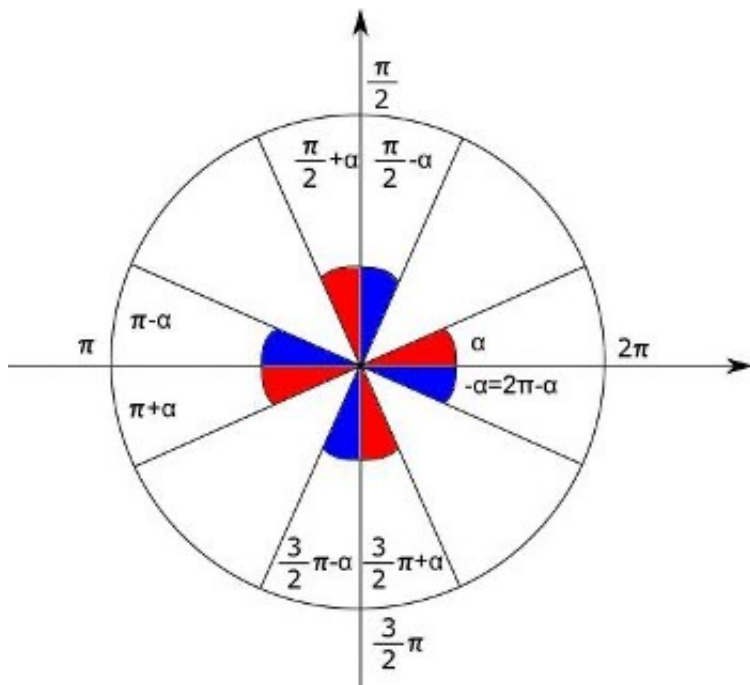




Matematica

GONIOMETRIA

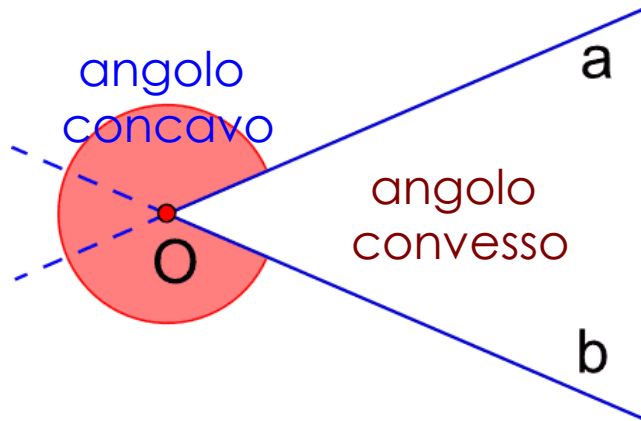
Le funzioni goniometriche

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica

ANGOLI E LORO MISURA

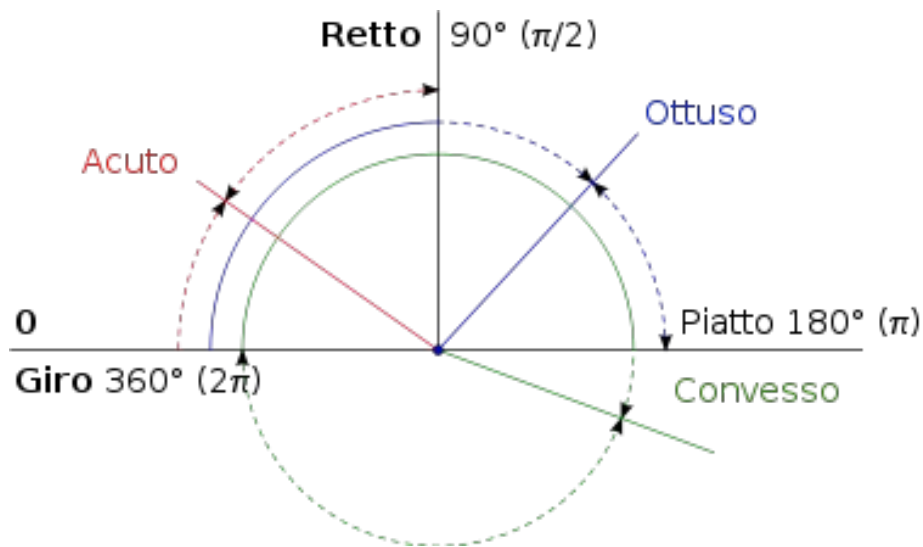
La **goniometria** si occupa della misura degli angoli e delle relative funzioni.



definizione – *Un angolo è la parte di piano individuata da due semirette a e b (chiamate lati) che hanno origine comune O (chiamata vertice).*

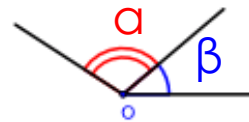
angolo convesso: quando non contiene il prolungamento dei suoi lati

angolo concavo: quando contiene il prolungamento dei suoi lati.

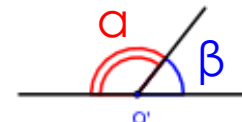


Le unità di misura degli angoli sono: il **grado sessagesimale**; il **radiante**

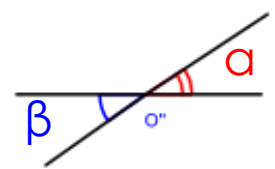
Angoli consecutivi



Angoli adiacenti

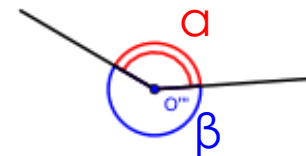


Angoli opposti



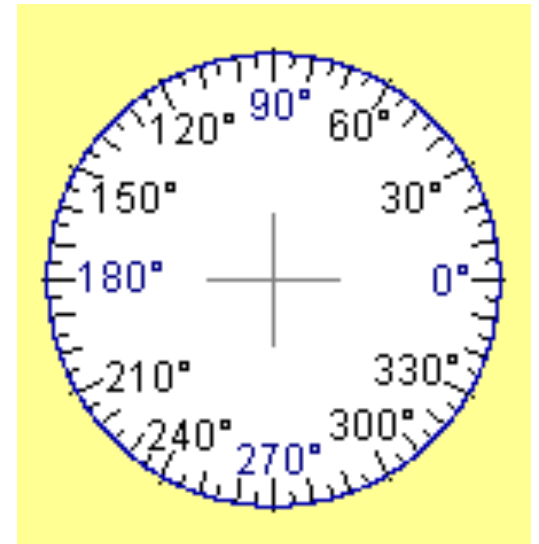
Gli angoli si indicano con le lettere greche: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Angoli esplementari



definizione – *Nel sistema sessagesimale, l'unità di misura degli angoli è il **grado sessagesimale**, definito come la 360° parte dell'angolo giro.*

$$1^\circ = 1/360 \text{ dell'angolo giro}$$
$$1^\circ = 60' \quad 1' = 60''$$



Il sistema di misura sessagesimale, essendo non decimale, presenta procedimenti di calcolo più complicati.

Esprimere in forma decimale il seguente angolo espresso in forma sessagesimale:

$$25^{\circ}32'40''$$

$$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} \xrightarrow{\text{allora}} 32' = \left(\frac{32}{60}\right)^{\circ} \qquad 1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ} \xrightarrow{\text{allora}} 40'' = \left(\frac{40}{3600}\right)^{\circ}$$

$$25^{\circ}32'40'' = 25^{\circ} + \left(\frac{32}{60}\right)^{\circ} + \left(\frac{40}{3600}\right)^{\circ} = 25 + 0,53^{\circ} + 0,01^{\circ} \cong 25,54^{\circ}$$

Esprimere in forma sessagesimale il seguente angolo espresso in forma decimale:

$$28,07^{\circ} \xrightarrow[\text{scrivere come}]{\text{che possiamo}} 28^{\circ} + 0,07^{\circ}$$

$$1^{\circ} = 60' \xrightarrow{\text{allora}} 0,07^{\circ} = (0,07 \cdot 60)' = 4,2'$$

$$1' = 60'' \xrightarrow{\text{poichè}} 4,2' = 4' + 0,2' \xrightarrow{\text{allora}} 0,2' = (0,2 \cdot 60)'' = 12''$$

$$28,07 = 28^{\circ}4'12''$$

Eseguire la seguente somma tra due angoli sessagesimali:

$$30^{\circ}20'54'' + 2^{\circ}45'24''$$

Sommiamo prima i secondi: $54'' + 24'' = 78''$

Trasformiamo il risultato in primi e secondi: $78'' = 1' \mathbf{18''}$

Sommiamo i primi: $20' + 45' + 1' = 66'$

Trasformiamo il risultato in gradi e primi: $66' = 1^{\circ} \mathbf{6'}$

Sommiamo i gradi: $30^{\circ} + 2^{\circ} + 1^{\circ} = \mathbf{33^{\circ}}$

$$\begin{array}{r} \text{In definitiva:} \\ \mathbf{33^{\circ}6'18''} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30^{\circ}20'54'' + \\ 2^{\circ}45'24'' = \\ \hline 33^{\circ}6'18'' \end{array}$$

Sottrazione tra due angoli sessagesimali: $90^\circ - 32^\circ 46' 22''$

$$1^\circ = 60'; 1' = 60'' \xrightarrow{\text{allora}} 90^\circ = 89^\circ 59' 60''$$

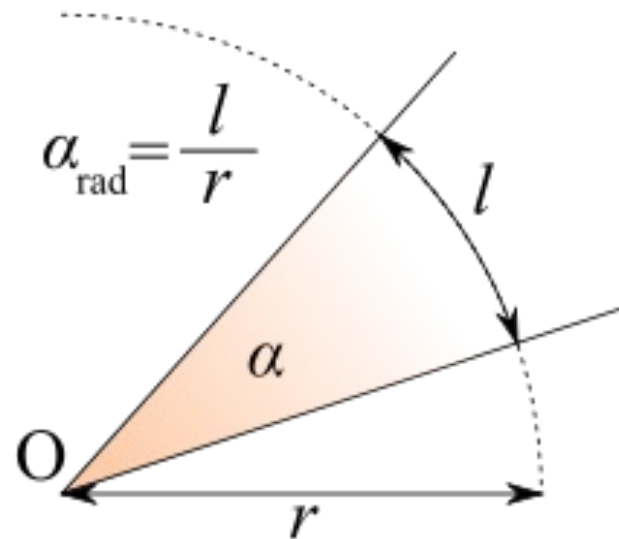
Ora è possibile eseguire la sottrazione:

$$\begin{array}{r} 89^\circ 59' 60'' - \\ 32^\circ 46' 22'' = \\ \hline 57^\circ 13' 38'' \end{array}$$

Per semplificare i calcoli (usare il sistema decimale) si usa il *radiante* come unità di misura degli angoli.

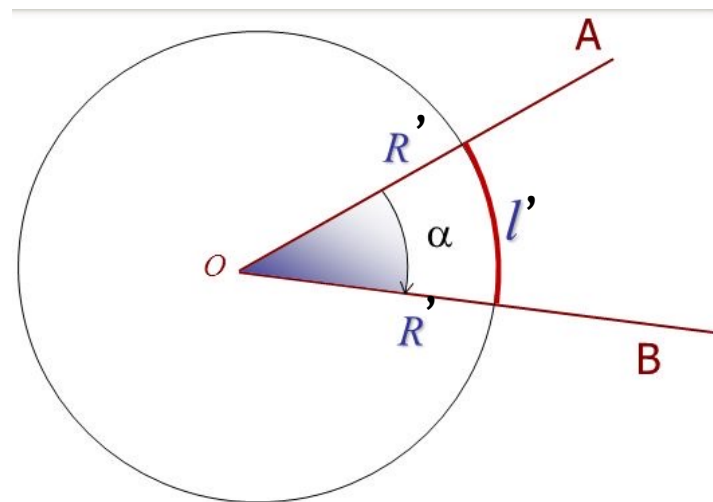
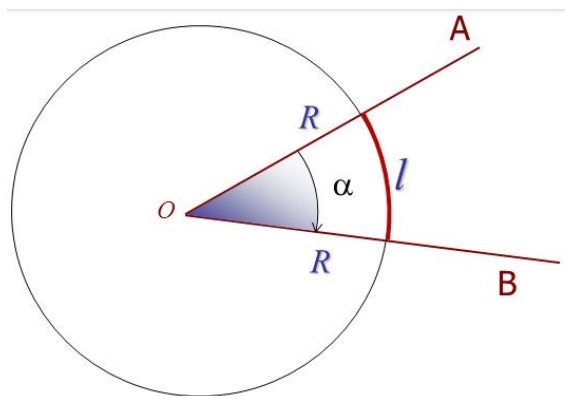
definizione – data una circonferenza, si chiama **radiante** l'angolo al centro che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio:

$$\alpha_{rad} = \frac{l}{r} \xrightarrow[\text{allora}]{\text{se } l=r} \alpha_{rad} = \frac{r}{r} = 1 \text{ radiante}$$



Vediamo come si arriva a tale definizione.

Consideriamo due circonferenze di raggi R e R' e i due archi l e l' sottesi da due angoli della stessa ampiezza α .



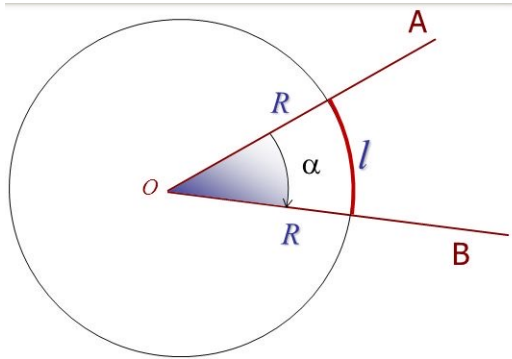
Dalla proporzionalità fra archi e angoli al centro si ricava:

$$l : \alpha^\circ = 2\pi R : 360^\circ \quad l' : \alpha^\circ = 2\pi R' : 360^\circ \xrightarrow[\text{membro a membro}]{\text{dividendo}} l : l' = R : R' \xrightarrow{\text{ossia}} \frac{l}{R} = \frac{l'}{R'}$$

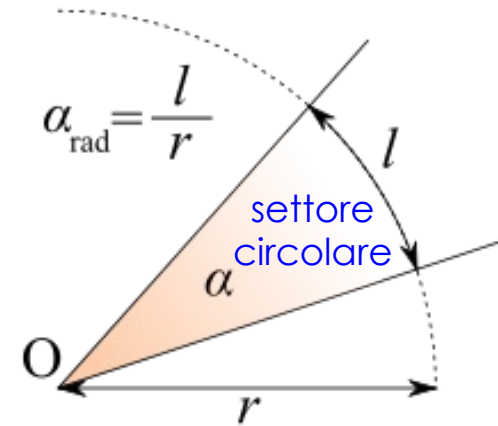
Cioè gli archi sono proporzionali ai rispettivi raggi ma il rapporto l/R non varia al variare della circonferenza, e dipende solo dall'angolo al centro α .

