

FISICA

La Meccanica dei Fluidi

*Autore: prof. Pappalardo Vincenzo
docente di Matematica e Fisica*



La **meccanica dei fluidi** è il ramo della meccanica che studia le proprietà dei fluidi

L'equilibrio dei Fluidi

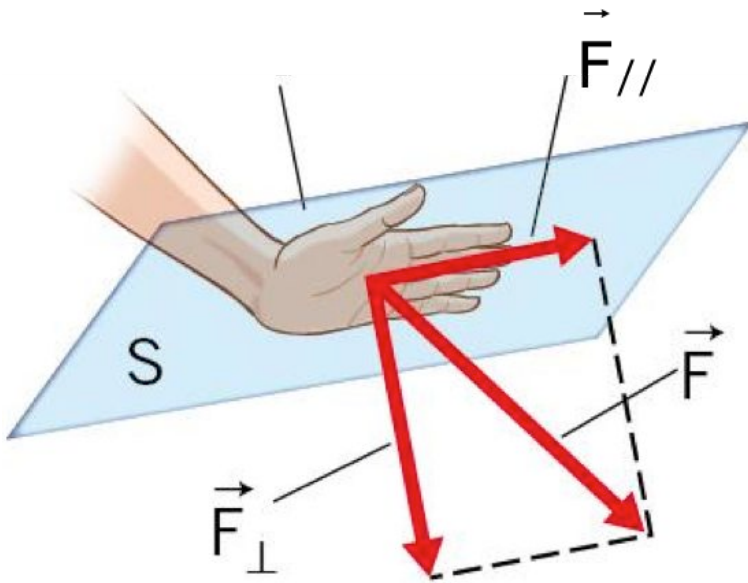
Studia le leggi che regolano lo stato dei liquidi in quiete

Nell'idrostatica tutte le leggi enunciate valgono per un liquido perfetto, cioè un liquido che ha le seguenti tre proprietà:

1. Fluidità: gli strati di molecole del liquido possono scorrere gli uni sugli altri.
2. Incomprimibilità: il liquido mantiene il suo volume anche se viene sottoposto a forti pressioni.
3. Elasticità: è facile modificare la forma del liquido.

LA PRESSIONE

Per descrivere l'effetto di una forza $\mathbf{F}$ che agisce su una superficie S , si introduce la grandezza scalare pressione (simbolo p). La pressione è dovuta alla componente perpendicolare $\mathbf{F}_\perp$ della forza $\mathbf{F}$ che si esercita sulla superficie:



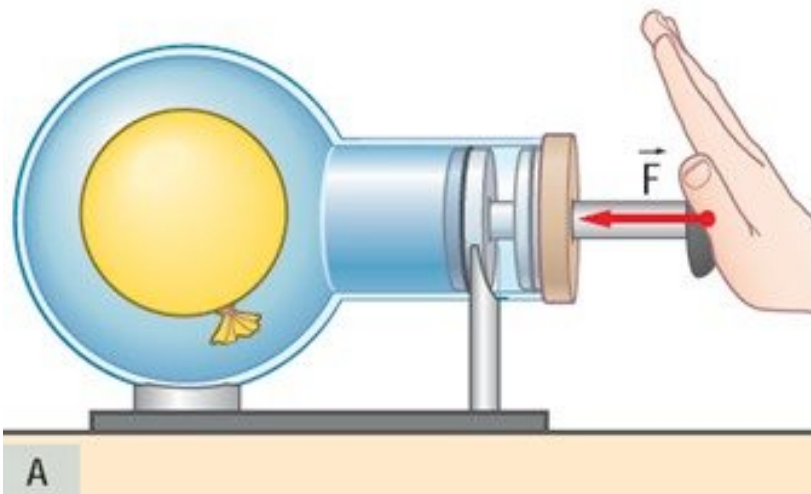
$$p = \frac{F_\perp}{S} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa} \right]$$

Il vettore $\mathbf{F}_{//}$, componente di $\mathbf{F}$ parallelo alla superficie Σ , non è rilevante in questo contesto perché non preme su S .

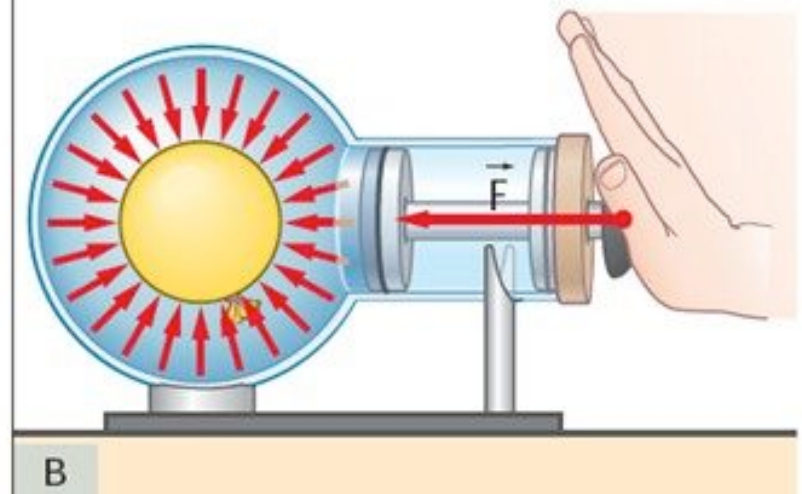
Principio di Pascal

La pressione esercitata su qualunque superficie di un liquido si trasmette inalterata su ogni altra superficie a contatto con il liquido

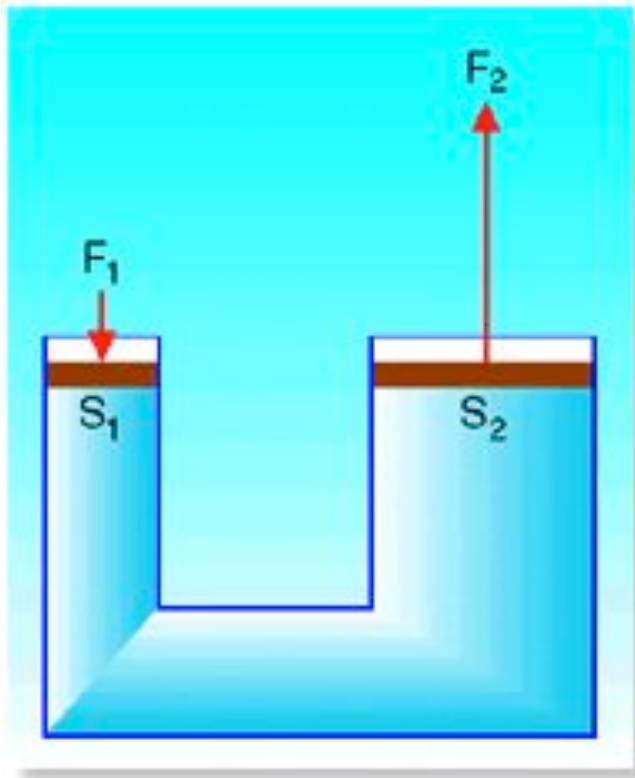
► Il palloncino diventa più piccolo per effetto della pressione esercitata dal pistone sull'acqua, ma conserva la sua forma sferica.



► Ciò significa che il palloncino subisce dappertutto la stessa pressione e la forza è, in ogni punto, perpendicolare alla sua superficie.



Sul principio di Pascal si basa il torchio idraulico, che serve per ottenere una forza grande applicandone una piccola.



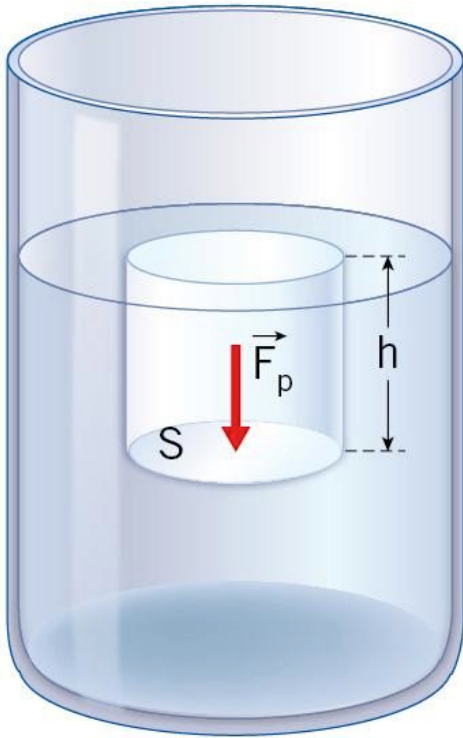
Per il principio di Pascal, la pressione è la stessa sia su S_1 che su S_2 . Quindi:

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} > F \Rightarrow F_2 = F_1 \cdot \frac{S_2}{S_1}$$

poichè $S_2 > S_1$ allora $F_2 > F_1$

Pertanto è possibile sollevare un peso applicando una forza inferiore.

LA LEGGE DI STEVINO



Consideriamo una superficie ideale orizzontale, di area S , posta a una profondità h rispetto alla superficie libera del liquido che ha densità d .

