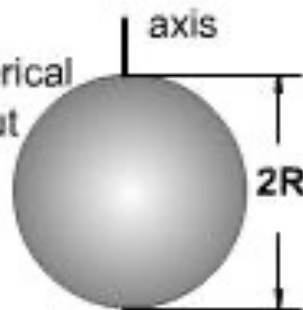
Thin rod about axis through center perpendicular to length

Solid sphere about any axis

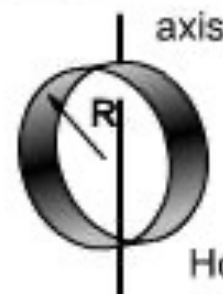


$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

Thin spherical shell about any diameter



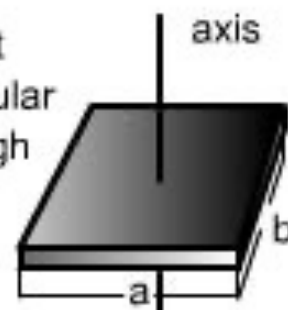
$$I = \frac{2}{3} MR^2$$



$$I = MR^2$$

Hoop about central axis

Slab about perpendicular axis through center



$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

Se per i moti traslatori valeva il teorema dell'impulso, per i moti rotatori vale la seguente equazione:

EQUAZIONE DEL MOTO ROTATORIO

Se a un corpo è applicato, per un intervallo di tempo Δt , un momento torcente costante $\mathbf{M}$ rispetto a un punto O , la variazione $\Delta \mathbf{L}$ del momento angolare del corpo rispetto a O è descritta dalla seguente equazione:

$$\Delta \vec{L} = \vec{M} \cdot \Delta t$$

Enunciamo anche per il moto rotatorio un principio di conservazione.

PRINCIPIO CONSERVAZIONE MOMENTO ANGOLARE

Se rispetto a un punto è nullo il momento risultante delle forze che agiscono su un sistema fisico, il momento angolare totale del sistema rispetto allo stesso punto si conserva:

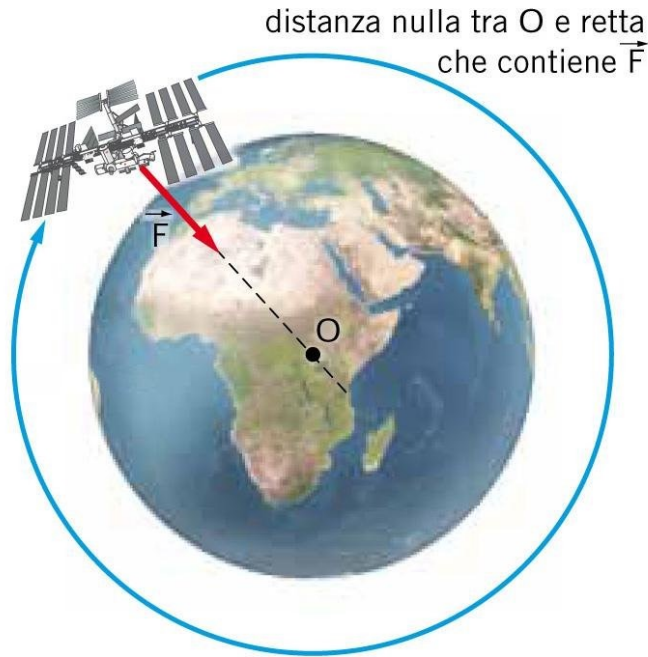
$$\vec{L} = \text{costante}$$

Infatti, dall'equazione del moto rotatorio si ha che:

$$\text{se } \vec{M} = 0 \rightarrow \Delta \vec{L} = \vec{M} \cdot \Delta t = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{costante}$$

Il momento angolare è un vettore e quando si conserva rimane invariato, oltre al modulo, anche la sua direzione e verso.