Il rapporto l/R viene assunto come misura, in radianti, dell'angolo α .

$$\alpha_{rad} = \frac{l}{R}$$



lunghezza di un arco
 $l = \alpha R$



area settore circolare

$$A = \frac{1}{2}lr$$

Formule gradi in radianti e viceversa

$$\alpha^{\circ} : \alpha_{rad} = 360^{\circ} : 2\pi \xrightarrow{\text{da cui}} \alpha^{\circ} = \alpha_{rad} \frac{180^{\circ}}{\pi} \quad \alpha_{rad} = \alpha^{\circ} \frac{\pi}{180^{\circ}}$$

Tabella conversione

angolo α ($^{\circ}$)	angolo α (rad)
0°	0
30°	$\pi/6$
45°	$\pi/4$
60°	$\pi/3$
90°	$\pi/2$
180°	π
270°	$3\pi/2$
360°	2π

Trasformare in radianti i seguenti angoli sessagesimali:
 15° ; 102° ; 210° ; 300°

$$\alpha_{rad} = \alpha^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \alpha_{rad} = 15^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{12} = 0,26 \quad \alpha_{rad} = 102^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 1,78$$

$$\alpha_{rad} = \alpha^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow \alpha_{rad} = 210^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{7}{6}\pi = 3,66 \quad \alpha_{rad} = 315^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 5,50$$

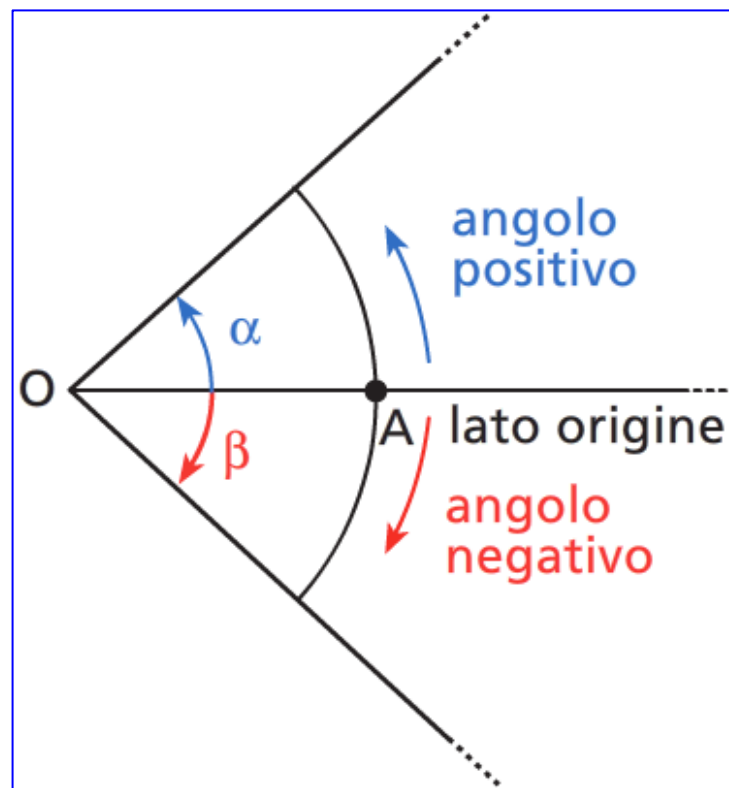
Trasformare in gradi i seguenti angoli espressi in radianti:
 $4\pi/5$; $5\pi/3$; $3,2$; $0,87$

$$\alpha^\circ = \alpha_{rad} \frac{180^\circ}{\pi} \Rightarrow \alpha^\circ = \frac{4}{5}\pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 144^\circ \quad \alpha^\circ = \frac{5}{3}\pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 300^\circ$$

$$\alpha^\circ = \alpha_{rad} \frac{180^\circ}{\pi} \Rightarrow \alpha^\circ = 3,2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 183^\circ \quad \alpha^\circ = 0,87 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \cong 50^\circ$$

La definizione di angolo che ci serve per i nostri scopi è quella di *angolo orientato*.

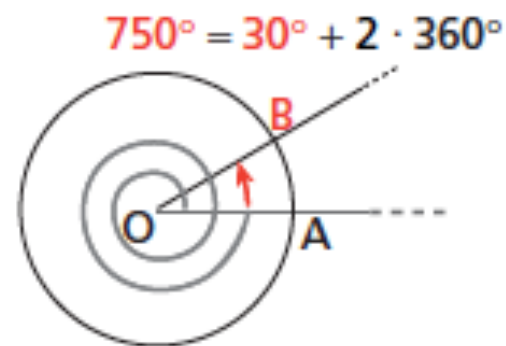
definizione – Un angolo si dice *orientato* quando è stato scelto uno dei due lati come lato origine e un senso di rotazione. Un angolo orientato si dice *positivo* quando è descritto mediante una rotazione in senso antiorario; si dice *negativo* quando la rotazione è in senso orario.

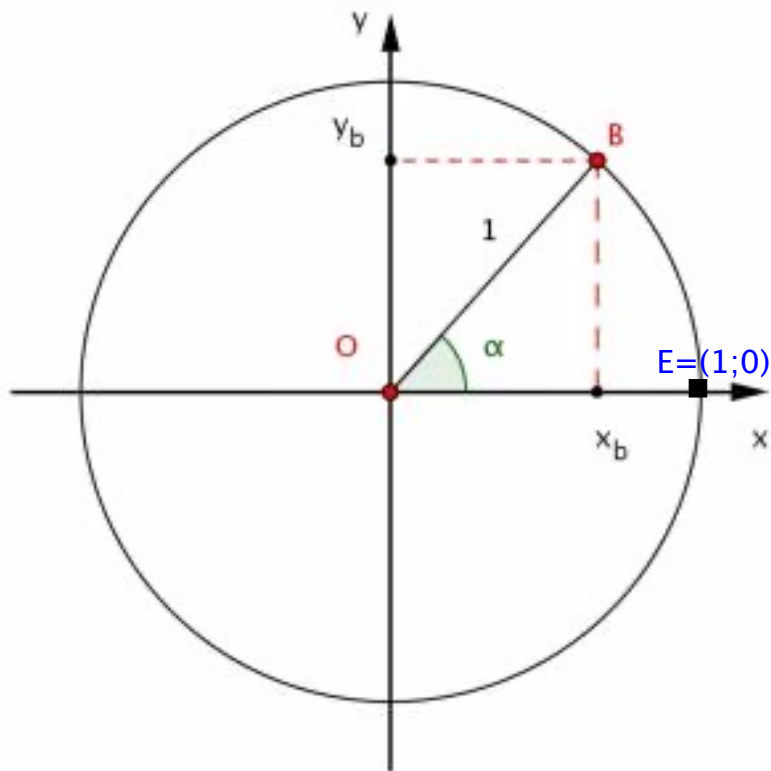


esempio

- $\alpha = 40^\circ$ è un angolo positivo e va disegnato in senso antiorario
- $\beta = -40^\circ$ è un angolo negativo e va disegnato in senso orario

esempio





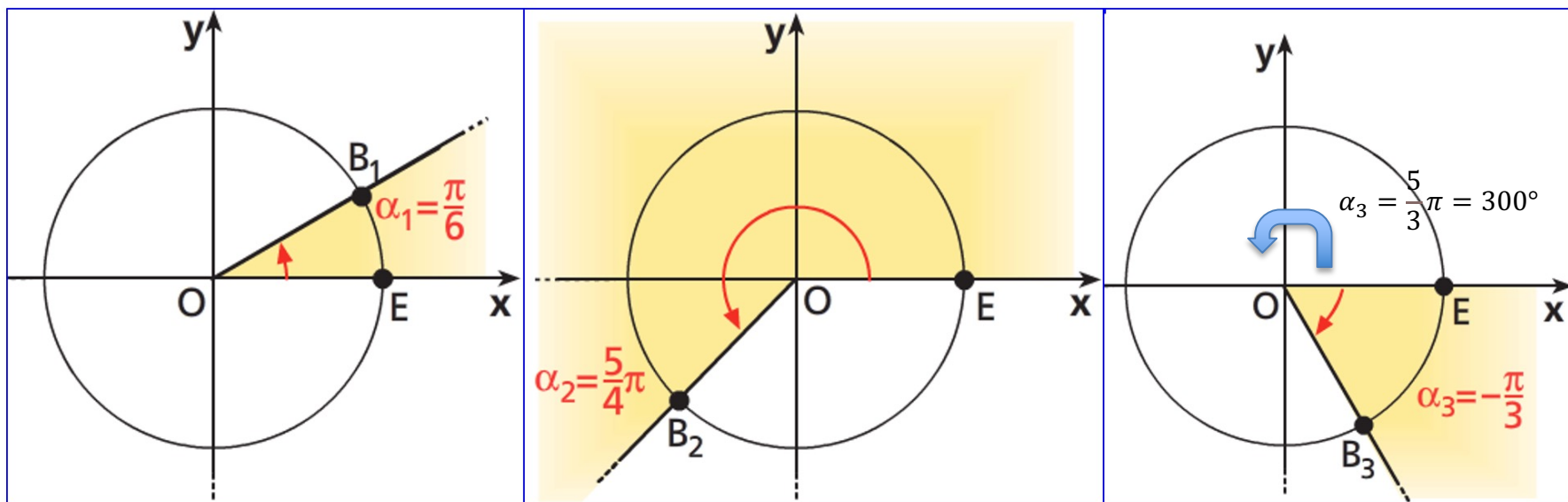
definizione – Per circonferenza goniometrica intendiamo una circonferenza di equazione $x^2+y^2=1$ (ossia di raggio 1) e con centro nell'origine degli assi cartesiani associati ad essa.

Il punto $E=(1;0)$ si dice **origine degli archi**.

Utilizzando la circonferenza goniometrica si possono rappresentare gli angoli orientati partendo da A.

Rappresentare i seguenti angoli:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{6} \quad \alpha_2 = \frac{5}{6}\pi \quad \alpha_3 = -\frac{\pi}{3}$$



Se volessimo rappresentare l'angolo α_3 in senso antiorario (positivo), quale sarebbe il suo valore?

$$\alpha_3 = -\frac{\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi \quad \text{oppure} \quad \alpha_3 = -60^\circ = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$$

Funzioni goniometriche

Le funzioni seno e coseno

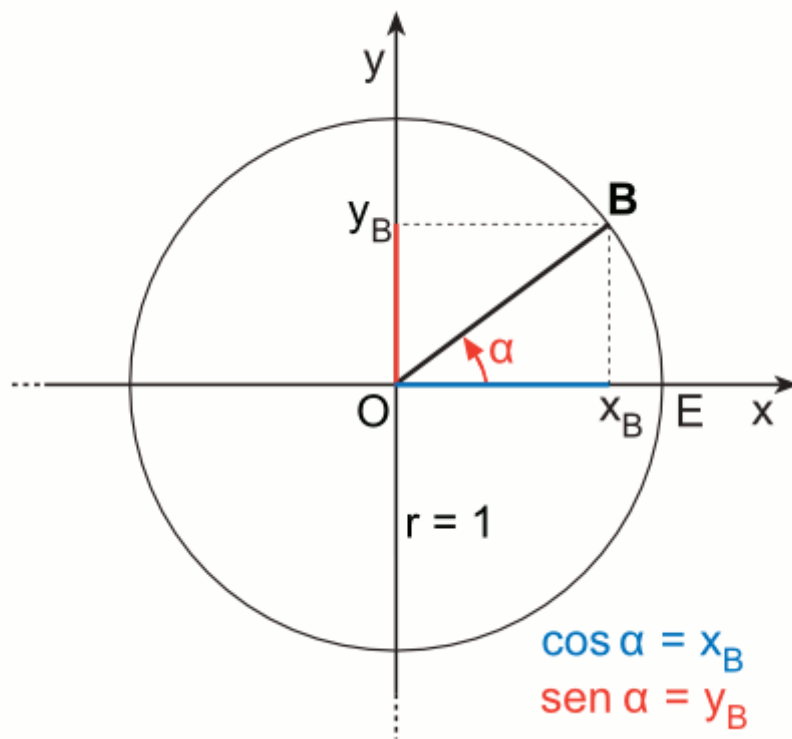
Sia data la circonferenza goniometrica e un angolo orientato α e sia B il punto della circonferenza associato ad α .

