

Problemi di Fisica

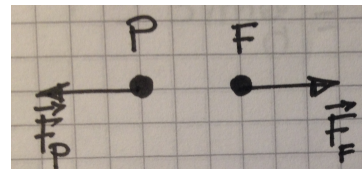
La dinamica

PROBLEMA

Padre e figlio, rispettivamente di 71 kg e 19 kg, si incontrano al centro di una pista di pattinaggio su ghiaccio, pongono le loro mani a contatto e si spingono a vicenda: a) la forza che agisce sul bambino è maggiore, minore o uguale a quella che agisce sul padre? (giustificare la risposta); b) l'accelerazione subita dal bambino è maggiore, minore o uguale a quella subita dal padre? (giustificare la risposta); c) sapendo che l'accelerazione del bambino è $2,6 \text{ m/s}^2$, determina quella del padre.

SOLUZIONE

- a) TERZO PRINCIPIO DELLA DINAMICA: il modulo della forza che agisce sul bambino è uguale a quello della forza che agisce sul padre; il verso delle due forze è opposto.
- b) SECONDO PRINCIPIO DELLA DINAMICA: l'accelerazione del bambino è maggiore, essendo la sua massa minore di quella del padre.
- c) TERZO PRINCIPIO DELLA DINAMICA:



$$F_P = F_F \Rightarrow m_P a_P = m_F a_F \rightarrow a_P = \frac{m_F}{m_P} \cdot a_F = \frac{19}{71} \cdot 2,6 = 0,70 \text{ m/s}^2$$

PROBLEMA

All'istante iniziale, un punto materiale si muove a partire dall'origine con velocità iniziale pari a 40 m/s . Sul punto, che ha massa $0,90 \text{ kg}$, agisce una forza resistente costante di 12 N . a) Scrivere la legge del moto, per lo spazio e per la velocità, del punto materiale; b) determinare la sua posizione e la sua velocità all'istante $t=2 \text{ s}$.

SOLUZIONE

a) Poichè le forze in gioco sono costanti, l'accelerazione che producono è costante. Le leggi del moto uniformemente accelerato sono:

$$\begin{cases} s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v_f = v_0 + a t \end{cases}$$

Calcoliamo l'accelerazione applicando il secondo principio della dinamica:

$$\Sigma \vec{F} = m a \Rightarrow -F = m a \rightarrow a = -\frac{F}{m} = -\frac{12}{0,90} = -13,3 \text{ m/s}^2$$

Si tratta di un moto con accelerazione negativa. Le leggi del moto saranno:

$$\begin{cases} s = 40t - 6,7t^2 \\ v_f = 40 - 13,3t \end{cases}$$

b) La posizione e velocità all'istante $t=2$ s, valgono:

$$\begin{cases} s(2) = 40 \cdot 2 - 6,7 \cdot 2^2 = 53,2 \text{ m} \\ v_f(2) = 40 - 13,3t = 13,4 \text{ m/s} \end{cases}$$

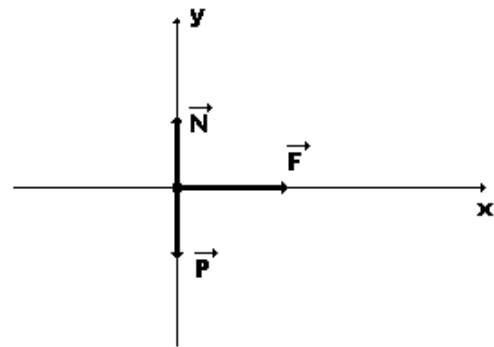
PROBLEMA

Un corpo di massa $m=240$ kg viene spostato con una forza costante $F=130$ N su una superficie priva di attrito per un tratto $s=2,3$ m. Supponendo che il corpo inizialmente è in condizione di riposo, calcolare la velocità finale ed il tempo che impiega per percorrere il tratto s .

SOLUZIONE



Diagramma delle forze



Dalla seconda legge della dinamica ricaviamo l'accelerazione:

$$F = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{130}{240} = 0,54 \text{ m/s}^2$$

Poiché si tratta di un moto uniformemente accelerato, applichiamo le relative leggi:

$$\begin{cases} s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v_f = v_0 + a t \end{cases} \quad \text{poiché } v_0 = 0 \text{ e } s_0 = 0 \text{ le relazioni diventano: } \begin{cases} s = \frac{1}{2} a t^2 \\ v_f = a t \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di due equazioni in due incognite, t e v_f , le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = 2,9 \text{ s} \\ v = a \cdot \sqrt{\frac{2s}{a}} = 1,58 \text{ m/s} \end{cases}$$

PROBLEMA

Un corpo di massa $M = 2 \text{ kg}$ si muove con velocità $V = 3 \text{ m/s}$. Una forza diretta in senso opposto al moto arresta il corpo dopo un tempo $t = 1 \text{ s}$. Calcolare:

- ❑ L'intensità della forza applicata
- ❑ Lo spazio percorso dall'istante in cui viene applicata la forza

SOLUZIONE

- ❑ Appliciamo il 2° principio della dinamica per calcolare la forza che arresta il corpo:

$$F = M \cdot a = 2 \cdot 3 = -6 \text{ N}$$

$$\text{dove } a = \frac{V_F - V_I}{t} = \frac{-3}{1} = -3 \text{ m/s}^2$$

La forza è negativa in quanto si oppone al moto fino ad arrestarlo.

- ❑ Poiché si tratta di un moto uniformemente decelerato, lo spazio percorso nel tempo $t=1\text{s}$ è dato da:

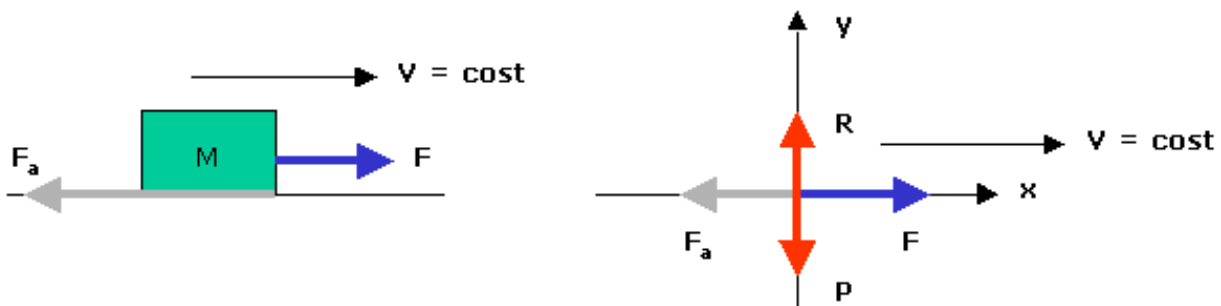
$$s = V_I \cdot t - \frac{1}{2} a t^2 = 3 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1^2 = 1,5 \text{ m}$$

PROBLEMA

Un corpo di massa $M=10 \text{ kg}$ è in moto su un piano orizzontale che presenta un coefficiente di attrito $\mu=0,2$. Se all'istante t tale corpo possiede una velocità di 10 m/s , quanto vale l'intensità della forza che dobbiamo applicare da quell'istante in poi perché il corpo continui a muoversi di moto rettilineo uniforme?

SOLUZIONE

Diagramma delle forze



Il quesito del problema trova la risposta nel:

1° principio della dinamica

$$V = \text{cost} \Rightarrow \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow F - F_a = 0 \Rightarrow F = F_a = \mu \cdot R = \mu \cdot M \cdot g = 0,2 \cdot 10 \cdot 9,8 = 19,6 \text{ N}$$

PROBLEMA

Un carico di 4 tonnellate viene sollevato da una gru alla velocità costante $v=0,5\text{m/s}$. Tale velocità viene raggiunta in $0,5\text{s}$. Calcolare la forza a cui è sottoposto il cavo durante la fase di moto a velocità costante e durante la fase iniziale di moto accelerato.

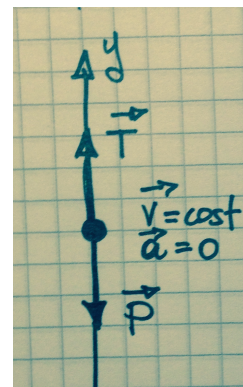
SOLUZIONE

➤ Fase di moto costante

Durante questa fase l'accelerazione è nulla, per cui il cavo (T =tensione del cavo) deve sopportare solo la forza peso del carico ($g=10\text{m/s}^2$). Pertanto, il secondo principio diventa:

$$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow T - P = 0 \rightarrow T = P = mg = 4000 \cdot 10 = 40.000 \text{ kg}$$

dove: 1 tonnellata=1000kg



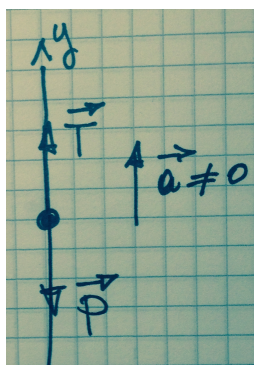
➤ Fase di moto accelerato

Adesso l'accelerazione è diversa da zero, per cui il 2° principio diventa:

$$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow T - P = ma \rightarrow T = P + ma = mg + ma = m(g + a) = 4000 \cdot (10 + 1) = 44.000 \text{ kg}$$

dove:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0,5}{0,5} = 1 \text{ m/s}^2$$

**PROBLEMA**

Una mongolfiera, di massa 1220 kg , è in equilibrio a circa mezzo metro sopra il terreno. Sale un passeggero e la mongolfiera accelera verso il basso di $0,56 \text{ m/s}^2$. Calcolare la massa del passeggero.