esempio



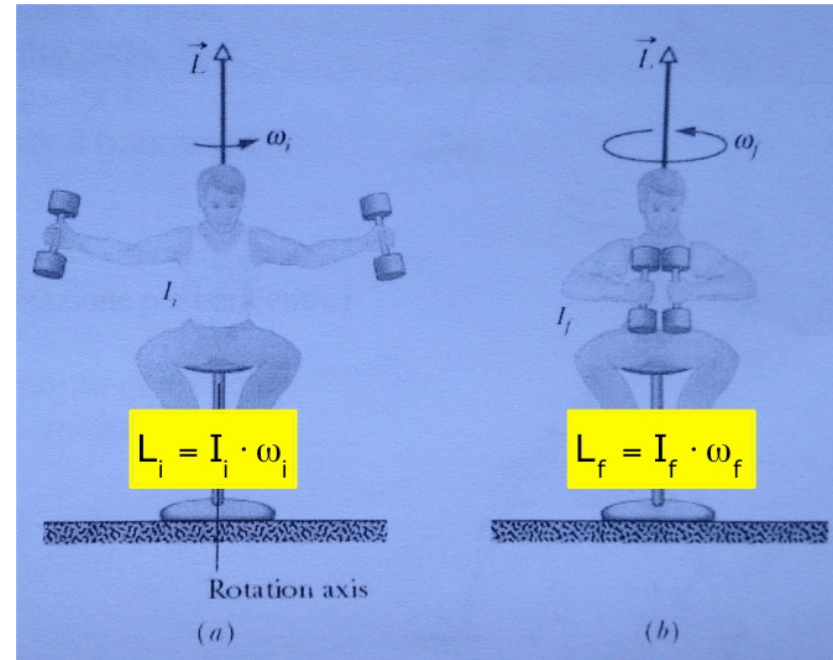
Sul satellite agisce la forza di gravità $\mathbf{F}$. In questo caso il braccio di $\mathbf{F}$, rispetto al centro di rotazione O è uguale a zero e, quindi, il suo momento $\mathbf{M}$ è nullo: il momento angolare $\mathbf{L}$ del satellite si conserva.

Le forze costantemente orientate verso uno stesso punto sono dette forze centrali.

esempio

Il ragazzo con le braccia allargate ha come momento d'inerzia I_i , e viene messo in rotazione con una certa velocità angolare ω_i . Il suo momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione è:

$$L_i = I_i \cdot \omega_i$$



Quando le braccia vengono chiuse, il ragazzo ha come momento d'inerzia I_f , e ruota con velocità angolare ω_f . Il suo momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione è:

$$L_f = I_f \cdot \omega_f$$

Il sistema fisico in esame è un sistema isolato (momento delle forze esterne nullo) per cui è possibile applicare il principio di conservazione del momento angolare rispetto all'asse di rotazione.

$$L = I \cdot \omega = \text{costante}$$

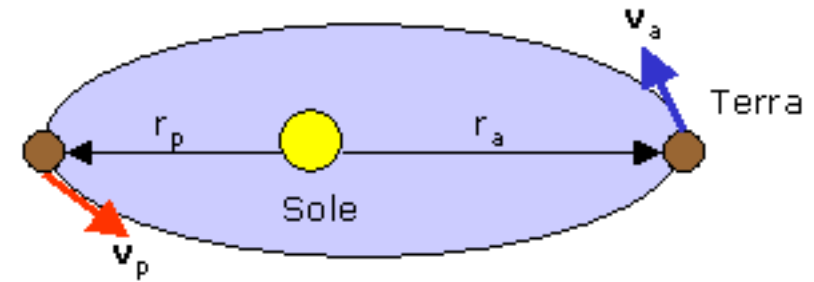
$$I_i \cdot \omega_i = I_f \cdot \omega_f$$

$$I_f < I_i \Rightarrow \omega_f > \omega_i$$

Conclusion: Quando le braccia vengono chiuse, il momento d'inerzia I_f diminuisce e, per la conservazione del momento angolare, la velocità angolare ω_f deve aumentare.

esempio

La velocità della Terra all'afelio è $v_a = 2,93 \cdot 10^4$ m/s e la sua distanza è $r_a = 1,52 \cdot 10^{11}$ m. Calcolare la velocità della Terra al perielio dove la distanza è $r_p = 1,47 \cdot 10^{11}$ m.



Ipotesi: Terra puntiforme; effetto nullo di tutte le forze esterne al sistema Sole+Terra.

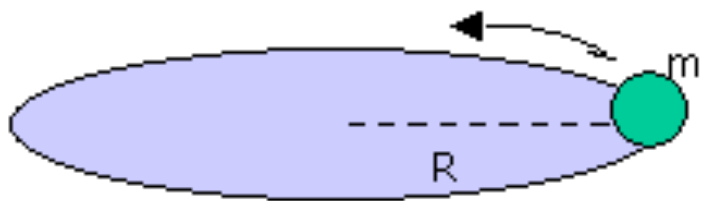
Possiamo applicare il principio di conservazione del momento angolare:

$$\vec{L}_a = \vec{L}_p \Rightarrow m_T v_a r_a = m_T v_p r_p \Rightarrow v_p = \frac{r_a}{r_p} \cdot v_a = \frac{1,52 \cdot 10^{11}}{1,47 \cdot 10^{11}} \cdot 2,93 \cdot 10^4 = 3,03 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Come ci aspettavamo, al perielio la velocità della Terra aumenta.

esempio

Una persona di massa $M=80\text{kg}$ salta sull'unico seggiolino di una giostra in rotazione a velocità angolare costante. Sapendo che il raggio della giostra è $R=5\text{m}$, che la massa del seggiolino è $m=100\text{kg}$ e che compie 1 giro in 4s , calcolare il periodo di rotazione della giostra dopo che la persona è salita, nell'ipotesi di trascurare la velocità iniziale della persona e gli attriti.