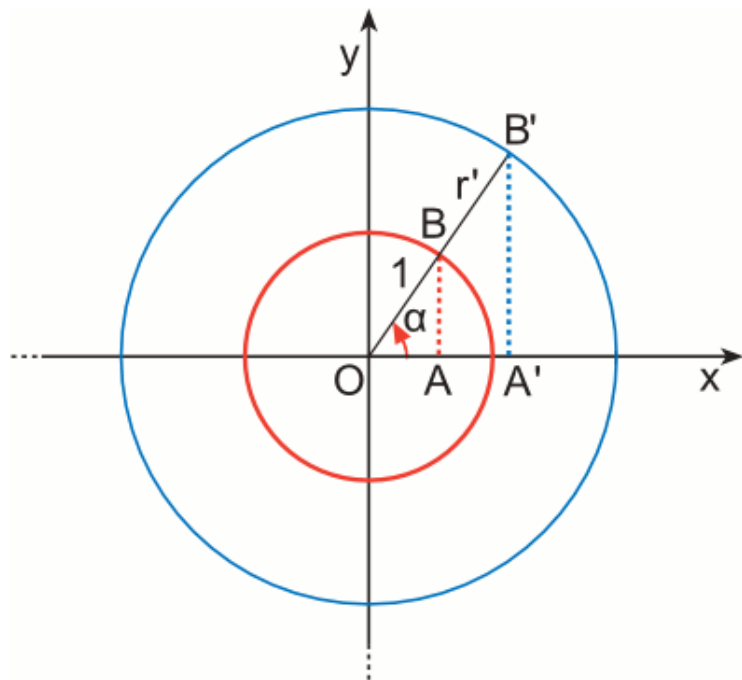
DEFINIZIONE

Definiamo coseno (cosa) e seno (sena) dell'angolo α , le funzioni che ad α associano rispettivamente il valore dell'ascissa e dell'ordinata del punto B:

$$\cos \alpha = x_B \quad \text{sen} \alpha = y_B$$

$$B = (\cos \alpha; \text{sen} \alpha)$$





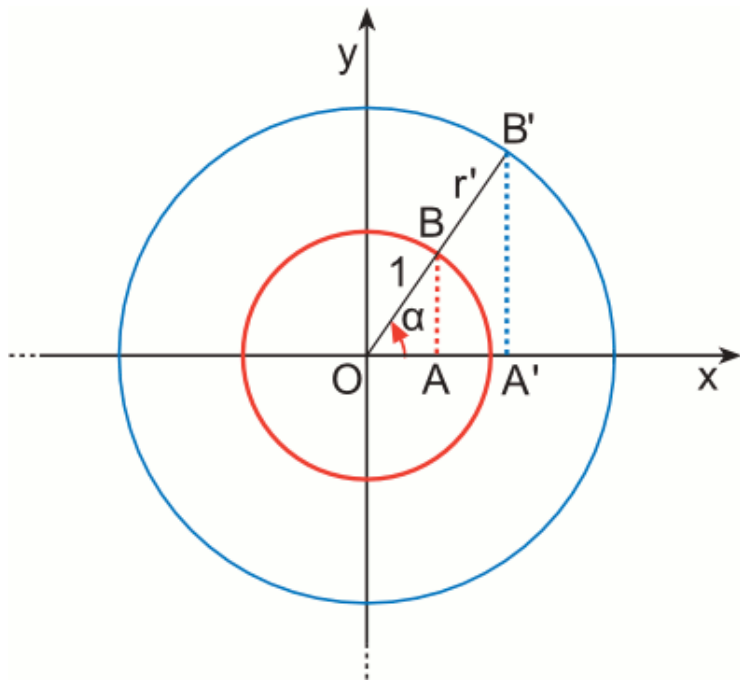
Sia $B'=(x';y')$, dalla similitudine dei triangoli OBA e $OB'A'$, si deduce:

$$\frac{x'}{r'} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \cos \alpha$$

$$\frac{y'}{r'} = \frac{\overline{B'A'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{OB}} = \text{sen} \alpha$$

Cosa significa?

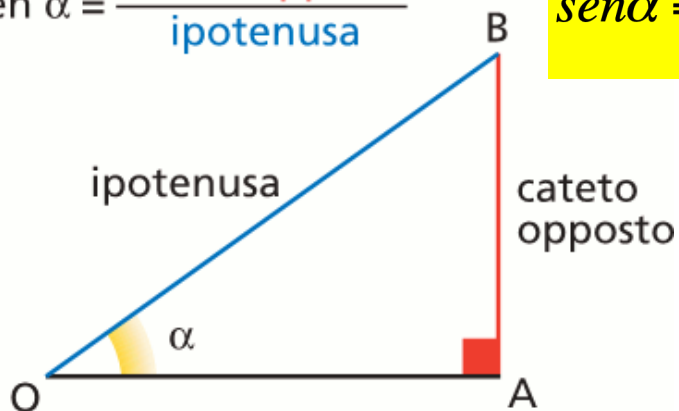
Significa che i due rapporti $(x'/r'$ e $y'/r')$, e quindi **sen** e **cosa**, non dipendono dalla particolare circonferenza considerata, ma solo dall'angolo α .



Il triangolo $OA'B'$ è un triangolo rettangolo. Quindi possiamo scrivere le seguenti relazioni, che si applicano a tutti i triangoli rettangoli:

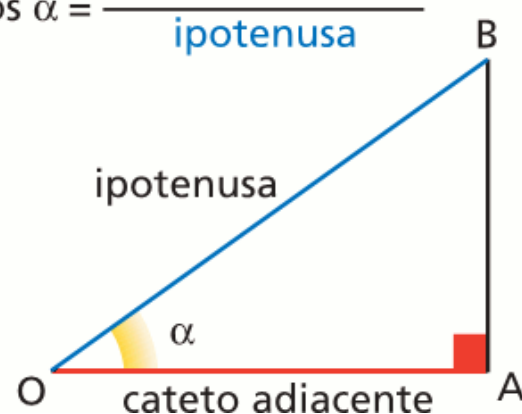
$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{AB}{OB}$$

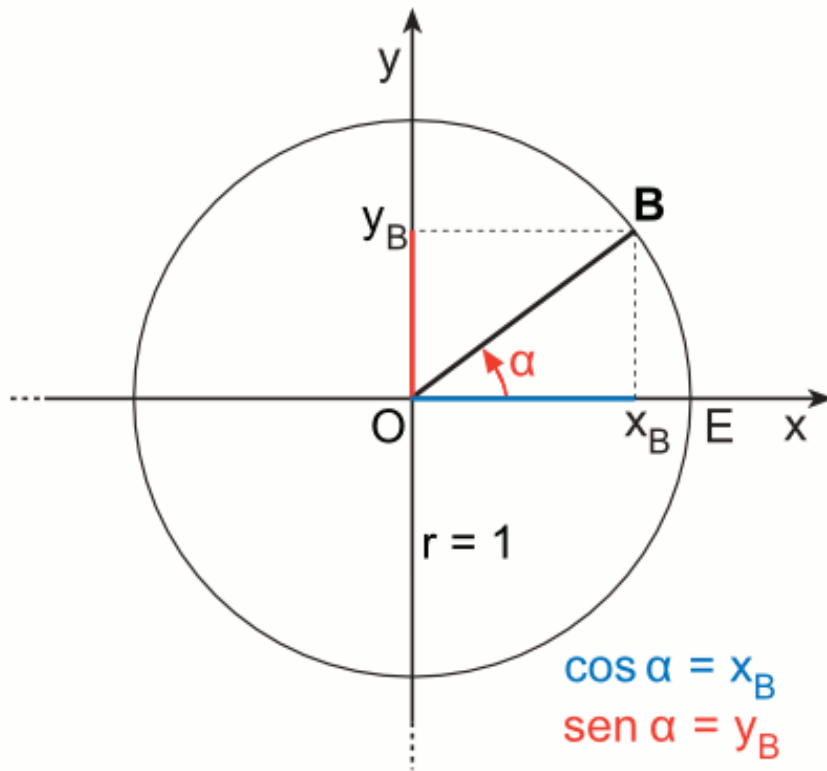


$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{OA}{OB}$$

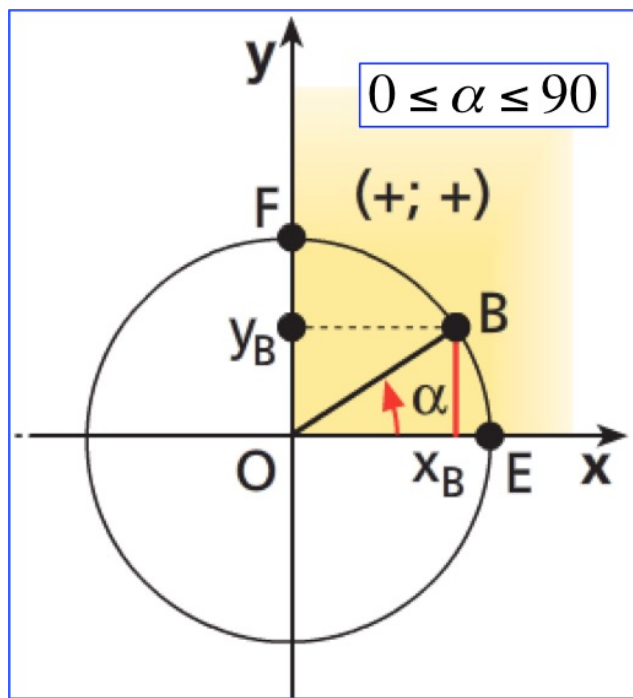


Come variano le funzioni
sena e cosa?

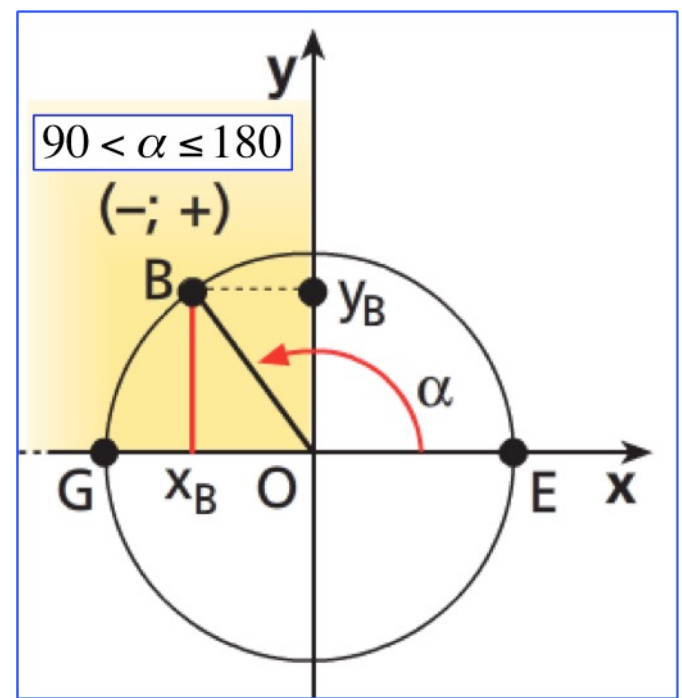


Supponiamo che il punto B percorra l'intera circonferenza in senso antiorario.

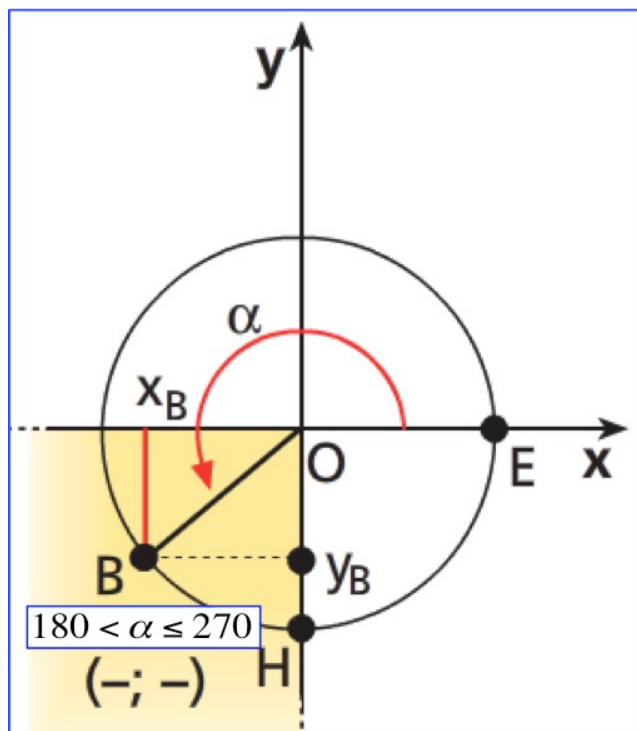
A ogni posizione di B (diverso valore dell'angolo α) corrispondono diversi valori delle sue coordinate $(x_B; y_B)$ e quindi diversi valori di $(\text{cosa}; \text{sena})$:



a. Finché B percorre il primo quarto di circonferenza, la sua ascissa x_B e la sua ordinata y_B sono positive. Man mano che B si avvicina al punto F , l'ascissa diminuisce e l'ordinata aumenta. In F , $x_F = 0$, $y_F = 1$.

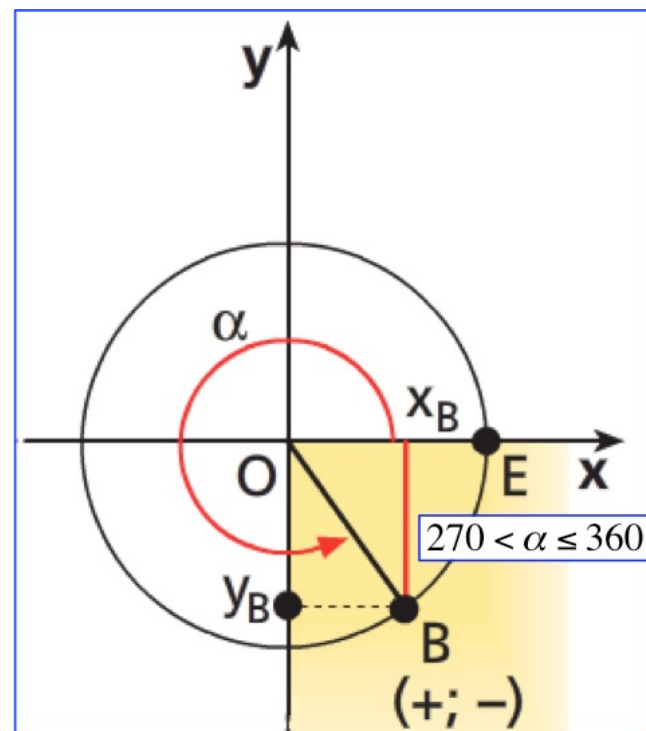


b. Quando B percorre la circonferenza nel secondo quadrante, la sua ordinata è ancora positiva, mentre l'ascissa diventa negativa. Quando B si avvicina a G , sia l'ascissa sia l'ordinata diminuiscono. In G , $x_G = -1$, $y_G = 0$.



c. Se B si trova nel terzo quadrante, la sua ordinata e la sua ascissa sono negative. Man mano che B si avvicina a H , l'ascissa aumenta e l'ordinata diminuisce.

In H , $x_H = 0$, $y_H = -1$.

