

# Problemi di Fisica

## La Cinematica

Moti unidimensionali

## PROBLEMA

Sei in un'automobile che sta andando in autostrada. Quale sarà la tua traiettoria rispetto al sistema di riferimento "automobile che sta sorpassando"?

### Soluzione

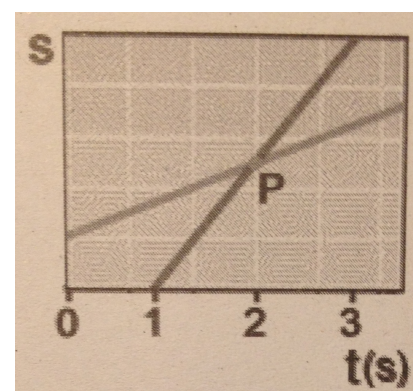
Il moto è un concetto relativo, e la sua descrizione cambia a seconda del sistema di riferimento. Un oggetto può essere contemporaneamente in moto rispetto ad un sistema di riferimento ed in quiete, o in moto con differente velocità, rispetto ad un altro sistema di riferimento. **Pertanto, la risposta al quesito è: la traiettoria è una retta percorsa all'indietro.**

## PROBLEMA

Cosa si può dire analizzando questo grafico spazio-tempo?

### Soluzione

Le due rette rappresentano le leggi del moto di due punti materiali (per esempio due macchine) che si muovono di moto rettilineo uniforme. La retta meno pendente (velocità più bassa) è riferita alla macchina che parte da una posizione iniziale più avanti rispetto alla seconda macchina. Però, la seconda macchina, avendo una velocità maggiore della prima (retta più pendente), nonostante parta più indietro rispetto alla prima, dopo un certo tempo la raggiungerà. **Pertanto, il punto P, intersezione delle due rette, rappresenta la situazione fisica in cui la seconda macchina raggiunge la prima.** In particolare, le coordinate del punto P (tempo e spazio), rappresentano l'istante e la posizione in cui la seconda macchina raggiunge la prima.



## PROBLEMA

Rappresentare graficamente le seguenti leggi del moto rettilineo uniforme e commentarle:

1)  $S = 10 - 2t$

2)  $S = 5t$

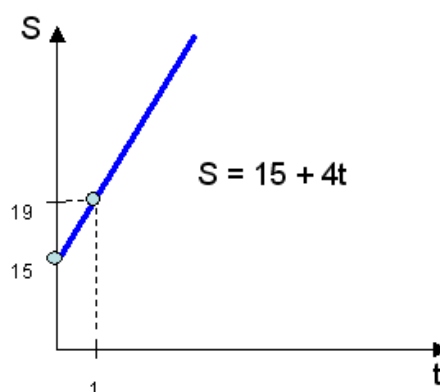
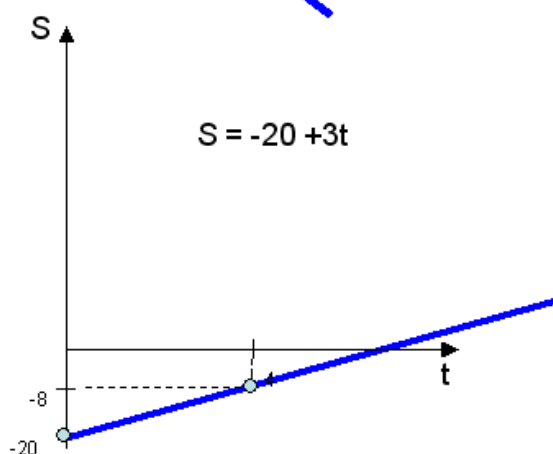
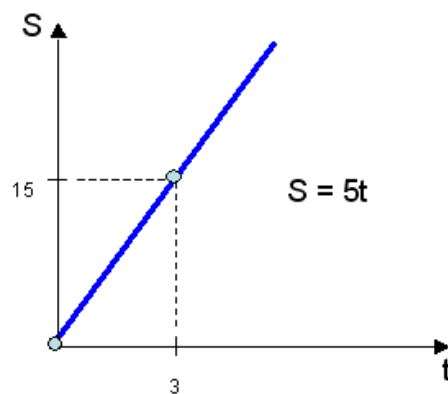
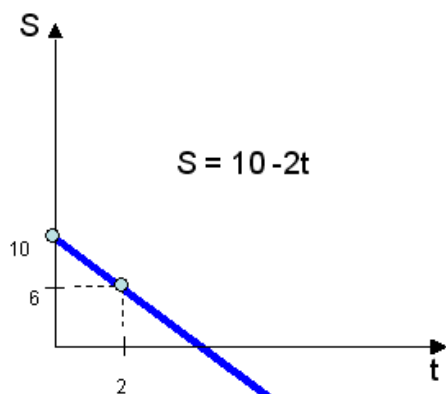
3)  $S = -20 + 3t$

4)  $S = 15 + 4t$

### Soluzione

Procedura: il grafico della legge del moto rettilineo uniforme è una retta, e per disegnarla abbiamo bisogno di due punti che vengono così individuati:

un punto è dato dalla posizione iniziale  $S_0$ , che è situato sull'asse delle S in quanto rappresenta l'intersezione della retta con l'asse stesso, l'altro punto si individua assegnando arbitrariamente alla variabile tempo t un valore positivo che va sostituito nella legge del moto per ricavare la variabile S.



$S = 10 - 2t \Rightarrow t = 2; S = 10 - 2 \cdot 2 = 6 \Rightarrow$  I due punti sono:  $A=(0; 10)$   $B=(2; 6)$

$S = 5t \Rightarrow t = 3; S = 5 \cdot 3 = 15 \Rightarrow$  I due punti sono:  $A=(0; 0)$   $B=(3; 15)$

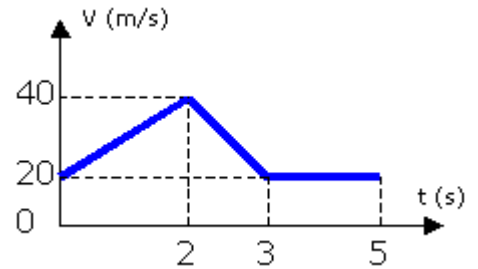
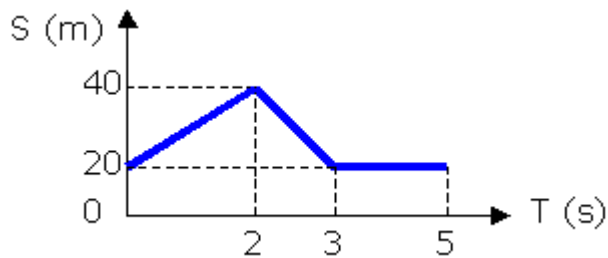
$S = -20 + 3t \Rightarrow t = 4; S = -20 + 3 \cdot 4 = -8 \Rightarrow$  I due punti sono:  $A=(0; -20)$   $B=(4; -8)$

$S = 15 + 4t \Rightarrow t = 1; S = 15 + 4 \cdot 1 = 19 \Rightarrow$  I due punti sono:  $A=(0; 15)$   $B=(1; 19)$

- ◆  $S = 10 - 2t \Rightarrow$  Si tratta di un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniforme: parte dalla posizione iniziale di 10 m e percorre la traiettoria verso sinistra (all'indietro rispetto al punto di partenza) con la velocità costante di 2 m/s
- ◆  $S = 5t \Rightarrow$  Si tratta di un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniforme: parte dall'origine del sistema di riferimento e percorre la traiettoria verso destra (in avanti rispetto al punto di partenza) con la velocità costante di 5 m/s
- ◆  $S = -20 + 3t \Rightarrow$  Si tratta di un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniforme: parte dalla posizione iniziale di -20 m (alla sinistra dell'origine del sistema di riferimento) e percorre la traiettoria verso destra (in avanti rispetto al punto di partenza) con la velocità costante di 3 m/s
- ◆  $S = 15 + 4t \Rightarrow$  Si tratta di un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniforme: parte dalla posizione iniziale di 15 m e percorre la traiettoria verso destra (in avanti rispetto al punto di partenza) con la velocità costante di 4 m/s

## PROBLEMA

Descrivi i seguenti grafici e scrivi le seguenti leggi del moto: primo grafico tratto tra 0 e 2 s; secondo grafico tratto tra 2 e 3 s.



## Soluzione

Grafico 1: Il punto materiale si muove prima in avanti di 20 m in 2 s con una velocità:

$$v_1 = \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} = \frac{40 - 20}{2 - 0} = 10 \text{ m/s}$$

poi all'indietro di 20 m in 1 s con una velocità:

$$v_2 = \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2} = \frac{20 - 40}{3 - 2} = -20 \text{ m/s}$$

quindi resta fermo per 2 s.

- Legge del moto relativa al primo tratto (tra 0 e 2 s):

$$s = 20 + 10t$$

Grafico 2: Il punto materiale in 2 s passa da 20 m/s a 40 m/s e quindi accelera di:

$$a_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = \frac{40 - 20}{2 - 0} = 10 \text{ m/s}^2$$

poi in 1 s passa da 40 m/s a 20 m/s e quindi decelera di:

$$a_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} = \frac{20 - 40}{3 - 2} = -20 \text{ m/s}^2$$

infine si muove a velocità costante di 20 m/s per 2 s.

- Legge del moto relativa al secondo tratto (tra 2 e 3 s):

$$s = s_0 + v_{02}t + \frac{1}{2}a_2t^2 = 60 + 40t + 10t^2$$

dove  $s_0$  è la posizione occupata all'istante  $t=2$  s e pari al tratto percorso nei primi due secondi:

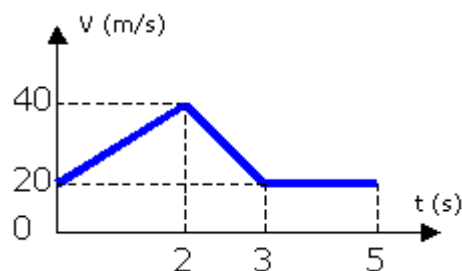
$$s_0 = v_{01}t_1 + \frac{1}{2}a_1t_1^2 = 20 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 = 60 \text{ m}$$

## PROBLEMA

Dal grafico calcola la distanza complessiva percorsa dal punto materiale.

## Soluzione

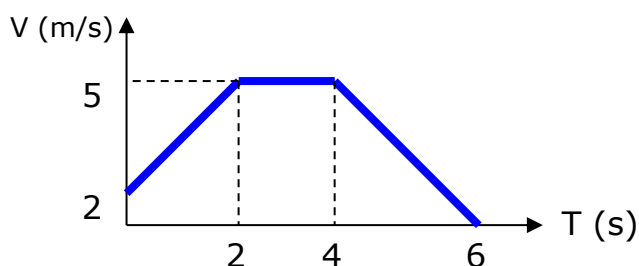
Il punto materiale in 2 s passa da 20 m/s a 40 m/s e quindi accelera di  $10 \text{ m/s}^2$ , poi in 1 s passa da 40 m/s a 20 m/s e quindi decelera di  $20 \text{ m/s}^2$ , infine si muove a velocità costante di 20 m/s per 2 s. La distanza complessiva percorsa dal punto materiale la calcoliamo nel seguente modo:



$$S = v_{01}t_1 + \frac{1}{2}a_1t_1^2 + v_{02}t_2 - \frac{1}{2}a_2t_2^2 + v_3t_3 = 20 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 + 40 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 1^2 + 20 \cdot 2 = 130 \text{ m}$$

## PROBLEMA

Dal grafico calcola la distanza complessiva percorsa dal punto materiale.



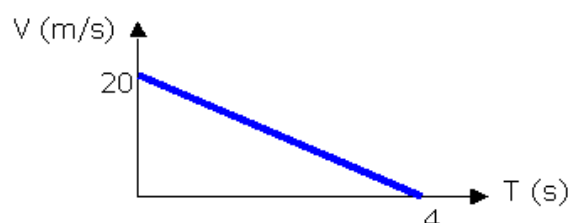
## Soluzione

Il punto materiale in 2 s passa da 2 m/s a 5 m/s e quindi accelera di  $1,5 \text{ m/s}^2$ , poi per altri 2 s si muove di moto uniforme con velocità di 5 m/s; infine in 2 s passa da 5 m/s fino a fermarsi, quindi decelera di  $2,5 \text{ m/s}^2$ . La distanza complessiva percorsa dal punto materiale la calcoliamo nel seguente modo:

$$s = \left( v_{01}t_1 + \frac{1}{2}a_1t_1^2 \right) + (v_{02}t_2) + \left( v_{03}t_3 - \frac{1}{2}a_3t_3^2 \right) = \left( 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 2^2 \right) + (5 \cdot 2) + \left( 5 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 2^2 \right) = 22 \text{ m}$$

## PROBLEMA

Il grafico rappresenta l'andamento nel tempo della velocità di un oggetto in moto su traiettoria rettilinea. Dopo 4,0 s l'oggetto si ferma e resta fermo. Scrivi l'equazione oraria del moto, sapendo che all'istante  $t=0$  l'oggetto si trovava nella posizione  $x=50 \text{ m}$ . In quale istante e con quale velocità è passato per la posizione  $x=76 \text{ m}$ .



## Soluzione

Poiché si tratta di un moto uniformemente decelerato, l'equazione oraria del moto è:

$$S = S_0 + V_0 \cdot t - \frac{1}{2} a t^2 = 50 + 20t - 2,5t^2 \quad \text{dove: } a = \frac{V_F - V_I}{t} = \frac{0 - 20}{4} = -5 \text{ m/s}^2$$

Per trovare l'istante in cui passa per la posizione  $x=76$  m dobbiamo risolvere la seguente equazione:

$$76 = 50 + 20t - 2,5t^2 \Rightarrow 2,5t^2 - 20t + 26 = 0 \Rightarrow t = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 260}}{5} = \frac{20 \pm 11,8}{5} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1,6 \text{ s} \\ t_2 = 6,4 \text{ s} \end{cases}$$

Va scartata la soluzione  $t_2 = 6,4$  s perché l'oggetto dopo 4 s si ferma.

La velocità con cui l'oggetto passa per la posizione  $x=76$  m è data da:

$$V = V_0 + a \cdot t = 20 - 5 \cdot 1,6 = 12 \text{ m/s}$$

## PROBLEMA

Le leggi del moto di due treni sono:

$$s_1 = 20 + 5t \quad s_2 = 70 - 2t$$

- a) Descrivere le due leggi del moto e dopo averle rappresentate sullo stesso sistema di assi cartesiani, commentare il grafico così ottenuto; b) Calcolare la posizione e l'istante in cui i due treni si incontrano.