SOLUZIONE

Prima che salga il passeggero, la mongolfiera è in equilibrio, quindi la sua forza peso è controbilanciata dal pallone aerostatico. Quando sale il passeggero, l'equilibrio si rompe e la mongolfiera accelera verso il basso. Pertanto, l'unica forza in gioco è la forza peso del passeggero, la cui massa è ottenuta applicando la seconda legge di Newton scritta in direzione verticale (il moto della mongolfiera è solo verticale):

$$\Sigma F_y = ma \rightarrow P_{pass} = (M + m)a \rightarrow mg = (M + m)a \rightarrow m(g - a) = Ma$$

$$m = \frac{a}{g - a} \cdot M = \frac{0,56}{9,81 - 0,56} \cdot 1220 = 74 \text{ kg}$$

PROBLEMA

Un corpo di massa $M=2$ kg viene lanciato verso l'alto lungo un piano inclinato $\alpha=30^\circ$ e con coefficiente di attrito $\mu=0,4$. Determinare la forza che bisogna applicare al corpo affinché il moto lungo il piano inclinato sia uniforme

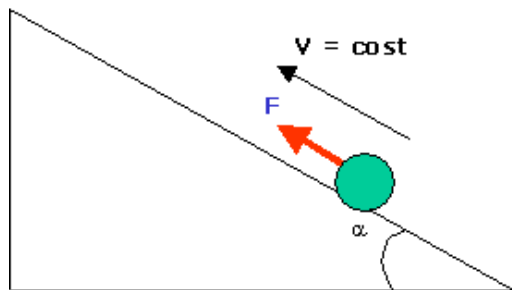
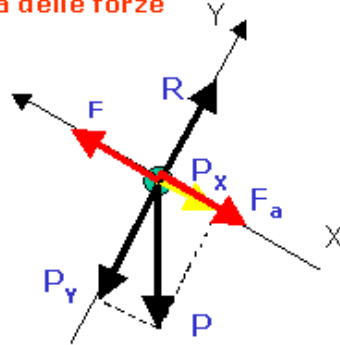
SOLUZIONE

Diagramma delle forze



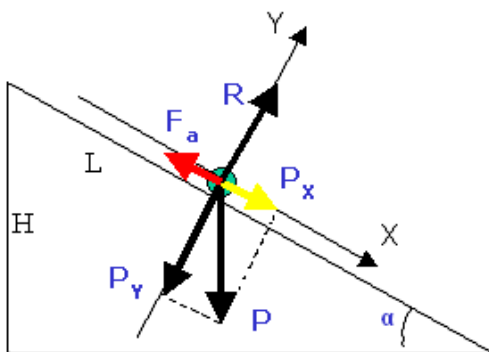
Il quesito del problema trova la risposta nel:

1° principio della dinamica

$$V = \text{cost} \Rightarrow \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow F - F_a - P_x = 0 \Rightarrow F = F_a + P_x = \mu \cdot P_y + P_x = \mu \cdot P \cdot \cos \alpha + P \cdot \sin \alpha = P \cdot (\mu \cdot \cos \alpha + \sin \alpha) = Mg \cdot (\mu \cdot \cos \alpha + \sin \alpha) = 2 \cdot 9,8 \cdot (0,4 \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ) = 16,6 \text{ N}$$

PROBLEMA

Un corpo di massa $m=0,5$ kg scende lungo un piano inclinato alto $H=1$ m e lungo $L=2$ m con un'accelerazione costante $a=4$ m/s². Determina il coefficiente di attrito dinamico tra il piano e il corpo.

SOLUZIONE

Fissato il sistema di assi cartesiani come in figura e disegnate le forze che agiscono sul corpo, possiamo applicare il 2° principio della dinamica che ci permetterà di calcolare il coefficiente di attrito dinamico:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$P_x - F_a = ma \Rightarrow \mu mg \sin \alpha - \mu \eta mg \cos \alpha = \eta ma \Rightarrow \mu = \frac{g \sin \alpha - a}{g \cos \alpha} = 0,1$$

dove:

$$\sin \alpha = \frac{H}{L} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ \quad F_a = \mu \cdot N = \mu \cdot P_y \quad P_x = P \sin \alpha = mg \sin \alpha \quad P_y = P \cos \alpha = mg \cos \alpha$$

PROBLEMA

Un ciclista di massa $m=70\text{kg}$ corre di moto rettilineo uniforme con velocità $v=15\text{ m/s}$. A un certo istante comincia ad agire sul ciclista una forza costante $F=200\text{N}$ che ne contrasta il moto. In quanto tempo si ferma e quale spazio ha percorso?

SOLUZIONE

Si tratta di un moto uniformemente accelerato (a negativa), regolato dalle seguenti leggi orarie:

$$\begin{cases} s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v_f = v_0 + a t \end{cases}$$

L'accelerazione non è nota, ma possiamo calcolarla dal 2° principio della dinamica (teniamo presente che $\mathbf{F}$ si oppone al moto):

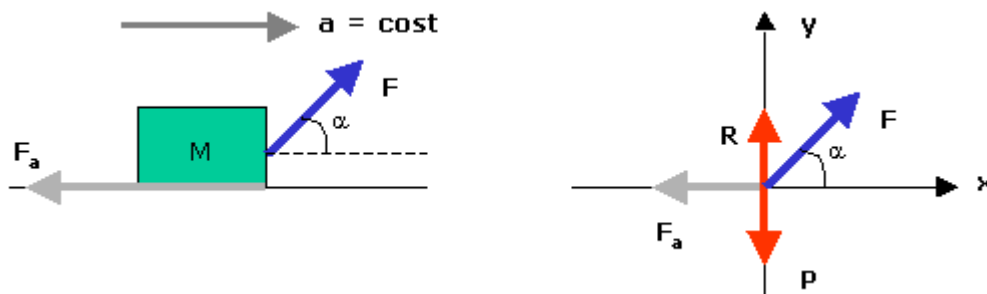
$$-F = m \cdot a \Rightarrow a = -\frac{F}{m} = -\frac{200}{70} = -2,85 \text{ m/s}^2$$

Quindi, le equazioni del moto diventano:

$$\begin{cases} s = 15t - \frac{1}{2} \cdot 2,85 t^2 \\ 0 = 15 - 2,85 t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s = 39,5 \text{ m} \\ t = \frac{15}{2,85} = 5,25 \text{ s} \end{cases}$$

PROBLEMA

Il coefficiente di attrito tra un corpo di massa $M=20\text{ kg}$ ed il pavimento è $\mu=0,2$. Calcolare l'accelerazione impressa al corpo da una forza di 100 N inclinata di 60° rispetto all'orizzontale, e la reazione vincolare.

SOLUZIONE**Diagramma delle forze**

Il problema viene risolto applicando il secondo principio della dinamica, tenendo conto che si tratta di una equazione vettoriale:

$$\sum \vec{F} = M \cdot \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = M \cdot \vec{a} \\ \sum \vec{F}_y = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x - F_a = M \cdot a \\ R + F_y - P = 0 \end{cases}$$

Il sistema così ottenuto contiene le due incognite del problema, l'accelerazione a e la reazione vincolare R . Risolto dà le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} R = P - F_y = Mg - F \cdot \sin \alpha = 20 \cdot 9,8 - 100 \cdot \sin 60^\circ = 109 \text{ N} \\ a = \frac{F_x - F_a}{M} = \frac{F \cdot \cos \alpha - \mu \cdot R}{M} = \frac{100 \cdot \cos 60^\circ - 0,2 \cdot 109}{20} = 1,5 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

PROBLEMA

Un automobile avente la massa $M=1600$ kg percorre 80 m, prima di fermarsi, con una forza frenante costante pari a 6250 N. Calcolare:

1. La velocità dell'automobile all'istante in cui inizia la frenata
2. Il tempo impiegato per fermarsi

SOLUZIONE

Innanzitutto calcoliamo la decelerazione, attraverso il 2° principio della dinamica, subito dalla macchina durante la frenata:

$$\vec{F} = M \cdot \vec{a} \Rightarrow a = \frac{F}{M} = \frac{6250}{1600} = -3,9 \text{ m/s}^2$$

Poiché si tratta di un moto uniformemente decelerato, applichiamo le rispettive leggi per rispondere ai quesiti del problema:

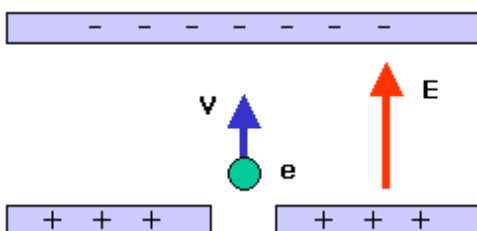
$$1. \begin{cases} S = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \\ v_0 = a t \end{cases} \Rightarrow S = a t^2 - \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow 2S = 2a t^2 - a t^2 \Rightarrow 2S = a t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2S}{a} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80}{3,9}} = 6,4 \text{ s}$$

$$2. v_0 = 3,9 \cdot 6,4 = 25 \text{ m/s} = 90 \text{ km/h}$$

PROBLEMA

Un elettrone viene sparato tra due piastre cariche con una velocità $V=2 \cdot 10^6$ m/s. Il campo elettrico tra le due piastre ostacola il moto dell'elettrone con una forza $F=4,8 \cdot 10^{-17}$ N. Sapendo che la massa dell'elettrone è $m=0,91 \cdot 10^{-30}$ kg, calcolare la distanza percorsa prima di essere arrestato dalla forza elettrica.

SOLUZIONE



Innanzitutto calcoliamo la decelerazione subito dall'elettrone, attraverso il 2° principio della dinamica:

$$\vec{F} = M \cdot \vec{a} \Rightarrow a = \frac{F}{M} = \frac{4,8 \cdot 10^{-17}}{0,91 \cdot 10^{-30}} = -5,3 \cdot 10^{13} \text{ m/s}^2$$

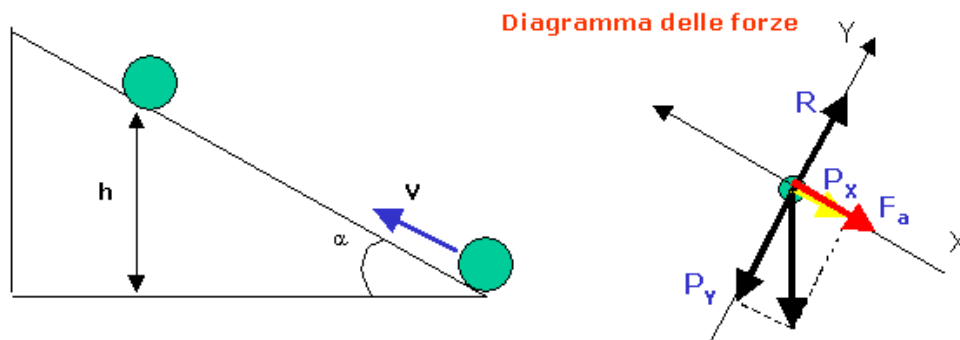
Poiché si tratta di un moto uniformemente decelerato, applichiamo le rispettive leggi per rispondere ai quesiti del problema:

$$\begin{cases} t = \frac{V_0}{a} = \frac{2 \cdot 10^6}{5,3 \cdot 10^{13}} = 0,4 \cdot 10^{-7} \text{ s} \\ S = V_0 t - \frac{1}{2} a t^2 = 2 \cdot 10^6 \cdot 0,4 \cdot 10^{-7} - \frac{1}{2} \cdot 5,3 \cdot 10^{13} \cdot (0,4 \cdot 10^{-7})^2 = 0,04 \text{ m} = 4 \text{ cm} \end{cases}$$

PROBLEMA

Un corpo di massa M viene lanciato lungo un piano inclinato ($\alpha=30^\circ$) con velocità $V=10 \text{ m/s}$. Se l'attrito tra corpo e piano è $\mu=0,2$, determinare a quale altezza h , rispetto all'orizzontale, si ferma il corpo.