Ipotesi: massa puntiforme; forze esterne nulle.

Principio di conservazione del momento angolare:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \Rightarrow I_i \omega_i = I_f \omega_f \Rightarrow m R^2 \omega_i = (m + M) R^2 \omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{m}{m + M} \cdot \omega_i = \frac{100}{180} \cdot 1,57 = 0,87 \text{ rad / s}$$

$$\text{dove: } \omega_i = \frac{2\pi}{T_i} = \frac{2\pi}{4} = 1,57 \text{ rad / s} \Rightarrow T_{\text{giostra}} = \frac{2\pi}{\omega_f} = \frac{2\pi}{0,87} = 7,2 \text{ s}$$

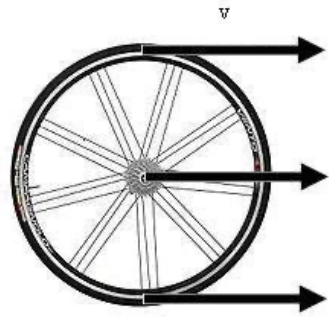
ENERGIA CINETICA CORPO RIGIDO

Grazie all'introduzione del momento d'inerzia, è possibile esprimere in maniera semplice l'energia cinetica di un corpo rigido in rotazione.

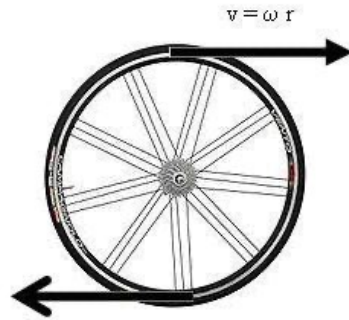
ENERGIA CINETICA DI ROTAZIONE

L'energia cinetica di un corpo rigido con momento d'inerzia I , e in rotazione intorno a un asse fisso con velocità angolare ω , è data dalla seguente formula:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$



Moto di traslazione



Moto di rotazione

Il moto di rotolamento è la combinazione di due moti simultanei: la rotazione del corpo intorno all'asse e la traslazione dell'asse.

Quindi, l'energia cinetica è data dalla somma di due contributi, quello traslatorio e quello rotatorio:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

DINAMICA ROTAZIONALE CORPO RIGIDO

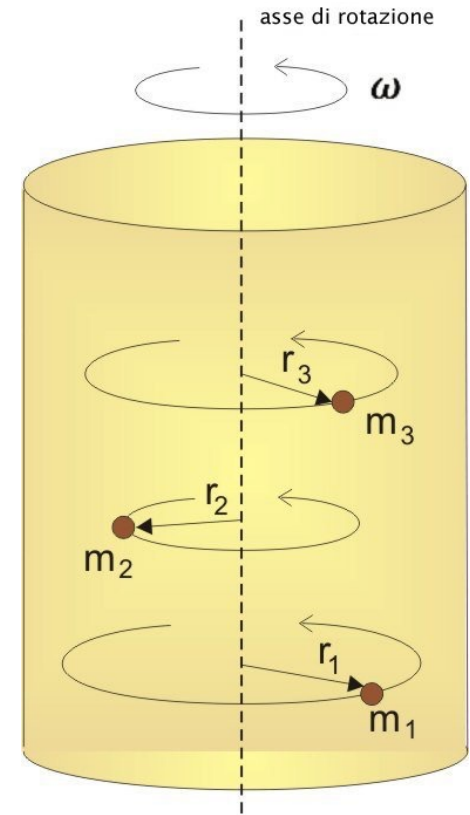
Ricaviamo la legge che descrive la dinamica rotazionale di un corpo rigido.

Consideriamo un corpo rigido che ruota attorno a un asse con velocità angolare ω e che, quindi, ha momento angolare $L = I\omega$.

Il corpo rigido viene accelerato fino alla velocità angolare ω_1 , per cui il momento angolare diventa $L_1 = I\omega_1$.

La variazione ΔL del momento angolare vale:

$$\Delta L = L_1 - L = I(\omega_1 - \omega) = I\Delta\omega$$



Nota l'equazione del moto rotatorio, si ha:

$$\Delta L = M \cdot \Delta t = I \Delta \omega \Rightarrow M = I \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \xrightarrow{\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \text{ acc. angolare}} M = I \alpha$$

EQUAZIONE DEL MOTO ROTATORIO

$$M = I \alpha$$

Questa equazione descrive la rotazione di un corpo rigido, analoga a quella che descrive il moto di traslazione $F=ma$.