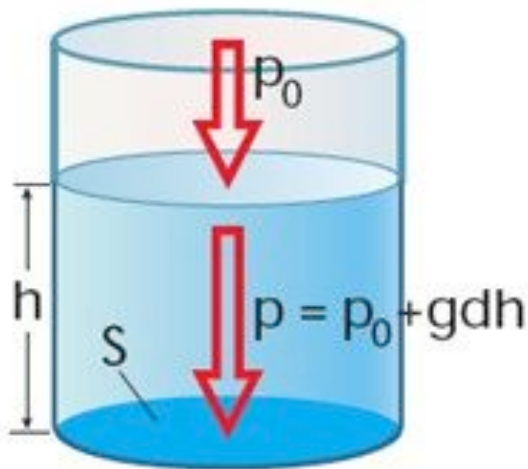
La pressione che si esercita sulla superficie S a causa del peso della colonna di liquido che sovrasta tale superficie è data da:

$$p_L = \frac{F_P}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{dVg}{S} = \frac{dShg}{S} = dgh$$

Legge di Stevino

La pressione dovuta al peso di un liquido è direttamente proporzionale alla densità e alla profondità del liquido:

$$p = dgh$$

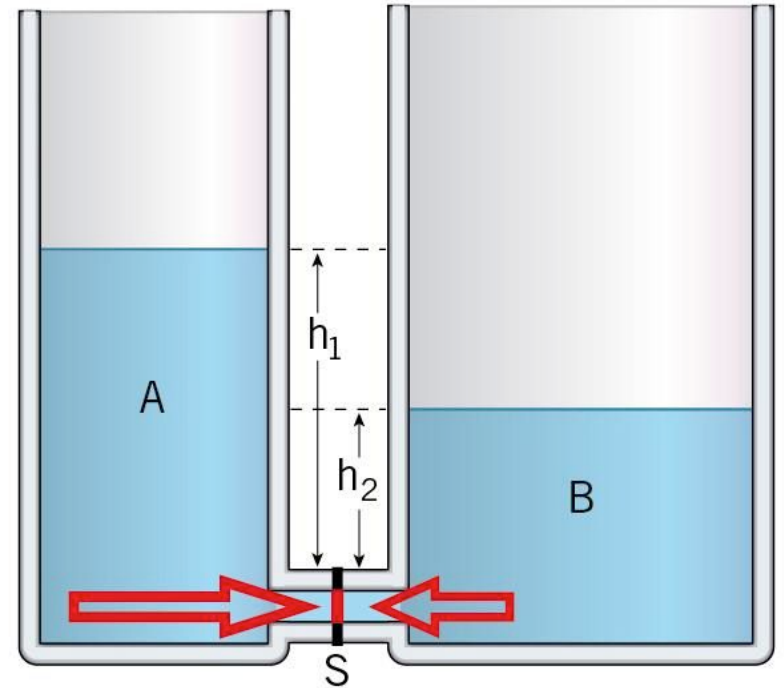


Se sulla superficie libera del liquido agisce una pressione esterna p_0 , come la pressione atmosferica, per la legge di Pascal questa pressione si trasmette inalterata su ogni superficie a contatto con il liquido, per cui la pressione sul liquido alla profondità h è data da:

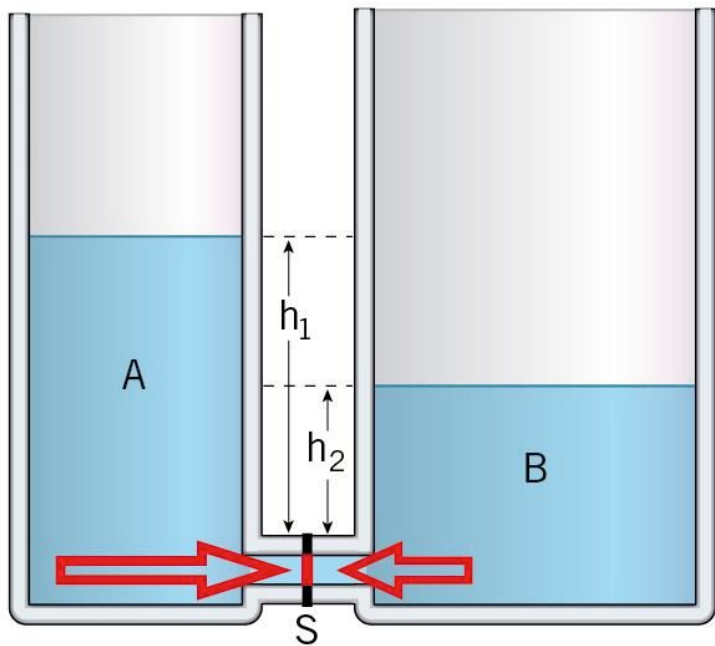
$$p = p_0 + dgh$$

PRINCIPIO DEI VASI COMUNICANTI

Consideriamo due vasi comunicanti (si chiamano **vasi comunicanti** due o più recipienti uniti da un tubo di comunicazione) riempiti con lo stesso liquido ed esaminiamo cosa accade su una superficie S di liquido posta nel tubo di collegamento.



Se l'altezza h_1 del liquido nel recipiente di sinistra è maggiore di h_2 , anche la pressione che agisce su S da sinistra è maggiore di quella da destra.



La superficie S è spinta verso destra: si ha così un flusso di liquido dal recipiente in cui il liquido ha un'altezza maggiore verso l'altro.

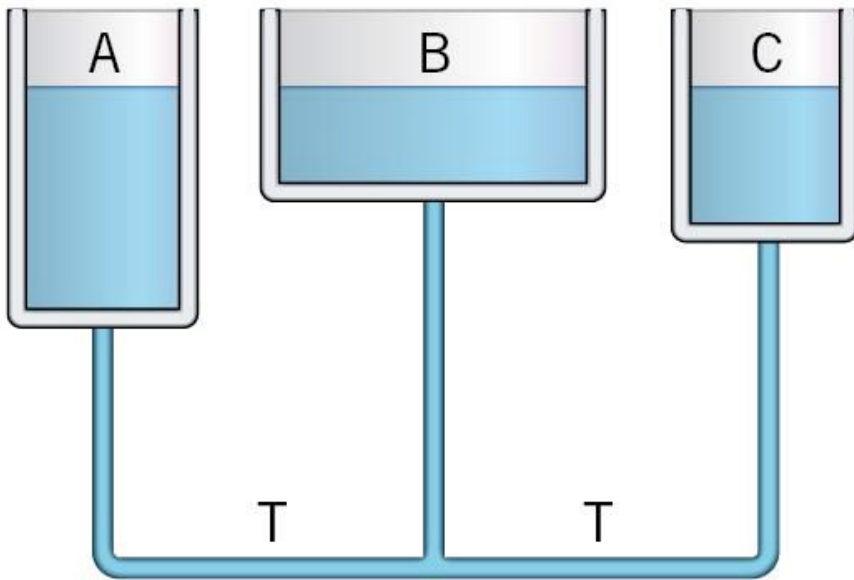
Per avere l'equilibrio occorre che la pressione idrostatica p_1 esercitata su S dal liquido (di altezza h_1) alla sua sinistra sia uguale alla pressione p_2 esercitata a destra dal liquido di altezza h_2 .

Per la legge di Stevino si ha:

$$p_1 = p_2 \rightarrow + dgh_1 = dgh_2 \rightarrow h_1 = h_2$$

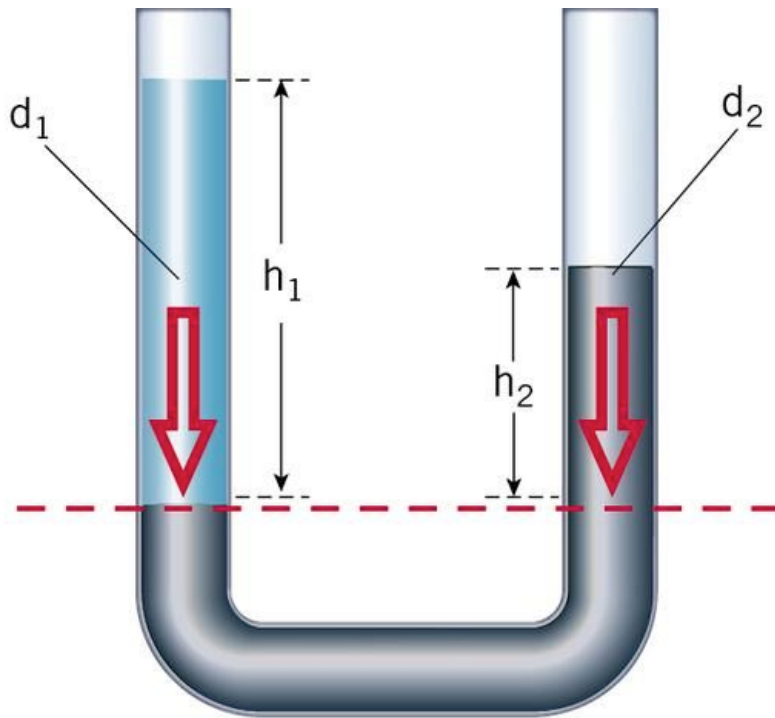
Principio dei vasi comunicanti

Un liquido versato in un sistema di vasi comunicanti raggiunge in tutti i recipienti lo stesso livello.



Questa proprietà è valida qualunque sia la forma dei recipienti, purché siano abbastanza ampi. Cessa di essere valido quando alcuni dei tubi che collegano i recipienti sono molto sottili (detti capillari).

Vasi comunicanti con liquidi diversi

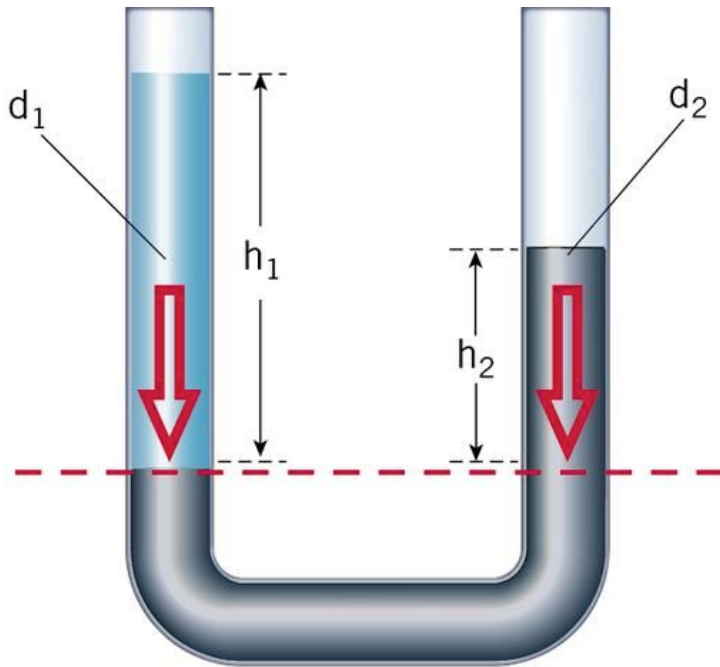


Consideriamo il caso più generale, in cui i vasi comunicanti contengono due liquidi diversi (di densità d_1 e d_2) che non si mescolano (mercurio e acqua).