SOLUZIONE



Innanzitutto calcoliamo la decelerazione, attraverso il 2° principio della dinamica, subita dal corpo durante il moto lungo il piano inclinato:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = M \cdot \vec{a} &\Rightarrow -F_a - P_x = M \cdot a \Rightarrow a = \frac{-F_a - P_x}{M} = \frac{-\mu \cdot P_y - P_x}{M} = \frac{-\mu \cdot P \cdot \cos \alpha - P \cdot \sin \alpha}{M} = \frac{P \cdot (-\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}{M} = \\ &= \frac{Mg \cdot (-\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}{M} = -g(\mu \cos \alpha + \sin \alpha) = -9,8 \cdot (0,2 \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ) = -6,6 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Poiché si tratta di un moto uniformemente decelerato, applichiamo le rispettive leggi per calcolare lo spazio percorso:

$$\begin{cases} t = \frac{V_0}{a} = \frac{10}{6,6} = 1,5 \text{ s} \\ S = V_0 t - \frac{1}{2} a t^2 = 10 \cdot 1,5 - \frac{1}{2} \cdot 6,6 \cdot 1,5^2 = 7,6 \text{ m} \end{cases}$$

Da considerazioni di carattere trigonometrico calcoliamo l'altezza h alla quale il corpo si ferma:

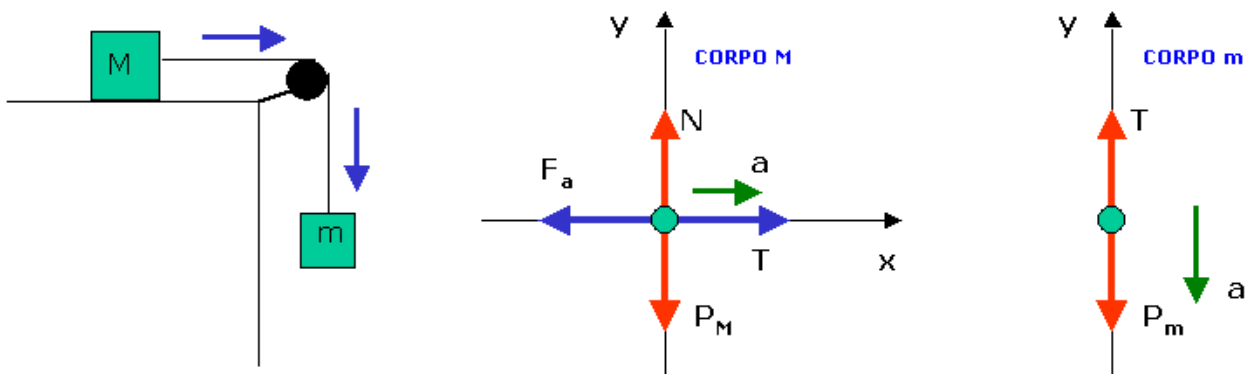
$$h = S \cdot \sin \alpha = 7,6 \cdot \sin 30^\circ = 3,8 \text{ m}$$

PROBLEMA

Una massa $M=3,3\text{kg}$ si muove su un piano con un coefficiente d'attrito $\mu=0.3$, secondo la direzione indicata in figura, sotto l'azione di una massa $m=2,1\text{kg}$. Nell'ipotesi che la fune sia priva di massa e che la carrucola non introduce nessun attrito, calcolare l'accelerazione e la tensione della corda.

SOLUZIONE

Diagramma delle forze



Applichiamo la seconda legge della dinamica ai due corpi, tenendo presente che l'accelerazione è la stessa per le due masse in base alle ipotesi del problema:

$$\text{CORPO M} \Rightarrow \sum \vec{F} = M \cdot \vec{a} = \begin{cases} \sum \vec{F}_x = M \cdot a \\ \sum \vec{F}_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T - F_a = M \cdot a \\ N - P_M = 0 \end{cases}$$

$$\text{CORPO m} \Rightarrow T - P_m = -m \cdot a$$

Riuniamo le precedenti equazioni in un unico sistema di tre equazioni in tre incognite:

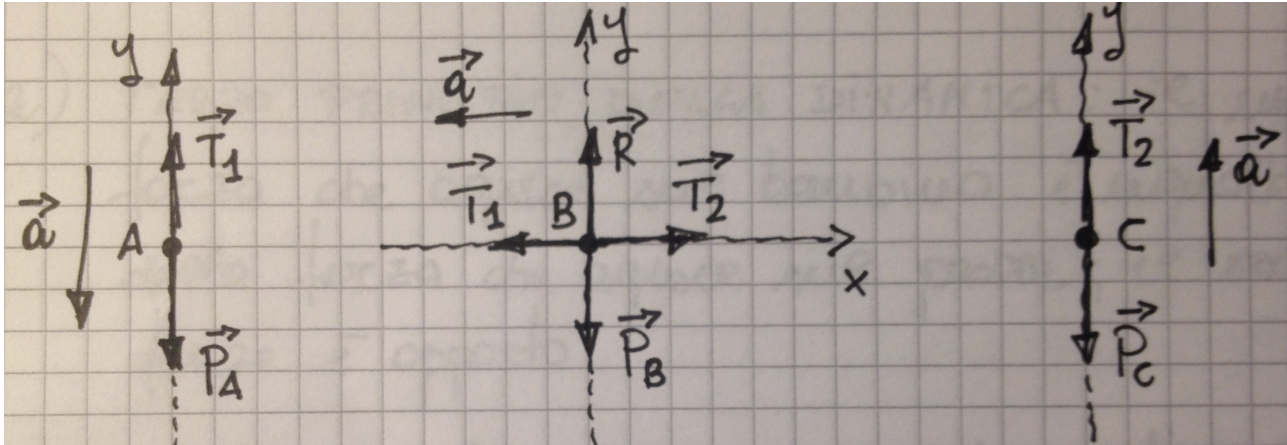
$$\begin{cases} T - F_a = M \cdot a \\ N - P_M = 0 \\ T - P_m = -m \cdot a \end{cases}$$

che risolto, darà le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} N = P_M = M \cdot g = 3,3 \cdot 9,8 = 32,3\text{N} \\ T = M \cdot a + F_a = 3,1 \cdot 2 + 0,3 \cdot 32,3 = 15,9\text{N} \\ M \cdot a + F_a - P_m = -m \cdot a \Rightarrow 3,3a + 0,3 \cdot 32,3 - 20,6 = -2,1a \Rightarrow 5,4a = 10,9 \Rightarrow a = \frac{10,9}{5,4} = 2\text{m/s}^2 \end{cases}$$

PROBLEMA

Un blocco A di 5 kg, un blocco B di 3 kg e un blocco C di 2 kg sono collegati come in figura. Quanto vale l'accelerazione dei blocchi in assenza di attrito?

SOLUZIONE

Applichiamo il secondo principio della dinamica, tenendo presente che si tratta di un'equazione vettoriale, per cui equivale a scrivere due equazioni, una per ogni componente x e y:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \Sigma \vec{F}_x = m\vec{a} \\ \Sigma \vec{F}_y = m\vec{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 - P_A = -m_A a \\ T_2 - T_1 = -m_B a \\ T_2 - P_C = m_C a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 - 50 = -5a \\ T_2 - T_1 = -3a \\ T_2 - 20 = 2a \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, otterremmo l'accelerazione dei blocchi e anche il valore delle tensioni:

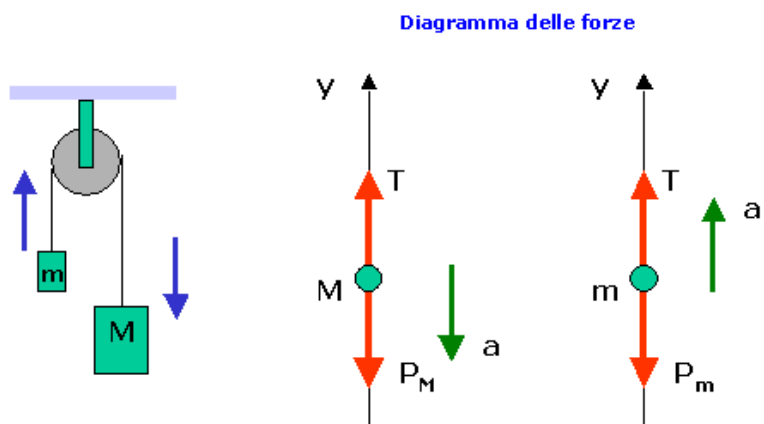
$$\begin{cases} T_1 = 50 - 5a \\ T_2 = 20 + 2a \\ 20 + 2a - 50 + 5a = -3a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_1 = 35 \text{ N} \\ T_2 = 26 \text{ N} \\ a = 3 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

PROBLEMA

Dato il sistema di masse in figura, calcolare la loro accelerazione e la tensione della fune, nell'ipotesi che la fune non abbia massa e la carrucola sia priva di attrito.

SOLUZIONE

Applichiamo la seconda legge della dinamica ai due corpi, tenendo presente che l'accelerazione è la stessa per le due masse in base alle ipotesi del problema:



$$\begin{cases} T - P_M = -M \cdot a \\ T - P_m = m \cdot a \end{cases}$$

E' un sistema di due equazioni in due incognite, che risolto dà le seguenti soluzioni:

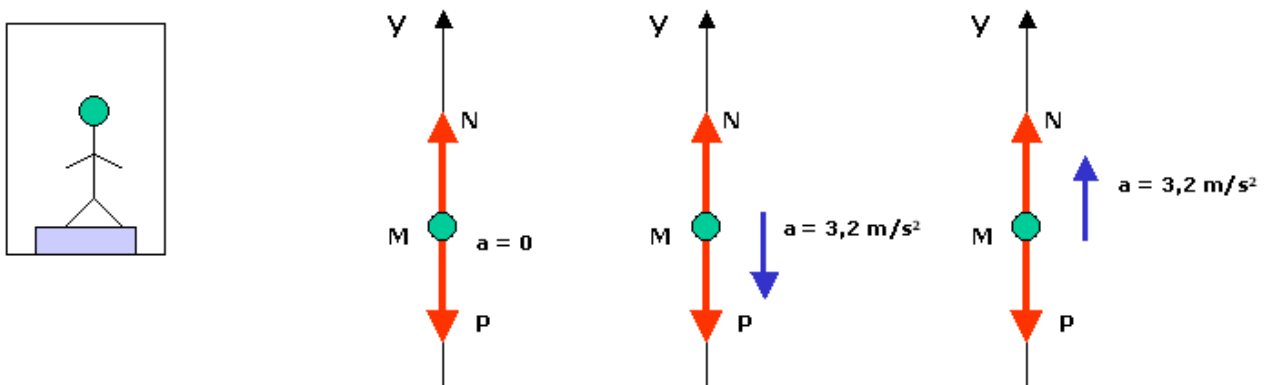
$$\begin{cases} T - Mg = -M \cdot a \Rightarrow T = Mg - Ma = 17N \\ Mg - Ma - mg = ma \Rightarrow a \cdot (M + m) = g \cdot (M - m) \Rightarrow a = \frac{M - m}{M + m} \cdot g = 3,6m/s^2 \end{cases}$$

PROBLEMA

Un passeggero di massa $m=72.2$ kg sta su una bilancia nella cabina di un ascensore. Che cosa segna la bilancia quando l'accelerazione assume i valori dati in figura?