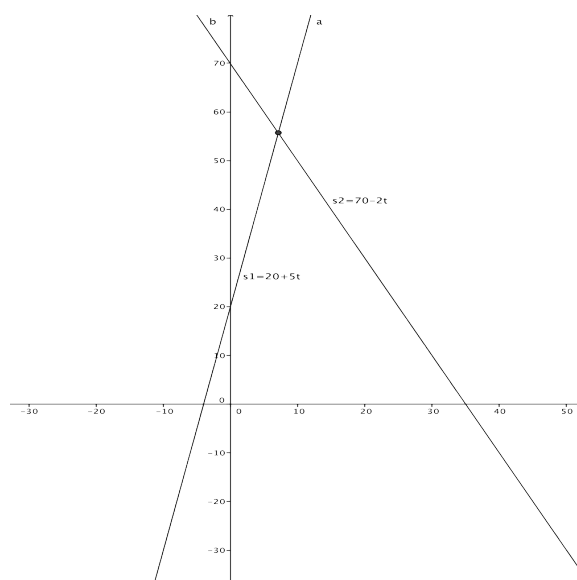
Se la legge del moto del secondo treno (viaggia verso destra) è:

$$s_2 = 5 + 4t^2$$

- c) Descrivere la legge del moto e rappresentarla insieme a quella del primo treno sullo stesso sistema di assi cartesiani; d) Commentare il grafico ottenuto; e) Calcolare la posizione e l'istante in cui il secondo treno raggiunge il primo.

## Soluzione

- a) Prima legge: il treno si muove di moto rettilineo uniforme in avanti con velocità di 5 m/s, partendo da una posizione iniziale di 20 m rispetto all'origine del sistema di riferimento. Seconda legge: il treno si muove di moto rettilineo uniforme all'indietro con velocità di 2 m/s, partendo da una posizione iniziale di 70 m rispetto all'origine del sistema di riferimento. Le coordinate del punto d'intersezione tra le due rette rappresentano l'istante di tempo e la posizione in cui i due treni s'incontrano.



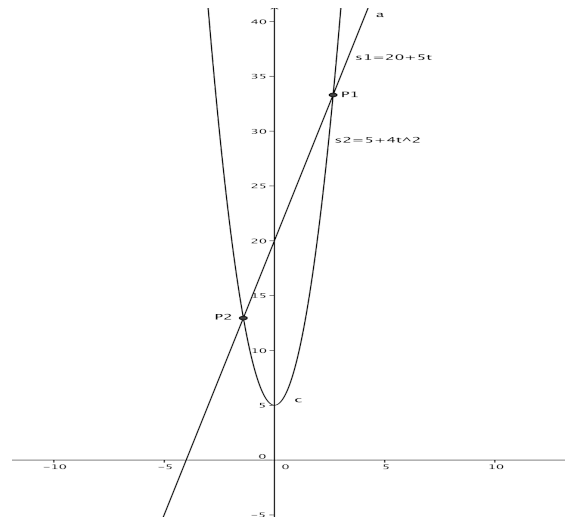
- b) La posizione e l'istante di tempo in cui s'incontrano i due treni, sono dati dalla soluzione del sistema formato dalle due leggi del moto:

$$\begin{cases} s_1 = 20 + 5t \\ s_2 = 70 - 2t \end{cases} \rightarrow 20 + 5t = 70 - 2t \rightarrow \begin{cases} t = 7,1s \\ s = 55,8m \end{cases}$$

- c) Il treno si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione di  $8m/s^2$ , partendo da fermo e da una posizione iniziale di 5m rispetto all'origine del sistema di riferimento.

- d) Le coordinate del punto d'intersezione tra le due leggi del moto (retta e parabola), rappresentano l'istante di tempo e la posizione in cui i due treni s'incontrano. Si tenga presente che i punti d'intersezione sono due, ma solo il punto P1 ha significato fisico (la coordinata tempo del punto P2 non è fisicamente accettabile in quanto negativa).

- e) La posizione e l'istante di tempo in cui il secondo treno raggiunge il primo, sono dati dalla soluzione del sistema formato dalle due leggi del moto:



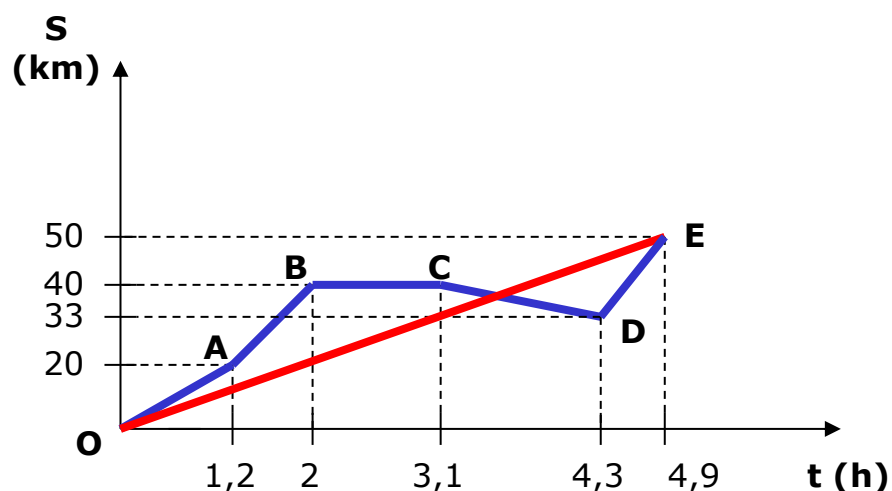
$$\begin{cases} s_1 = 20 + 5t \\ s_2 = 5 + 4t^2 \end{cases} \rightarrow 20 + 5t = 5 + 4t^2 \rightarrow 4t^2 - 5t - 15 = 0 \rightarrow t_1 = 2,7s \quad t_2 = -1,4s$$

$$\begin{cases} t = 2,7s \\ s = 33,5m \end{cases}$$

Abbiamo scartato la soluzione negativa del tempo in quanto fisicamente non accettabile.

## PROBLEMA

Nel grafico seguente (linea blu) è mostrata la legge oraria del moto di un punto materiale. Calcolare la velocità dell'oggetto nei vari intervalli di tempo e la velocità media (pendenza linea rossa) su tutta la durata del moto.



## Soluzione

La velocità verrà calcolata attraverso la sua definizione:

$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_{\text{Finale}} - S_{\text{Iniziale}}}{t_{\text{Finale}} - t_{\text{Iniziale}}}$$

Tratto – OA –  $\Rightarrow V_{OA} = \frac{20}{1,2} = 16,7 \text{ km/h} = 4,6 \text{ m/s} \Rightarrow$  Il punto materiale si muove in avanti con  $V = \text{cost}$

Tratto – AB –  $\Rightarrow V_{AB} = \frac{40 - 20}{2 - 1,2} = 25 \text{ km/h} = 6,9 \text{ m/s} \Rightarrow$  Il punto materiale si muove in avanti con  $V = \text{cost}$

Tratto – BC –  $\Rightarrow V_{BC} = 0 \Rightarrow$  Il punto materiale è fermo

Tratto – CD –  $\Rightarrow V_{CD} = \frac{33 - 40}{4,3 - 3,1} = -5,8 \text{ km/h} = 1,6 \text{ m/s} \Rightarrow$  Il punto materiale torna indietro con  $V = \text{cost}$

Tratto – DE –  $\Rightarrow V_{DE} = \frac{50 - 33}{4,9 - 4,3} = 28,3 \text{ km/h} = 7,9 \text{ m/s} \Rightarrow$  Il punto materiale si muove in avanti  $V = \text{cost}$

La velocità media è quella velocità costante (pendenza linea blu) che il punto materiale dovrebbe tenere per percorrere il tratto  $S = 50 \text{ km}$  nel tempo  $t = 4,9 \text{ h}$  :

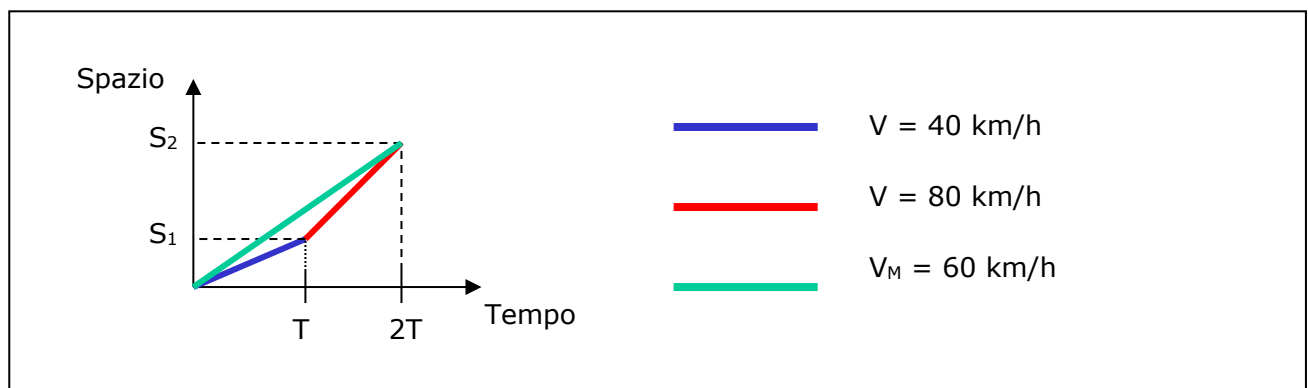
$$V_{\text{media}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{50}{4,9} = 10,2 \text{ km/h} = 2,8 \text{ m/s}$$

## PROBLEMA

Un'automobile viaggia per un certo tempo  $T$  alla velocità di  $40 \text{ km/h}$  e poi per lo stesso tempo alla velocità di  $80 \text{ km/h}$ . Trovare la velocità media.

## Soluzione

Analizziamo il problema prima graficamente, riportando sugli assi cartesiani le due velocità ( $40 \text{ km/h}$  linea blu;  $80 \text{ km/h}$ ) e quindi quella media (linea verde):



La velocità media si ottiene dalla sua definizione, tenendo presente che in ogni  $T$  lo spazio percorso è diverso :

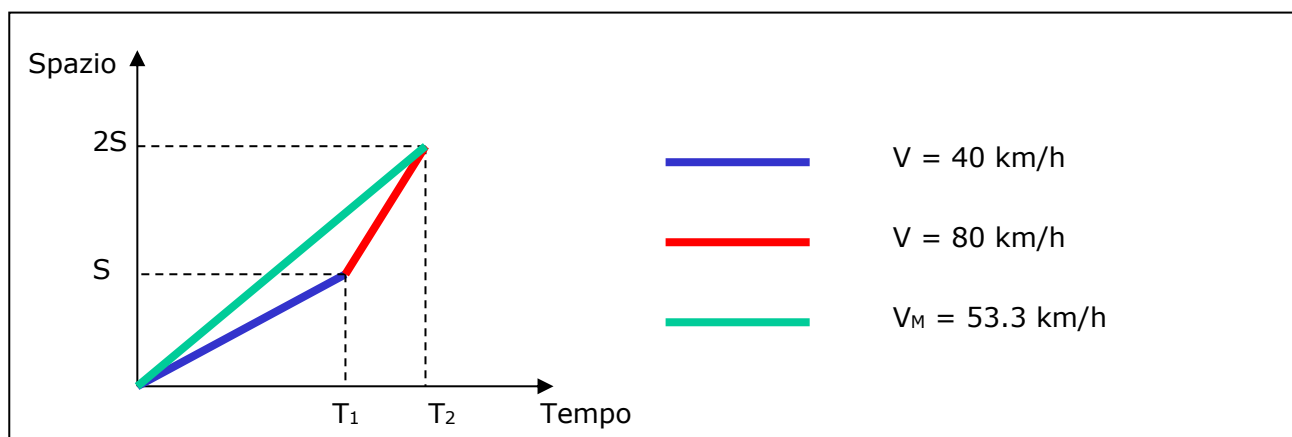
$$V_M = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{V_1 \cdot T + V_2 \cdot T}{T + T} = \frac{T \cdot (V_1 + V_2)}{2T} = \frac{V_1 + V_2}{2} = \frac{40 + 80}{2} = 60 \text{ km/h}$$

## PROBLEMA

Un'automobile viaggia per un certo tempo  $T$  alla velocità di 40 km/h, percorrendo un cammino  $S$ , e poi per lo stesso tragitto  $S$  alla velocità di 80 km/h. Trovare la velocità media.

## Soluzione

Analizziamo il problema prima graficamente, riportando sugli assi cartesiani le due velocità (40 km/h linea blu; 80 km/h) e quindi quella media (linea verde):



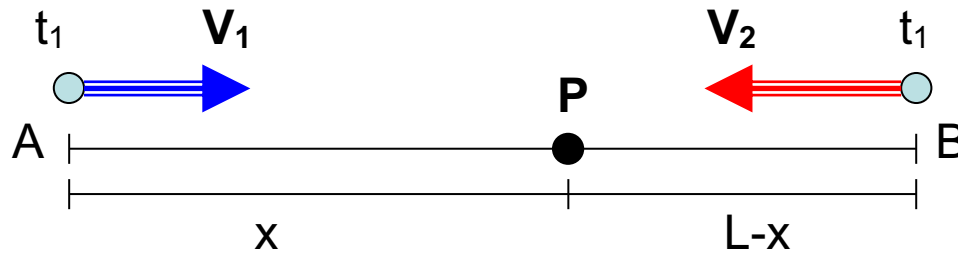
La velocità media si ottiene dalla sua definizione, tenendo presente che in  $T_1$  e  $T_2$  l'automobile percorre lo stesso tragitto  $S$  :

$$V_M = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S + S}{\frac{S}{V_1} + \frac{S}{V_2}} = \frac{2S}{S \cdot \left( \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right)} = \frac{2}{\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}} = \frac{2}{\frac{V_2 + V_1}{V_1 \cdot V_2}} = \frac{2V_1 \cdot V_2}{V_1 + V_2} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 80}{40 + 80} = 53.3 \text{ km/h}$$

## PROBLEMA

Anna e Lucia, che abitano a 15 km di distanza, decidono di incontrarsi. Anna parte alle 16<sup>h</sup> 18<sup>m</sup> con la sua bicicletta alla velocità di 20 km/h; Lucia parte alle 16<sup>h</sup> 24<sup>m</sup> e tiene una velocità di 25 km/h. A che ora s'incontrano e in quale posizione?

## Soluzione



Indichiamo con:

$AP = x$  il punto nel quale A e B si incontrano

Ovviamente, poiché il problema chiede di determinare l'ora di incontro, il **tempo impiegato da A e B per raggiungere il punto P è lo stesso**, solo che bisogna tener presente che B parte con 6 minuti di ritardo:

$$1) \quad t_A = \frac{x}{V_1} \qquad 2) \quad t_B = \frac{L-x}{V_2} + 0,1$$

$$t_A = t_B \Rightarrow \frac{x}{V_1} = \frac{L-x}{V_2} + 0,1 \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{15-x}{25} + 0,1 \Rightarrow 5x = 60 - 4x + 10 \Rightarrow 9x = 70 \Rightarrow x = 7,8 \text{ km}$$

**notare:** le velocità sono espresse in km/h, le distanze in km per cui i 6 minuti di ritardo vanno trasformati in ore ( $6^m = 6/60 = 0,1^h$ ).