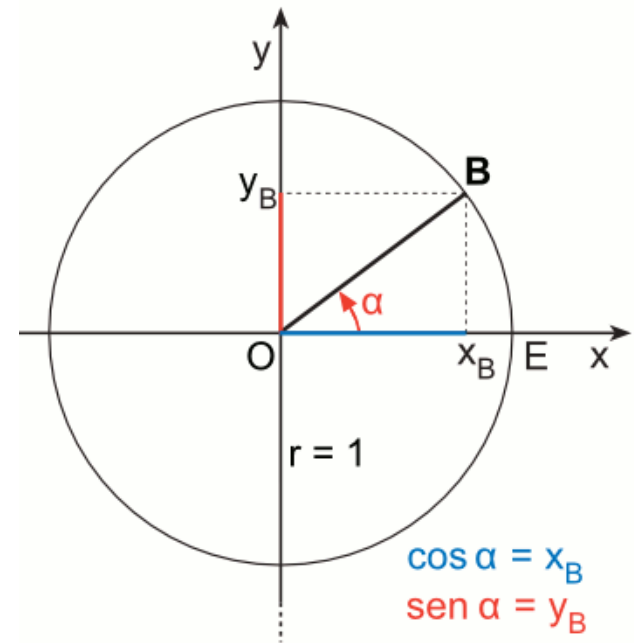


d. Quando B percorre l'ultimo quarto di circonferenza, la sua ordinata è ancora negativa, mentre l'ascissa è positiva. Avvicinandosi a E , sia l'ascissa sia l'ordinata di B aumentano.

In E , $x_E = 1$, $y_E = 0$.

Cosa si osserva?

- sena e cosa sono funzioni che hanno come campo di esistenza tutto $\mathbb{R}$, perché per ogni valore reale dell'angolo α esiste un e un solo punto sulla circonferenza.



$$D = \mathfrak{R} =]-\infty; +\infty[$$

- Qualunque sia la posizione di B sulla circonferenza, la sua ascissa (cosa) e la sua ordinata (sena) assumono sempre valori compresi tra -1 e 1, quindi il codominio è:

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \quad -1 \leq \text{sena} \alpha \leq 1 \Rightarrow C = [-1; 1]$$

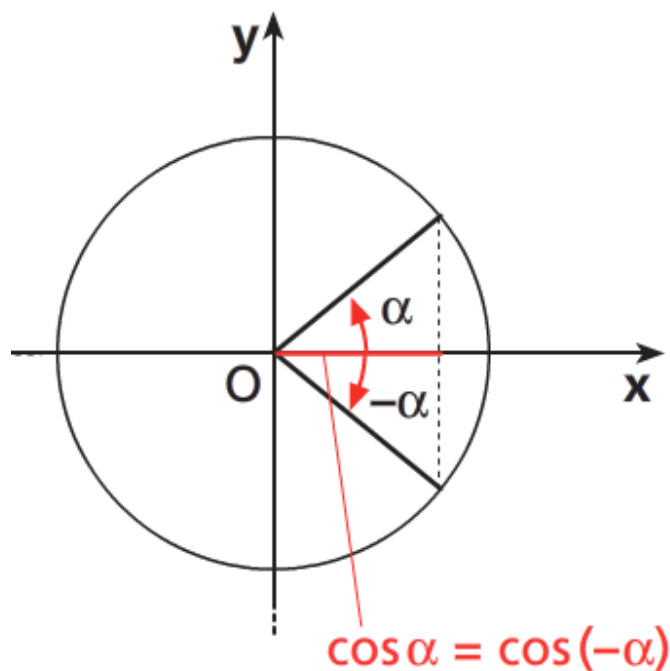
- cosa è una funzione pari e sena è una funzione dispari:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad \text{sena}(-\alpha) = -\text{sena} \alpha$$

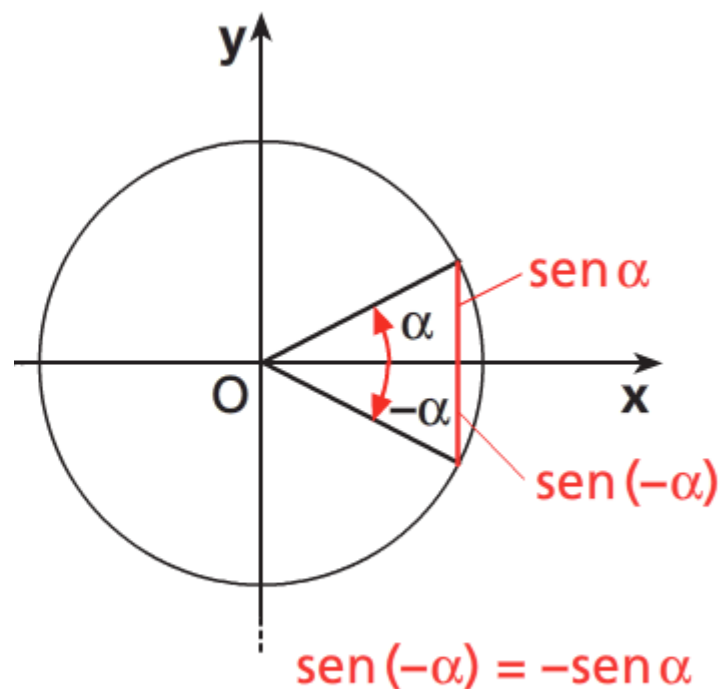
- Qualunque sia la posizione di B sulla circonferenza, la sua ascissa (cosa) e la sua ordinata (sena) assumono sempre valori compresi tra -1 e 1, quindi il codominio è:

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \quad -1 \leq \text{sena} \alpha \leq 1 \Rightarrow C = [-1; 1]$$

- cosa è una funzione pari:

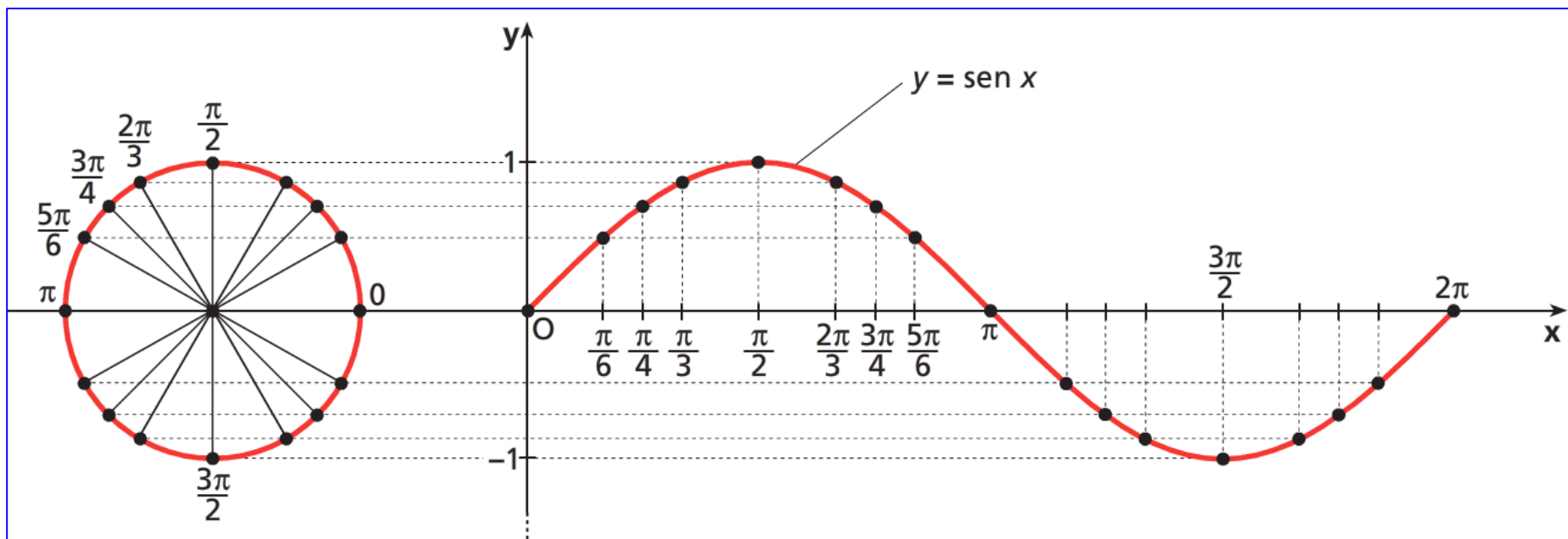


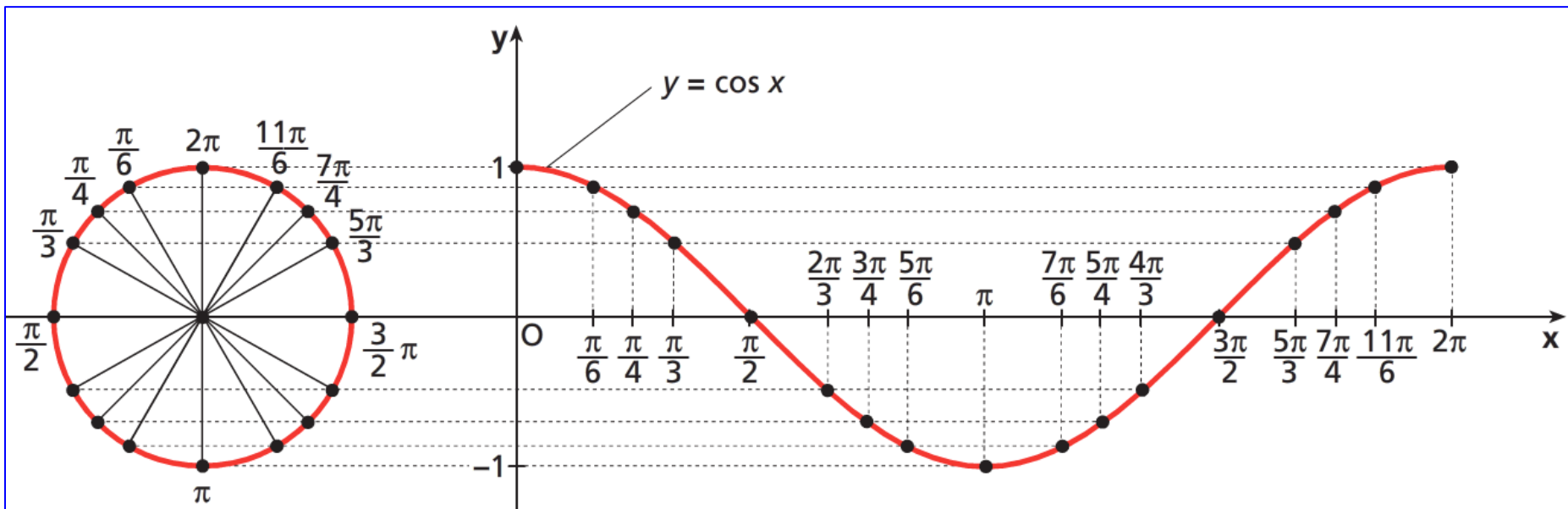
- sena è una funzione dispari:



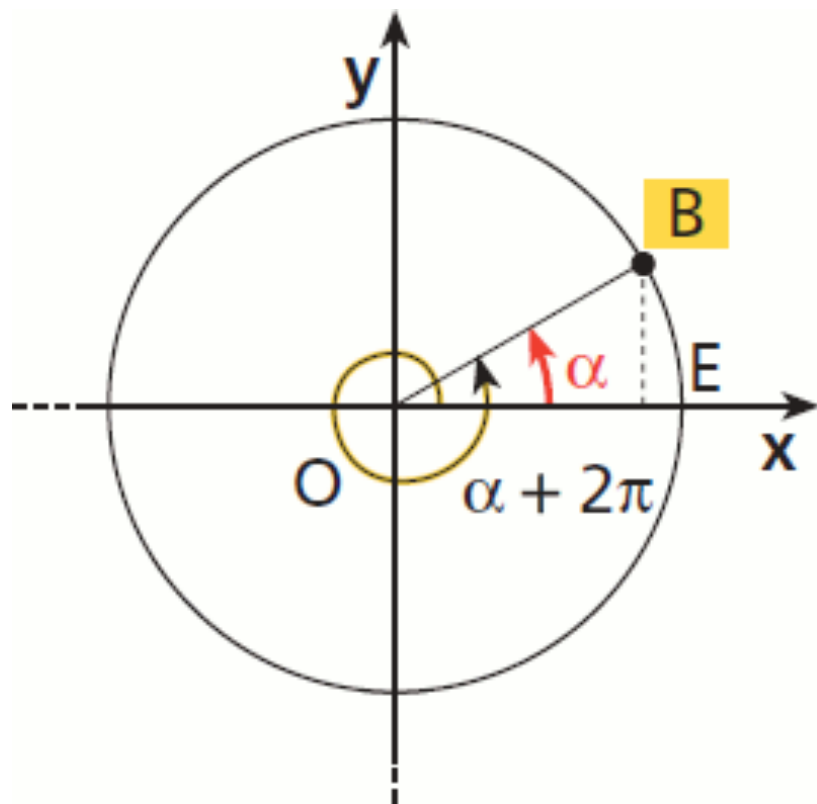
Costruiamo i grafici delle funzioni $y=\text{sen}x$ e $y=\text{cos}x$ nell'intervallo di valori $(0;2\pi)$.

Riportiamo sull'asse x i valori degli angoli e sull'asse y le coordinate dei punti della circonferenza goniometrica, ossia $\text{sen}x$ e $\text{cos}x$.