Il sistema è in equilibrio se sono uguali le due pressioni esercitate dalle due colonne di liquido (alte h_1 e h_2) sulla loro base.

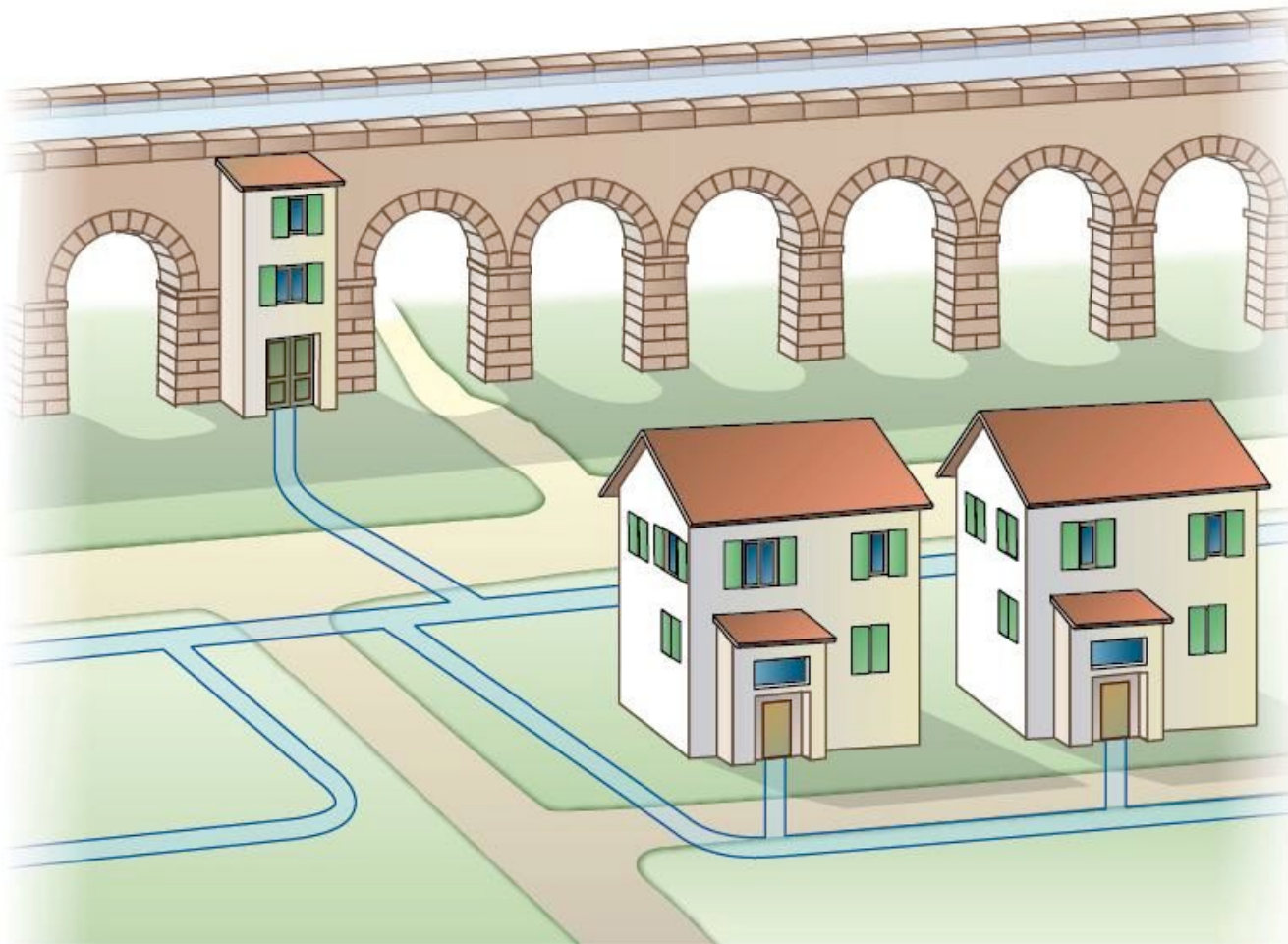
$$p_1 = p_2 \rightarrow d_1 g h_1 = d_2 g h_2 \rightarrow$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{d_2}{d_1}$$



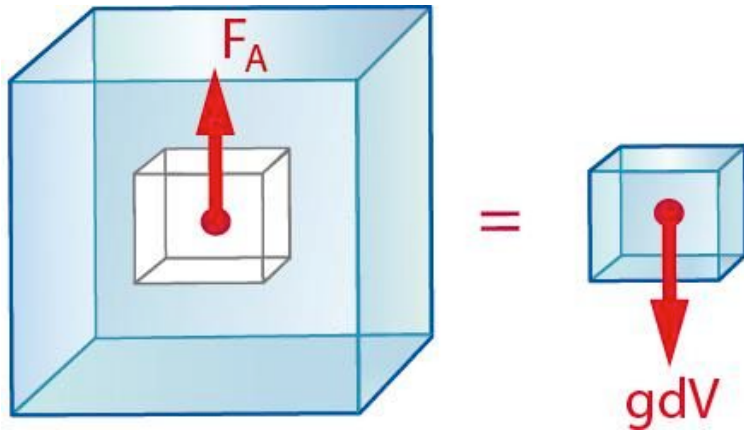
Le altezze a cui si portano due liquidi in un tubo ad U sono inversamente proporzionali alle loro densità.

All'equilibrio il mercurio, che è più denso, raggiunge un'altezza minore dell'acqua.



Il sistema idrico di un acquedotto è un insieme di vasi comunicanti. L'acqua viene pompata in un serbatoio sopraelevato, in modo che possa raggiungere la stessa quota anche all'interno degli edifici.

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE



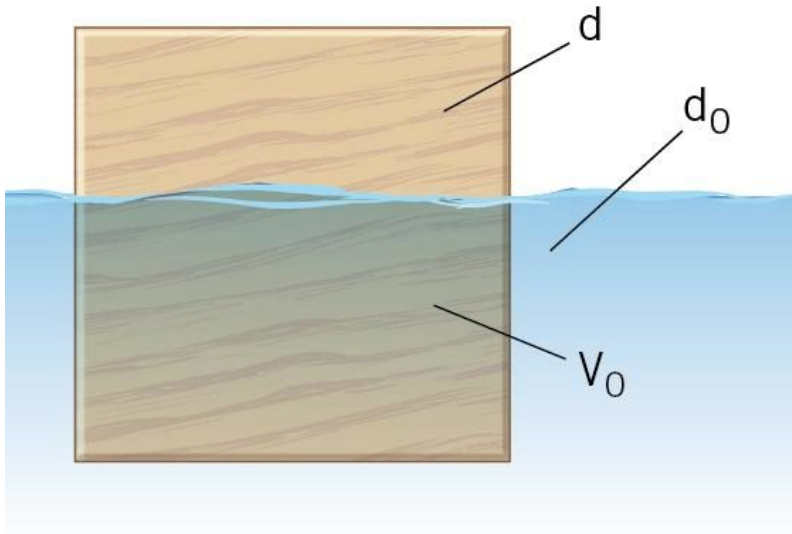
L'acqua e gli altri liquidi esercitano su un corpo immerso (anche parzialmente) una forza verso l'alto, chiamata **spinta di Archimede**.

Legge di Archimede

Un corpo immerso in un liquido subisce una forza diretta verso l'alto di intensità uguale al peso del volume del liquido spostato:

$$F_A = mg = dVg$$

d=densità del liquido
V=volume liquido spostato
g=accelerazione gravità



Conoscendo la spinta di Archimede possiamo calcolare qual è la condizione che permette a un oggetto immerso in un liquido di fluttuare in equilibrio indifferente, ossia di galleggiare.

Per conseguire l'equilibrio la forza-peso F_p del corpo (verticale e rivolta verso il basso) deve avere lo stesso modulo della spinta di Archimede F_A (rivolta verso l'alto) che agisce su di esso:

condizione di galleggiamento

$$F_P = F_A \rightarrow dVg = d_0 V_0 g \rightarrow \frac{V_0}{V} = \frac{d}{d_0}$$

d = densità del corpo; V = volume del corpo; d_0 = densità del liquido;
 V_0 = volume parte immersa (liquido spostato)

Un caso interessante è quello di un corpo completamente immerso in un liquido:

$$V = V_0 \rightarrow d = d_0$$

Un oggetto completamente immerso in un liquido galleggia in modo indifferente se ha la stessa densità del liquido.

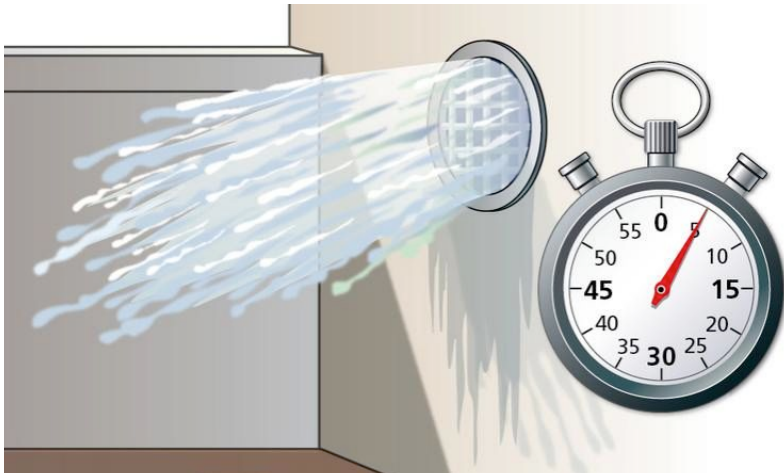
Il moto dei Fluidi

**Studia le leggi che regolano il
moto dei liquidi in tubi e condotte**

LA CORRENTE DI UN FLUIDO

Diamo alcune importanti definizioni:

Si chiama **corrente di un fluido** un movimento ordinato di un liquido o di un gas.