Per trovare l'ora d'incontro, possiamo utilizzare indifferentemente la 1) o la 2):

$$t_A = \frac{x}{V_1} = \frac{7,8}{20} = 0,39^h$$

Trasformando le ore in minuti:  $0,39 \cdot 60 = 23^m$ , otteniamo che:

$$t_{\text{incontro}} = 16^h 18^m + 23^m = 16^h 41^m$$

## PROBLEMA

Un'automobile, durante una frenata uniforme, passa in un minuto dalla velocità di 40 km/h a quella di 28 km/h. Trovare il valore dell'accelerazione e dello spazio percorso

## Soluzione

La macchina passando da una velocità iniziale di 40 km/h a quella finale di 28 km/h, subisce una decelerazione data da:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_F - V_I}{t} = \frac{7,8 - 11,1}{60} = -0,055 \text{ m/s}^2$$

notare:

- $40 \text{ km/h} = 11.1 \text{ m/s}$        $28 \text{ km/h} = 7.8 \text{ m/s}$        $1 \text{ minuto} = 60 \text{ secondi}$
- il valore negativo dell'accelerazione sta ad indicare che la macchina decelera

Poiché la decelerazione avviene in modo costante, si tratta di un moto uniformemente accelerato descritto dalla seguente legge del moto:

$$S = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 11.1 \cdot 60 - \frac{1}{2} \cdot 0.055 \cdot 60^2 = 567 \text{ m}$$

## PROBLEMA

Un'automobile, che viaggia alla velocità  $v=120 \text{ km/h}$ , è a  $190 \text{ m}$  da un semaforo quando scatta il giallo. L'automobilista frena e l'automobile rallenta con una accelerazione  $a=3,0 \text{ m/s}^2$ . Dopo  $10 \text{ s}$  il semaforo dal giallo passa al rosso. a) Che velocità ha l'automobile quando si accende il rosso? b) In tale istante l'automobile ha già superato la linea del semaforo? c) Cosa succederebbe se il moto fosse rettilineo uniforme?

## Soluzione

a) Applichiamo la legge oraria della velocità:

$$v_f = v_0 - at = 33,3 - 3 \cdot 10 = 3,3 \text{ m/s} = 12 \text{ km/h}$$

dove:

$$120 \text{ km/h} = 33,3 \text{ m/s}$$

$$3,3 \text{ m/s} = 12 \text{ km/h}$$

b) Applichiamo la legge oraria del moto:

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} at^2 = 33,3 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^2 = 183 \text{ m}$$

Quando scatta il rosso, l'automobilista non ha superato la linea del semaforo.

c) Se il moto fosse rettilineo uniforme, l'automobilista percorrerebbe i  $190 \text{ m}$  che lo separano dal semaforo in un tempo pari a:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{\Delta v} = \frac{190}{33,3} = 5,7 \text{ s}$$

per cui, quando il semaforo passa dal giallo al rosso dopo  $10 \text{ s}$ , l'automobilista ha già superato la linea del semaforo quando era ancora verde.

## PROBLEMA

Un sasso viene lanciato da un ponte con una velocità di 20 m/s diretta verso l'alto. Il sasso cade nel fiume dopo 6 s. Calcola quanto è alto il ponte rispetto al fiume ( $g=10 \text{ m/s}^2$ ).

### Soluzione

Il problema è scomponibile in due tratti: salita e discesa.

➤ Salita

Tempo di salita:

$$t_s = \frac{\Delta v}{g} = \frac{0 - 20}{-10} = 2 \text{ s}$$

Altezza massima raggiunta:

$$h_s = v_0 t_s - \frac{1}{2} g t_s^2 = 20 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 = 20 \text{ m}$$

➤ Discesa

$$h_d = \frac{1}{2} g t_d^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4^2 = 80 \text{ m} \quad \text{dove: } t_d = t - t_s = 6 - 2 = 4 \text{ s}$$

Il ponte è alto:

$$h = h_d - h_s = 80 - 20 = 60 \text{ m}$$

## PROBLEMA

Due ciclisti transitano allo stesso istante di tempo in un incrocio. Il primo ha una velocità di 29 km/h e il secondo di 31 km/h. Ciascuno mantiene costante la propria velocità. Dopo quanto tempo il loro distacco è di 750 m? (esprimere il risultato in minuti e secondi).

### Soluzione

Il distacco è dato dalla differenza delle loro posizioni:

$$\Delta s = s_2 - s_1 = (v_2 - v_1) \Delta t$$

da cui:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{\Delta v} = \frac{0,75}{2} = 0,375 \text{ h} = 22'30''$$

## PROBLEMA

Una palla viene lanciata verso il basso da un'altezza di 15 m e con una velocità iniziale  $V_0=10\text{m/s}$ . Calcolare la velocità con cui tocca il suolo.

### Soluzione

Le equazioni che descrivono il moto, in base alla scelta del sistema di riferimento, sono:

$$\begin{cases} v = v_0 + gt \\ s = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo il tempo di caduta:

$$15 = 5t + \frac{1}{2} \cdot 9,8t^2 \Rightarrow 4,9t^2 + 5t - 15 = 0 \Rightarrow t = \frac{-5 \mp \sqrt{25 + 294}}{9,8} = \frac{-5 \mp 17,9}{9,8} = \begin{cases} t_1 = -2,3\text{s} \\ t_2 = 1,3\text{s} \end{cases}$$

La prima soluzione non ha significato (non ha senso un tempo negativo), per cui il tempo di caduta è dato dalla seconda soluzione, cioè  $t=1,3\text{ s}$ .

Sostituendo il valore di  $t=1,3\text{ s}$  nella prima equazione del sistema, otteniamo la velocità con cui la palla raggiunge il suolo:

$$v = 5 + 9,8 \cdot 1,3 = 18\text{m/s}$$

## PROBLEMA

Un treno si muove tra due stazioni, poste a 1,5 km di distanza. Percorre la prima metà del tragitto di moto uniformemente accelerato e la seconda di moto uniformemente ritardato. Data la velocità massima di 50 km/h, calcolare il valore dell'accelerazione e il tempo totale di percorrenza.

### Soluzione

Bisogna risolvere un sistema di due equazioni formate dalle leggi del moto e della velocità, che ammetterà come soluzione l'accelerazione "a" ed il tempo totale di percorrenza "T", tenendo presente che il tempo della fase di accelerazione è lo stesso di quello della fase di decelerazione, così come i due tragitti:

$$\begin{cases} \frac{S}{2} = \frac{1}{2} a \cdot \left(\frac{T}{2}\right)^2 \\ V_{\text{Max}} = a \cdot \frac{T}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 750 = \frac{1}{2} a \cdot \left(\frac{T}{2}\right)^2 \\ 13,9 = a \cdot \frac{T}{2} \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di sostituzione, ricavando T dalla seconda equazione e sostituendola nella prima equazione:

$$\begin{cases} T = \frac{27,8}{a} \\ 750 = \frac{1}{2} a \cdot \left(\frac{27,8}{2a}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{27,8}{a} \\ 750 = \frac{1}{2} a \cdot \frac{773}{4a^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{27,8}{a} \\ 6000a = 773 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{27,8}{a} = \frac{27,8}{0,13} = 214\text{s} \\ a = \frac{773}{6000} = 0,13\text{m/s}^2 \end{cases}$$

## PROBLEMA

Un'automobile viaggia a 120 km/h. Visto un ostacolo, il conducente riesce a fermarsi in 110 m. Qual è l'accelerazione e quanto tempo impiega?

### Soluzione

Tenendo presente che la macchina decelera, quindi l'accelerazione è negativa, e che la velocità finale è nulla, perché dopo 110 m la macchina si ferma, le leggi da applicare sono le seguenti:

$$\begin{cases} (1) \Rightarrow S = V_I \cdot T - \frac{1}{2} a \cdot T^2 \\ (2) \Rightarrow V_F = V_I - a \cdot T \end{cases}$$

Ricaviamo T dalla seconda equazione:

$$(3) \quad T = \frac{V_I}{a}$$

e sostituiamola nella prima, otteniamo un'equazione nella sola incognita "a":

$$S = V_I \cdot \frac{V_I}{a} - \frac{1}{2} a \cdot \left( \frac{V_I}{a} \right)^2 = \frac{V_I^2}{a} - \frac{1}{2} a \cdot \frac{V_I^2}{a^2} = \frac{V_I^2}{a} - \frac{V_I^2}{2a}$$

la cui soluzione è:

$$2a \cdot S = 2V_I^2 - V_I^2 \Rightarrow 2a \cdot S = V_I^2 \Rightarrow a = \frac{V_I^2}{2S} = \frac{33.3^2}{2 \cdot 110} = 5.04 \text{ m/s}^2$$

A questo punto, utilizzando la (3), calcoliamo il tempo di arresto:

$$T = \frac{33.3}{5.04} = 6.61 \text{ s}$$

## PROBLEMA

Una palla viene lanciata da terra verso l'alto con una velocità iniziale  $V_i = 12 \text{ m/s}$ .

1. Quanto tempo impiega a raggiungere il punto più alto della traiettoria?
2. Quanto vale l'altezza massima raggiunta?
3. Dopo quanto tempo ricade a terra?
4. Con che velocità tocca terra?

### Soluzione

1. Poiché si tratta del moto di un grave, la legge da applicare è la seguente:

$$g = \frac{V_F - V_I}{t} \Rightarrow g = \frac{-V_I}{t} \Rightarrow t = \frac{-V_I}{g} = \frac{-12}{-9.8} = 1.2 \text{ s}$$

**NOTARE:**

- Nel punto più alto raggiunto la palla si ferma, quindi  $V_{\text{Finale}} = 0$
- Nel moto verso l'alto la forza di gravità, quindi "g", agisce nel verso opposto, per cui la "g" è negativa

2. Per calcolare la massima altezza raggiunta, applichiamo la legge del moto di un grave:

$$S = V_I \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 12 \cdot 1.2 - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot 1.2^2 = 7.3\text{m}$$

3. Il tempo di caduta è uguale a quello di salita (perché???)

4. Per calcolare la velocità con la quale la palla tocca terra, basta applicare la stessa legge al punto 1., tenendo presente che in questo caso la velocità iniziale è nulla e la "g" è positiva:

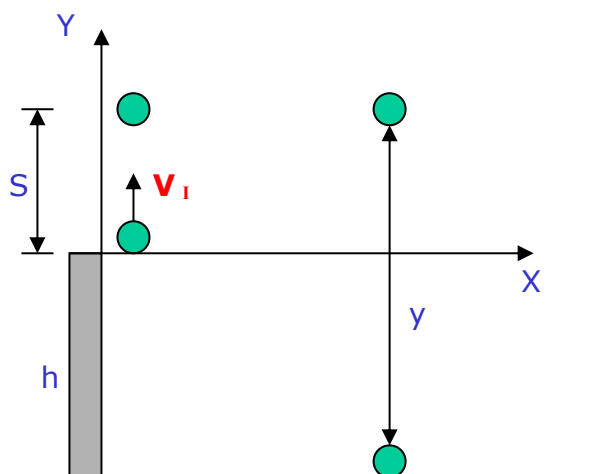
$$V_F = g \cdot t = 9.8 \cdot 1.2 = 12\text{m/s}$$

**NOTARE:**

- La velocità finale coincide con quella iniziale (perché???)

**PROBLEMA**

Un uomo lancia un sasso dal tetto di un palazzo verso l'alto, con una velocità di 12.25m/s. Il sasso raggiunge il suolo dopo 4.25 s. Si calcoli: 1) L'altezza del palazzo; 2) La massima altezza raggiunta dal sasso rispetto a terra; 3) La velocità con cui il sasso tocca il suolo.

**Soluzione**

Per calcolare lo spazio S percorso nella fase di salita, dobbiamo prima calcolare il tempo impiegato per percorrerlo, tenendo presente che la velocità raggiunta nel punto più alto è nulla e che la "g" in questa fase è negativa:

$$g = \frac{V_F - V_I}{T_{\text{salita}}} \Rightarrow g = \frac{-V_I}{T_{\text{salita}}} \Rightarrow T_{\text{salita}} = \frac{-V_I}{g} = \frac{-12.25}{-9.8} = 1.25\text{s}$$

quindi:

$$S = V_1 \cdot T_{\text{salita}} - \frac{1}{2} g \cdot T_{\text{salita}}^2 = 12.25 \cdot 1.25 - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot 1.25^2 = 7.7 \text{ m}$$

A questo punto siamo in grado di calcolare la massima altezza raggiunta dal sasso rispetto a terra:

$$y = \frac{1}{2} g \cdot T_{\text{caduta}}^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot 3^2 = 44.1 \text{ m}$$

dove:  $T_{\text{caduta}} = T_{\text{totale}} - T_{\text{salita}} = 4.25 - 1.25 = 3 \text{ s}$

Pertanto l'altezza del palazzo sarà:

$$h = y - S = 44.1 - 7.7 = 36.4 \text{ m}$$

In conclusione, la velocità di arrivo al suolo sarà:

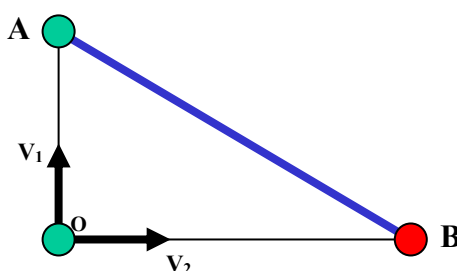
$$V_F = g \cdot T_{\text{caduta}} = 9.8 \cdot 3 = 29.4 \text{ m/s}$$

## PROBLEMA

Due macchine viaggiano di moto uniforme lungo due strade rettilinee formanti tra loro un angolo retto. Calcolare a quale distanza, in linea d'aria, si trovano dopo 10 minuti, supponendo che le macchine siano partite allo stesso istante dall'incrocio delle due strade con velocità, rispettivamente, di 90 km/h e 144 km/h.

### Soluzione

Schematizziamo innanzitutto il problema: ed osserviamo che la macchina B, essendo più veloce della macchina A, in 10 minuti percorrerà un tratto più lungo, infatti:



$$S_{OA} = V_1 \cdot t = 90 \cdot 0.17 = 15.3 \text{ km}$$

$$S_{OB} = V_2 \cdot t = 144 \cdot 0.17 = 24.5 \text{ km}$$

dove: 10 minuti = 10/60 = 0.17 ore

La distanza in linea d'aria tra le due macchine non è altro che l'ipotenusa AB del triangolo rettangolo OAB, che calcoliamo con il teorema di Pitagora:

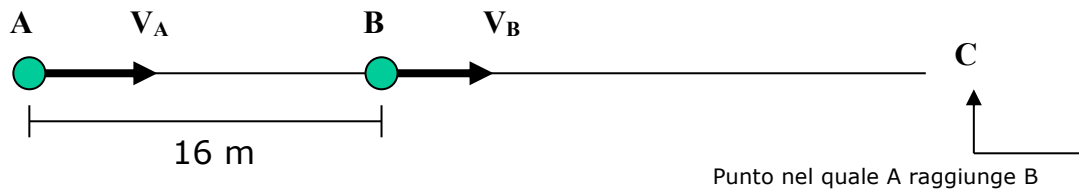
$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{15.3^2 + 24.5^2} = 28.9 \text{ km}$$

## PROBLEMA

Due atleti, “A” e “B”, stanno facendo una gara. “A” parte 16 m dietro a “B” correndo alla velocità di 9 m/s. Se “B” corre alla velocità di 8 m/s, calcolare dopo quanto tempo “A” raggiungerà “B” e lo spazio percorso.