SOLUZIONE

Diagramma delle forze



- 1° caso: $a = 0$

$$N - Mg = 0 \Rightarrow N = Mg = 72,2 \cdot 9,8 = 708N$$

La bilancia segna il peso effettivo del passeggero

- 2° caso: $a = -3,2 m/s^2$

$$N - Mg = -Ma \Rightarrow N = Mg - Ma = M \cdot (g - a) = 72,2 \cdot (9,8 - 3,2) = 477N$$

La bilancia segna un peso inferiore di 231 N ed il passeggero pensa di aver dimagrito 23,6 kg
($M = P/g = 231/9,8 = 23,6$ kg)

- 3° caso: $a = 3,2 m/s^2$

$$N - Mg = Ma \Rightarrow N = M \cdot (g + a) = 72,2 \cdot (9,8 + 3,2) = 939N$$

La bilancia segna un peso superiore di 231 N ed il passeggero pensa di aver ingrassato 23,6 kg
($M = P/g = 231/9,8 = 23,6$ kg)

PROBLEMA

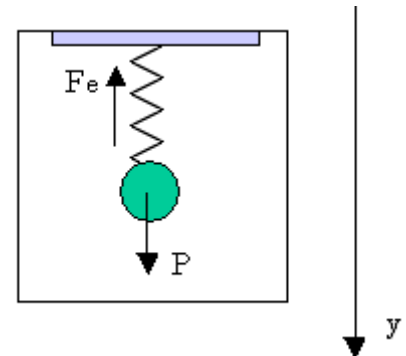
Un corpo di massa 1 kg è appeso ad una molla con $k=10 \text{ N/m}$ agganciata a sua volta al soffitto di un ascensore. Calcolare l'allungamento della molla quando l'ascensore: a) è in quiete; b) scende con accelerazione $g/2$; c) è in caduta libera.

SOLUZIONE

a) Ascensore in quiete $a = 0$

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow P - F_e = 0$$

$$mg - kx = 0 \Rightarrow mg = kx \Rightarrow x = \frac{mg}{k} = \frac{1 \cdot 9,8}{10} = 0,98m = 98cm$$



b) Ascensore in discesa con accelerazione $a = g/2$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow P - F_e = ma$$

$$mg - kx = ma \rightarrow mg - kx = m \frac{g}{2} \rightarrow 2mg - 2kx = mg \rightarrow mg = 2kx \rightarrow x = \frac{mg}{2k} = \frac{1 \cdot 9,8}{2 \cdot 10} = 0,49m = 49cm$$

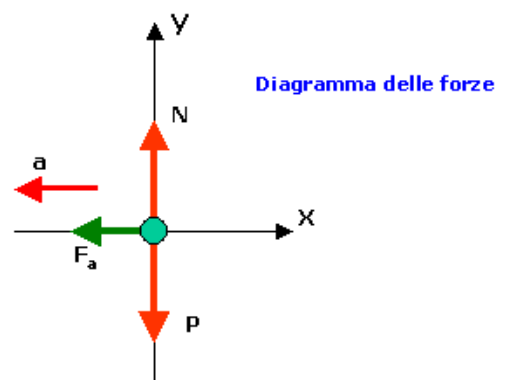
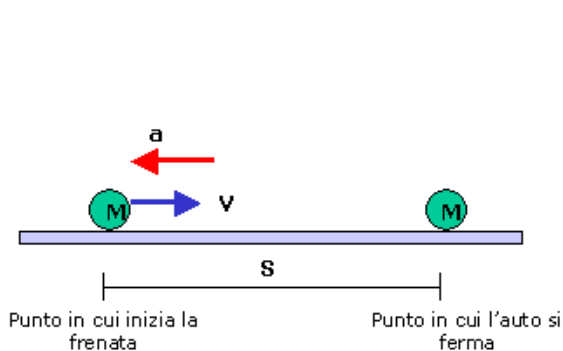
c) Ascensore in caduta libera $a = g$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow P - F_e = ma$$

$$mg - kx = mg \rightarrow -kx = 0 \rightarrow x = 0$$

PROBLEMA

Calcolare la velocità di un'auto nell'istante in cui effettua una frenata, supponendo che la "strisciata" dei pneumatici sull'asfalto sia di 290 m ed il coefficiente di attrito dinamico $\mu_D=0.60$.

SOLUZIONE

Applicando le equazioni del moto uniformemente accelerato si ottiene:

$$\begin{cases} s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \\ v_f = v_0 - a t \end{cases} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2as} \quad \text{essendo } v_f = 0$$

Il valore dell'accelerazione lo ricaviamo applicando il 2° principio della dinamica:

$$-F_a = -Ma \Rightarrow a = \frac{F_a}{M} = \frac{\mu_D Mg}{M} = \mu_D \cdot g$$

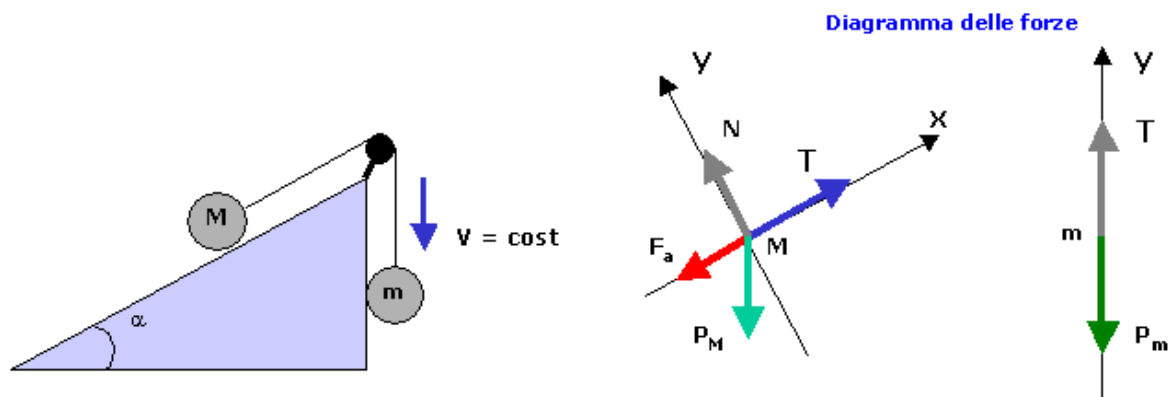
In definitiva:

$$v_0 = \sqrt{2\mu_D \cdot g \cdot s} = 210 \text{ Km/h}$$

PROBLEMA

Dato il sistema in figura ($m=14\text{kg}$ $\alpha=30^\circ$) calcolare il coefficiente di attrito dinamico tra la massa M ed il piano inclinato nell'ipotesi che le masse si muovano di moto uniforme.

SOLUZIONE



- 2° principio della dinamica applicato alla massa M :

$$\sum \vec{F} = M \cdot \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = M \cdot \vec{a} \\ \sum \vec{F}_y = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T - F_a - P_x = 0 \\ N - P_y = 0 \end{cases} \quad \text{dove } a = 0 \text{ perché } v = \text{costante}$$

- 2° principio della dinamica applicato alla massa m :

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow T - P_m = 0 \quad \text{dove } a = 0 \text{ perché } v = \text{costante}$$

Riuniamo le precedenti equazioni in un unico sistema:

$$\begin{cases} T - F_a - P_x = 0 \\ N - P_y = 0 \\ T - P_m = 0 \end{cases}$$

Sapendo che $P_x = P \cdot \sin \alpha$ e $P_y = P \cdot \cos \alpha$ il sistema ammetterà le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} T = m \cdot g = 14 \cdot 9,8 = 137 \text{ N} \\ F_a = T - P_x = T - Mg \sin \alpha = 137 - 14 \cdot 9,8 \cdot \sin 30^\circ = 68 \text{ N} \\ N = P_y = Mg \cos \alpha = 14 \cdot 9,8 \cdot \cos 30^\circ = 119 \text{ N} \end{cases}$$

Pertanto il coefficiente di attrito dinamico sarà:

$$F_a = \mu_D N \Rightarrow \mu_D = \frac{F_a}{N} = \frac{68}{119} = 0,57$$

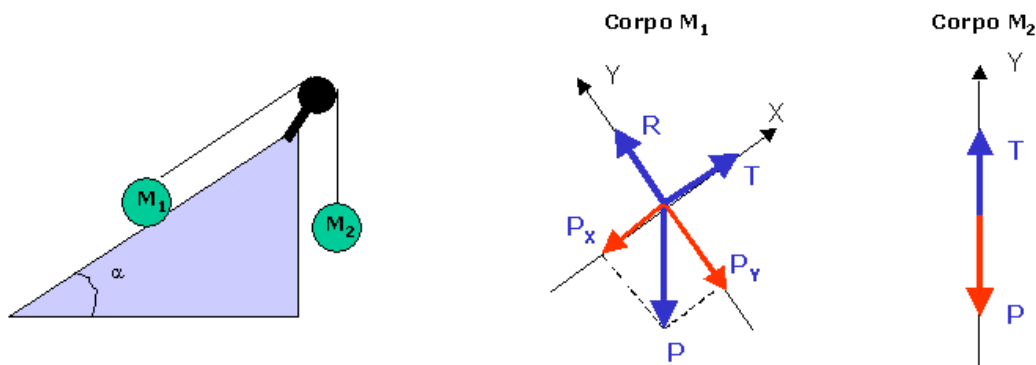
PROBLEMA

Dato il sistema in figura formato dalle masse $M=M_1=M_2=2 \text{ kg}$ e da un piano inclinato ($\alpha=30^\circ$) privo di attrito, determinare:

1. L'accelerazione delle masse
2. La tensione della fune, supposta inestensibile
3. La reazione vincolare del piano inclinato

SOLUZIONE

Diagramma delle forze



Il problema viene risolto applicando il secondo principio della dinamica a ciascuna massa e tenendo conto che sono equazioni vettoriali e come tali scomponibili lungo gli assi cartesiani. Inoltre, in base alle ipotesi del problema, l'accelerazione è la stessa per le due masse così come la tensione della fune.

$$\text{CORPO } M_1 \Rightarrow \sum \vec{F} = M \cdot \vec{a} = \begin{cases} \sum \vec{F}_x = M \cdot a \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T - P_x = M \cdot a \\ R - P_y = 0 \end{cases}$$

$$\text{CORPO } M_2 \Rightarrow \sum F_y = M \cdot a \Rightarrow T - P = -M \cdot a$$

NOTARE: Abbiamo ipotizzato che la massa M_2 si muove verso il basso, ed in base al sistema di riferimento scelto la sua accelerazione è un vettore negativo, e quindi la massa M_1 si muove verso l'alto lungo il piano inclinato, ed in base al sistema di riferimento scelto la sua accelerazione è un vettore positivo.