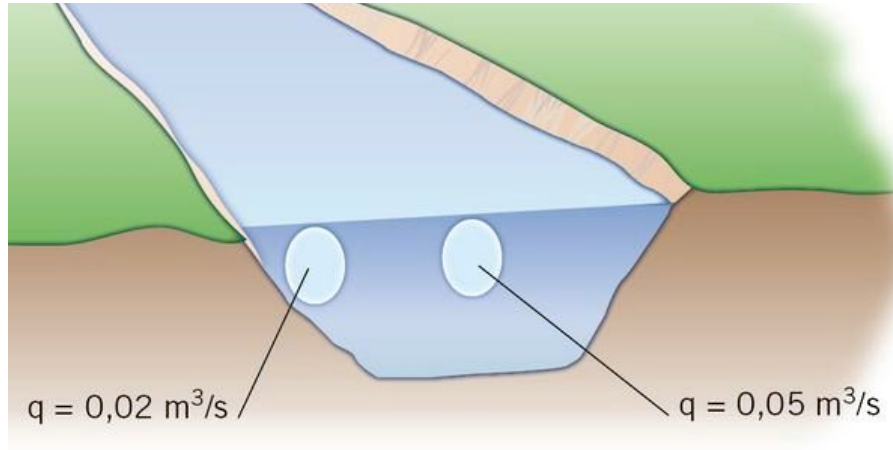


La **portata** q è il rapporto tra il volume ΔV di fluido che, nell'intervallo di tempo Δt , attraversa una sezione trasversale della condotta e l'intervallo Δt stesso:

$$q = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$$

portata (m^3/s) volume (m^3) intervallo di tempo (s)

Una corrente si dice **stazionaria** quando la sua portata, attraverso qualunque sezione della condotta, è costante nel tempo.



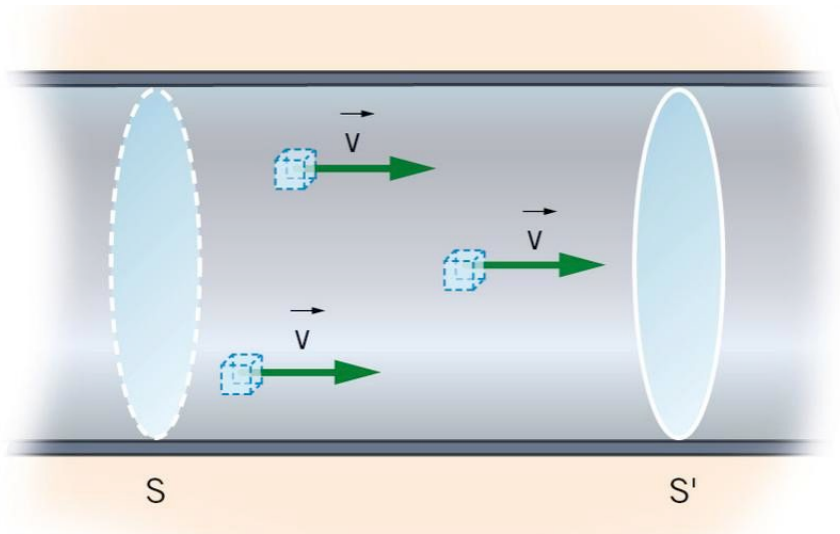
Per avere una corrente stazionaria non è necessario che la portata sia la stessa ovunque:

attraverso una superficie di 1 dm^2 , può passare in 1 s un volume di $0,05 \text{ m}^3$ d'acqua, mentre un'altra superficie uguale può essere attraversata, sempre nell'intervallo di tempo di 1 s , da $0,02 \text{ m}^3$ d'acqua.

Però, in ognuna delle due zone fra un'ora passeranno, ancora in un secondo, gli stessi volumi d'acqua.

L'EQUAZIONE DI CONTINUITA'

Vediamo da cosa dipende la portata di un fluido.



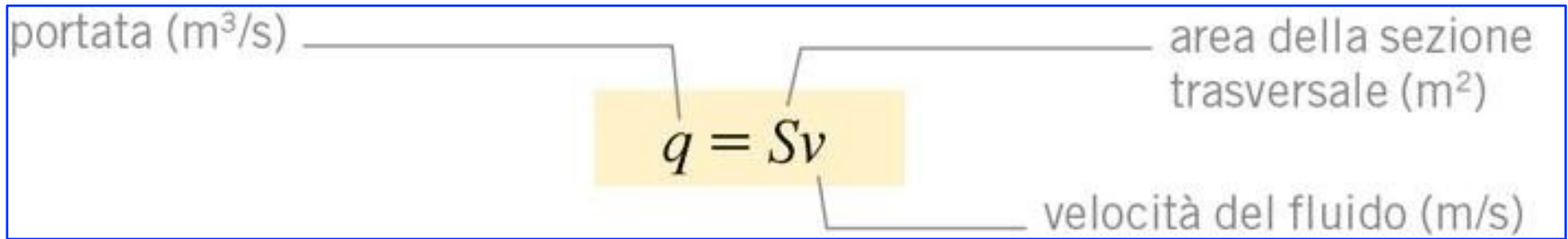
Consideriamo i volumetti di fluido che attraversano la sezione trasversale. In un intervallo di tempo Δt , i volumetti percorrono la distanza $l = v \Delta t$.

Quindi, nel tempo Δt la superficie di area S è attraversata da un volume di fluido pari a:

$$\Delta V = S l = S v \Delta t$$

Siamo quindi in grado di stabilire da cosa dipende la portata:

$$q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{Sv\Delta t}{\Delta t} = Sv$$

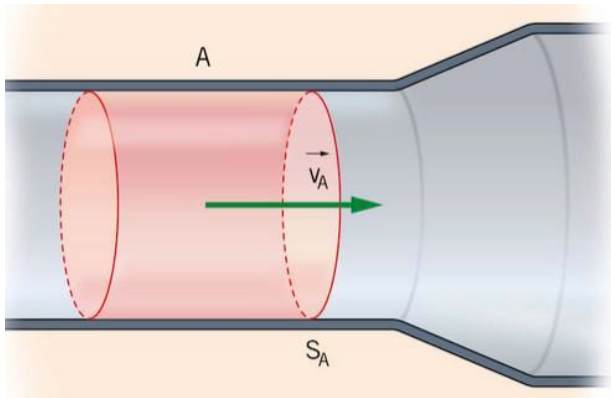


La portata è direttamente proporzionale sia all'area della sezione della condotta, sia alla velocità del fluido.

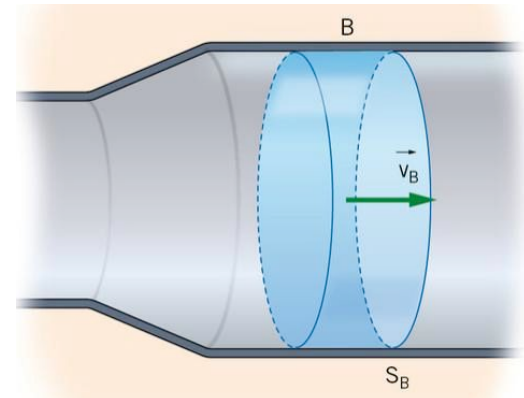
Il modello di un liquido incompressibile (capace di mantenere invariato il proprio volume qualunque sia il valore della pressione a cui è sottoposto), comporta che se un certo volume di liquido fluisce in una condotta, deve spingerne via un volume uguale.

Esaminiamo il moto di un liquido che scorre in un tubo singolo:

In una zona A, l'area della sezione trasversale della condotta è S_A e la velocità del liquido è v_A



In un secondo tratto B, l'area trasversale è S_B e il modulo della velocità del liquido è v_B



Per un liquido che scorre in una condotta senza sorgenti né pozzi, vale la relazione:

Equazione di continuità

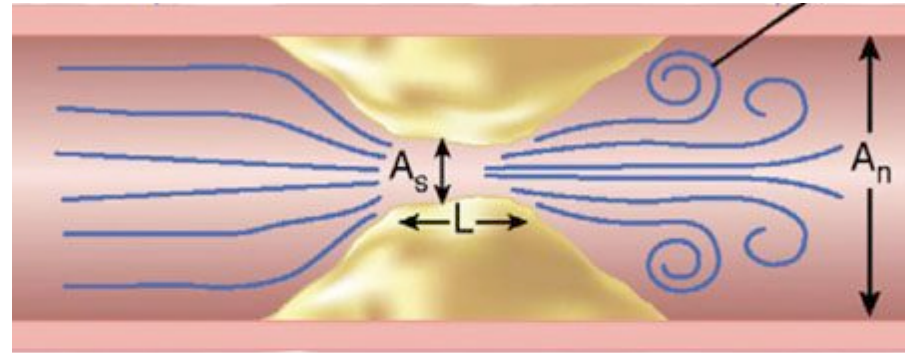
$$S_A v_A = S_B v_B$$

area in A (m^2) area in B (m^2)

velocità in A (m/s) velocità in B (m/s)

Essa dice che l'area trasversale della condotta e la velocità del liquido che scorre in essa sono inversamente proporzionali: se l'area si dimezza, la velocità del liquido raddoppia.

L'equazione di continuità è utilizzata in diagnostica medica per riconoscere i restringimenti (detti «stenosi») dei vasi sanguigni.

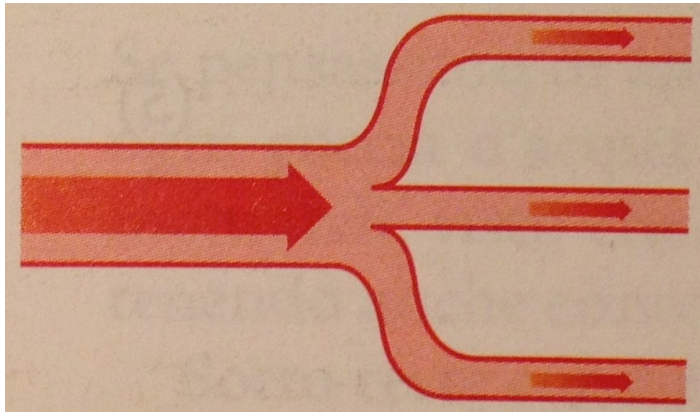


Con una tecnica chiamata *flussometria Doppler* si misura la velocità del sangue in diverse zone di un vaso.