### Soluzione

Schematizziamo il problema:



Quando A raggiungerà B nel punto C, ovviamente le posizioni dei due punti saranno le stesse rispetto all'origine del sistema di riferimento, scelto in A, per cui per calcolare il tempo del raggiungimento basta confrontare queste posizioni, tenendo presente che si tratta di un moto rettilineo uniforme :

$$\begin{cases} S_A = V_A \cdot t \\ S_B = 16 + V_B \cdot t \end{cases} \Rightarrow S_A = S_B \Rightarrow V_A \cdot t = 16 + V_B \cdot t \Rightarrow V_A \cdot t - V_B \cdot t = 16 \Rightarrow t \cdot (V_A - V_B) = 16 \Rightarrow$$

$$t = \frac{16}{V_A - V_B} = \frac{16}{9 - 8} = 16s$$

Pertanto, lo spazio percorso da A sarà:

$$S_A = 9 \cdot 16 = 144m$$

## PROBLEMA

Un automobilista sta viaggiando alla velocità di 120 km/h ed il contaghiometri segna 32640 km. Ad un certo istante l'automobilista frena e quando la macchina è ferma, legge sul contaghiometri 32644 km. Calcolare la decelerazione, supposta costante ed il tempo di frenata.

### Soluzione

Essendo un moto uniformemente decelerato, la legge del moto è:

$$S_{\text{Finale}} = S_{\text{Iniziale}} + V_{\text{Iniziale}} \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad (1)$$

Tenendo presente che alla fine della frenata la macchina è ferma, ossia  $V_{\text{Finale}} = 0$ , l'accelerazione sarà:

$$a = \frac{V_{\text{fin}} - V_{\text{ini}}}{t} = -\frac{V_{\text{ini}}}{t} \quad (2)$$

per cui la (1) diventa un'equazione di 1° grado nella sola incognita tempo:

$$32644 = 32640 + 120 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \frac{120}{t} \cdot t^2 \Rightarrow 4 = 120 \cdot t - 60t \Rightarrow 60t = 4 \Rightarrow t = \frac{4}{60} = 0,066^{\text{h}} = 0,066 \cdot 60 = 4^{\text{m}}$$

Il valore della decelerazione si ricava applicando la (2):

$$a = -\frac{33,3\text{m/s}}{240\text{s}} = -0,14\text{m/s}^2$$

## PROBLEMA

Un automobilista sta viaggiando a una velocità costante di 54 km/h. A un certo istante vede diventare rosso un semaforo distante 250 m e inizia a frenare (accelerazione costante) per 50 m; poi smette di frenare e percorre a velocità costante i successivi 200 m arrivando al semaforo quando scatta il verde. Tenendo conto che il rosso resta acceso esattamente per 30 s, si determini l'accelerazione dell'auto durante la frenata.

## Soluzione

Legge del moto quando l'automobilista comincia a frenare costantemente (moto uniformemente accelerato con velocità iniziale pari a 54 km/h):

$$x = v_0 t_{\text{frenata}} - \frac{1}{2} a t_{\text{frenata}}^2 \rightarrow 50 = 15 t_{\text{fr}} - \frac{1}{2} a t_{\text{fr}}^2 \quad \text{dove: } 54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s}$$

Legge del moto quando l'automobilista smette di frenare per 200 m (moto rettilineo uniforme):

$$x = v(30 - t_{\text{fr}}) \rightarrow 200 = (15 - a t_{\text{fr}})(30 - t_{\text{fr}})$$

dove la velocità costante con cui percorre i successivi 200 m è quella che ha alla fine della frenata:

$$v = v_0 - a t \rightarrow v = 15 - a t_{\text{fr}}$$

L'accelerazione dell'auto durante la frenata sarà data dalla soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} 50 = 15 t_{\text{fr}} - \frac{1}{2} a t_{\text{fr}}^2 \\ 200 = (15 - a t_{\text{fr}})(30 - t_{\text{fr}}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a t^2 - 30 t + 100 = 0 \\ a t^2 + 30 a t + 15 t - 250 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{30t - 100}{t^2} \\ t^2 \left( \frac{30t - 100}{t^2} \right) + 30t \left( \frac{30t - 100}{t^2} \right) + 15t - 250 = 0 \end{cases} \rightarrow 9t^2 + 110t - 600 = 0 \rightarrow t_1 = 4,1\text{s} \vee t_2 = -16,3$$

La soluzione negativa va scartata in quanto fisicamente non accettabile. E quindi:

$$\begin{cases} a = 1,4 \text{ m/s}^2 \\ t = 4,1 \text{ s} \end{cases}$$

## PROBLEMA

All'istante  $t_0=0$  s un'auto parte da ferma e in 10 s raggiunge (con accelerazione costante) la velocità di 108 km/h. Una moto, avente una velocità iniziale di 72 km/h, all'istante  $t=0$  s affianca l'auto e inizia a frenare. Sapendo che la moto impiega 6 s per fermarsi, determinare l'istante in cui l'auto sorpassa la moto.

## Soluzione

Scriviamo le due leggi orarie relative all'auto e alla moto:

$$\begin{cases} x_{auto} = \frac{1}{2} a_{auto} t^2 \\ x_{moto} = v_0 t - \frac{1}{2} a_{moto} t^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{auto} = \frac{1}{2} \cdot 3 t^2 \\ x_{moto} = 20 t - \frac{1}{2} \cdot 3,3 t^2 \end{cases}$$

dove:

$$a_{auto} = \frac{\Delta v_{auto}}{\Delta t_{auto}} = \frac{30-0}{10} = 3 \text{ m/s}^2 \quad a_{moto} = \frac{\Delta v_{moto}}{\Delta t_{moto}} = \frac{0-20}{6} = 3,3 \text{ m/s}^2$$

$$108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s} \quad 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$$

Le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \text{ m} \\ t_1 = 0 \text{ s} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 \approx 60 \text{ m} \\ t_2 = 6,3 \text{ s} \end{cases}$$

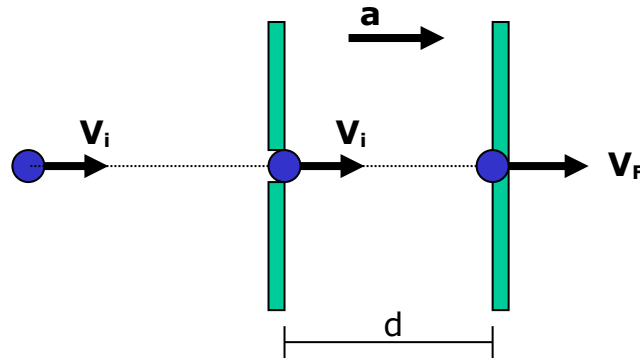
- La prima soluzione non ci dice niente di nuovo, ossia rappresenta la situazione in cui i due veicoli si trovano affiancati (situazione che scegliamo nell'origine del sistema di riferimento  $x=0$  m) all'istante  $t=0$  s.
- La seconda soluzione, invece, rappresenta la situazione in cui l'auto sorpassa la moto. Ossia l'auto sorpassa la moto all'istante  $t=6,3$  s dopo aver percorso circa 60 m.

## PROBLEMA

Un elettrone parte con velocità iniziale di 5 cm/s muovendosi di moto rettilineo uniforme. Esso raggiunge una zona in cui è presente un'accelerazione costante  $a=1 \text{ cm/s}^2$  prodotta da un campo elettrico fra due piastre come in figura. Supponendo che tale zona sia lunga  $d=30 \text{ cm}$ , calcolare:

- quanto tempo impiega l'elettrone a raggiungere la seconda piastra;
- con quale velocità la raggiunge.

### Soluzione



- Le equazioni da utilizzare sono quelle del moto uniformemente accelerato. Supponendo di fissare un sistema di riferimento con l'origine degli assi sulla prima piastra, la legge oraria del moto sarà:

$$x_0 = V_i \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad (1)$$

dove  $V_i$  è la velocità costante con la quale l'elettrone giunge sulla prima piastra.

Sostituendo i dati nella (1), otteniamo un'equazione di 2° grado nell'incognita  $t$ :

$$30 = 5t + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot t^2 \Rightarrow t^2 + 10t - 60 = 0 \Rightarrow t = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 240}}{2} = \frac{-10 \pm 18,4}{2} \Rightarrow t_1 = 4,22s \rightarrow t_2 = -14,2s$$

dove per ragioni fisiche (un tempo negativo non ha senso) la soluzione negativa viene scartata.

- Per calcolare la velocità con la quale l'elettrone raggiunge la seconda piastra, applichiamo la seguente legge oraria della velocità:

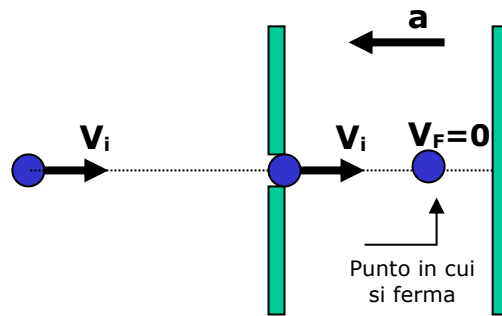
$$v_f = v_i + a \cdot t = 5 + 1 \cdot 4,22 = 9,22 \text{ cm/s}$$

### PROBLEMA

Un elettrone parte con velocità iniziale di 5 cm/s muovendosi di moto rettilineo uniforme. Esso raggiunge una zona in cui è presente un'accelerazione costante  $a = -0,5 \text{ cm/s}^2$  prodotta da un campo elettrico fra due piastre come in figura. Calcolare:

- dopo quanto tempo l'elettrone si ferma;
- il punto in cui si ferma;
- cosa succede dopo che si è fermato.

## Soluzione



- Le equazioni da utilizzare sono quelle del moto uniformemente accelerato, tenendo presente che l'accelerazione è negativa. Supponendo di fissare l'origine del sistema di riferimento sulla prima piastra, la legge oraria della velocità ci consente di trovare dopo quanto tempo l'elettrone si ferma:

$$v_f = v_i + a \cdot t \Rightarrow 0 = 5 - 0,5t \Rightarrow t = \frac{5}{0,5} = 10s$$

dove  $V_i$  è la velocità costante con la quale l'elettrone giunge sulla prima piastra.

- Applicando la legge oraria del moto, troveremo il punto, rispetto all'origine, in cui si ferma l'elettrone:

$$x = v_i \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 5 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 10^2 = 25cm$$

L'elettrone, nel punto in cui si ferma, sarà sottoposto ad una accelerazione verso sinistra che lo porterà a ripercorrere, con le stesse modalità, il percorso verso destra. dove  $V_i$  è la velocità costante con la quale l'elettrone giunge sulla prima piastra.

## PROBLEMA

Una palla viene lanciata verso il basso da un'altezza di 35 m e tocca il suolo con una velocità  $V_f=30$  m/s. Calcolare la velocità con cui è stata lanciata la pallina.

## Soluzione

Si tratta del moto di un grave lanciato verso il basso ( $g$  positiva), quindi di un moto uniformemente accelerato. Scegliendo come origine degli assi del sistema di riferimento la posizione del grave all'istante  $t=0$  s, allora il moto sarà descritto dalle seguenti leggi:

$$\begin{cases} h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \\ v_f = v_0 + a t \end{cases}$$

dimostrazione

$$\begin{cases} s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v_f = v_0 + a t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s - s_0 = v_0 \left( \frac{v_f - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left( \frac{v_f - v_0}{a} \right)^2 \\ t = \frac{v_f - v_0}{a} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s - s_0 &= \frac{v_0}{a} (v_f - v_0) + \frac{1}{2a} (v_f - v_0)^2 \\ 2a(s - s_0) &= 2v_0(v_f - v_0) + (v_f - v_0)^2 \\ 2a(s - s_0) &= (v_f - v_0)(2v_0 + v_f - v_0) \\ 2a(s - s_0) &= (v_f - v_0)(v_f + v_0) \\ 2a(s - s_0) &= v_f^2 - v_0^2 \end{aligned}$$

Da questo sistema, attraverso vari passaggi algebrici (vedere dimostrazione), si ricava la seguente importante relazione:

$$2gh = v_f^2 - v_0^2$$

da cui è possibile ottenere la velocità iniziale con cui è stata lanciata la pallina:

$$v_0^2 = v_f^2 - 2gs \Rightarrow v_0 = \sqrt{v_f^2 - 2gh} = \sqrt{30^2 - 2 \cdot 9,81 \cdot 35} = 14,6 \text{ m/s}$$

## PROBLEMA

Due gravi vengono lanciati verticalmente verso l'alto da uno stesso punto, entrambi con velocità iniziale 9,8 m/s. Sapendo che tra i due lanci intercorre un intervallo di tempo di 1 sec, determinare dopo quanto tempo dal primo lancio i due gravi s'incontrano.

### Soluzione

Calcoliamo il tempo che impiega il primo grave a raggiungere la massima altezza, sapendo che nel punto più alto la velocità è zero  $V_F = 0 \text{ m/s}$ :

$$V_F = V_0 - gt \Rightarrow t = \frac{V_0}{g} = \frac{9,8}{9,8} = 1 \text{ sec}$$

Pertanto quando il primo grave raggiunge la massima altezza, il secondo grave viene lanciato verso l'alto, quindi il primo grave incontrerà il secondo grave durante la fase di discesa. Poiché i due gravi sono stati lanciati con la stessa velocità iniziale, si incontreranno dopo un tempo  $t$  con la stessa velocità, per cui:

$$\text{corpo 1} \quad V_F = gt \qquad \text{corpo 2} \quad V_F = V_0 - gt$$

$$gt = V_0 - gt \Rightarrow 2gt = V_0 \Rightarrow t = \frac{V_0}{2g} = \frac{9,8}{19,6} = 0,5 \text{ sec}$$

I due gravi si incontreranno dopo un tempo pari a  $t = 1 + 0,5 = 1,5 \text{ sec}$

## PROBLEMA

Un corpo parte, ad un certo istante e dall'origine del sistema di riferimento, con velocità costante  $V_1=2\text{m/s}$ . Un secondo corpo parte sempre dall'origine ma dopo un tempo  $t=5 \text{ sec}$  muovendosi di moto uniformemente accelerato con  $a=0,1 \text{ m/s}^2$  e con velocità iniziale nulla.

Calcolare:

- ❑ dopo quanto tempo e dove i due corpi s'incontrano;
- ❑ qual è la velocità del secondo corpo al momento dell'incontro.