Riuniamo le precedenti equazioni in un unico sistema, ottenendo così un sistema di tre equazioni in tre incognite, che sono quelle poste come quesito dal problema:

$$\begin{cases} T - P_x = M \cdot a \\ R - P_y = 0 \\ T - P = -M \cdot a \end{cases}$$

Risolviamo il sistema con il metodo di sostituzione, ricavando l'incognita T dalla prima equazione e sostituendola nella terza equazione otteniamo il valore dell'accelerazione:

$$\begin{cases} T = P_x + M \cdot a \\ P_x + M \cdot a - P = -M \cdot a \Rightarrow 2M \cdot a = P - P_x \Rightarrow a = \frac{P - P_x}{2M} = \frac{P - P \cdot \sin \alpha}{2M} = \frac{P \cdot (1 - \sin \alpha)}{2M} = \frac{Mg \cdot (1 - \sin \alpha)}{2M} = 2,45 \text{ m/s}^2 \\ R - P_y = 0 \end{cases}$$

A questo punto le altre incognite sono facilmente calcolabili:

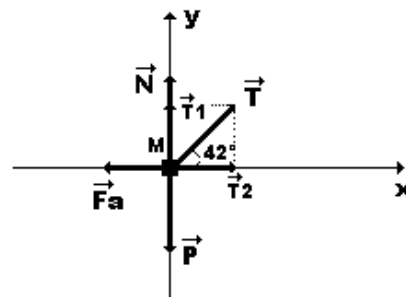
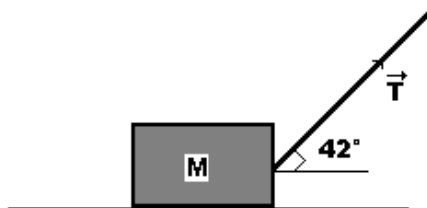
$$\begin{cases} T = P \cdot \sin \alpha + M \cdot a = Mg \cdot \sin \alpha + M \cdot a = M \cdot (g \cdot \sin \alpha + a) = 2 \cdot (9,8 \cdot \sin 30^\circ + 2,45) = 14,7 \text{ N} \\ a = 2,45 \text{ m/s}^2 \\ R = P_y = P \cdot \cos \alpha = Mg \cdot \cos \alpha = 2 \cdot 9,8 \cdot \cos 30^\circ = 17 \text{ N} \end{cases}$$

Conclusione: La massa M_2 si muove verso il basso perché il valore trovato, essendo positivo, è in accordo con l'ipotesi fatta.

PROBLEMA

Un corpo di massa $M=75\text{kg}$ viene tirato, a velocità costante, con una fune inestensibile con un angolo $\alpha=42^\circ$ rispetto alla direzione di moto. Supponendo che il coefficiente di attrito dinamico è $\mu_D=0.1$, calcolare la tensione della fune.

SOLUZIONE



2° PRINCIPIO DELLA DINAMICA APPLICATO AL CORPO M

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = \vec{0} \\ \sum \vec{F}_y = \vec{0} \end{cases} \quad a = 0 \text{ perché } V = \text{cost}$$

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} T_2 - F_a = 0 \\ N + T_1 - P = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T \cdot \cos \alpha - F_a = 0 \\ N + T \cdot \sin \alpha - P = 0 \end{cases}$$

dove: $T_1 = T \cdot \sin \alpha$ $T_2 = T \cdot \cos \alpha$ $F_a = \mu_D N = \mu_D Mg$ $P = Mg$

Il sistema, così ottenuto, nelle incognite T e N , ammette le seguenti soluzioni:

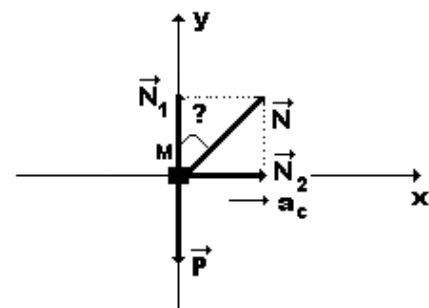
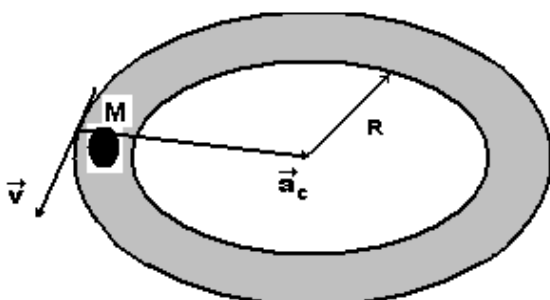
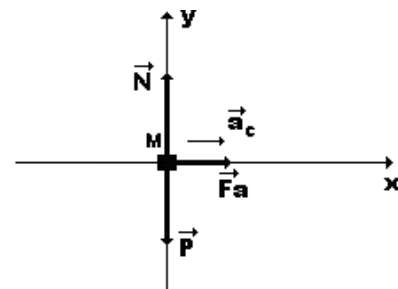
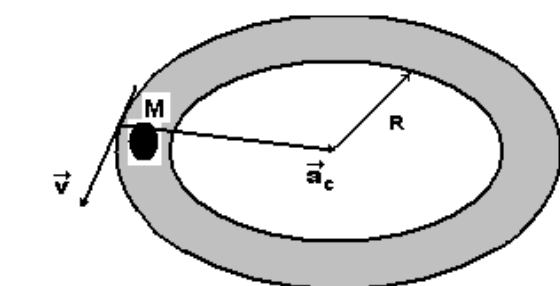
$$\begin{cases} T = \frac{\mu_D Mg}{\cos \alpha + \mu_D \sin \alpha} = 91 \text{ N} \\ N = Mg - T \sin \alpha = 670 \text{ N} \end{cases}$$

PROBLEMA

La figura rappresenta un'automobile di massa $M=1600\text{kg}$ che viaggia a velocità costante $v=20\text{m/s}$ su una pista piana e circolare di raggio $R = 190\text{m}$.

- Qual è il valore minimo del coefficiente di attrito tra i pneumatici ed il terreno che impedisce alla macchina di slittare verso l'esterno?
- Se la curva è sopraelevata, a quale angolo dovrà essere inclinato il fondo stradale per garantire la tenuta di strada senza l'ausilio della forza di attrito?

SOLUZIONE



PRIMO CASO

$$2^{\circ} \text{ PRINCIPIO DELLA DINAMICA APPLICATO AL CORPO M} \Rightarrow \sum \vec{F} = M \cdot \vec{a}_c \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = \vec{0} \\ \sum \vec{F}_y = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_a = M \cdot a_c \\ N - P = 0 \end{cases}$$

$$\text{dove } P = Mg \quad a_c = v^2/R \quad F_a = \mu_D N = \mu_D Mg$$

Pertanto:

$$\mu_D \cdot M \cdot g = M \frac{v^2}{R} \Rightarrow \mu_D = \frac{V^2}{g \cdot R} = \frac{20^2}{9,8 \cdot 190} = 0,21$$

SECONDO CASO

$$2^{\circ} \text{ PRINCIPIO DELLA DINAMICA} \Rightarrow \sum \vec{F} = M \cdot \vec{a}_c \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = \vec{0} \\ \sum \vec{F}_y = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_2 = M \cdot a_c \\ N_1 - P = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N \cdot \sin \alpha = M \cdot a_c \\ N \cdot \cos \alpha = M \cdot g \end{cases}$$

$$\text{dove: } N_1 = N \cdot \cos \alpha \quad N_2 = N \cdot \sin \alpha \quad P = Mg \quad a_c = v^2/R$$

Dividendo membro a membro le equazioni del sistema, otteniamo:

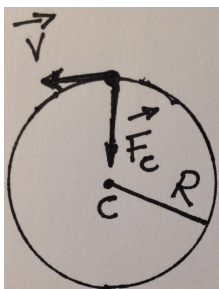
$$\frac{N \cos \alpha}{N \sin \alpha} = \frac{Mg}{Ma_c} \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha = \frac{g}{a_c} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{a_c}{g} = \frac{v^2}{g \cdot R} = \frac{20^2}{9,8 \cdot 190} = 0,21 \Rightarrow \alpha = 12^{\circ}$$

PROBLEMA

Per simulare l'assenza di peso durante l'addestramento, gli astronauti vengono portati su un aereo che percorre una traiettoria circolare, di raggio 2500 m, su un piano verticale. Affinchè gli astronauti percepiscano l'assenza di peso, quale deve essere la velocità dell'aereo nella parte alta della sua traiettoria?

SOLUZIONE

La forza che obbliga l'aereo a percorrere la traiettoria circolare è la forza centripeta. Appliciamo il secondo principio della dinamica per calcolare la velocità dell'aereo nella parte alta della sua traiettoria, dove la forza centripeta non è altro che la forza peso (vedere figura):

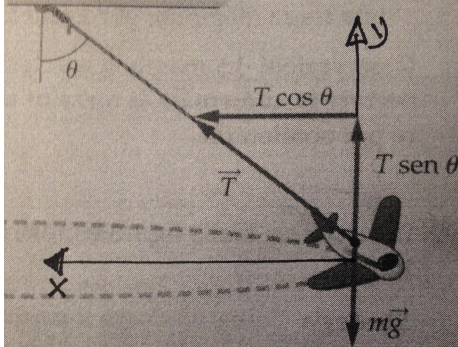


$$F_c = ma_c \Rightarrow mg = m \frac{v^2}{R} \rightarrow v = \sqrt{gR} = \sqrt{10 \cdot 2500} = 158 \text{ m/s}$$

dove $a_c = v^2/R$ è l'accelerazione centripeta.