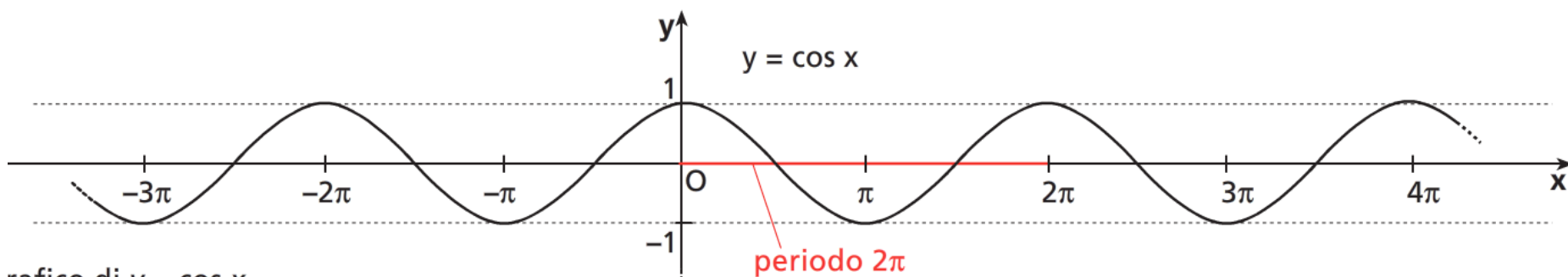
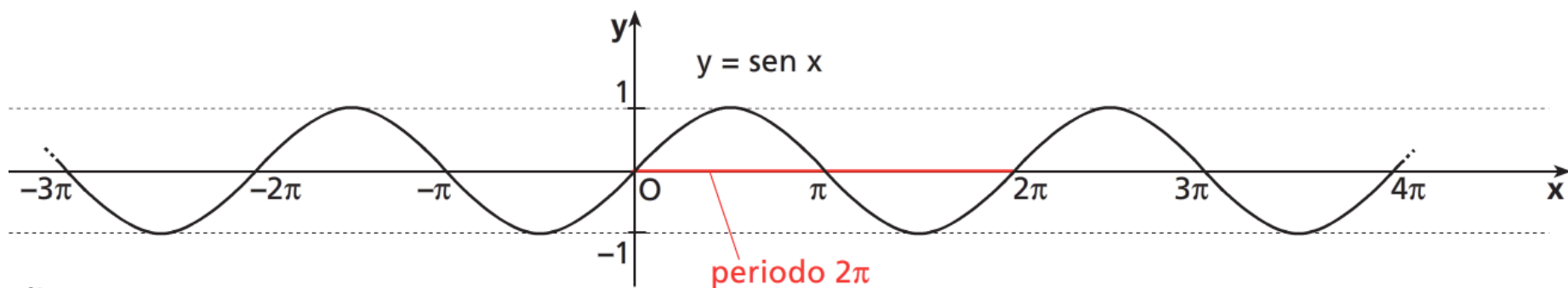
Dopo un giro completo ($2\pi=360^\circ$), le coordinate $(\cos x; \sin x)$ dei punti sulla circonferenza, assumono gli stessi valori.
Cosa significa?



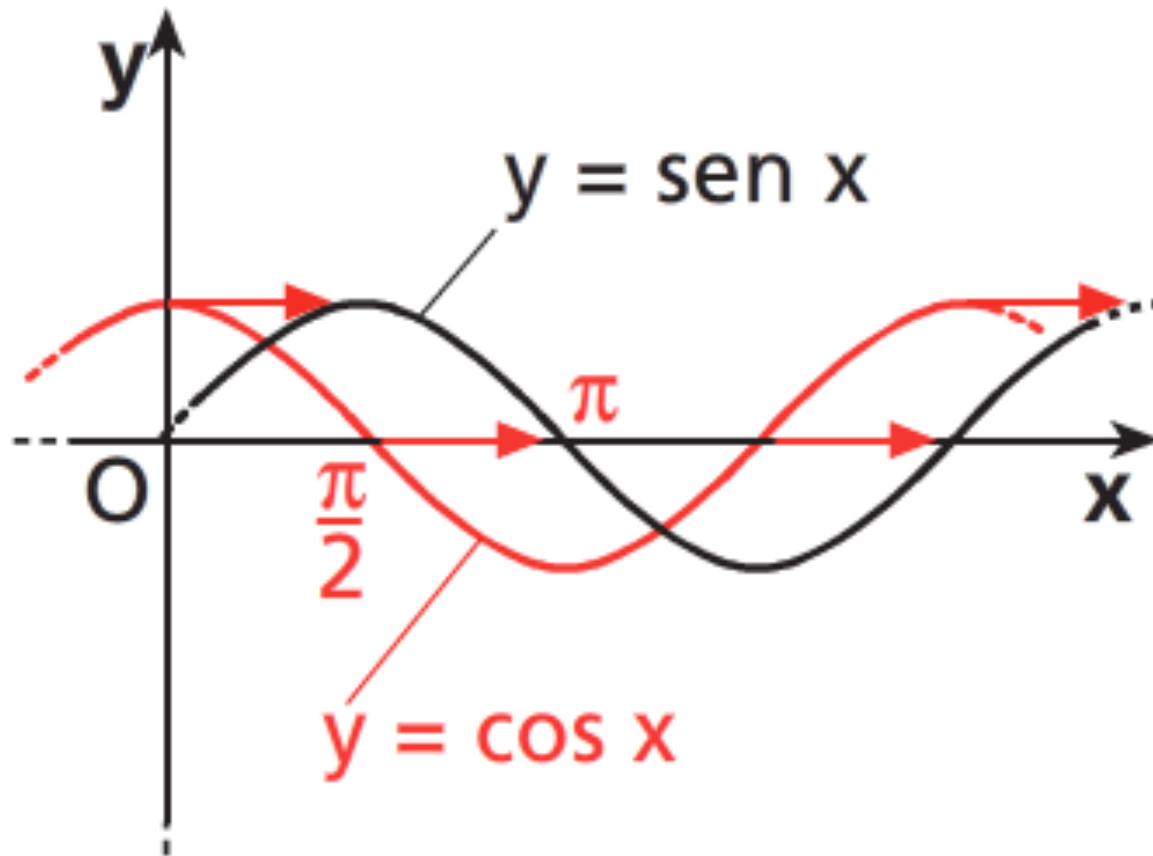
➤ Le funzioni seno e coseno sono **periodiche** di periodo **2π** .

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin(\alpha + 2k\pi) \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \\ \cos \alpha &= \cos(\alpha + 2k\pi) \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

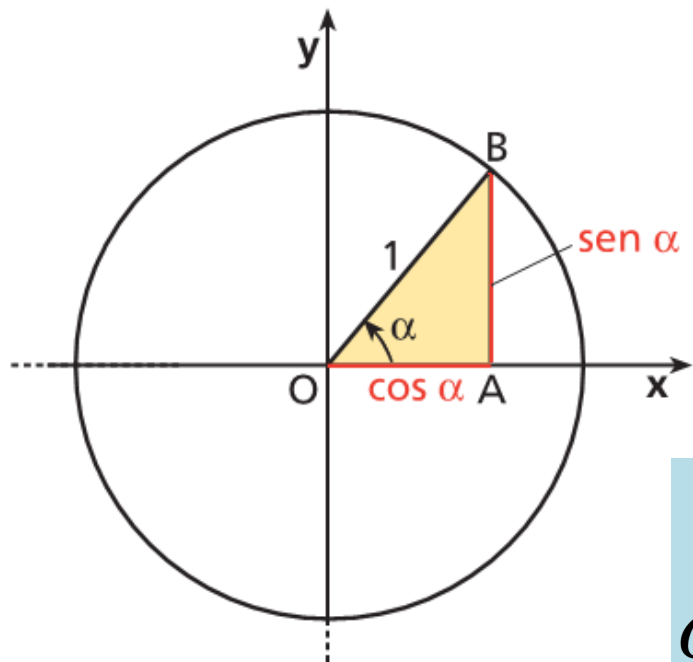
Il grafico completo della funzione seno si chiama **sinusoide**, quello della funzione coseno **cosinusoide**.



I due grafici differiscono per una traslazione di $\pi/2$.



La prima relazione fondamentale



Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AOB, si ottiene:

prima relazione fondamentale

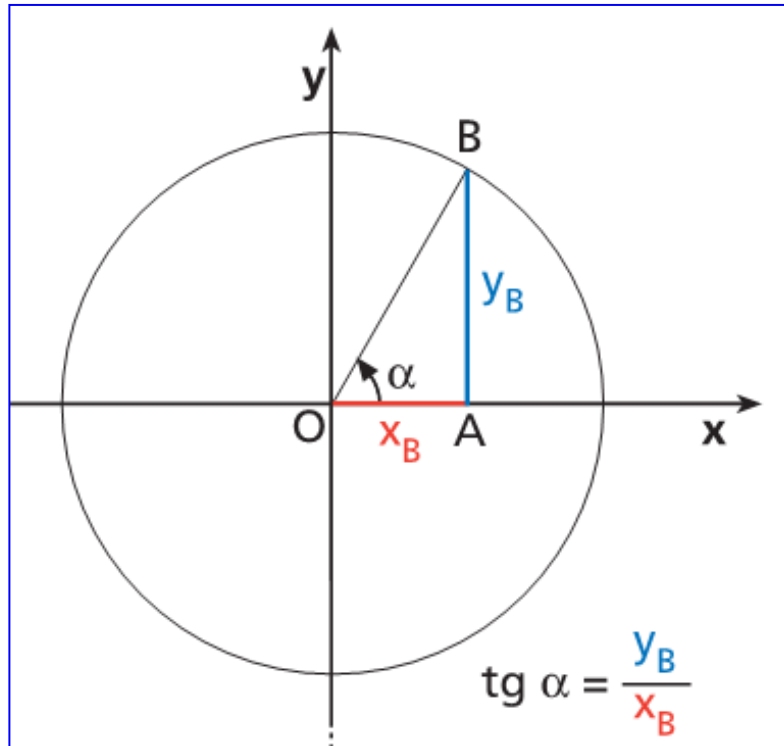
$$OA^2 + AB^2 = 1 \xrightarrow[\substack{OA=\cos x \\ AB=\sin x}]{} \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Da cui si ricava:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

La funzione tangente

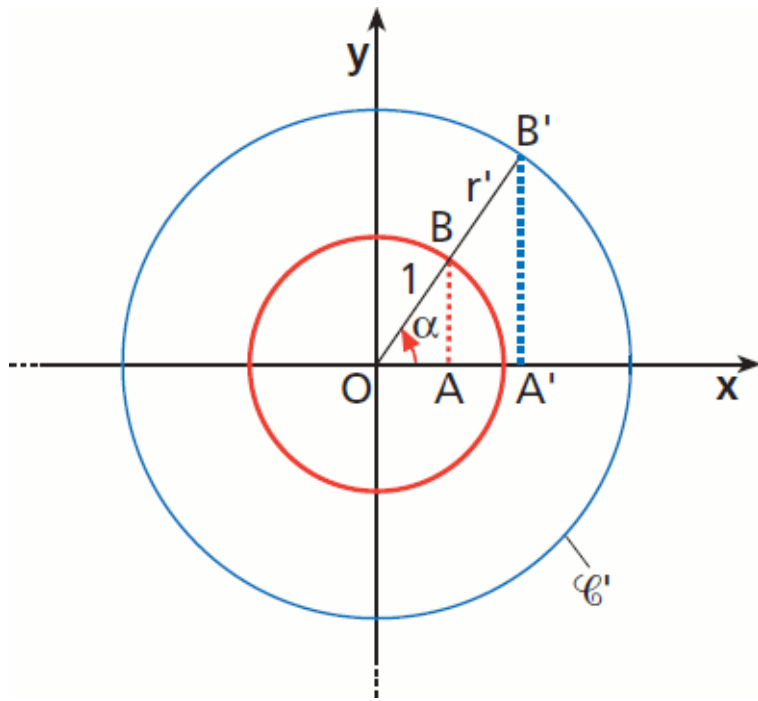


DEFINIZIONE

Consideriamo un angolo orientato α , e sia B il punto della circonferenza associato ad α . Definiamo **tangente** di α il rapporto, quando esiste, tra l'ordinata e l'ascissa di B :

$$\text{tg } \alpha = \frac{y_B}{x_B}$$

(non esiste quando $x_B=0$, ossia quando $\alpha=\pi/2+k\pi$)

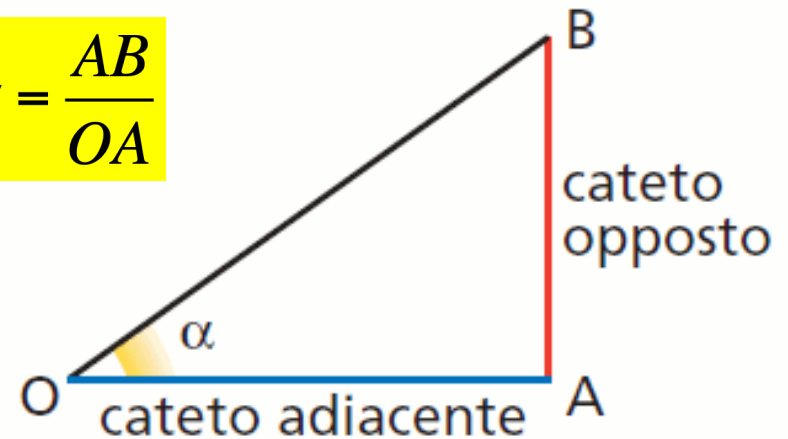


Il rapporto y_B/x_B , e quindi tga , non dipende dalla particolare circonferenza considerata, ma solo dall'angolo α (non facciamo la dimostrazione).

Il triangolo $OA'B'$ è un triangolo rettangolo. Quindi possiamo scrivere la seguente relazione, che si applica a tutti i triangoli rettangoli:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{AB}{OA}$$

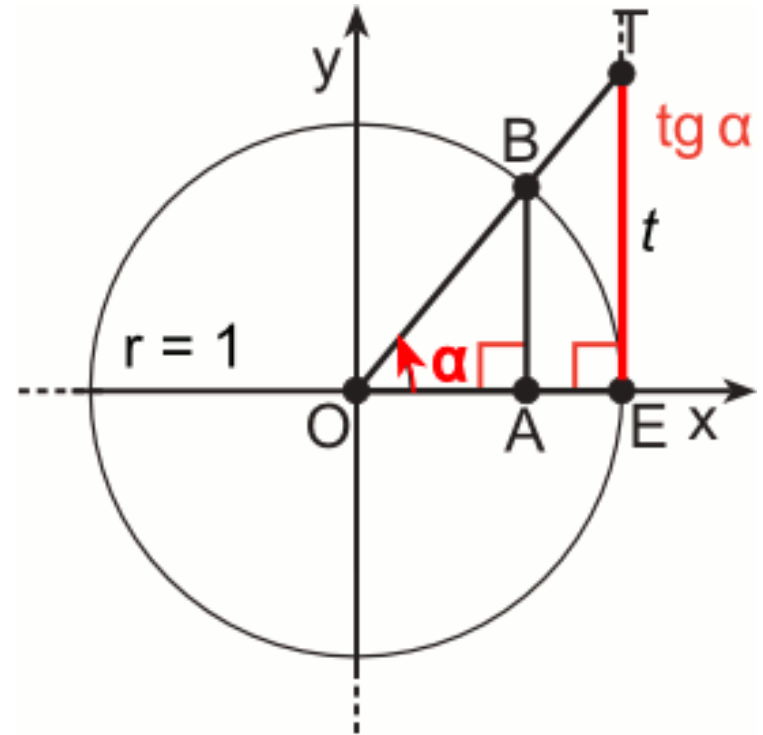


Definiamo la tangente in un altro modo.