Se si riscontra un aumento della velocità con cui scorre il sangue, significa che in quella zona c'è una diminuzione del diametro del vaso sanguigno. Questa diminuzione è tanto maggiore quanto più è grande l'aumento di velocità del sangue.

esempio

L'aorta di un adulto ha un raggio di 1,0 cm e una portata di 6,0 dm³/min. Qual è, in essa, la velocità del flusso sanguigno? Sapendo che la velocità del sangue nelle arterie direttamente alimentate dall'aorta è uguale a 5,0 cm/s, qual è l'area della sezione trasversale complessiva di tali arterie?



Dalla definizione di portata, ricaviamo la velocità del sangue nell'aorta:

$$Q = Sv \Rightarrow v = \frac{Q}{S} = \frac{1,0 \cdot 10^{-4}}{0,0314} = 0,32 \text{ m/s}$$

dove la sezione trasversale dell'aorta è approssimabile a un cerchio:

$$S = \pi r^2 = 3,14 \cdot 0,010 = 0,0314 \text{ m}^2$$

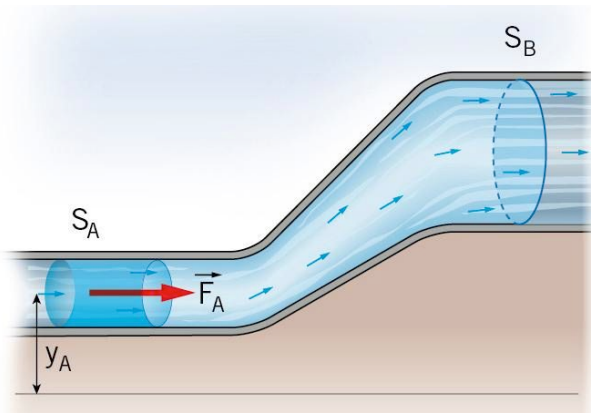
Per l'equazione di continuità, detta S' l'area della sezione trasversale complessiva delle arterie alimentate dall'aorta, nelle quali è nota la velocità v' con cui scorre il sangue, si ha:

$$Sv = S'v' \Rightarrow S' = S \cdot \frac{v}{v'} = 0,0314 \cdot \frac{0,32}{0,050} = 2,0 \cdot 10^{-3} m^2$$

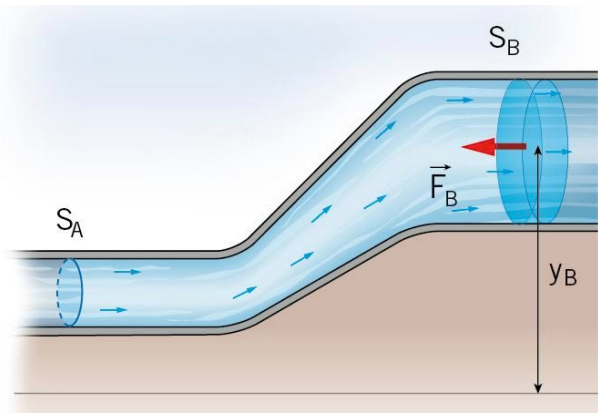
L'EQUAZIONE DI BERNOULLI

Un fluido che scorre in una condotta di diametro variabile e piegata in direzione verticale è sottoposto a diverse forze:

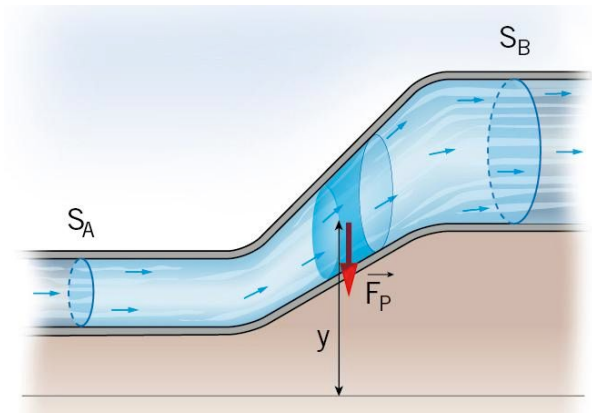
la spinta $\mathbf{F}_A$ da parte del fluido che sta «a monte»



la forza resistente $\mathbf{F}_B$ da parte del fluido che sta «a valle»



la forza-peso $\mathbf{F}_p$ che agisce sul fluido stesso



Inoltre, su ciascun volumetto di fluido in moto si esercita anche la forza di attrito degli altri volumetti di fluido e delle pareti del tubo.

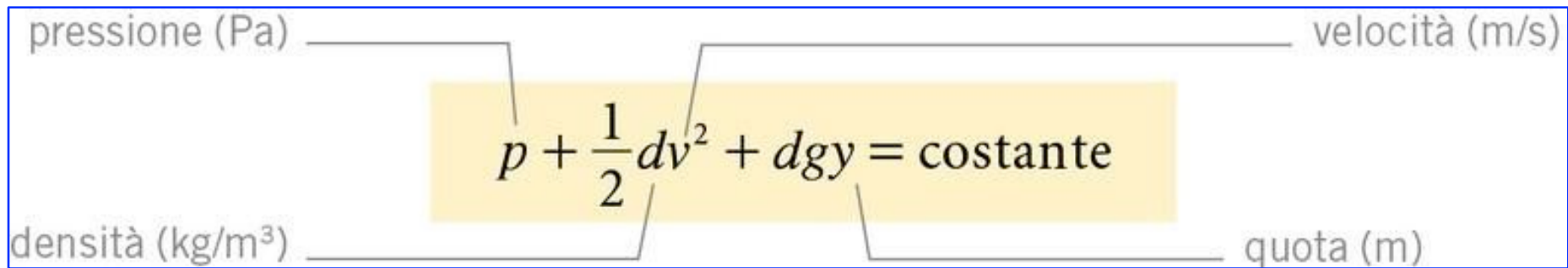
Durante il suo moto, per un volumetto di un fluido di densità d possono cambiare: la quota y a cui esso si trova, il valore v della velocità con cui si muove e la pressione p a cui è sottoposto. In generale, la relazione tra queste grandezze è molto complessa.

Il caso relativamente più semplice è quello in cui valgono le seguenti condizioni:

1) il fluido è incompressibile; 2) la corrente è stazionaria; 3) gli attriti interni del fluido e quelli con le pareti della condotta sono trascurabili.

Se queste tre condizioni sono verificate, il moto del fluido obbedisce alla seguente equazione:

Equazione di Bernoulli

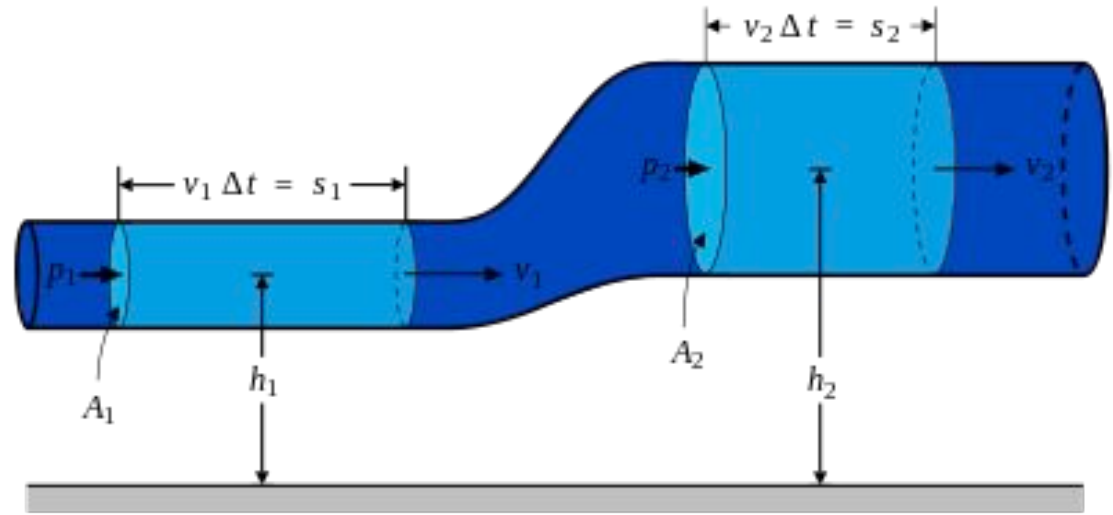


The diagram shows the Bernoulli equation $p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = \text{costante}$ centered within a yellow rectangular box. Four lines extend from the equation to labels positioned around the box: a line from p to 'pressione (Pa)' at the top left; a line from ρ to 'densità (kg/m³)' at the bottom left; a line from v to 'velocità (m/s)' at the top right; and a line from y to 'quota (m)' at the bottom right.

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = \text{costante}$$

Questa equazione ha la forma di una legge di conservazione.

In una zona 1 della condotta, pressione, velocità e quota del liquido hanno i valori p_1 , v_1 e h_1 .



Quando il fluido giunge in una seconda zona 2, queste grandezze fisiche possono avere cambiato tutti i loro valori, che sono diventati p_2 , v_2 e h_2 .

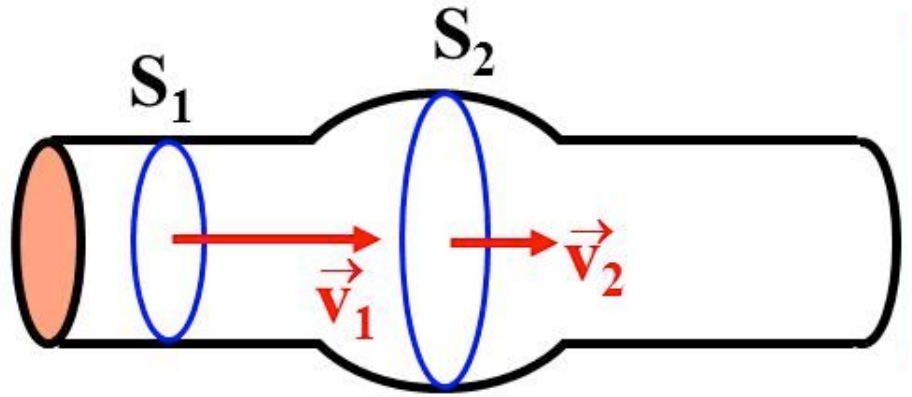
L'equazione di Bernoulli dice che:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2$$

esempio

Un **aneurisma** è una dilatazione localizzata di un vaso sanguigno dovuta a un'alterazione della sua parete. Supponiamo che in una certa zona l'area della sezione trasversale di un'arteria sia 1,5 volte maggiore del normale e che la velocità del sangue nei tratti non alterati della stessa arteria sia di 0,20 m/s. Assumendo che l'arteria sia orizzontale e sapendo che la densità del sangue è pari a $1,06 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, qual è la differenza fra la pressione nell'aneurisma e la pressione nella parte sana dell'arteria?