PROBLEMA

Un aeroplanino di massa 80 g, collegato a una fune come in figura, vola su una circonferenza di diametro 90 cm alla velocità di 2 m/s. Calcolare la tensione della fune.

SOLUZIONE

Scegliamo l'asse x diretto verso il centro della circonferenza percorsa dall'aereo, e l'asse y verso l'alto (vedere figura).

Scriviamo la seconda legge di Newton per le componenti della tensione lungo x e y:

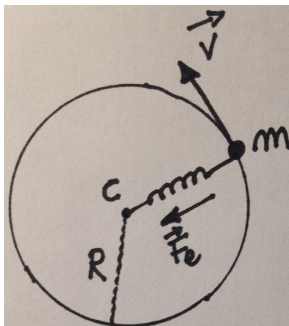
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = ma_c \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T \sin \theta = m \frac{v^2}{R} \\ T \cos \theta - mg = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, troveremo la tensione della fune e anche l'angolo sotto il quale ruota l'aereo:

$$\begin{cases} T = \frac{mg}{\cos \theta} \\ \frac{mg}{\cos \theta} \cdot \sin \theta = m \frac{v^2}{R} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T = \frac{0,080 \cdot 10}{\cos 24} = 0,88 \text{ N} \\ \tan \theta = \frac{v^2}{Rg} = \frac{2^2}{0,90 \cdot 10} = 0,44 \rightarrow \theta = 24^\circ \end{cases}$$

PROBLEMA

Una sferetta, di massa 25 g, è attaccata a una molla ($k=25 \text{ N/m}$) che, all'altro estremo, è legata a un filo sottile e robusto. La sfera ruota con moto uniforme alla frequenza di 2,5 Hz, descrivendo una circonferenza di 40 cm di diametro. Calcolare l'allungamento della molla.

SOLUZIONE

La forza che obbliga la sferetta a percorrere la traiettoria circolare è la forza centripeta, che nel nostro caso non è altro che la forza elastica. Pertanto, per calcolare l'allungamento della molla, basta applicare il secondo principio della dinamica:

$$F_c = ma_c \Rightarrow kx = m \frac{v^2}{R} \rightarrow x = \frac{mv^2}{kR}$$

dove $a_c = v^2/R$ è l'accelerazione centripeta.

La velocità nel moto circolare uniforme è data da:

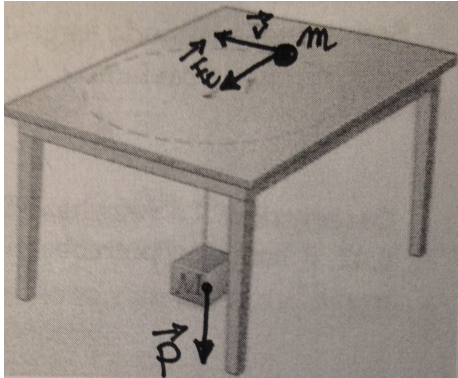
$$v = 2\pi f = 2\pi \cdot 2,5 = 15,7 \text{ m/s}$$

Pertanto:

$$x = \frac{0,025 \cdot 15,7^2}{25 \cdot 0,40} = 0,62 \text{ m} = 62 \text{ cm}$$

PROBLEMA

Una sfera di massa 2 kg, legata a una corda alla cui estremità c'è una massa di 5 kg, si muove lungo una traiettoria circolare di raggio 70 cm. Calcolare la velocità della sfera affinché il suo moto avvenga lungo tale traiettoria.

**SOLUZIONE**

La forza che obbliga la sfera a percorrere la traiettoria circolare è la forza centripeta. Per calcolare la velocità della sfera affinché il suo moto avvenga lungo tale traiettoria, dobbiamo applicare il secondo principio della dinamica, in cui la forza centripeta non è altro che la tensione della corda che, a sua volta, è pari alla forza peso della massa M (vedere figura):

$$F_C = ma_c \Rightarrow Mg = m \frac{v^2}{R} \rightarrow v = \sqrt{\frac{M}{m} \cdot gr} = \sqrt{\frac{5}{2} \cdot 10 \cdot 0,7} = 4,2 \text{ m/s}$$

dove $a_c = v^2/R$ è l'accelerazione centripeta.

PROBLEMA

Un veicolo compie un giro della morte su una pista circolare, di raggio $R=3$ m, disposta in un piano verticale. Qual è la minima velocità che il veicolo deve avere nel punto più alto della pista?

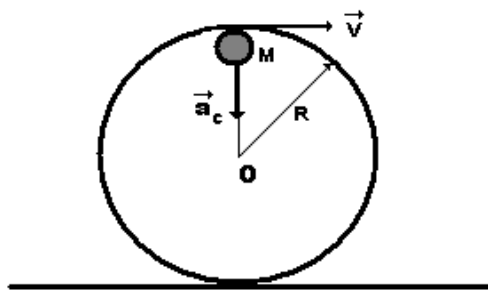
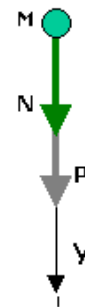
SOLUZIONE

Diagramma delle forze



$$2^{\circ} \text{ PRINCIPIO DELLA DINAMICA APPLICATO AL CORPO M} \Rightarrow \sum \vec{F} = M \cdot \vec{a} \Rightarrow N + P = M \cdot a_c$$

dove $P = Mg$ $a_c = v^2/R$ (accelerazione centripeta)

Se il veicolo è nella condizione di perdere contatto con la pista, allora $N = 0$, per cui la legge diventa:

$$P = M \cdot a_c \Rightarrow Mg = M \frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{g \cdot R} = \sqrt{9,8 \cdot 3} = 5,4 \text{ m/s}$$

Per essere certi che il veicolo non perda contatto con la pista nel punto più alto, la velocità deve essere maggiore di 5.4 m/s.

PROBLEMA

Dato il sistema in figura, calcolare l'accelerazione e le tensioni delle funi.

SOLUZIONE

Disegniamo il diagramma delle forze per ciascun corpo:

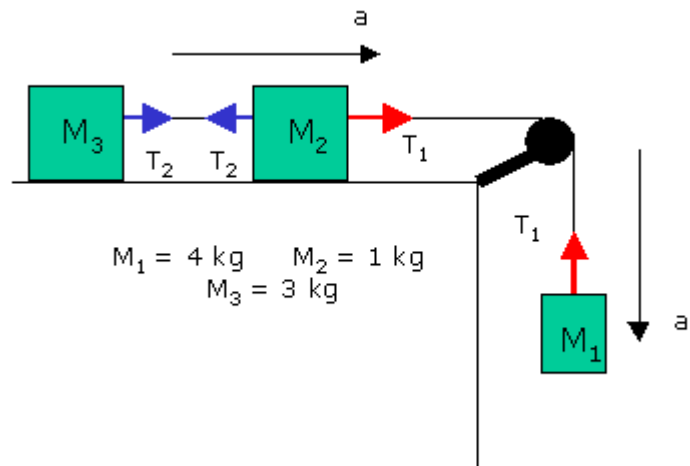
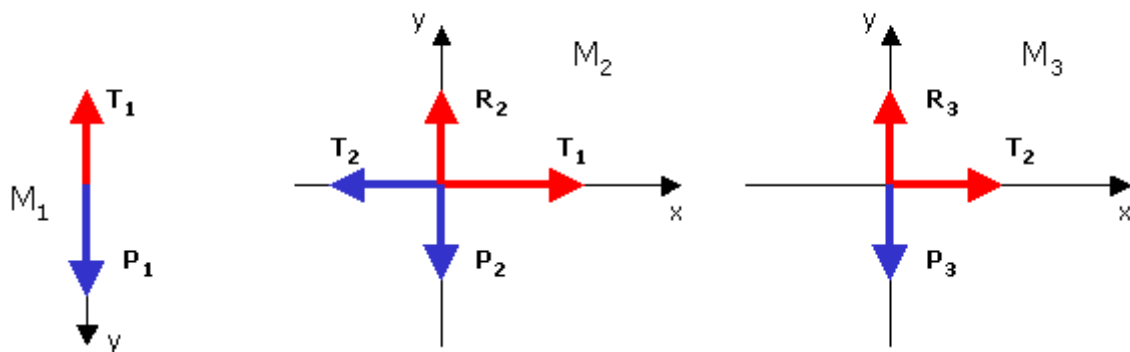


Diagramma delle forze



Applichiamo il 2° principio della dinamica a ciascun corpo:

$$M_1 \Rightarrow P_1 - T_1 = M_1 \cdot a$$

$$M_2 \Rightarrow \begin{cases} T_1 - T_2 = M_2 \cdot a \\ R_2 - P_2 = 0 \end{cases}$$

$$M_3 \Rightarrow \begin{cases} T_2 = M_3 \cdot a \\ R_3 - P_3 = 0 \end{cases}$$

Raccogliamo in un unico sistema le equazioni utili ai fini del problema:

$$\begin{cases} P_1 - T_1 = M_1 \cdot a \\ T_1 - T_2 = M_2 \cdot a \\ T_2 = M_3 \cdot a \end{cases} \quad \text{Sommiamo membro a membro le tre equazioni:}$$

$$P_1 - T_1 + T_1 - T_2 + T_2 = (M_1 + M_2 + M_3) \cdot a$$

Dall'equazione così ottenuta calcoliamo l'accelerazione delle masse:

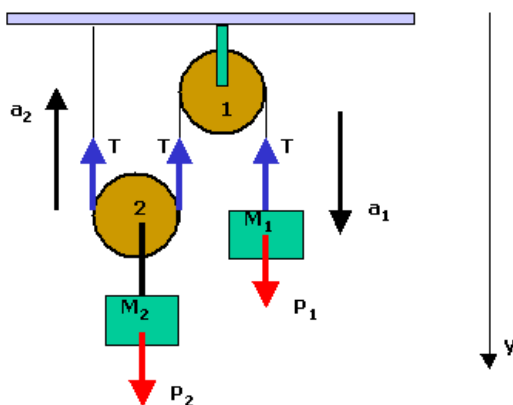
$$a = \frac{P_1}{\sum M} = \frac{M_1}{\sum M} \cdot g = \frac{4}{4+1+3} \cdot 9,8 = 4,9 \text{ m/s}^2$$

Le tensioni delle funi, di conseguenza, sono:

$$T_1 = P_1 - M_1 \cdot a = M_1 \cdot g - M_1 \cdot a = M_1 \cdot (g - a) = 4 \cdot (9,8 - 4,9) = 19,6 \text{ N}$$

$$T_2 = M_3 \cdot a = 3 \cdot 4,9 = 14,7 \text{ N}$$

PROBLEMA



Dato il sistema in figura ($M_1=3 \text{ kg}$ e $M_2=4 \text{ kg}$) calcolare:

- le accelerazioni e la tensione delle funi, nell'ipotesi che la fune sia inestensibile e priva di massa e le carrucole non abbiano dimensioni e siano prive di massa;
- la condizione di equilibrio del sistema.