Tracciamo la tangente t alla circonferenza goniometrica nel punto E (origine degli archi). Il prolungamento del lato OB interseca la tangente t nel punto T. Si definisce tangente dell'angolo α il valore dell'ordinata y_T del punto T:

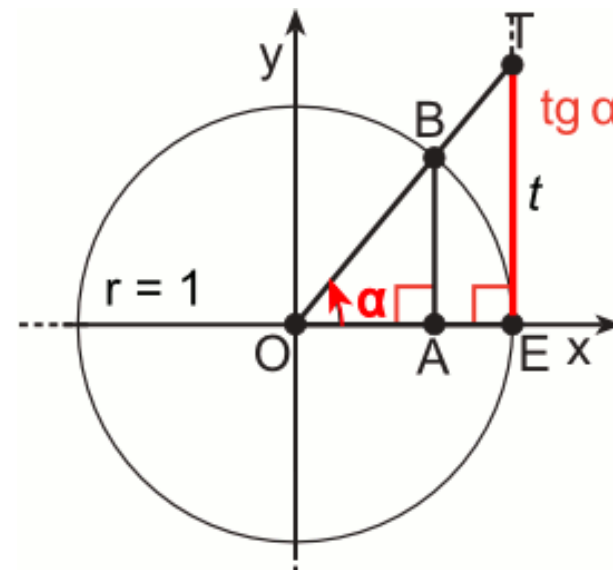
$$tg\alpha = y_T$$

Si dimostra $tg\alpha = y_B/x_B$, $tg\alpha = y_T$, sono due definizioni equivalenti.



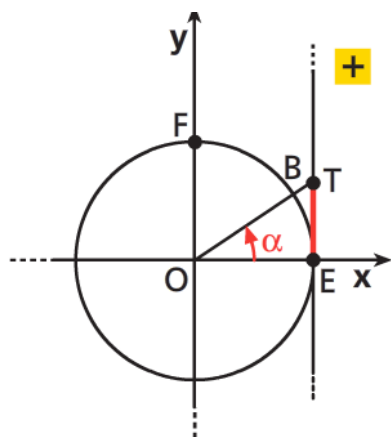
Come varia la funzione tga?

Ossia studiamo come varia y_T al variare dell'angolo α , legato alla posizione di B sulla circonferenza.



1° quadrante

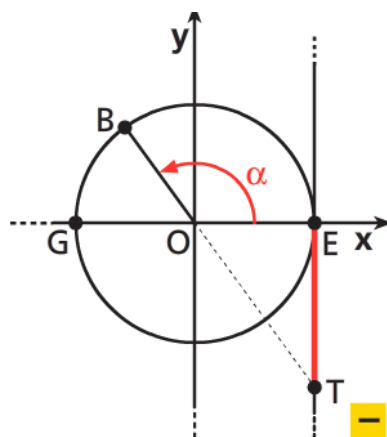
$$0 \leq \alpha \leq 90$$



a. Finché B percorre il primo quarto di circonferenza, l'ordinata di T è positiva e aumenta man mano che B si avvicina al punto F. Quando $B \equiv F$, la tangente non esiste.

2° quadrante

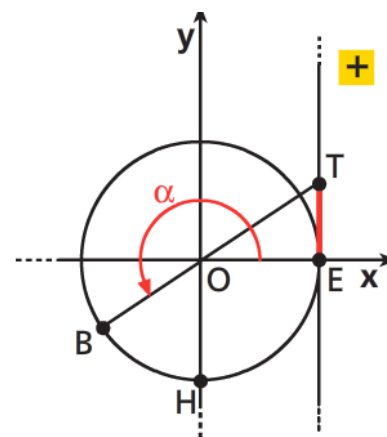
$$90 < \alpha \leq 180$$



b. Quando B percorre la circonferenza nel secondo quadrante, l'ordinata T è negativa, e aumenta fino a quando $B \equiv G$, in cui $y_T = 0$.

3° quadrante

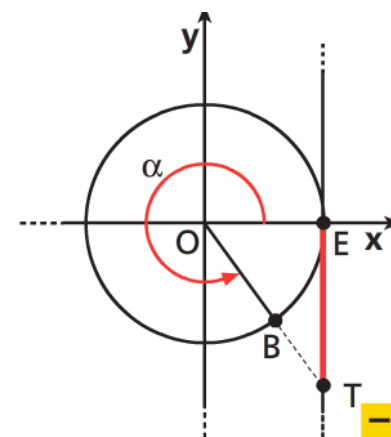
$$180 < \alpha \leq 270$$



c. Se B si trova nel terzo quadrante, l'ordinata di T è di nuovo positiva e va aumentando fino a quando $B \equiv H$ e T non esiste più. La tangente di $\frac{3\pi}{2}$ non esiste.

4° quadrante

$$270 < \alpha \leq 360$$



d. Quando B percorre l'ultimo quarto di circonferenza, l'ordinata di T ritorna negativa e aumenta fino allo 0.

Cosa si osserva?

- La funzione tangente tga ha come campo di esistenza:

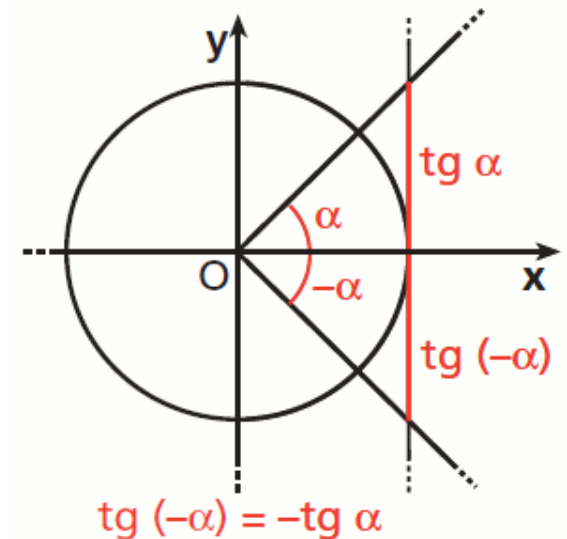
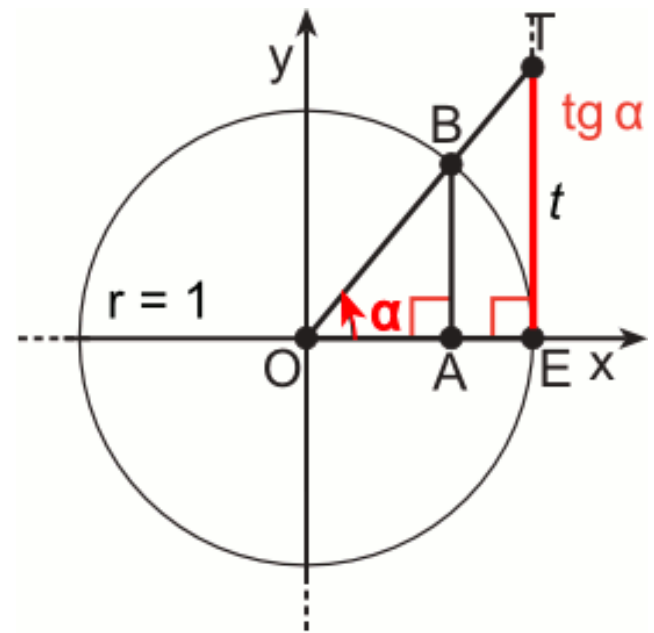
$$D = \mathfrak{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

- La funzione tangente tga ha come codominio:

$$C = \mathfrak{R} =]-\infty; +\infty[$$

- La funzione tangente tga è una funzione dispari:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$



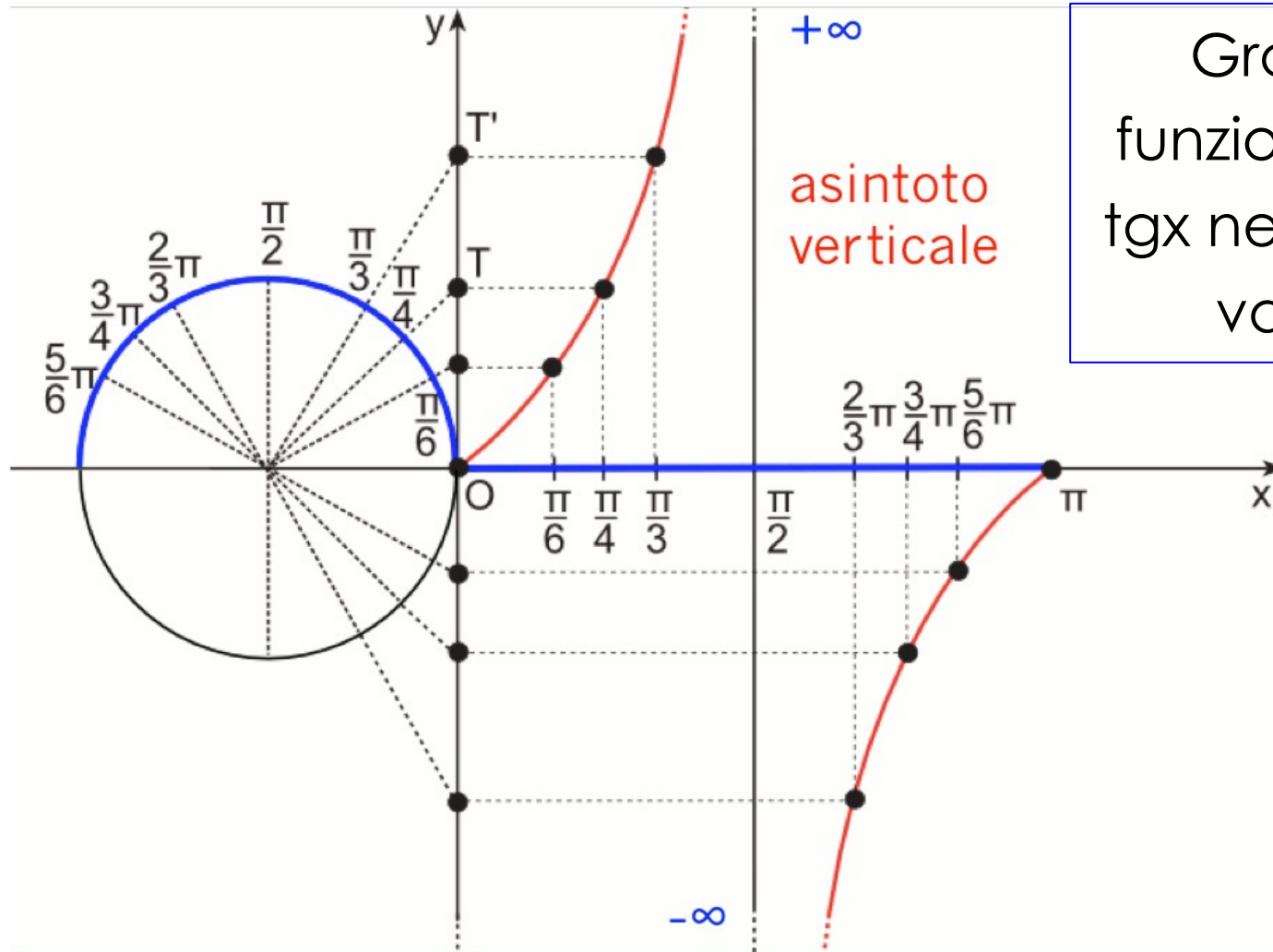
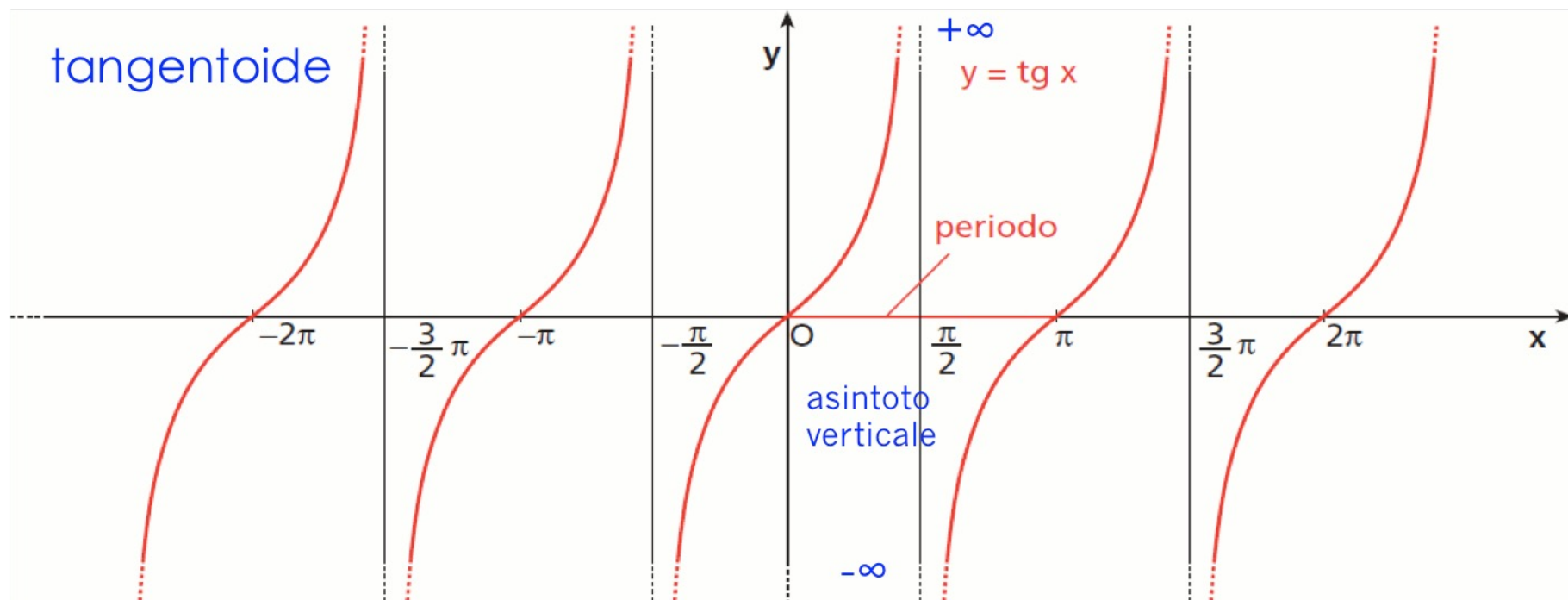
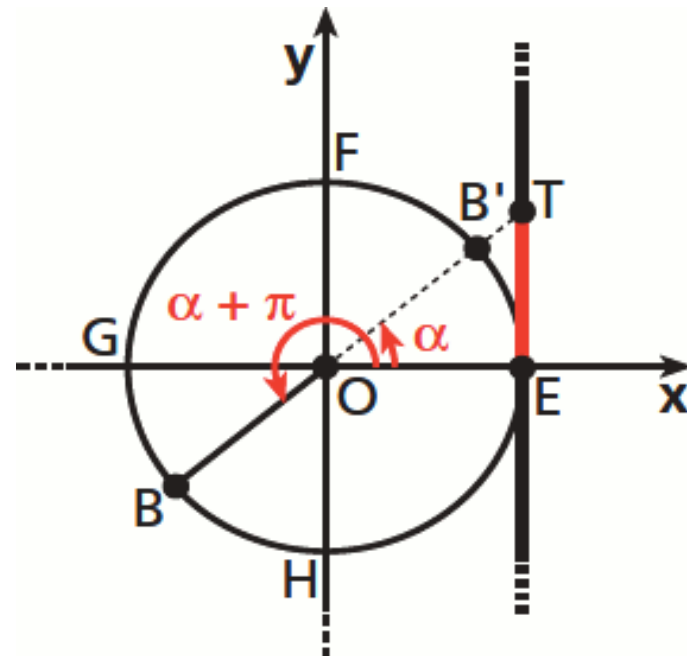


Grafico della
funzione tangente
 $\tan x$ nell'intervallo di
valori $(0; \pi)$.