Nella parte sana dell'arteria il sangue ha velocità v_1 e attraversa un'area S_1 , che, nell'aneurisma si dilata al valore S_2 .

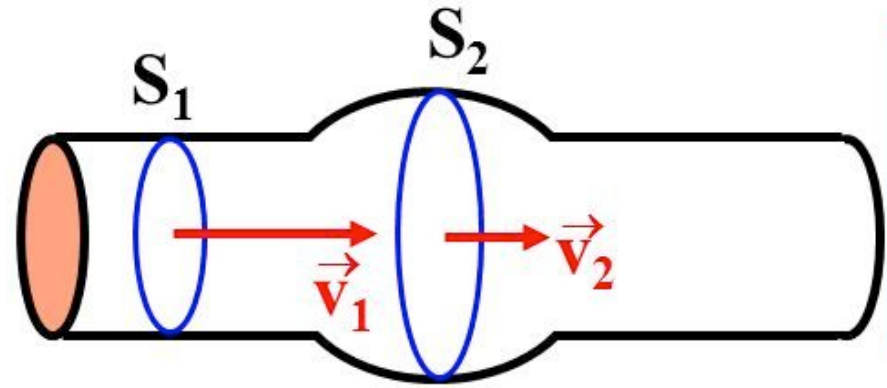


Dall'equazione di continuità segue che nell'aneurisma la velocità v_2 del flusso sanguigno è:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \Rightarrow v_2 = v_1 \cdot \frac{S_1}{S_2} = \frac{0,20}{1,5} = 0,13 \text{ m/s} \quad \text{dove} \quad \frac{S_2}{S_1} = 1,5 \rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{1,5}$$

$$S_2 > S_1 \Rightarrow v_2 < v_1$$

Poichè l'arteria è orizzontale, possiamo applicare l'equazione di Bernouilli, in cui mancherà il termine dhg , per determinare la differenza fra la pressione p_2 nell'aneurisma e la pressione p_1 nella zona non alterata:



$$p_2 + \frac{1}{2}dv_2^2 = p_1 + \frac{1}{2}dv_1^2$$

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{1}{2}d(v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2} \cdot 1,06 \cdot 10^3 (0,20^2 - 0,13^2) = 12 Pa$$

Riflettiamo sul risultato

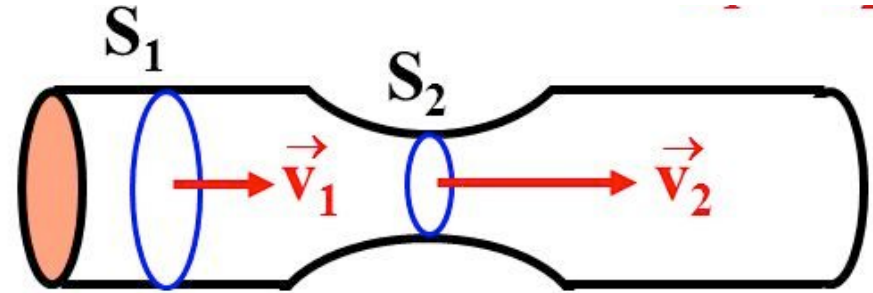
La differenza di pressione è positiva, cioè la pressione p_2 nell'aneurisma è maggiore di quella nella zona non alterata. Pertanto, l'eccesso di pressione sottopone a uno sforzo addizionale il tessuto già indebolito della parete dell'arteria, con conseguente rottura.

$$v_2 < v_1 \Rightarrow p_2 > p_1$$

aneurisma tende a
peggiorare

esempio

Cosa ci aspettiamo in una stenosi (restringimento dell'arteria)?



$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \Rightarrow S_2 < S_1 \rightarrow v_2 > v_1$$

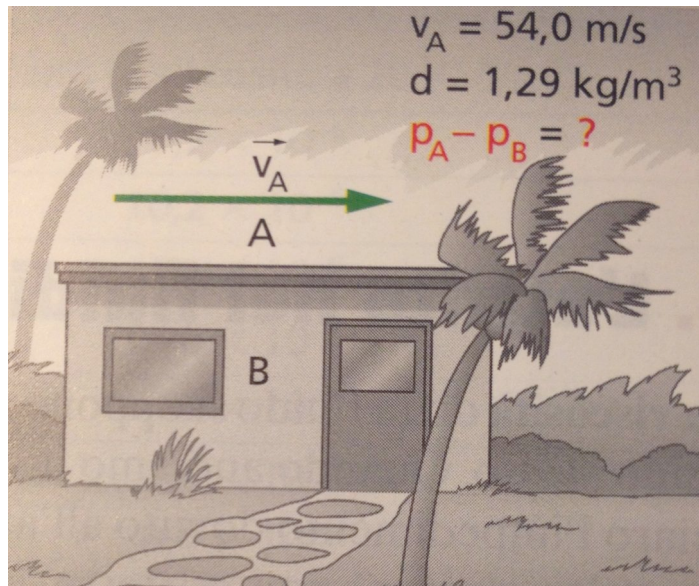
$$p_1 + \frac{1}{2} dv_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} dv_2^2 \Rightarrow \Delta p = p_2 - p_1 < 0$$

$$v_2 > v_1 \Rightarrow p_2 < p_1$$

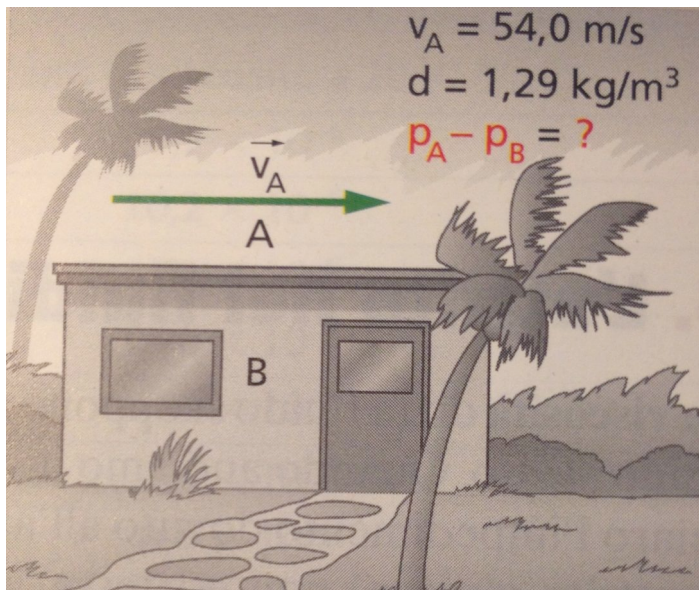
stenosi tende a
peggiorare

esempio

Il 16 settembre 2004 l'uragano Ivan giunse sulle coste dell'Alabama, negli USA, con venti che raggiungevano la velocità di $54,0 \text{ m/s}$ (circa 200 km/h). Se questo vento soffia al di sopra del tetto di una casa, quanto vale la differenza di pressione atmosferica tra l'esterno dell'abitazione e il suo interno?



Il vento soffia in orizzontale e l'aria che lo forma non è soggetta a forze che possono comprimerla (fluido incompressibile). Siamo nelle condizioni di applicabilità dell'equazione di Bernoulli.



Poniamo:

A=zona sopra il tetto della casa

B= zona interna della casa

$v_B = 0$ (velocità nulla dell'aria all'interno della casa)

Applichiamo l'equazione di Bernoulli:

$$p_A + \frac{1}{2} dv_A^2 = p_B + \frac{1}{2} v_B^2$$

$$\Delta p = p_A - p_B = \frac{1}{2} d(v_B^2 - v_A^2) = \frac{1}{2} \cdot 1,29(0^2 - 54,0^2) = -1,88 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

Analisi del risultato

La differenza di pressione ottenuta è negativa. Ciò significa che la pressione che si esercita sul tetto dall'interno (cioè dal basso) è maggiore di quella che agisce dall'alto. In particolare, con questa velocità del vento ogni metro quadrato del tetto è sottoposto a una forza verso l'alto pari a:

$$\Delta p = \frac{F}{A} \Rightarrow F = \Delta p \cdot A = 1,88 \cdot 10^3 \cdot 1 = 1,88 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Si tratta di una forza che può fare “esplodere” il tetto verso l'alto al passare dell'uragano, perchè è maggiore della forza peso F_p che agisce su un 1 m^2 di tetto.

Infatti, tenendo presente che tipicamente il tetto ha una massa di 100 kg/m^3 , abbiamo:

$$F_p = mg = 100 \cdot 10 \cong 10^3 \text{ N}$$

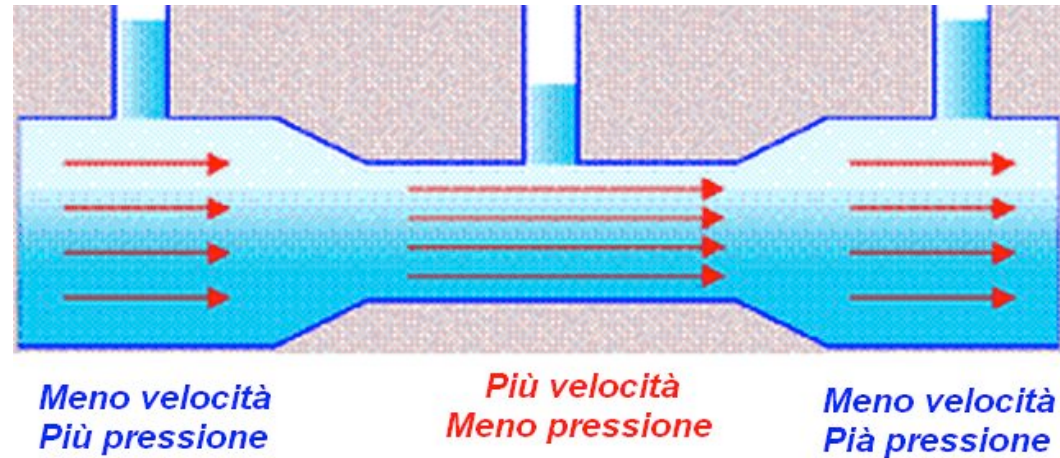
Quindi:

$$F > F_p$$

Questo esercizio ci consente di rispondere perchè nella parte posteriore delle automobili di formula 1 si mettono degli alettoni che hanno il profili di un'ala rovesciata.