### Soluzione

- Il primo corpo si muove di moto uniforme, per cui la distanza percorsa dopo il tempo  $t = 5\text{ s}$  è data da:

$$d = v_1 \cdot t = 2 \cdot 5 = 10\text{m}$$

Dopo il tempo  $t = 5\text{ s}$  il corpo 1 continua a muoversi di moto uniforme, mentre il corpo 2 comincia il suo moto uniformemente accelerato, per cui le leggi orarie del moto saranno:

$$x_1 = d + v_1 \cdot t \qquad x_2 = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Quando i due corpi s'incontrano, si troveranno nella stessa posizione rispetto all'origine, per cui la condizione da imporre è la seguente:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow d + v_1 \cdot t = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

dove sostituendo i valori, si ottiene un'equazione di 2° grado nell'incognita  $t$ :

$$10 + 2t = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot t^2 \Rightarrow 0,05t^2 - 2t - 10 = 0 \Rightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 2}}{0,1} = \frac{2 \pm 2,4}{0,1} \Rightarrow t_1 = 44\text{s} \rightarrow t_2 = -4\text{s}$$

dove per ragioni fisiche (un tempo negativo non ha senso) la soluzione negativa viene scartata.

I due corpi s'incontrano in:

$$x_1 = x_2 = 10 + 2 \cdot 44 = 98\text{m}$$

- La velocità con la quale il corpo 2 incontra il corpo 1 viene calcolata utilizzando la legge oraria della velocità:

$$v_2 = a \cdot t = 4,4\text{m/s}$$

# Problemi di Fisica

## La Cinematica

Moti nel piano

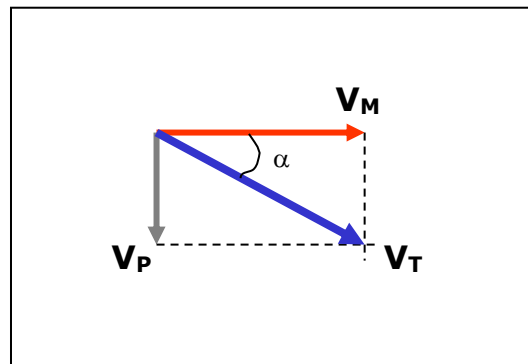
## PROBLEMA

Mentre un'automobile viaggia a velocità costante  $V_M = 12 \text{ m/s}$  una palla è lanciata orizzontalmente dal finestrino perpendicolarmente alla direzione di moto della macchina con velocità  $V_P = 5 \text{ m/s}$ .

Calcolare:

- la velocità della palla,  $\mathbf{V_T}$ , rispetto al suolo in modulo, direzione e verso
- in quale istante toccherà terra, se il finestrino della macchina è a  $h = 80 \text{ cm}$  dal suolo.

## Soluzione



- La velocità della palla rispetto al suolo è la risultante della somma vettoriale tra  $\mathbf{V_M}$  e  $\mathbf{V_P}$ , cioè  $\mathbf{V_T}$ , per cui il suo modulo e argomento sono dati da:

$$V_T = \sqrt{V_M^2 + V_P^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ m/s} \qquad \text{tg} \alpha = \frac{V_P}{V_M} = 0,42 \Rightarrow \alpha = 22,6^\circ$$

- Dato che la palla viene lasciata cadere con velocità iniziale nulla, l'istante di tempo in cui tocca il suolo viene determinato dall'equazione del moto lungo l'asse di caduta (perpendicolare al piano della figura), che è:

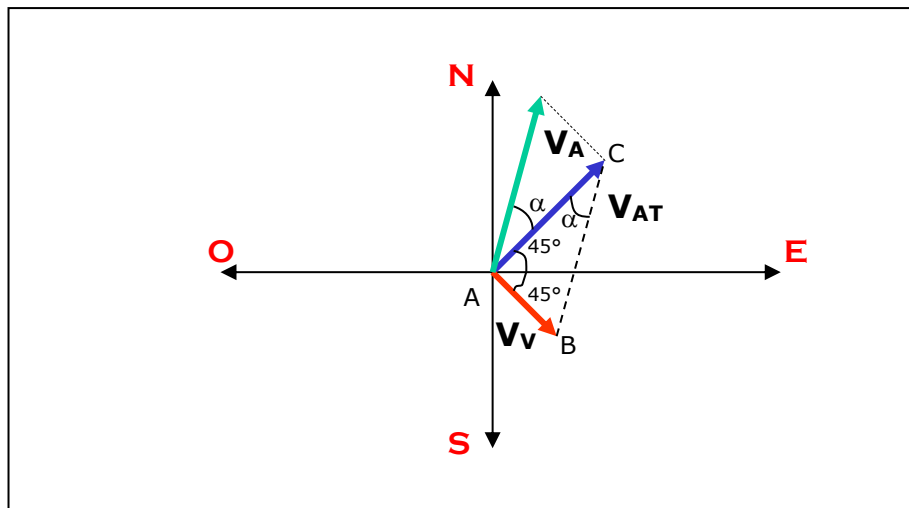
$$h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,8}{9,8}} = 0,41 \text{ s}$$

## PROBLEMA

Un pilota vuole volare da una città ad un'altra a nord-est distante 1200 km. Se la velocità costante dell'aereo è  $V_A = 260 \text{ km/h}$  ed il vento soffia verso sud-est con velocità costante  $V_V = 100 \text{ km/h}$ , calcolare:

- ❖ In quale direzione deve essere pilotato l'aereo
- ❖ Quale sarà la velocità  $V_{AT}$  dell'aereo rispetto a terra
- ❖ Quanto tempo impiegherà l'aereo a raggiungere la seconda città.

## Soluzione



- Il pilota deve dirigere l'aereo in modo che la sua velocità effettiva,  $V_{AT}$ , composizione vettoriale di  $V_A$  e di  $V_V$ , risulti diretta verso la città desiderata, ovvero inclinata di  $45^\circ$  sull'asse O-E.

Dato che il triangolo ABC è rettangolo in A, deve essere:

$$V_V = V_A \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{V_V}{V_A} = \frac{100}{260} = 0,385 \Rightarrow \alpha = 22,6^\circ$$

Il pilota deve perciò dirigere l'aereo in una direzione che formi con O-E un angolo pari a:

$$\beta = \alpha + 45^\circ = 22,6^\circ + 45 = 67,6^\circ$$

- La velocità dell'aereo rispetto a terra sarà:

$$V_{AT} = \sqrt{V_A^2 - V_V^2} = \sqrt{260^2 - 100^2} = \sqrt{57600} = 240 \text{ km/h}$$

- Tenendo conto che il moto dell'aereo è rettilineo uniforme, il tempo impiegato sarà:

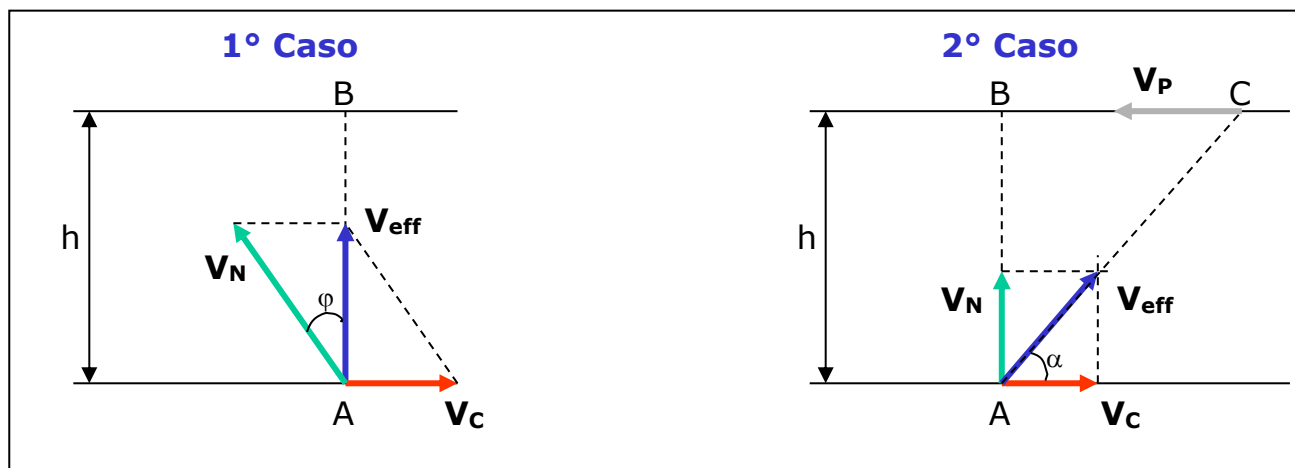
$$t = \frac{S}{V_{AT}} = \frac{1200}{240} = 5 \text{ h}$$

## PROBLEMA

Un uomo si trova sulla riva di un fiume largo  $h=1$  km e vuole raggiungere un punto che si trova di fronte a lui sull'altra riva. Egli può nuotare in una direzione inclinata di un angolo  $\varphi$  con la verticale in modo che per effetto della corrente il suo moto risulti trasversale, oppure può attraversare il fiume partendo in direzione perpendicolare alle sponde e raggiungere a piedi il punto B voluto camminando sull'altra riva. Sapendo che l'uomo può nuotare con velocità costante  $V_N=2,5$  km/h, può camminare con velocità costante  $V_P=4$  km/h e che la velocità costante della corrente è  $V_C=2$  km/h, determinare: a) quale dei due tragitti è il più rapido; b) l'angolo  $\varphi$ .

## Soluzione

Rappresentiamo il problema:



#### □ 1° Caso

Se l'uomo vuole raggiungere l'altra sponda nel punto B deve nuotare dirigendosi in una direzione inclinata di un angolo  $\varphi$  sulla congiungente AB in modo che componendo vettorialmente le velocità  $V_N$  e  $V_C$ , la velocità risultante  $V_{eff}$  sia diretta lungo AB. Pertanto l'angolo  $\varphi$  sarà dato da:

$$V_C = V_N \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = \frac{V_C}{V_N} = \frac{2}{2,5} = 0,80 \Rightarrow \varphi = 53,1^\circ$$

Il tempo impiegato a raggiungere B si calcola sapendo che il moto è rettilineo uniforme:

$$T_1 = \frac{h}{V_{eff}} = \frac{1}{1,5} = 0,667h = 40,02 \text{ min} = 2401,2s$$

dove:

$$V_{eff} = \sqrt{V_N^2 - V_C^2} = \sqrt{2,5^2 - 2^2} = \sqrt{2,25} = 1,5 \text{ km/h}$$

#### □ 2° Caso

Se l'uomo si dirige verso il B l'effetto della corrente lo farà arrivare sulla riva opposta in un punto C con velocità effettiva:

$$V_{eff} = \sqrt{V_N^2 + V_C^2} = \sqrt{2,25^2 + 2^2} = \sqrt{10,25} = 3,2 \text{ km/h}$$

per cui il tempo impiegato sarà:

$$T_2 = \frac{AC}{V_{eff}} = \frac{1,28}{3,2} = 0,4h = 24 \text{ min} = 1440s$$

dove:

$$h = AC \cdot \sin \alpha \Rightarrow AC = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{1}{0,781} = 1,28 \text{ km}$$

con:

$$V_N = V_{eff} \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{V_N}{V_{eff}} = \frac{2,5}{3,2} = 0,781 \Rightarrow \alpha = 51,3^\circ$$

Ora l'uomo deve percorrere a piedi il tratto CB e impiegherà un tempo pari a :

$$T_2' = \frac{CB}{V_p} = \frac{0,8}{4} = 0,2h = 12m = 720s$$

dove:

$$CB = AC \cdot \cos \alpha = 1,28 \cdot \cos 51,3^\circ = 0,8km$$

Il tempo totale sarà:

$$T_2 + T_2' = 1440 + 720 = 2160s$$

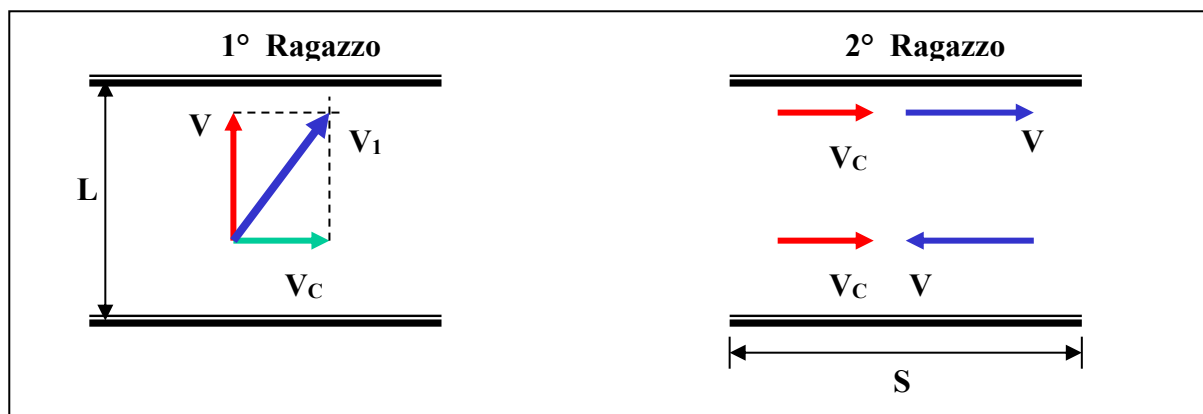
In definitiva il secondo tragitto è più breve del primo.

## PROBLEMA

Un ragazzo attraversa a nuoto un fiume largo  $L=500$  m e ritorna indietro. Un secondo ragazzo nuota per un tratto  $S=500$  m controcorrente e poi ritorna al punto di partenza. Se la velocità della corrente è costante  $V_C = 3$  km/h e i due ragazzi nuotano con velocità costante  $V=5$  km/h, calcolare i tempi da essi impiegati.

## Soluzione

Rappresentiamo il problema dal punto di vista vettoriale:



Il primo ragazzo si muoverà con una velocità effettiva  $\mathbf{V_1}$  che è la risultante tra le velocità  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{V_C}$ , il cui modulo e argomento è dato da:

$$V_1 = \sqrt{V^2 + V_C^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = 5,83km/h$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{V_C} = \frac{5}{3} = 1,67 \Rightarrow \alpha = 59^\circ$$

mentre il tempo da esso impiegato per compiere l'intero tragitto è:

$$T_1 = \frac{2L}{V} = \frac{2 \cdot 0,5}{5} = 0,2h = 12 \text{ min} = 720s$$

Il secondo ragazzo, invece, percorrerà il tratto di andata con velocità:

$$V_{2A} = V + V_C = 5 + 3 = 8 \text{ km/h}$$

e quello di ritorno con velocità:

$$V_{2R} = V - V_C = 5 - 3 = 2 \text{ km/h}$$

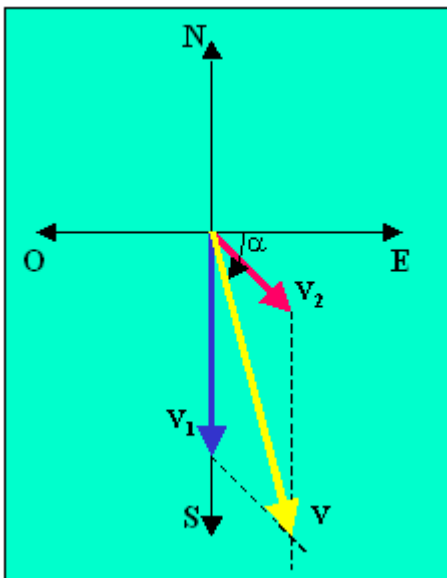
Il tempo totale impiegato sarà:

$$T_2 = T_{2A} + T_{2B} = \frac{S}{V_{2A}} + \frac{S}{V_{2R}} = \frac{0,5}{8} + \frac{0,5}{2} = 0,31 \text{ h} = 18,75 \text{ min} = 1125 \text{ s}$$

## PROBLEMA

La bandiera issata sull'albero di una nave sventola sotto l'azione di un maestrale (vento da Nord-Ovest,  $\alpha = 45^\circ$ ) che ha una velocità di 2,5 m/s. La barca affronta il mare facendo rotta verso Sud alla velocità di 10 nodi (1 nodo=1,8 km/h). In quale direzione si disporrà la bandiera (intensità della velocità della bandiera e angolo)?