SOLUZIONE

IPOTESI: Sia la massa M_1 a cadere verso il basso. L'ipotesi fatta è influente ai fini della risoluzione del problema.

□ Applichiamo il 2° principio della dinamica alle due masse:

$$\begin{cases} P_1 - T = M_1 \cdot a_1 \\ -T - T + P_2 = -M_2 \cdot a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 - T = M_1 \cdot a_1 \\ 2T - P_2 = M_2 \cdot a_2 \end{cases}$$

Notiamo:

- per le ipotesi fatte sulla fune, le tensioni in gioco sono tutte uguali;
- le accelerazioni dei due corpi sono diverse; infatti se M_1 si muove di un tratto ΔL verso il basso, poiché la fune è inestensibile, tale tratto di fune dovrà essere sottratto al tratto di fune che avvolge la carrucola 2. Questo tratto sarà quindi ottenuto prelevando un tratto $\Delta L/2$ a sinistra e a destra della carrucola 2. Allora la velocità $V_1 = \Delta L / \Delta t$ di M_1 è doppia rispetto alla velocità $V_2 = \Delta L/2 \Delta t$ di M_2 e analogamente per le accelerazioni otteniamo:

$$a_1 = 2 \cdot a_2$$

Fatte queste considerazioni, risolviamo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} P_1 - T = 2M_1 \cdot a_2 \\ 2T - P_2 = M_2 \cdot a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = P_1 - 2M_1 \cdot a_2 \\ 2P_1 - 4M_1 \cdot a_2 - P_2 = M_2 \cdot a_2 \end{cases}$$

La seconda equazione del sistema contiene l'unica incognita a_2 :

$$M_2 \cdot a_2 + 4M_1 \cdot a_2 = 2P_1 - P_2 \Rightarrow$$

$$(4M_1 + M_2) \cdot a_2 = 2P_1 - P_2 \Rightarrow a_2 = \frac{2P_1 - P_2}{4M_1 + M_2} = \frac{2M_1g - M_2g}{4M_1 + M_2} = \frac{2M_1 - M_2}{4M_1 + M_2} \cdot g = \frac{2 \cdot 3 - 4}{4 \cdot 3 + 4} \cdot 9,8 = 1,23 \text{ m/s}^2$$

A questo punto è semplice calcolare a_1 e T :

$$a_1 = 2 \cdot 1,23 = 2,45 \text{ m/s}^2 \quad T = M_1 \cdot g - 2M_1 \cdot a_2 = M_1 \cdot (g - 2a_2) = 3 \cdot (9,8 - 2 \cdot 1,23) = 22 \text{ N}$$

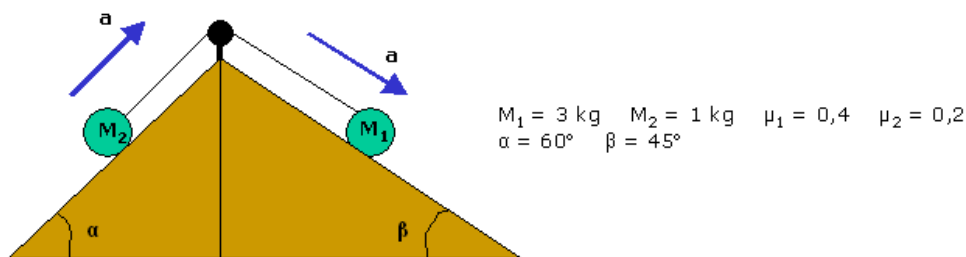
Poiché a_1 è positiva, l'ipotesi fatta è giusta, cioè M_1 cade verso il basso e M_2 si muove verso l'alto. Se a_1 fosse stata negativa, il problema sarebbe stato risolto nello stesso modo, ma avremmo concluso che M_1 si muove verso l'alto e M_2 verso il basso.

□ L'equilibrio si ottiene se $a_1 = 0$ cioè:

$$a_1 = 2 \cdot \frac{2P_1 - P_2}{4M_1 + M_2} = 0 \Rightarrow 2 \cdot (2P_1 - P_2) = 0 \Rightarrow 2P_1 = P_2 \Rightarrow 2M_1g = M_2g \Rightarrow M_2 = 2M_1$$

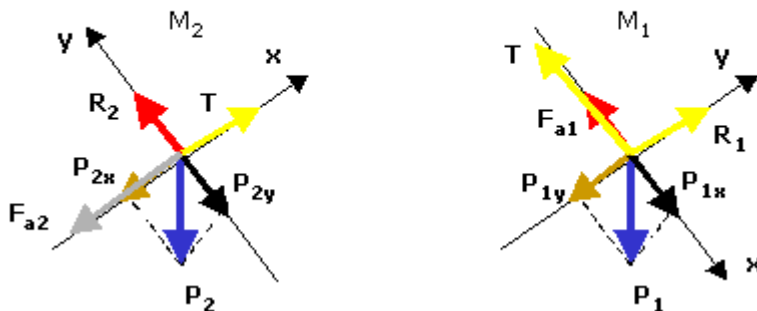
PROBLEMA

Dato il sistema di masse in figura, calcolare l'accelerazione e la tensione della fune, nell'ipotesi che sia priva di massa ed inestensibile.



SOLUZIONE

Diagramma delle forze



IPOTESI: M_1 scende M_2 sale

Tenendo conto del diagramma delle forze, il 2° principio della dinamica applicato alle due masse diventa:

$$M_1 \Rightarrow \begin{cases} P_{1x} - F_{a1} - T = M_1 \cdot a \\ R_1 - P_{1y} = 0 \end{cases}$$

$$M_2 \Rightarrow \begin{cases} T - F_{a2} - P_{2x} = M_2 \cdot a \\ R_2 - P_{2y} = 0 \end{cases}$$

Le equazioni che servono a rispondere ai quesiti del problema sono:

$$\begin{cases} P_{1x} - F_{a1} - T = M_1 \cdot a \\ T - F_{a2} - P_{2x} = M_2 \cdot a \end{cases}$$

Risolvi il sistema con il metodo di riduzione, per cui, sommando membro a membro le due equazioni otteniamo un'equazione in una sola incognita:

$$\begin{aligned} P_{1x} - F_{a1} - T + T - F_{a2} - P_{2x} &= M_1 a + M_2 a \Rightarrow (M_1 + M_2) \cdot a = P_1 \cdot \sin\beta - \mu_1 \cdot P_1 \cdot \cos\beta - \mu_2 \cdot P_2 \cdot \cos\alpha - P_2 \cdot \sin\alpha \Rightarrow \\ (M_1 + M_2) \cdot a &= P_1 \cdot (\sin\beta - \mu_1 \cdot \cos\beta) - P_2 \cdot (\mu_2 \cdot \cos\alpha + \sin\alpha) \Rightarrow a = \frac{P_1 \cdot (\sin\beta - \mu_1 \cdot \cos\beta) - P_2 \cdot (\mu_2 \cdot \cos\alpha + \sin\alpha)}{M_1 + M_2} = \\ \frac{3 \cdot 9,8 \cdot (\sin 45^\circ - 0,4 \cdot \cos 45^\circ) - 1 \cdot 9,8 \cdot (0,2 \cdot \cos 60^\circ + \sin 60^\circ)}{3 + 1} &= 0,75 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Poiché l'accelerazione è positiva, l'ipotesi fatta è giusta, cioè M_1 cade verso il basso e M_2 si muove verso l'alto. Se a fosse stata negativa, il problema sarebbe stato risolto nello stesso modo, ma avremmo concluso che M_1 si muove verso l'alto e M_2 verso il basso.

Nota l'accelerazione possiamo calcolare dalla prima equazione del sistema la tensione della fune:

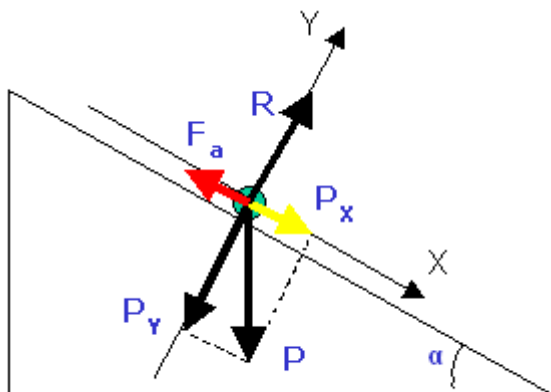
$$\begin{aligned} T = P_{1x} - F_{a1} - M_1 \cdot a &= M_1 g \cdot \sin\beta - \mu_1 \cdot M_1 g \cdot \cos\beta - M_1 \cdot a = M_1 g \cdot (\sin\beta - \mu_1 \cdot \cos\beta) - M_1 \cdot a = \\ 3 \cdot 9,8 \cdot (\sin 45^\circ - 0,4 \cdot \cos 45^\circ) - 3 \cdot 0,75 &= 10,22 \text{ N} \end{aligned}$$

PROBLEMA

Un corpo di massa $M=1\text{kg}$ sia poggiato su un piano inclinato con coefficiente di attrito statico $\mu_s=0,5$ e coefficiente di attrito dinamico $\mu_D=0,3$. Si supponga di sollevare lentamente il piano variando l'angolo α . Calcolare:

- per quale valore di α il corpo comincia a scivolare
- con quale accelerazione il corpo si muove in corrispondenza dell'angolo α

SOLUZIONE



- Un punto materiale è in equilibrio se la somma vettoriale di tutte le forze che agiscono su di esso è nulla:

CONDIZIONE DI EQUILIBRIO

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = \vec{0} \\ \sum \vec{F}_y = \vec{0} \end{cases}$$

Utilizziamo la prima equazione per calcolare l'angolo in corrispondenza del quale il corpo comincia a scivolare:

$$P_x = F_a \Rightarrow P \cdot \sin \alpha = \mu_s \cdot P \cdot \cos \alpha \Rightarrow \mu_s = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 0,5 \Rightarrow \alpha = 27^\circ$$