Il grafico della tangente $\tan x$, per valori di x che si avvicinano a $\pi/2$, si avvicina sempre più alla retta $x = \pi/2 + k\pi$ (asintoto verticale).

➤ La funzione tangente è **periodica** di periodo π :

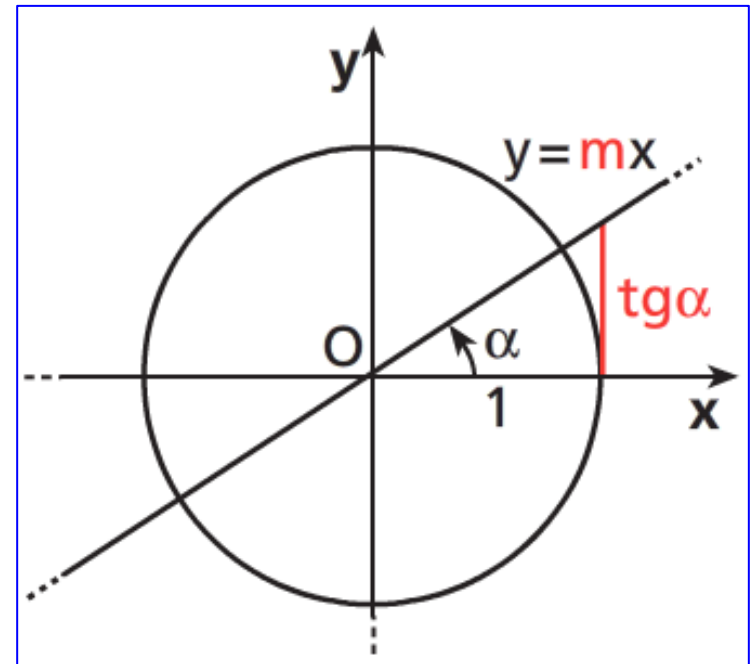
$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + k\pi) \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$



Significato geometrico del coefficiente angolare di una retta

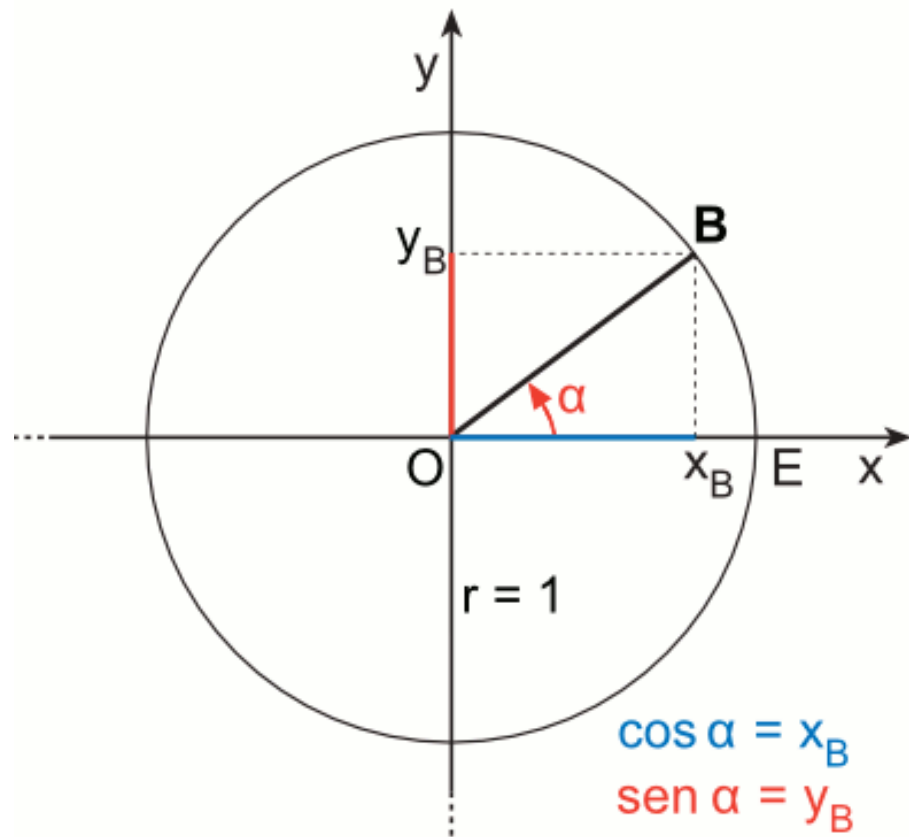
Sia data la circonferenza goniometrica e la retta di equazione $y=mx$.

$$y = mx \rightarrow m = \frac{y}{x} \xrightarrow[\text{se } x=1 \text{ e } y=\operatorname{tg}\alpha]{\quad} m = \operatorname{tg}\alpha$$



Il coefficiente angolare della retta è uguale alla tangente dell'angolo fra la retta e l'asse delle x.

Seconda relazione fondamentale

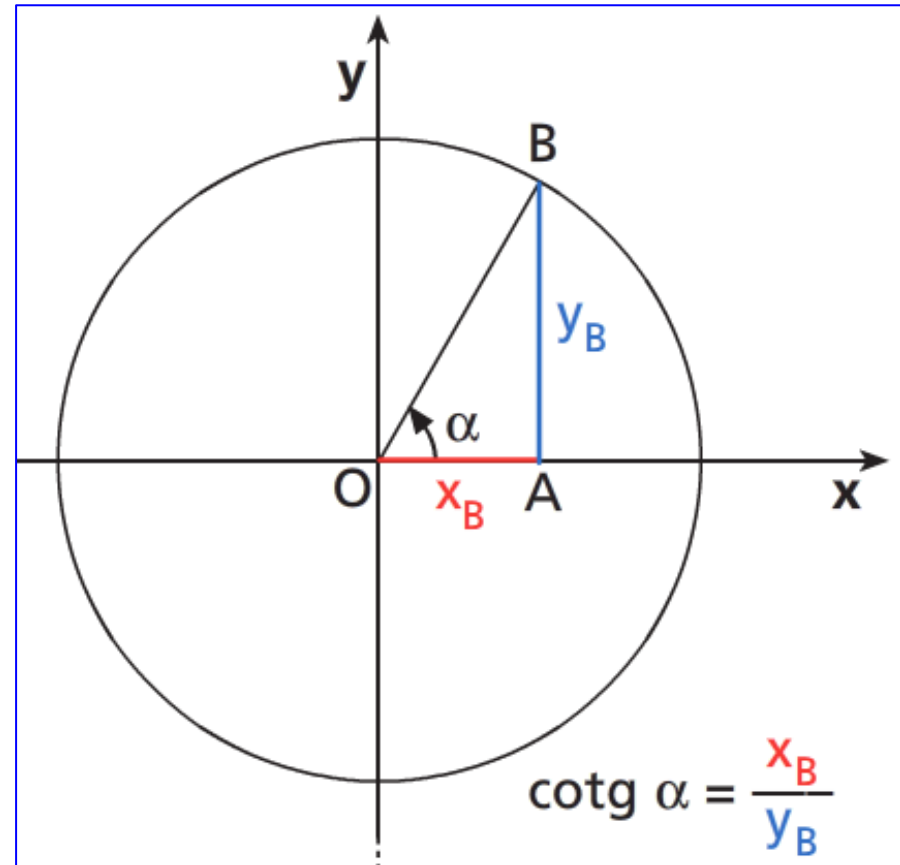


$$tg\alpha = \frac{y_B}{x_B} \xrightarrow[\substack{y_B = \text{sen}\alpha \\ x_B = \cos\alpha}]{} tg\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

La funzione cotangente

DEFINIZIONE

Consideriamo un angolo orientato α , e sia B il punto della circonferenza associato ad α . Definiamo **cotangente** di α il rapporto, quando esiste (non esiste quando $y_B=0$, ossia quando $\alpha=0+k\pi$), tra l'ascissa e l'ordinata di B :

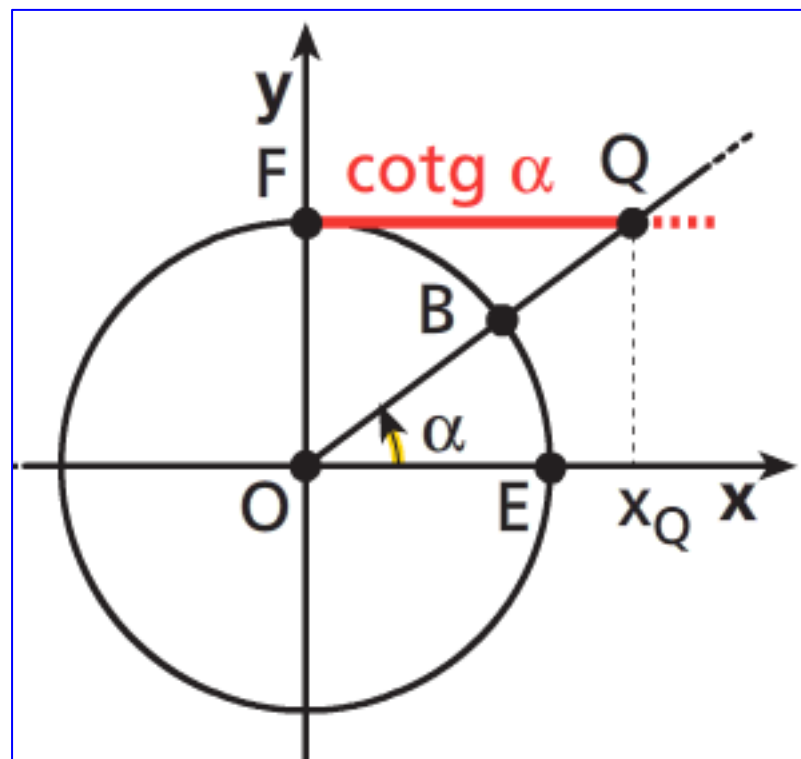


$$\cotg \alpha = \frac{x_B}{y_B} \xrightarrow[y_B = \sin \alpha]{x_B = \cos \alpha} \cot g \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \rightarrow \cot g \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

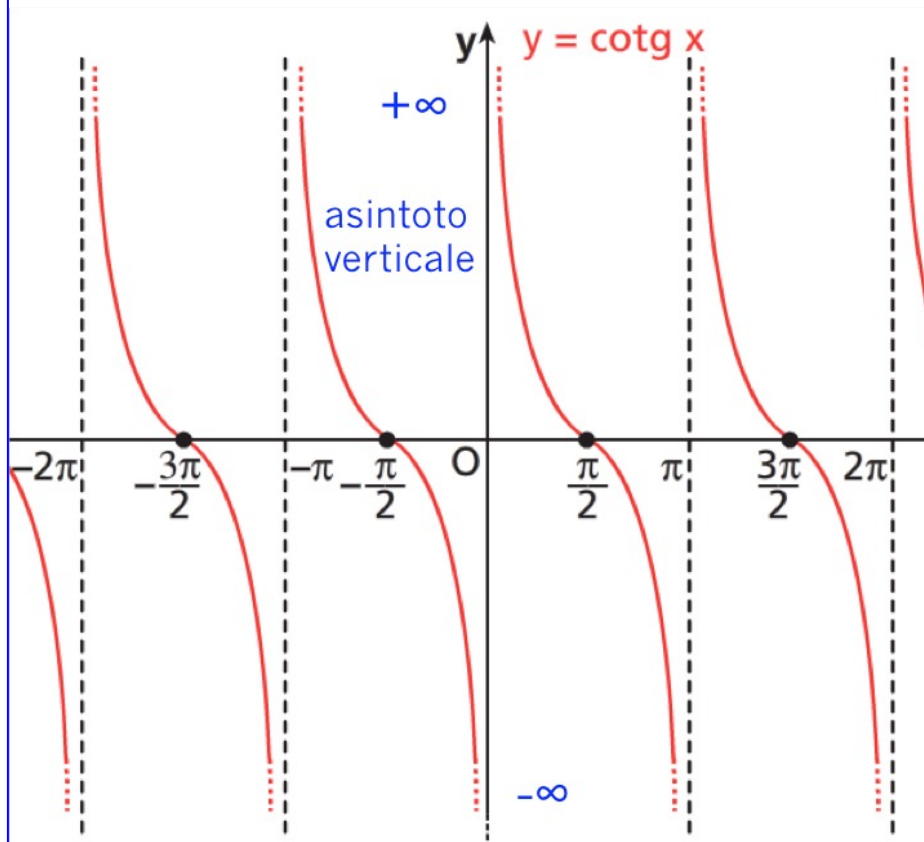
Altro modo di definire la cotangente

Tracciamo la tangente alla circonferenza goniometrica nel punto F. Il prolungamento del lato OB interseca la tangente nel punto Q. Si definisce cotangente dell'angolo α il valore dell'ascissa x_Q del punto Q:

$$\cot \alpha = x_Q$$



cotangente



- La funzione cotangente ha come dominio e codominio:

$$D = \mathbb{R} - \{k\pi\} \quad C = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