### Soluzione



Rappresentiamo prima graficamente il problema e poi calcoliamo la direzione lungo la quale si disporrà la bandiera:

$$V_{2x} = V_2 \cos \alpha_2 = 2,5 \cdot \cos 45^\circ = 1,8 \text{ m/s}$$

$$V_{2y} = V_2 \sin \alpha_2 = 2,5 \cdot \sin 45^\circ = 1,8 \text{ m/s}$$

$$\begin{cases} V_{Tx} = 1,8 \text{ m/s} \\ V_{Ty} = 65 + 1,8 = 66,8 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$V_T = \sqrt{V_{Tx}^2 + V_{Ty}^2} = \sqrt{1,8^2 + 66,8^2} = 66,8 \text{ m/s}$$

$$\tan \alpha = \frac{V_{Ty}}{V_{Tx}} = \frac{66,8}{1,8} = 37,1 \Rightarrow \alpha = 88,5^\circ$$

$$\begin{cases} V_{Tx} = 1,8 \text{ m/s} \\ V_{Ty} = 65 + 1,8 = 66,8 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$V_T = \sqrt{V_{Tx}^2 + V_{Ty}^2} = \sqrt{1,8^2 + 66,8^2} = 66,8 \text{ m/s}$$

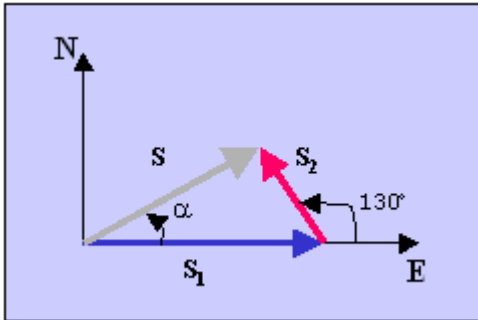
$$\tan \alpha = \frac{V_{Ty}}{V_{Tx}} = \frac{66,8}{1,8} = 37,1 \Rightarrow \alpha = 88,5^\circ$$

## PROBLEMA

Un aereo si muove in direzione Est per 20 km e successivamente vira di  $130^\circ$  in senso antiorario e percorre altri 10 km. Determinare il vettore spostamento risultante.

### Soluzione

Rappresentiamo prima graficamente il problema e poi calcoliamo il vettore spostamento risultante:



$$\begin{aligned} S_{1x} &= 20\text{km} & S_{2x} &= S_2 \cos \alpha_2 = 10 \cdot \cos 130^\circ = -6,4\text{km} \\ S_{1y} &= 0 & S_{2y} &= S_2 \sin \alpha_2 = 10 \cdot \sin 130^\circ = 7,7\text{km} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} S_{Tx} = 20 - 6,4 = 13,6\text{km} \\ S_{Ty} = 7,7\text{km} \end{cases}$$

$$S_T = \sqrt{S_{Tx}^2 + S_{Ty}^2} = \sqrt{13,6^2 + 7,7^2} = 15,6$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{S_{Ty}}{S_{Tx}} = \frac{7,7}{13,6} = 0,57 \Rightarrow \alpha = 29,7^\circ$$

### PROBLEMA

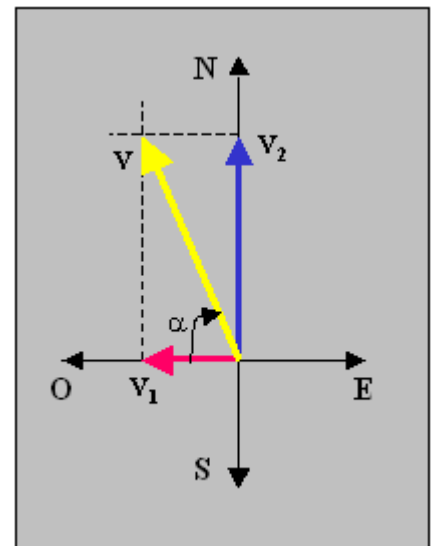
Un tedoforo corre con la fiaccola in mano alla velocità di 7 m/s in direzione Sud. Si alza un vento da Est che ha una velocità di 2 m/s. Quale sarà la direzione del fumo e la sua velocità?

### Soluzione

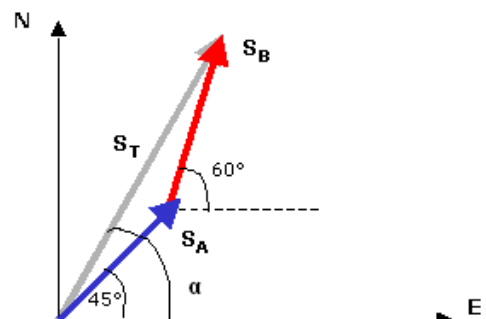
Rappresentiamo prima graficamente il problema e poi calcoliamo la direzione del fumo e la sua velocità (se il tedoforo corre verso sud, il fumo si dirige nel verso opposto ossia verso nord):

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = \sqrt{2^2 + 7^2} = 7,3\text{m/s}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{V_2}{V_1} = \frac{7}{2} = 3,5 \Rightarrow \alpha = 74,1^\circ$$



### PROBLEMA



Una macchina si sposta di 6,8 km in direzione Est 45° Nord e successivamente di 10,4 km in direzione Est 60° Nord. Calcolare, dopo aver eseguito una rappresentazione grafica, lo spostamento risultante.

### Soluzione

$$S_{Ax} = S_A \cdot \cos 45^\circ = 6,8 \cdot \cos 45^\circ = 4,8 \text{ km} \quad S_{Ay} = S_A \cdot \sin 45^\circ = 6,8 \cdot \sin 45^\circ = 4,8 \text{ km}$$

$$S_{Bx} = S_B \cdot \cos 60^\circ = 10,4 \cdot \cos 60^\circ = 5,2 \text{ km} \quad S_{By} = S_B \cdot \sin 60^\circ = 10,4 \cdot \sin 60^\circ = 9,0 \text{ km}$$

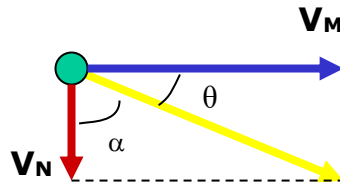
$$S_{Tx} = S_{Ax} + S_{Bx} = 4,8 + 5,2 = 10 \text{ km} \quad S_{Ty} = S_{Ay} + S_{By} = 4,8 + 9,0 = 13,8 \text{ km}$$

$$S_T = \sqrt{S_{Tx}^2 + S_{Ty}^2} = \sqrt{10^2 + 13,8^2} = 17,0 \text{ km} \quad \text{tg} \alpha = \frac{S_{Ty}}{S_{Tx}} = \frac{13,8}{10} = 1,38 \Rightarrow \alpha = 54,1^\circ$$

### PROBLEMA

La neve sta cadendo a una velocità costante di 8 m/s. A quale angolo rispetto alla verticale sembrano cadere i fiocchi di neve per il guidatore di un'auto che viaggia a 50 km/h?

### Soluzione



Da considerazioni di carattere trigonometrico troviamo l'angolo cercato:

$$\text{tg} \vartheta = \frac{V_N}{V_M} = \frac{8}{13,9} = 0,58 \Rightarrow \vartheta = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

### PROBLEMA

Una particella passa dall'origine degli assi cartesiani con una velocità:

$$\vec{v} = 6,2 \hat{y} \quad (v = 6,2 \text{ m/s})$$

Se la sua accelerazione è:

$$\vec{a} = -4,4 \hat{x} \quad (a = 4,4 \text{ m/s}^2)$$

calcolare:

- le coordinate x e y della particella dopo 5,0 s;
- le componenti  $v_x$  e  $v_y$  della velocità della particella nell'istante  $t=5,0$  s;

- c) il modulo della velocità della particella aumenta, diminuisce o rimane costante nel tempo? Giustificare la risposta.

### Soluzione

- a) Scriviamo la legge del moto uniformemente accelerato lungo i due assi cartesiani, poiché si tratta di un moto bidimensionale:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

Sostituendo il valore della velocità nella seconda equazione (perché il vettore velocità ha solo la componente y) e quello dell'accelerazione nella prima equazione (perché ha solo la componente x), otteniamo:

$$x = \frac{1}{2} \cdot (-4,4) \cdot 5^2 = -55m$$

$$y = 6,2 \cdot 5 = 31m$$

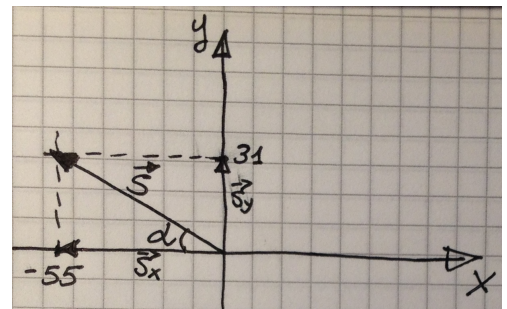
Pertanto, dopo 5s la posizione della particella è:

$$\vec{s} = -55\hat{x} + 31\hat{y} \longrightarrow \text{oppure} \longrightarrow \vec{s} = (-55; 31)$$

Modulo e angolo del vettore posizione sono:

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{55^2 + 31^2} \approx 63m$$

$$\tan \alpha = \frac{s_y}{s_x} = \frac{31}{55} = 0,56 \rightarrow \alpha \approx 29^\circ$$



- b) Scriviamo la legge oraria della velocità lungo i due assi cartesiani:

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

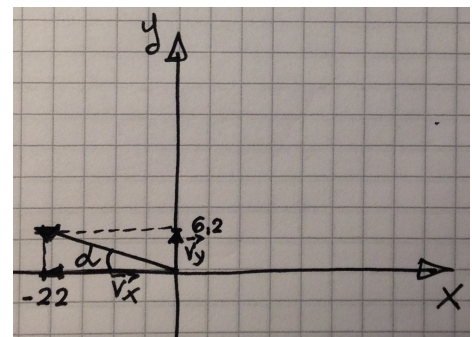
$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

Sostituendo il valore della velocità nella seconda equazione (perché il vettore velocità ha solo la componente y) e quello dell'accelerazione nella prima equazione (perché ha solo la componente x), otteniamo:

$$v_x = -4,4 \cdot 5 = -22m/s$$

$$v_y = 6,2m/s$$

Pertanto, dopo 5s la velocità della particella è:



$$\vec{v} = -22\hat{x} + 6,2\hat{y} \xrightarrow{\text{oppure}} \vec{v} = (-22; 6.2)$$

Modulo e angolo del vettore velocità sono:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{22^2 + 6.2^2} \approx 23 \text{ m/s}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{6.2}{22} = 0,28 \rightarrow \alpha \approx 16^\circ$$

c) La componente x della velocità aumenta costantemente, la componente y rimane costante, quindi il modulo della velocità aumenta nel tempo.

## PROBLEMA

Un treno si muove con velocità costante e, in 12 s, si sposta di 170 m in direzione nord e di una distanza non conosciuta in direzione ovest. Il modulo della velocità del treno è 32 m/s.

Calcolare:

- la direzione del moto del treno rispetto al nord;
- in quell'intervallo di tempo, di quanto si sposta il treno in direzione ovest?

## Soluzione

a) La direzione del moto del treno rispetto al nord (ossia l'angolo che il vettore spostamento  $\vec{s}$  forma con l'asse N) la ricaviamo utilizzando la seguente relazione (teorema sul triangolo rettangolo):

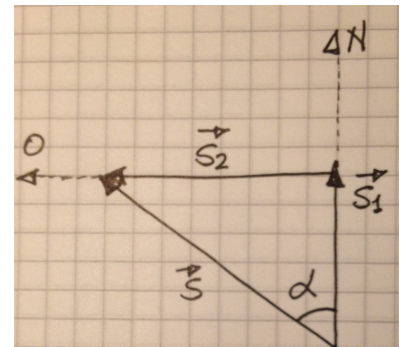
$$v_y = v \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{v_y}{v} = \frac{14}{32} = 0,44 \rightarrow \alpha = 64^\circ$$

dove:

$$v_y = \frac{y}{t} = \frac{170}{12} = 14 \text{ m/s}$$

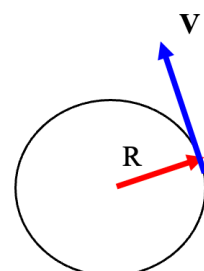
b) Il calcolo dello spostamento del treno verso ovest in 12 s è possibile attraverso l'utilizzo della definizione di tangente:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{y} \rightarrow x = y \cdot \operatorname{tg} \alpha = 170 \cdot \operatorname{tg} 64^\circ \approx 350 \text{ m}$$



## PROBLEMA

Un punto materiale si muove lungo una circonferenza di raggio 20 cm con frequenza di 5,0 Hz. Calcolare la velocità tangenziale ed il numero di giri compiuti in 20 s.



## Soluzione

La velocità tangenziale la calcoliamo attraverso la sua definizione:

$$V = 2\pi Rf = 2\pi \cdot 0,2 \cdot 5,0 = 6,28 \text{ m/s}$$

Dal concetto di frequenza (numero di giri compiuti in un secondo)

ricaviamo che il numero di giri compiuti in 20 s è dato da:

$$N = 20 \cdot f = 20 \cdot 5 = 100 \text{ giri}$$

## PROBLEMA

Supponendo che la Terra si muove intorno al Sole lungo un'orbita circolare di raggio  $R=150 \cdot 10^6 \text{ km}$ , determinare la velocità tangenziale in  $\text{km/s}$  e l'accelerazione centripeta in  $\text{m/s}^2$ , tenendo presente che il periodo di rivoluzione è di 365 giorni.

## Soluzione

La velocità tangenziale e l'accelerazione centripeta le calcoliamo attraverso le loro definizioni:

$$V = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 150 \cdot 10^6}{31,5 \cdot 10^6} \cong 30 \text{ km/s} \qquad a_c = \frac{V^2}{R} = \frac{(30 \cdot 10^3)^2}{150 \cdot 10^6 \cdot 10^3} \cong 6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

notare:  $365 \text{ giorni} = 31,5 \cdot 10^6 \text{ secondi}$ ;  $30 \text{ km/s} = 30 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ ;  $150 \cdot 10^6 \text{ km} = 150 \cdot 10^6 \cdot 10^3 \text{ m}$

## PROBLEMA

Secondo il modello atomico di Bohr–Rutherford l'elettrone di un atomo d'idrogeno ruota intorno al nucleo su determinate orbite. In condizioni di non eccitazione l'elettrone ruota con velocità tangenziale  $V = 2,18 \cdot 10^6 \text{ m/s}$  e con accelerazione centripeta  $a_c = 8,97 \cdot 10^{22} \text{ m/s}^2$ . Determinare il raggio dell'orbita, la velocità angolare e la frequenza.