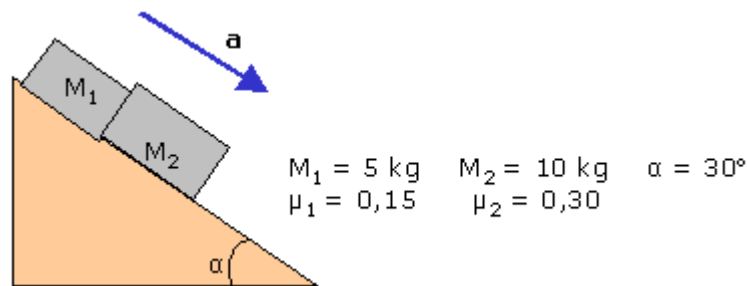
- Quando il corpo comincia a scivolare, la forza d'attrito diminuisce perché il coefficiente d'attrito diventa quello dinamico, per cui, applicando il 2° principio della dinamica, l'accelerazione si calcola come:

$$P_x - F_{aD} = M \cdot a \Rightarrow a = \frac{P_x - F_{aD}}{M} = \frac{P \cdot \sin \alpha - \mu_D \cdot P \cdot \cos \alpha}{M} = \frac{Mg \cdot (\sin \alpha - \mu_D \cdot \cos \alpha)}{M} =$$

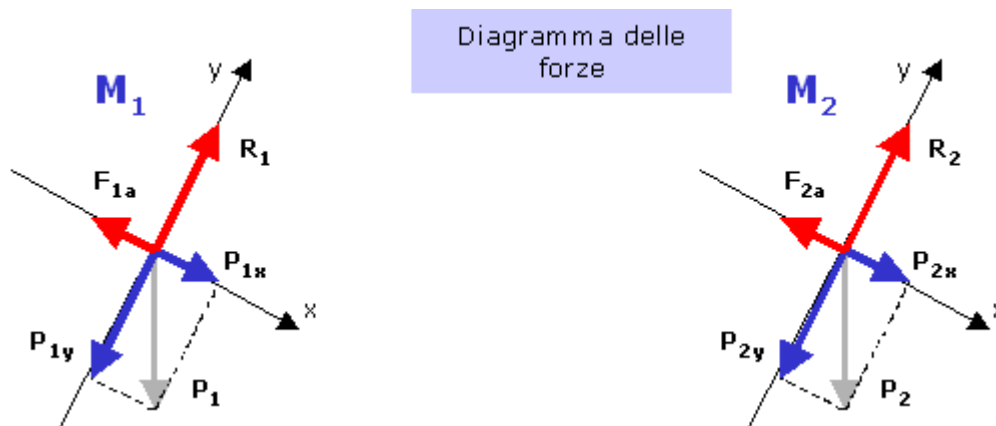
$$9,8 \cdot (\sin 27^\circ - 0,3 \cdot \cos 27^\circ) = 1,8 \text{ m/s}^2$$

PROBLEMA

Calcolare l'accelerazione del sistema di masse rappresentato in figura:



SOLUZIONE



Applichiamo il secondo principio della dinamica alle singole masse:

$$M_1 \Rightarrow \sum \vec{F} = M_1 \cdot \vec{a} = \begin{cases} \sum \vec{F}_x = M_1 \cdot \vec{a} \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{1x} - F_{1a} = M_1 \cdot a \\ R_1 - P_{1y} = 0 \end{cases}$$

$$M_2 \Rightarrow \sum \vec{F} = M_2 \cdot \vec{a} = \begin{cases} \sum \vec{F}_x = M_2 \cdot \vec{a} \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{2x} - F_{2a} = M_2 \cdot a \\ R_2 - P_{2y} = 0 \end{cases}$$

Poiché il corpo M_2 ha una massa ed un coefficiente d'attrito maggiori rispetto al corpo M_1 , la forza d'attrito che agisce su M_2 è maggiore rispetto a quella che agisce su M_1 , per cui M_2 ,

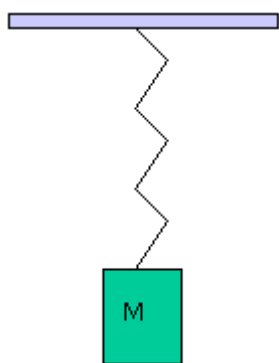
frenando il moto di M_1 , fa sì che il blocco di masse si muova insieme lungo il piano inclinato. Pertanto, sommando membro a membro le prime equazioni dei due sistemi otteniamo un'unica equazione nell'incognita "a":

$$P_{1x} - F_{a1} + P_{2x} - F_{a2} = (M_1 + M_2) \cdot a \Rightarrow a = \frac{P_{1x} + P_{2x} - F_{a1} - F_{a2}}{M_1 + M_2} = \frac{P_1 \cdot \sin \alpha + P_2 \cdot \sin \alpha - \mu_1 \cdot P_{1y} - \mu_2 \cdot P_{2y}}{M_1 + M_2} =$$

$$\frac{P_1 \cdot \sin \alpha + P_2 \cdot \sin \alpha - \mu_1 \cdot P_1 \cdot \cos \alpha - \mu_2 \cdot P_2 \cdot \cos \alpha}{M_1 + M_2} = \frac{P_1 \cdot (\sin \alpha - \mu_1 \cdot \cos \alpha) + P_2 \cdot (\sin \alpha - \mu_2 \cdot \cos \alpha)}{M_1 + M_2} =$$

$$\frac{5 \cdot 9,8 \cdot (\sin 30^\circ - 0,15 \cdot \cos 30^\circ) + 10 \cdot 9,8 \cdot (\sin 30^\circ - 0,30 \cdot \cos 30^\circ)}{5 + 10} = 2,78 \text{ m/s}^2$$

PROBLEMA



Calcolare il periodo di oscillazione e la pulsazione di una molla che viene allungata di 0,4 m da una massa di 1 kg.

SOLUZIONE

Le forze in gioco sono la forza elastica e la forza peso, per cui applicando il 2° principio della dinamica calcoliamo la costante elastica della molla che serve per calcolare il

periodo di oscillazione:

$$F_e = M \cdot a \Rightarrow -k \cdot x = M \cdot g \Rightarrow k = \frac{M \cdot g}{x} = \frac{1 \cdot 9,8}{0,4} = 24,5 \text{ N/m}$$

Pertanto:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{24,5}} = 1,3 \text{ s} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1,3} = 5 \text{ rad/s}$$



PROBLEMA

Una strada presenta una curva di raggio $R=100$ m. Supponendo che il coefficiente di attrito fra le ruote di un'auto e la strada sia $\mu=0,5$, calcolare la massima velocità affinché la curva sia percorsa senza sbandare.

SOLUZIONE

La forza che permette all'auto di percorrere la curva senza sbandare è la forza centripeta, che in questo caso coincide con la forza d'attrito, per cui il 2° principio della dinamica diventa:

$$F_c = M \cdot \frac{V^2}{R} \Rightarrow \mu \cdot Mg = M \cdot \frac{V^2}{R} \Rightarrow V = \sqrt{\mu R g} = \sqrt{0,5 \cdot 100 \cdot 9,8} = 22 \text{ m/s} = 80 \text{ km/h}$$

PROBLEMA

Un corpo di massa 1 kg si muove di moto armonico con ampiezza 10 cm. Sapendo che il valore massimo dell'accelerazione è $3,94 \text{ m/s}^2$, calcolare la frequenza del moto e la forza agli estremi di oscillazione.

SOLUZIONE

Per calcolare la frequenza del moto armonico ci serve il valore della pulsazione che si calcola attraverso la formula dell'accelerazione del moto armonico:

$$a = -\omega^2 x \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a}{x}} = \sqrt{\frac{3,94}{0,1}} = 6,3 \text{ rad/s}$$

per cui:

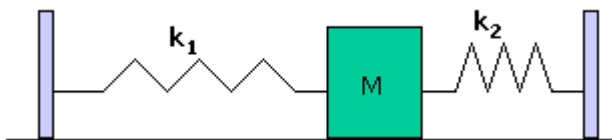
$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 1 \text{ Hz}$$

Dal 2° principio della dinamica calcoliamo la forza agli estremi di oscillazione:

$$F = M \cdot a = 1 \cdot 3,94 = 3,94 \text{ N}$$

PROBLEMA

Un corpo di massa $M = 4 \text{ kg}$ oscilla sotto l'azione di due molle aventi costanti elastiche $K_1 = 200 \text{ N/m}$ e $K_2 = 150 \text{ N/m}$. Calcolare il periodo di oscillazione del sistema.

SOLUZIONE

Sia durante la fase di compressione che di allungamento di entrambe le molle, la massa M sarà sottoposta sempre a due forze elastiche concordi, per cui il 2° principio della dinamica diventa:

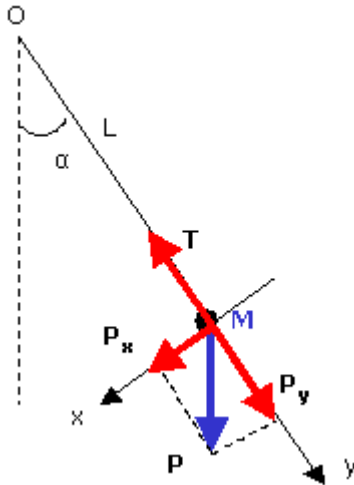
$$F_{1e} + F_{2e} = M \cdot a \Rightarrow -k_1 x - k_2 x = M \cdot a \Rightarrow -(k_1 + k_2) \cdot x = M \cdot a$$

Sapendo che $a = \omega^2 \cdot x$ abbiamo che:

$$-(k_1 + k_2) \cdot x = -M\omega^2 x \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{M}}$$

per cui l'oscillazione del sistema è:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow 2\pi \sqrt{\frac{M}{k_1 + k_2}} = \sqrt{\frac{4}{200 + 150}} = 0,67 \text{ s}$$

PROBLEMA

Un pendolo semplice di lunghezza $L = 1 \text{ m}$ porta all'estremità una pallina di massa $M = 100 \text{ g}$. Quando il filo forma con la verticale un angolo di 45° la pallina ha un'accelerazione centripeta di 4 m/s^2 . Calcolare la velocità della pallina e la tensione del filo nella posizione considerata.

SOLUZIONE

Dalla formula dell'accelerazione centripeta calcoliamo la velocità della pallina come formula inversa:

$$a_c = \frac{V^2}{L} \Rightarrow V = \sqrt{a_c \cdot L} = \sqrt{4 \cdot 1} = 2 \text{ m/s}$$

Dal 2° principio della dinamica calcoliamo la tensione della fune:

$$P_y - T = -M \cdot a_c \Rightarrow T = P_y + M \cdot a_c = Mg \cdot \cos \alpha + M \cdot a_c = M \cdot (g \cdot \cos \alpha + a_c) = 0,1 \cdot (9,8 \cdot \cos 45^\circ + 4) = 1,09 \text{ N}$$