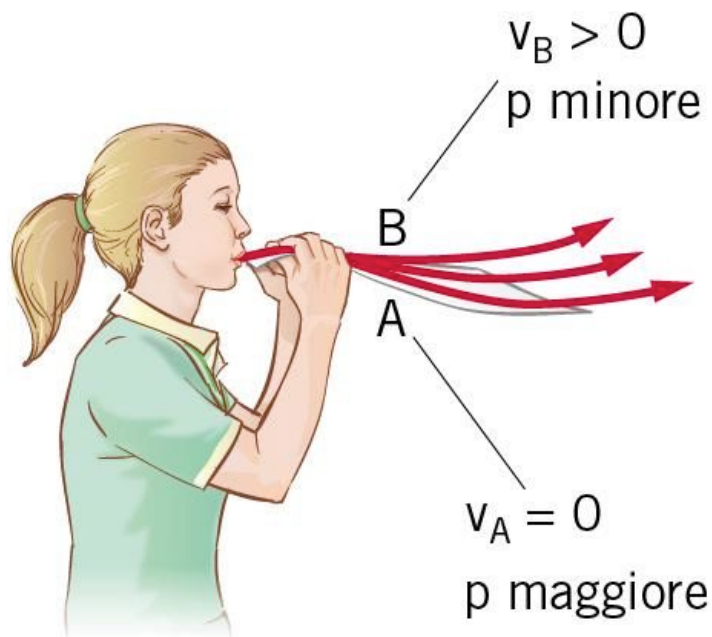
L'EFFETTO VENTURI

Quando la condotta in cui scorre il fluido è orizzontale ($y_A = y_B$), l'equazione di Bernoulli diventa:



$$p_A + \frac{1}{2} dv_A^2 = p_B + \frac{1}{2} dv_B^2 \Rightarrow p + \frac{1}{2} dv^2 = \text{costante}$$

Questo significa che se v diminuisce, p deve aumentare e viceversa. Tale fenomeno si chiama **effetto Venturi**.



Per verificare l'effetto Venturi, soffiando sopra il foglio, in orizzontale. Esso si muoverà verso l'alto, "aspirato" dalla corrente d'aria.

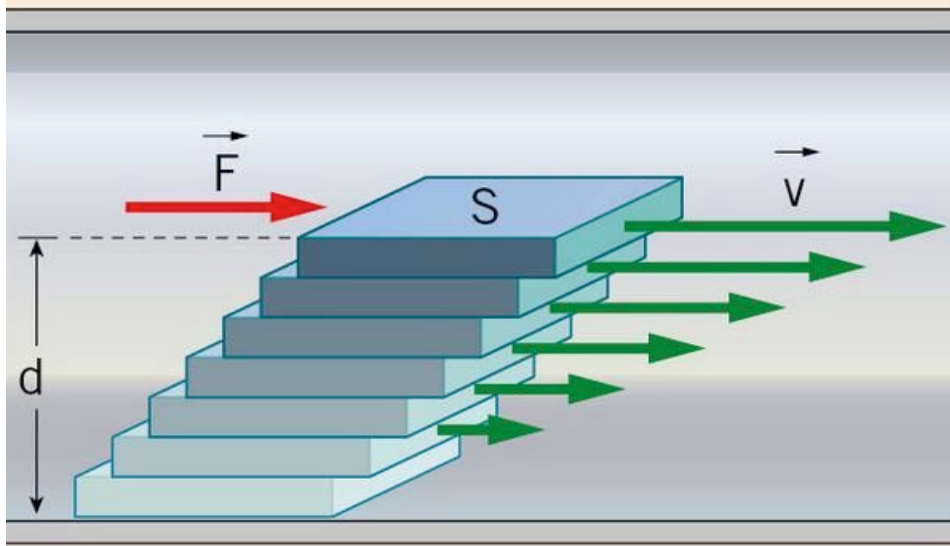
Infatti, sotto il foglietto l'aria è ferma e sopra il foglietto, invece, dato che sto soffiando, l'aria si muove con velocità v_B . In questo caso la precedente equazione diviene:

$$p_A = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 > p_B \rightarrow \text{il foglio è spinto verso l'alto}$$

➤ **L'attrito con le pareti della condotta**

In generale il comportamento di un fluido è incredibilmente complesso: può presentare attriti, vortici, schizzi, e tutta una serie di fenomeni molto difficili da descrivere.

Esiste però una condizione semplice, ed è quella in cui il fluido scorre in una condotta in modo regolare e con una velocità così bassa da non creare vortici. Questo comportamento si chiama *regime laminare*: *nella condizione laminare, il fluido si muove come se fosse formato da sottili lamine fluide che scivolano una sull'altra.*



La lamina di fluido a contatto con la parete della condotta risente di una forza di attrito che la rallenta.

Questo rallentamento a sua volta si trasmette per attrito a tutto il fluido strato per strato, ma diventa sempre meno evidente a mano a mano che ci si allontana dalla parete fissa.

Gli esperimenti mostrano che la forza necessaria per mantenere in moto laminare uno strato di fluido, con un valore della velocità v costante, è:

1. direttamente proporzionale alla velocità v dello strato di fluido e alla sua area S ;
2. inversamente proporzionale alla distanza d tra lo strato e la parete fissa.

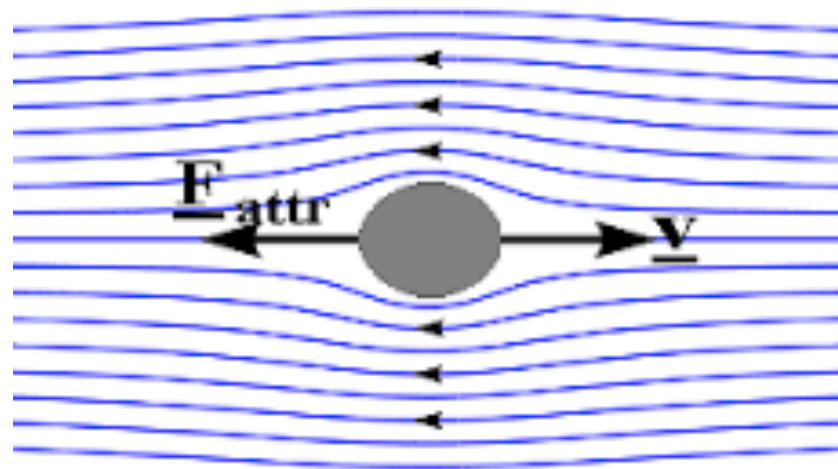
La formula che riassume queste proprietà è:

$$F = \eta \frac{Sv}{d}$$

La costante di proporzionalità η (coefficiente di viscosità) è una quantità che dipende dal tipo di fluido e dalla sua temperatura. È tanto maggiore quanto più sono grandi le forze di attrito interno del fluido. I valori dei coefficienti di viscosità per diversi fluidi sono tabellati.

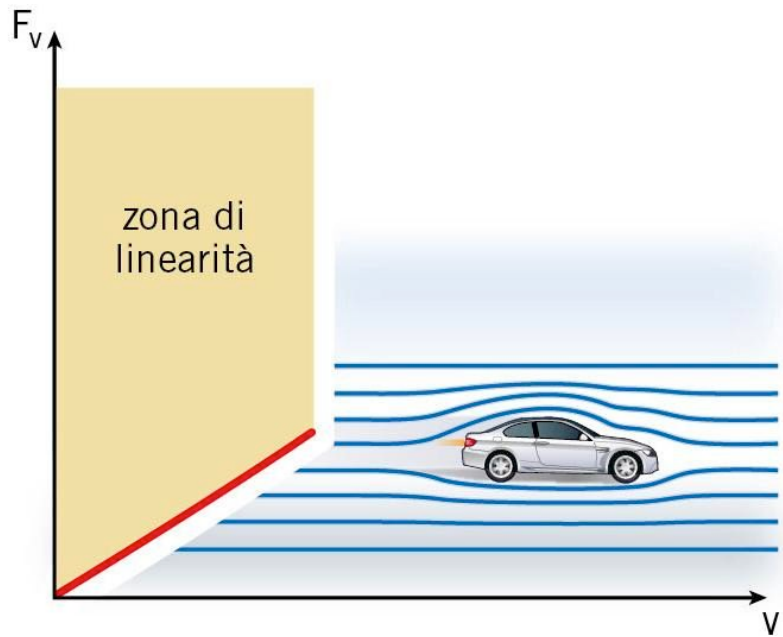
➤ L'attrito su un corpo in moto nel fluido

La viscosità di un fluido si oppone al moto degli oggetti che sono immessi nel fluido stesso.

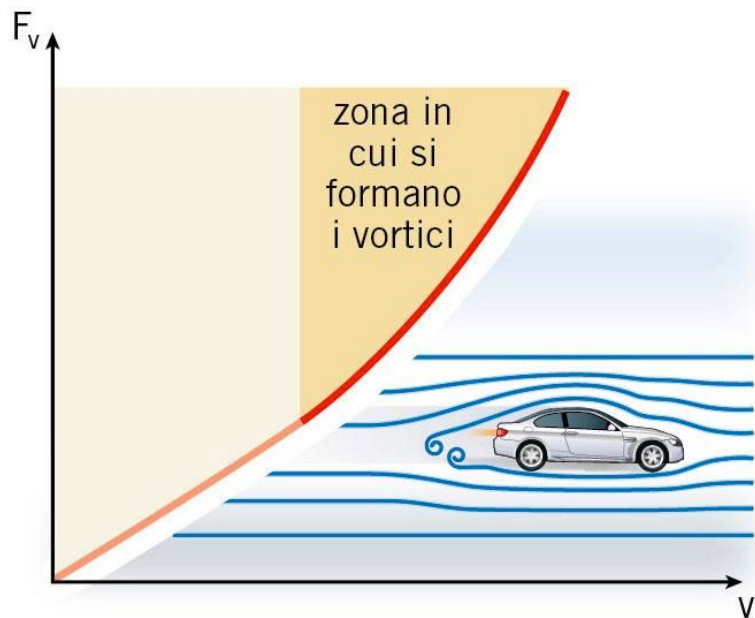


La forza di attrito viscoso dipende, oltre che dalla velocità, anche dalla viscosità dell'aria, dalla forma e dalle dimensioni del corpo in moto nel fluido.