## Soluzione

Il raggio dell'orbita lo calcoliamo come formula inversa dell'accelerazione centripeta:

$$a_c = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{a_c} = \frac{(2,18 \cdot 10^6)^2}{8,97 \cdot 10^{22}} = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

La velocità angolare la calcoliamo come formula inversa della legge che la lega alla velocità tangenziale:

$$V = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{V}{R} = \frac{2,18 \cdot 10^6}{0,53 \cdot 10^{-10}} = 4,1 \cdot 10^{16} \text{ rad/s}$$

La frequenza è data dalla formula inversa della definizione di velocità tangenziale:

$$V = 2\pi Rf \Rightarrow f = \frac{V}{2\pi R} = \frac{2,18 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 0,53 \cdot 10^{-10}} = 0,65 \cdot 10^{16} \text{ Hz}$$

## PROBLEMA

Calcolare la velocità e l'accelerazione di un punto materiale situato sulla superficie terrestre a  $30^\circ$  di latitudine Nord.

### Soluzione

Rappresentiamo graficamente il problema.

Il raggio  $R$  della Terra forma con il raggio  $r$  del piano dell'orbita descritta dal punto materiale  $P$  un triangolo rettangolo, per cui utilizzando la relativa relazione trigonometrica otteniamo:

$$r = R \cdot \cos 30^\circ = 6,38 \cdot 10^6 \cdot 0,866 = 5,52 \cdot 10^6 \text{ m}$$

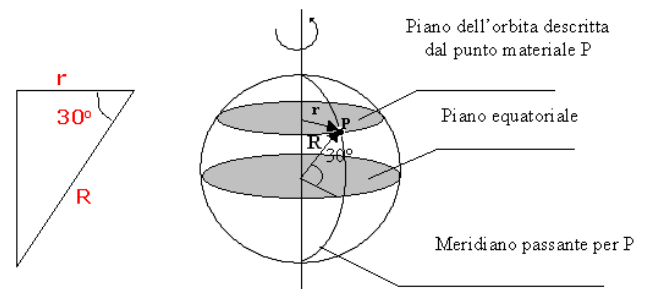
Pertanto la velocità e l'accelerazione centripeta del punto materiale  $P$  saranno date da:

$$V = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 5,52 \cdot 10^6}{86400} = 402 \text{ m/s}$$

$$a_c = \frac{V^2}{r} = \frac{402^2}{5,52 \cdot 10^6} = 2,92 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

dove  $T = 24 \text{ ore} = 86400 \text{ secondi}$

Asse di rotazione terrestre

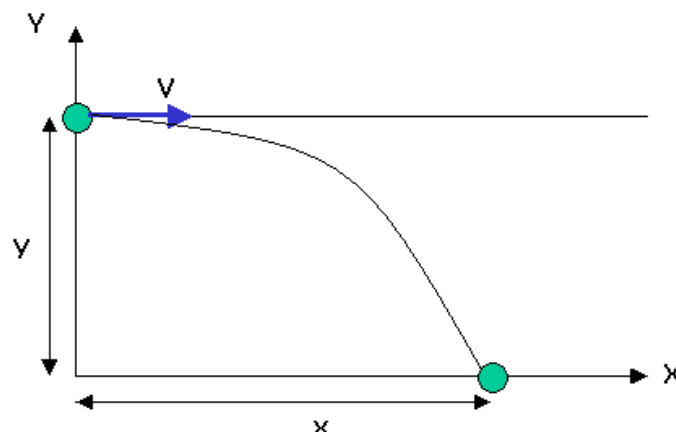


## PROBLEMA

Un pacco abbandonato da un aeroplano in volo orizzontale a  $200 \text{ m/s}$ , tocca terra dopo  $12 \text{ s}$ . Calcolare l'altezza dell'aeroplano, la distanza orizzontale percorsa dal pacco e la velocità con cui esso tocca il suolo, trascurando la resistenza dell'aria.

### Soluzione

Rappresentiamo il problema:



Il moto del pacco è un moto parabolico, che è un moto risultante di un moto uniformemente accelerato e di un moto rettilineo uniforme:

$$\begin{cases} x = V_0 \cdot t \\ y = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \Rightarrow y = \frac{g}{2V_0^2} x^2 = ax^2 \end{cases}$$

Calcoliamo la distanza orizzontale percorsa dal pacco utilizzando la prima equazione:

$$x = 200 \cdot 12 = 2400\text{m}$$

Per poter calcolare l'altezza dell'aeroplano ci serviamo della seconda equazione:

$$y = \frac{9,8}{2 \cdot 200^2} \cdot 2400^2 = 706\text{m}$$

La velocità con cui tocca il suolo la calcoliamo come:

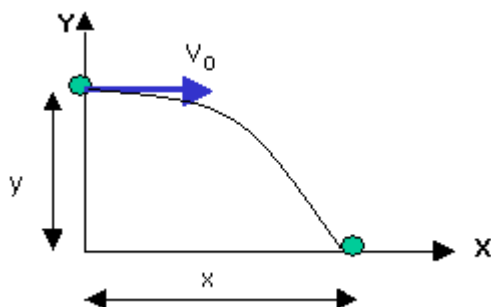
$$V = g \cdot t = 9,8 \cdot 12 = 118\text{m/s}$$

## PROBLEMA

Un proiettile è stato sparato orizzontalmente dall'altezza di 49 m e tocca il suolo alla distanza orizzontale di 2000 m. Calcolare la velocità con cui è stato sparato.

### Soluzione

La velocità la ricaviamo come incognita dall'equazione della parabola che descrive il moto parabolico:



$$y = \frac{g}{2V_0^2} x^2 \Rightarrow 2yV_0^2 = gx^2 \Rightarrow V_0^2 = \frac{gx^2}{2y} \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{gx^2}{2y}} = \sqrt{\frac{9,8 \cdot 2000^2}{2 \cdot 49}} = 632\text{m/s}$$

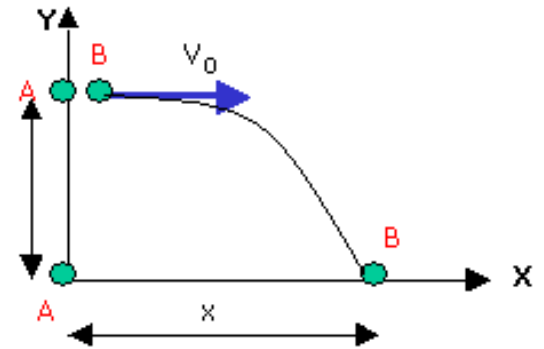
## PROBLEMA

Due corpi A e B si trovano su una torre alta 490 m. Il corpo A viene lasciato cadere verso il basso e, nello stesso istante, B viene lanciato con velocità orizzontale di 50 m/s. Quale dei due corpi tocca prima il suolo? Quanto vale la distanza tra A e B quando sono a terra?

### Soluzione

- Il moto verticale di un corpo, che cadendo si sposta anche orizzontalmente, è identico al moto verticale di un corpo in caduta libera, per cui i due corpi A e B toccano terra contemporaneamente.
- La distanza tra A e B quando sono a terra la calcoliamo dall'equazione che descrive il moto parabolico di B:

$$y = \frac{g}{2V_0^2} x^2 \Rightarrow 2V_0^2 y = gx^2 \Rightarrow x^2 = \frac{2V_0^2 y}{g} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2V_0^2 y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50^2 \cdot 490}{9,8}} = 500\text{m}$$



### PROBLEMA

A un aereo da bombardamento è affidato il compito di bombardare un sommergibile da una quota di 7840 m. Calcolare il tempo che il sommergibile ha a disposizione per immergersi.

### Soluzione

Il tempo che il sommergibile ha a disposizione per immergersi non è altro che il tempo che impiega la bomba per colpirlo. Tenendo conto del principio di indipendenza dei movimenti simultanei, tale tempo è dato da:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7840}{9,8}} = 40\text{s}$$

### PROBLEMA

Una palla viene lanciata orizzontalmente da un'altezza di 4,8 m con velocità iniziale di 4,5 m/s. Si chiede: la palla riuscirà a centrare un canestro posto a terra a distanza orizzontale di 6,2 m?

### Soluzione

Il tempo di caduta della palla è dato da:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,8}{9,8}} = 0,990\text{s}$$

In questo tempo la palla può percorrere una distanza orizzontale pari a:

$$x = V_0 \cdot t = 4,5 \cdot 0,990 = 4,5\text{m}$$

per cui non riuscirà a centrare il canestro che è posto alla distanza di 6,2 m.

## PROBLEMA

Un punto materiale si muove di moto armonico con legge oraria:  $x = 50 \cos \frac{\pi}{32} t$   
Calcolare il periodo, la velocità e l'accelerazione dopo 10 secondi.

### Soluzione

La legge oraria del moto armonico è la seguente:

$$x = R \cdot \cos \omega t$$

che confrontata con quella del problema si ricava che:

$$R = 50\text{m} \quad \omega = \frac{\pi}{32} \text{ rad/s}$$

Quindi:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{32}} = 64\text{s}$$

$$v = -\omega R \cdot \sin \omega t = -\frac{\pi}{32} \cdot 50 \cdot \sin \frac{\pi}{32} \cdot 10 = -4,1\text{m/s}$$

$$a = -\omega^2 x = -\frac{\pi^2}{1024} \cdot 50 \cdot \cos \frac{\pi}{32} \cdot 10 = -0,48\text{m/s}^2$$

## PROBLEMA

Un punto materiale si muove di moto circolare uniforme con periodo di 48 s sopra una circonferenza di raggio 40 cm. Calcolare l'equazione oraria dei due moti armonici, proiezioni del moto circolare uniforme su due diametri perpendicolari, nell'ipotesi che il punto al tempo  $t=0$  si trovi ad un estremo dei due diametri.

### Soluzione

L'equazione oraria dei moti armonici lungo l'asse X e Y è la seguente:

$$x = R \cdot \cos \omega t \quad y = R \cdot \sin \omega t$$

Dai dati del problema si ricava che:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{48} = \frac{\pi}{24}$$

quindi le leggi orarie diventano:

$$x = 40 \cdot \cos \frac{\pi}{24} t \quad y = 40 \cdot \sin \frac{\pi}{24} t$$

## PROBLEMA

Le proiezioni di un moto circolare uniforme sopra due diametri ortogonali si muovono di moto armonico secondo le leggi orarie:

$$x = 25 \cdot \cos \frac{\pi}{8} t \quad y = 25 \cdot \sin \frac{\pi}{8} t$$

con x e y espressi in cm. Determinare il valore della velocità e dell'accelerazione dopo 8 s ed il valore dell'accelerazione centripeta del moto circolare uniforme.

## Soluzione

Dalle leggi orarie del moto armonico fornite dal problema si ricava che:

$$R = 25\text{cm} \quad \omega = \frac{\pi}{8} \text{ rad/s}$$

Per determinare il valore della velocità e dell'accelerazione lungo i diametri ortogonali, applichiamo le rispettive leggi orarie:

$$V_x = -\omega R \cdot \sin \omega t = -\frac{\pi}{8} \cdot 25 \cdot \sin \frac{\pi}{8} \cdot 8 = 0 \quad V_y = -\omega R \cdot \cos \omega t = -\frac{\pi}{8} \cdot 25 \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot 8 = -9,8\text{cm/s}$$

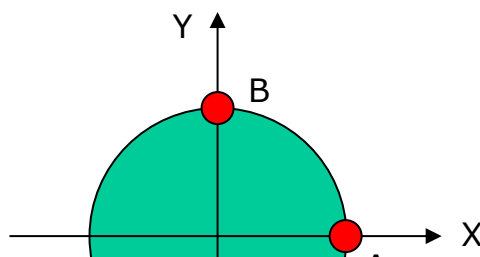
$$a_x = -\omega^2 x = -\frac{\pi^2}{64} \cdot 25 \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot 8 = 3,9\text{cm/s}^2 \quad a_y = -\omega^2 y = -\frac{\pi^2}{64} \cdot 25 \cdot \sin \frac{\pi}{8} \cdot 8 = 0$$

L'accelerazione centripeta del moto circolare uniforme sarà calcolata come segue:

$$a_c = \omega^2 R = \frac{\pi^2}{64} \cdot 25 = 3,9\text{cm/s}^2$$

## PROBLEMA

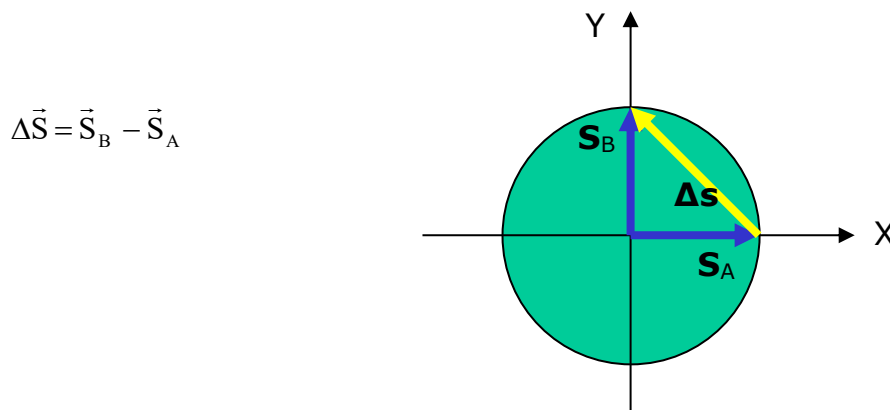
Un punto materiale descrive una traiettoria circolare di raggio  $R = 10\text{ m}$  partendo dal punto A ed impiega 10 s per raggiungere il punto B:



Calcolare: 1) Il vettore spostamento e rappresentarlo graficamente; 2) Il cammino percorso; 3) La velocità media

### Soluzione

1) La rappresentazione grafica del vettore spostamento è la seguente:



Mentre il modulo del vettore spostamento è dato da:

$$\Delta S = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14,14\text{m}$$

2) Spostandosi da A a B il punto materiale percorre un quarto di circonferenza, pari a  $\pi/2$  rad, per cui il cammino percorso sarà:

$$L = \frac{\pi}{2} \cdot R = \frac{\pi}{2} \cdot 10 = 15,7\text{m}$$

3) La velocità media, tenendo sempre conto che il punto materiale percorre  $\pi/2$  rad, la determiniamo attraverso la sua definizione:

$$V = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot R}{t} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 10}{10} = 1,57\text{m/s}$$

### PROBLEMA

Due moti armonici tra loro ortogonali hanno le seguenti leggi orarie:

$$x = 10 \cos 2\pi t \quad y = 20 \cos 2\pi t$$

Determinare la traiettoria del moto risultante.

### Soluzione

L'equazione della traiettoria del moto risultante, ossia  $y = f(x)$ , la determiniamo mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} x = 10 \cdot \cos 2\pi t \\ y = 20 \cdot \cos 2\pi t \end{cases}$$

Ricavando la  $t$  dalla prima equazione:  $t = \frac{x}{10 \cdot \cos 2\pi}$  e sostituendola nella seconda otteniamo:

$$y = 20 \cdot \cos 2\pi \cdot \frac{x}{10 \cdot \cos 2\pi} = 2x$$

Dall'equazione trovata si conclude che la traiettoria è una retta.

### PROBLEMA

Un pallone viene lanciato con un angolo  $\alpha = 30^\circ$  dalla sommità di un palazzo alto 20 m come. La velocità iniziale sia  $V_0 = 10$  m/sec. Nello stesso istante, da un punto che si trova a 40 m dalla base del palazzo, un uomo corre per cercare di prendere il pallone quando questo tocca il suolo. Quale deve essere la velocità dell'uomo per poter prendere il pallone? Trascurare la resistenza dell'aria.

### Soluzione

Occorre calcolare il punto di impatto del pallone col suolo e il tempo di volo per poter calcolare la velocità dell'uomo. Dividiamo il moto del pallone nelle sue componenti orizzontale e verticale. Il moto del pallone è uniforme lungo la proiezione orizzontale con velocità:

$$V_{0x} = V_0 \cdot \cos \alpha = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ m/s}$$

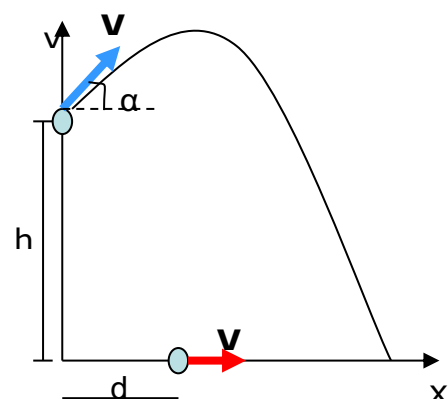
Il moto del corpo è uniformemente ritardato nel moto verso l'alto e uniformemente accelerato nel moto verso il basso nella sua componente verticale. La velocità iniziale lungo la verticale sarà:

$$V_{0y} = V_0 \cdot \sin \alpha = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ m/s}$$

Nel moto verso l'alto la legge oraria sarà:

$$y = y_0 + V_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Nel punto di massima altezza il corpo si ferma per cui possiamo calcolare il tempo di salita:



$$V_{0y} = g \cdot t_s \Rightarrow t_s = \frac{V_{0y}}{g} = \frac{5}{9,8} = 0,5s$$

e in questo tempo percorre un tratto:

$$y_1 = V_{0y} \cdot t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = 5 \cdot 0,5 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 0,5^2 = 1,3m$$

Il corpo raggiunge quindi un'altezza totale, rispetto al suolo pari a:

$$y_2 = h + y_1 = 20 + 1,3 = 21,3m$$

Da questo momento in poi il corpo si muove verso il basso partendo dall'altezza  $y_2$  con velocità nulla. La sua legge oraria sarà:

$$y = y_2 - \frac{1}{2}gt^2$$

Esso raggiunge il suolo quando  $y = 0$ , per cui il tempo impiegato sarà:

$$0 = y_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2y_2}{g}}$$

Il tempo di volo totale sarà quindi:

$$t = t_1 + t_2 = 0,5 + 2,1 = 2,6s$$

In questo tempo la sua proiezione orizzontale percorre una distanza:

$$x = V_{0x} \cdot t = 8,7 \cdot 2,6 = 22,6m$$

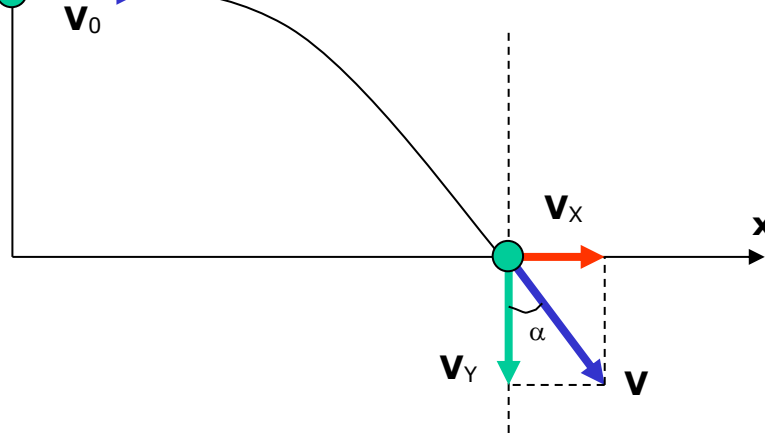
Trovandosi l'uomo a 40 m deve percorrere una distanza  $x = 40 - 22,6 = 17,4 m$  in un tempo  $t = 2,6 s$  per cui la sua velocità sarà:

$$V = \frac{x}{t} = \frac{17,4}{2,6} = 6,7m/s$$

## PROBLEMA

Un corpo viene lanciato, con una velocità iniziale orizzontale  $V_0=10 m/sec$  da un palazzo alto  $h=35 m$  come in figura. Determinare: a) Il tempo di volo; b) la distanza  $x$ , misurata dalla base del palazzo, del punto d'impatto del corpo col suolo; c) l'angolo formato dalla direzione della velocità con la verticale al momento dell'impatto.

**y**



### Soluzione

Il tempo di volo viene calcolato tenendo presente che il moto verticale del corpo è un moto uniformemente accelerato:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 35}{9,8}} = 2,7s$$

Utilizziamo la legge del moto rettilineo uniforme, che caratterizza il moto orizzontale del proiettile, per calcolare la distanza del punto d'impatto del corpo col suolo:

$$x = V_0 \cdot t = 10 \cdot 2,7 = 27m$$

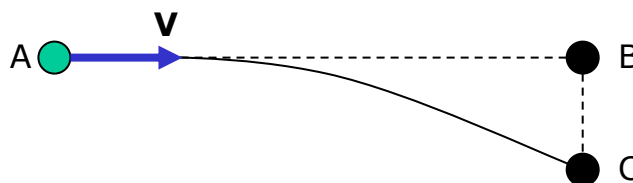
Per calcolare l'angolo formato dalla velocità con la verticale, consideriamo il triangolo rettangolo formato dalla velocità  $V$  e dalle sue componenti  $V_x$  e  $V_y$ . Possiamo quindi scrivere:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_x}{V_y} = \frac{V_x}{g \cdot t} = \frac{10}{9,8 \cdot 2,7} = 0,4 \Rightarrow \alpha = 21^\circ \quad \text{dove: } V_y = gt \quad \text{e } V_x = V_0$$

### PROBLEMA

Un fucile è puntato orizzontalmente contro un bersaglio alla distanza di 30 m. il proiettile colpisce il bersaglio 1,9 cm sotto il centro. Calcolare la velocità del proiettile.

### Soluzione



Il moto del proiettile è un moto parabolico, che è un moto risultante di un moto uniformemente accelerato e di un moto rettilineo uniforme:

$$\begin{cases} x = V \cdot t \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo il tempo di volo del proiettile:

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,019}{9,8}} = 0,06s$$

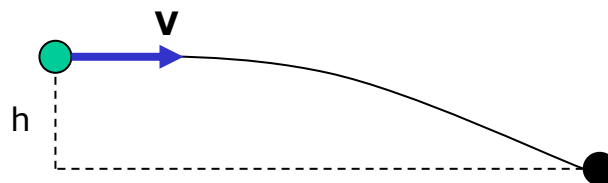
che sostituito nella prima equazione ci consente di calcolare la velocità del proiettile:

$$V = \frac{x}{t} = \frac{30}{0,06} = 500m/s$$

## PROBLEMA

Un fucile, distante 45 m da un bersaglio, spara un proiettile alla velocità di 450 m/s. Quanto più alto dal bersaglio deve essere puntato il fucile per riuscire a colpire il bersaglio?

### Soluzione



Il moto del proiettile è un moto parabolico, che è un moto risultante di un moto uniformemente accelerato e di un moto rettilineo uniforme:

$$\begin{cases} x = V \cdot t \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo il tempo di volo del proiettile:

$$t = \frac{x}{V} = \frac{45}{450} = 0,1s$$

che sostituito nella seconda equazione ci consente di calcolare l'altezza, rispetto al bersaglio, del fucile:

$$h = \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 0,1^2 = 0,049m = 4,9cm$$

## PROBLEMA

Un elettrone, per effetto di un campo magnetico, percorre una traiettoria circolare di raggio  $R = 15 \text{ cm}$  e accelerazione centripeta  $a_c = 3,0 \cdot 10^{14} \text{ m/s}^2$ . Calcolare il periodo del moto.

### Soluzione

Il periodo del moto viene calcolato partendo dalla definizione di velocità del moto circolare uniforme:

$$V = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi R}{V}$$

Però manca il valore della velocità, che calcoliamo come formula inversa dell'accelerazione centripeta:

$$a_c = \frac{V^2}{R} \Rightarrow V = \sqrt{a_c \cdot R} = \sqrt{3,0 \cdot 10^{14} \cdot 0,15} = 0,67 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

In definitiva:

$$T = \frac{2\pi \cdot 0,15}{0,67 \cdot 10^7} = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ s} = 0,14 \mu\text{s}$$

## PROBLEMA

Un satellite terrestre viaggia su un'orbita circolare alla quota di 640 km sopra la superficie terrestre. Il periodo di rivoluzione è di 98 minuti. Calcolare:

1. la velocità del satellite
2. il valore della gravità a quella quota.

### Soluzione

1. La velocità posseduta dal satellite lungo la traiettoria circolare si calcola come:

$$V = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 7,01 \cdot 10^6}{5880} = 7,5 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 7,5 \text{ km/s}$$

dove:

$$R = 640 \cdot 10^3 + R_{\text{Terra}} = 640 \cdot 10^3 + 6,37 \cdot 10^6 = 7,01 \cdot 10^6 \text{ m} \quad 98 \text{ minuti} = 5880 \text{ s}$$

1. Il valore della gravità alla quota di 640 km non è altro che l'accelerazione centripeta:

$$a_c = \frac{V^2}{R} = \frac{(7,5 \cdot 10^3)^2}{7,01 \cdot 10^6} = 8 \text{ m/s}^2$$

## PROBLEMA

Una persona sale in 90 s una scala mobile ferma di 15 m di lunghezza. La stessa persona, stando ferma sulla scala mobile quando è in funzione, impiega 60 s. Calcolare:

1. il tempo impiegato nel caso in cui sale con la scala mobile in funzione
2. la risposta dipende dalla lunghezza della scala?

### Soluzione

1. La velocità con cui la persona sale la scala mobile quando è ferma è data da:

$$V_{\text{persona}} = \frac{L}{t_{\text{persona}}} = \frac{15}{90} = 0,17 \text{ m/s}$$

La velocità della persona quando è ferma sulla scala mobile in funzione è data da:

$$V_{\text{scalamobile}} = \frac{L}{t_{\text{scalamobile}}} = \frac{15}{60} = 0,25 \text{ m/s}$$

Il tempo impiegato dalla persona, nel caso in cui sale con la scala mobile in funzione, è dato da:

$$t = \frac{L}{V_{\text{persona}} + V_{\text{scalamobile}}} = \frac{15}{0,17 + 0,25} = 36 \text{ s}$$

2. Per verificare se la risposta trovata dipende dalla lunghezza della scala mobile, esprimiamo il tempo calcolato nella sua forma generale:

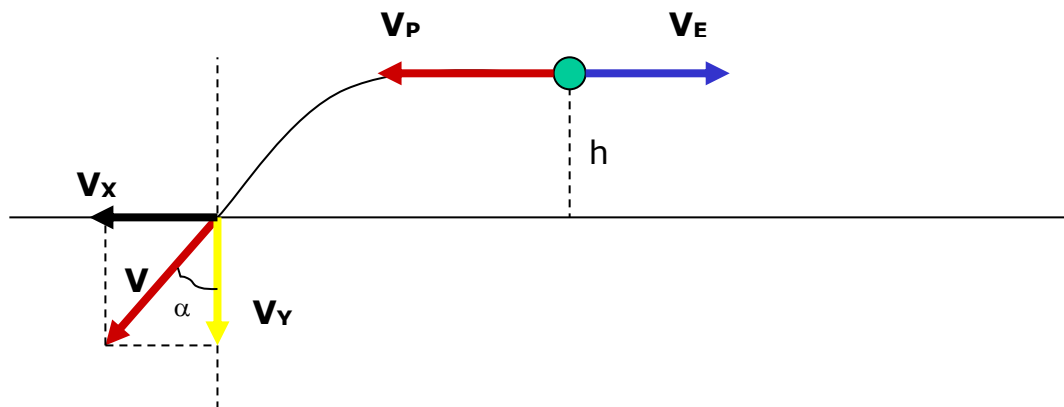
$$t = \frac{L}{V_{\text{persona}} + V_{\text{scalamobile}}} = \frac{L}{\frac{L}{t_{\text{persona}}} + \frac{L}{t_{\text{scalamobile}}}} = \frac{L}{\frac{L \cdot t_s + L \cdot t_p}{t_p \cdot t_s}} = \frac{L}{\frac{L \cdot (t_s + t_p)}{t_s \cdot t_p}} = \frac{t_s \cdot t_p}{t_s + t_p}$$

Dalla formula ricavata si può affermare che il tempo impiegato dalla persona per salire la scala mobile quando è in funzione è indipendente dalla lunghezza della stessa.

## PROBLEMA

Un elicottero vola in linea retta alla velocità costante di 6,2 m/s e alla quota costante di 9,5 m. Un pacco viene lanciato orizzontalmente dall'elicottero con velocità relativa all'elicottero di 12 m/s in senso opposto alla rotta. Calcolare:

1. la velocità iniziale del pacco rispetto al terreno
2. la distanza orizzontale tra il pacco e l'elicottero al momento dell'impatto con il terreno
3. visto da terra, quale angolo con il terreno forma il vettore velocità del pacco al momento dell'impatto.



## Soluzione

1. La velocità del pacco rispetto al terreno è data da:

$$V_{\text{terra}} = V_{\text{pacco}} - V_{\text{aereo}} = 12 - 6,2 = 5,8 \text{ m/s}$$

2. Per calcolare la distanza orizzontale tra il pacco e l'elicottero al momento dell'impatto con il terreno, dobbiamo prima calcolare il tempo di volo:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,5}{9,8}} = 1,4 \text{ s}$$

per cui:

$$\begin{cases} x_{\text{pacco}} = V_{\text{terra}} \cdot t = 5,8 \cdot 1,4 = 8,1 \text{ m} \\ x_{\text{aereo}} = V_{\text{aereo}} \cdot t = 6,2 \cdot 1,4 = 8,7 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow x = x_{\text{pacco}} + x_{\text{aereo}} = 8,1 + 8,7 = 16,8 \text{ m}$$

2. Da considerazioni di carattere trigonometrico troviamo l'angolo cercato:

$$\text{tg} \alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{g \cdot t}{V_x} = \frac{9,8 \cdot 1,4}{5,8} = 2,4 \Rightarrow \alpha = 67^\circ$$