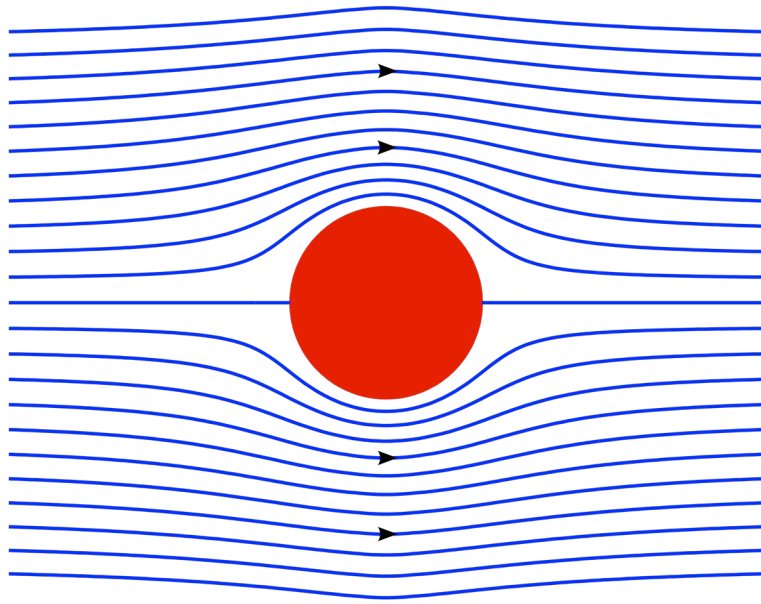
Un'automobile parte da ferma e inizia ad accelerare. Gli esperimenti mostrano che:



Finché la sua velocità è bassa, il flusso dell'aria attorno alla carrozzeria è laminare e la forza di attrito viscoso tra l'automobile e l'aria cresce in modo direttamente proporzionale alla sua velocità.



Però, non appena cominciano a formarsi vortici d'aria, il flusso non è più laminare e l'attrito viscoso inizia ad aumentare in modo direttamente proporzionale al quadrato della sua velocità.



Un caso molto più semplice è quello di una sfera di raggio r che si muove con velocità v (non così elevata da generare vortici) in un fluido che ha un coefficiente di viscosità η .

In questa situazione, il modulo F_v della forza di attrito viscoso sulla sfera è dato dalla seguente legge:

Legge di Stokes

attrito viscoso (N)

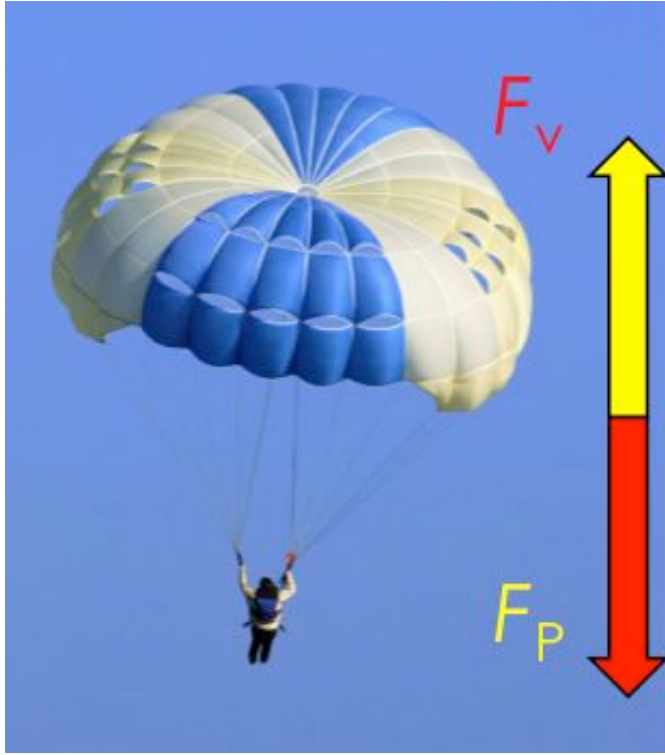
raggio (m)

$$F_v = 6\pi\eta r v$$

coefficiente di viscosità ($\text{Pa} \cdot \text{s}$)

velocità (m/s)

➤ La caduta in un fluido



Un paracadutista non si muove di moto uniformemente accelerato. Infatti, su di esso non agisce soltanto la forza-peso F_p (rivolta verso il basso), ma anche la forza di attrito F_v con l'aria (rivolta verso l'alto). Il moto del paracadutista è determinato dalla risultante di queste due forze.

La forza di attrito con l'aria aumenta man mano che la velocità del paracadutista cresce, fino a che raggiunge la stessa intensità della forza-peso.

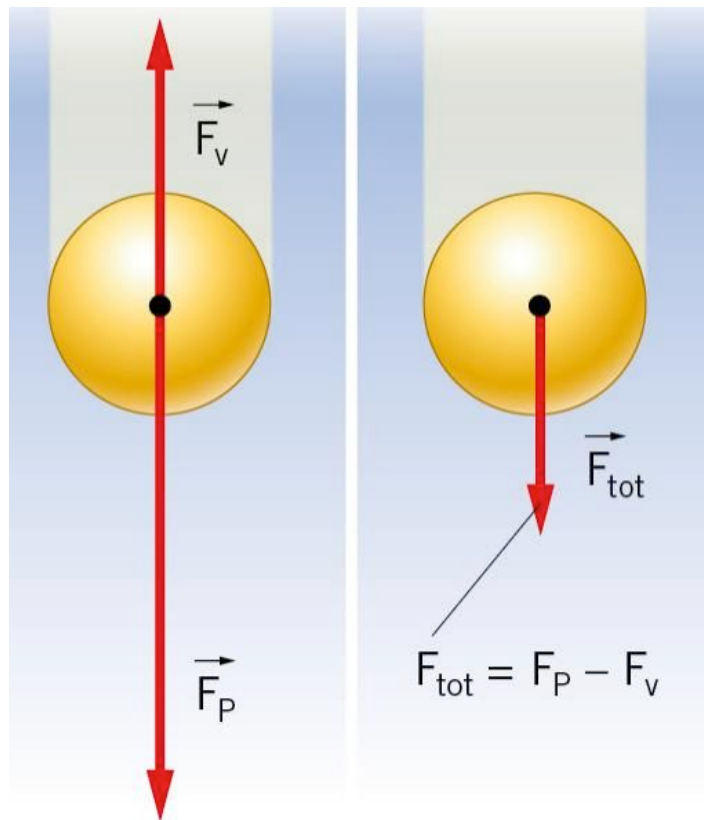
Da questo istante in poi le due forze sono uguali e opposte, e quindi la loro risultante è uguale a zero:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_p + \vec{F}_v = 0$$

Per il principio di inerzia, il paracadutista scende allora a velocità costante, chiamata **velocità limite**.

Un oggetto che cade nell'atmosfera accelera fino a giungere alla **velocità limite**, che rimane poi costante fino alla fine del moto.

➤ Velocità limite per una sfera

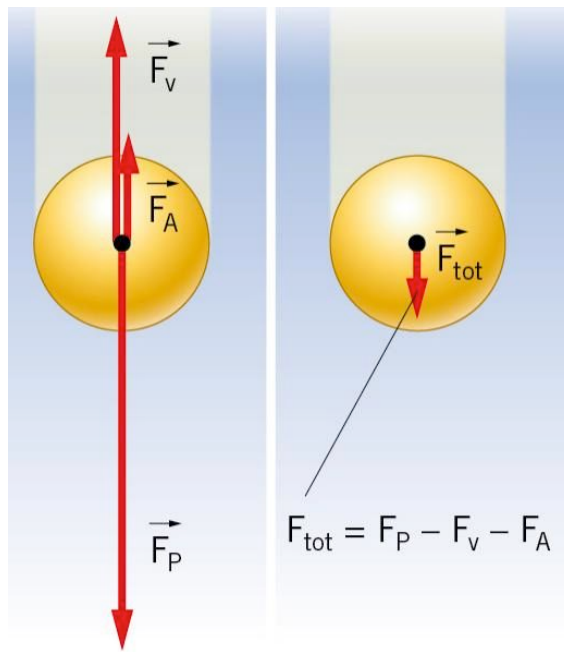


Possiamo calcolare la velocità limite per una sfera di massa m e raggio r che cade in un fluido con coefficiente di viscosità η .

I due vettori $\mathbf{F}_p$ e $\mathbf{F}_v$ hanno versi opposti. La sfera raggiunge la velocità limite (nell'ipotesi di moto laminare e velocità limite non troppo elevata).

Pertanto:

$$F_p - F_v = 0 \rightarrow F_v = F_p \rightarrow 6\pi\eta r v = mg \Rightarrow v = \frac{mg}{6\pi\eta r}$$



Quando la densità della sfera è confrontabile con quella del fluido in cui essa si muove, diventa importante tenere conto anche della spinta di Archimede che agisce, verso l'alto, sulla sfera che cade.

Nel caso che stiamo esaminando l'espressione della forza totale è:

$$F_{\text{tot}} = F_P - F_v - F_A = 0$$

Sostituendo alle varie forze le loro espressioni, si ottiene la velocità limite di caduta:

$$v = \frac{2(d - d_0)gr^2}{9\eta}$$

r = raggio sfera $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ volume sfera d = densità sfera

d_0 = densità fluido η = coefficiente viscosità g = accelerazione gravità