- La funzione cotangente è **periodica** di periodo π :

$$\cotg \alpha = \cotg(\alpha + k\pi) \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

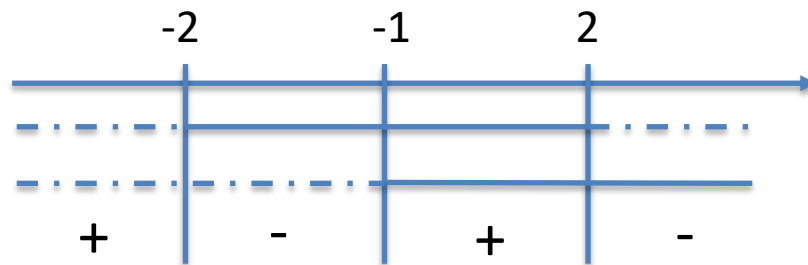
- La funzione cotangente è una funzione dispari:

$$\cotg(-\alpha) = -\cotg \alpha$$

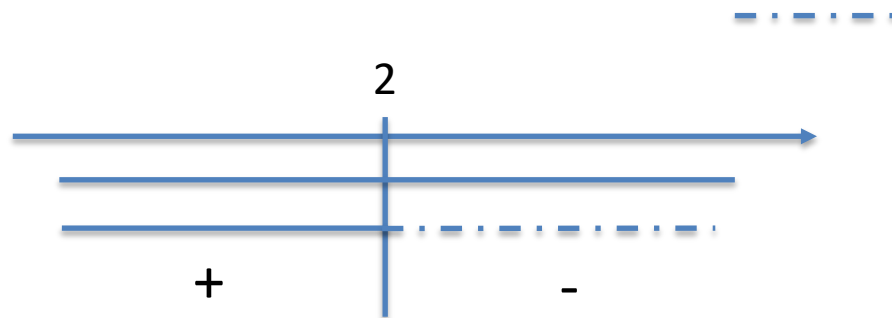
Il grafico della cotangente, per valori di x che si avvicinano a 0 , si avvicina sempre più alla retta $x=k\pi$ (asintoto verticale).

Relazioni tra funzioni goniometriche

	(sen α)	(cos α)	(tg α)	(cotg α)
sen α	sen α	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\frac{\text{tg } \alpha}{\pm \sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \text{cotg}^2 \alpha}}$
cos α	$\pm \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha}$	cos α	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{\text{cotg } \alpha}{\pm \sqrt{1 + \text{cotg}^2 \alpha}}$
tg α	$\frac{\text{sen } \alpha}{\pm \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha}}$	$\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	tg α	$\frac{1}{\text{cotg } \alpha}$
cotg α	$\frac{\pm \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha}}{\text{sen } \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\text{tg } \alpha}$	cotg α



$$k \leq -2 \cup -1 < k \leq 2$$



$$k > 2$$



Le funzioni secante e cosecante

DEFINIZIONE

Definiamo **secante** di α la funzione che associa ad α il reciproco del valore di $\cos \alpha$:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\cos \alpha \neq 0 \rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

DEFINIZIONE

Definiamo **cosecante** di α la funzione che associa ad α il reciproco del valore di $\sin \alpha$:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

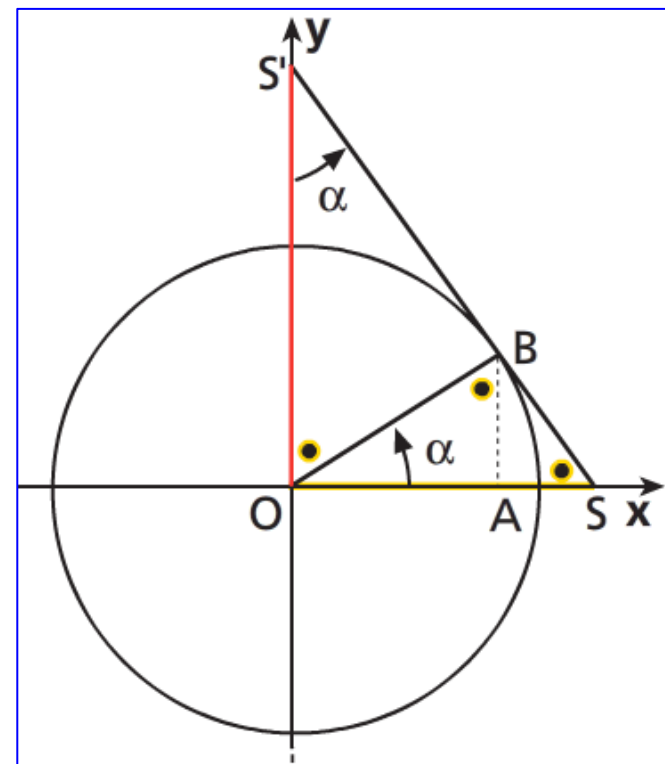
$$\sin \alpha \neq 0 \rightarrow \alpha \neq k\pi$$

Altro modo di definire la seca e la coseca

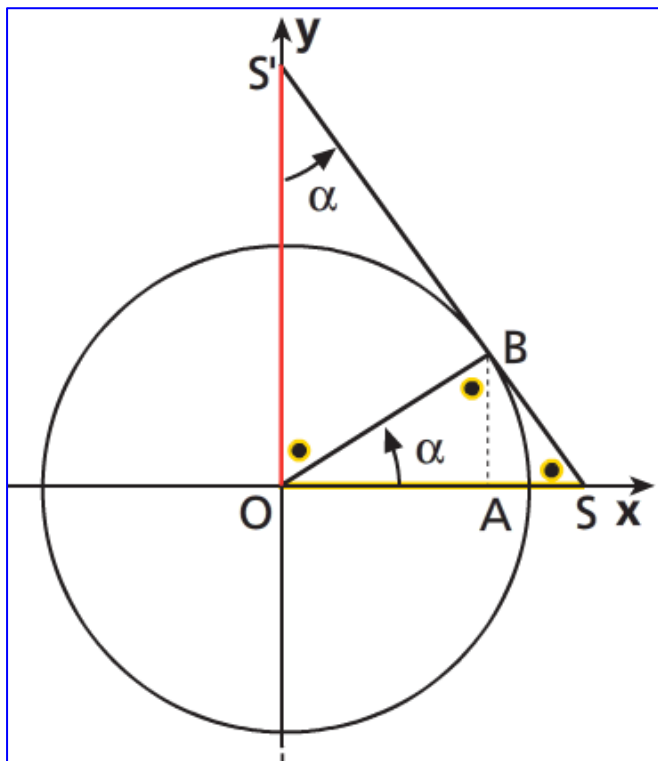
Similitudine triangoli OBA e OBS:

$$\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OB} : \overline{OS} \rightarrow \cos \alpha : 1 = 1 : \overline{OS}$$

$$\overline{OS} = \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha$$



La secante è l'ascissa del punto S, intersezione della retta tangente nel punto B (associato di α sulla circonferenza goniometrica), con l'asse x.



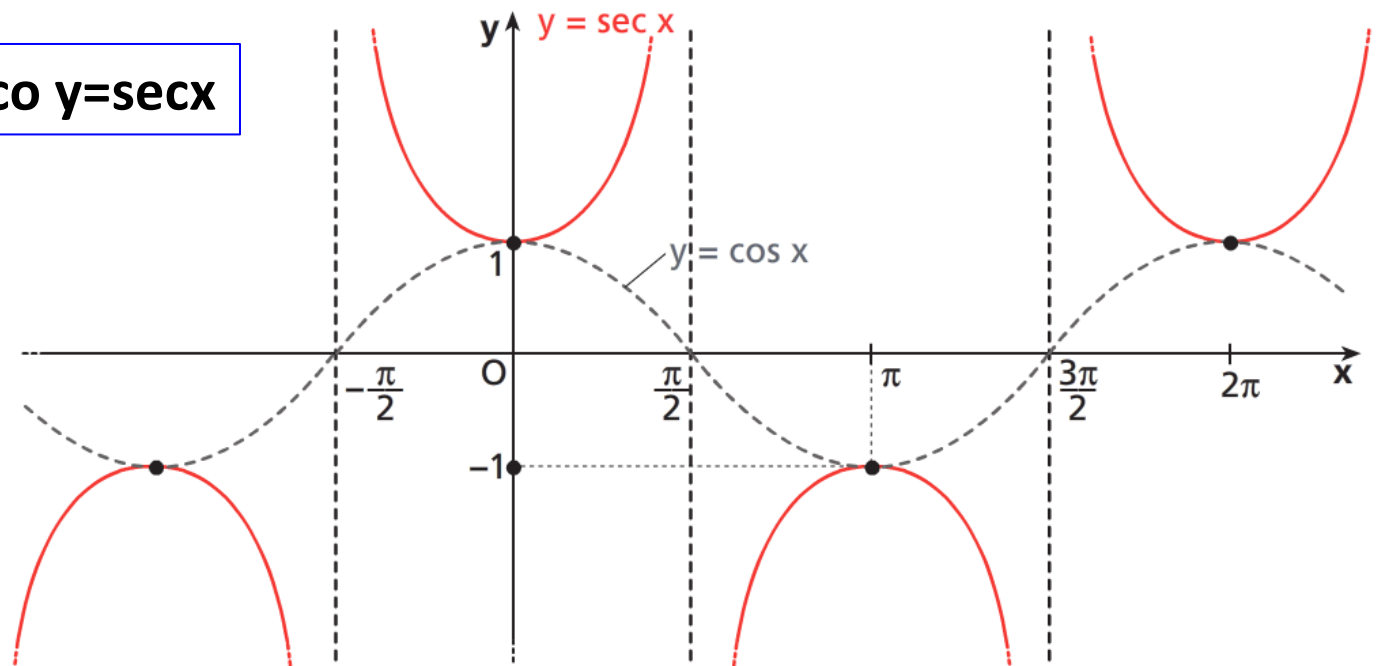
Similitudine triangoli OAB e OBS':

$$\overline{BA} : \overline{OB} = \overline{OB} : \overline{OS'} \rightarrow \text{sen} \alpha : 1 = 1 : \overline{OS'}$$

$$\overline{OS'} = \frac{1}{\text{sen} \alpha} = \text{cosec} \alpha$$

La cosecante di α è l'ordinata del punto S' , intersezione della retta tangente in B con l'asse y .

Grafico $y=\sec x$



I due grafici differiscono per una traslazione di $\pi/2$.

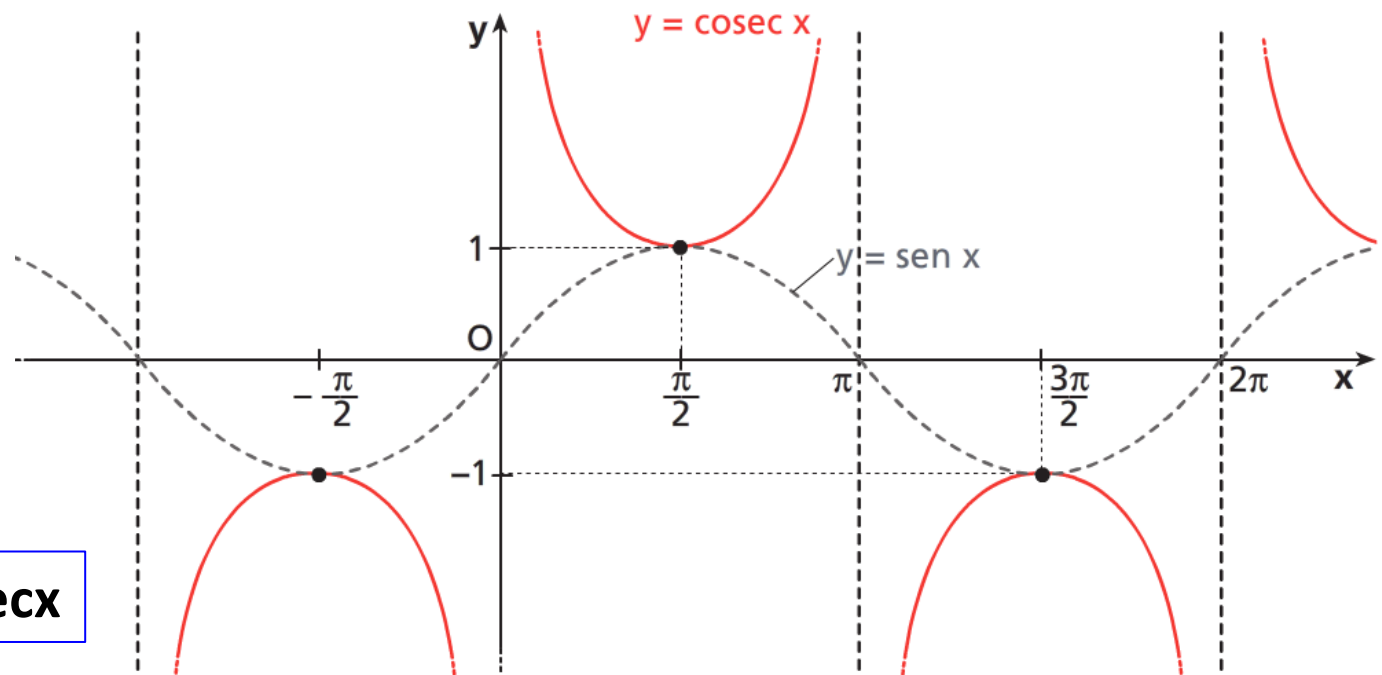


Grafico $y=\text{cosec } x$

Dominio e codominio

$y = \sec x$ ha dominio $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$;

$y = \operatorname{cosec} x$ ha dominio $\mathbb{R} - \{0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

$$C = \Re -]-1;1[$$

Asintoti verticali

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ per il grafico della secante;

$x = 0 + k\pi$ per il grafico della cosecante.

$y = \sec x$ è una funzione pari; $y = \operatorname{cosec} x$ è una funzione dispari;

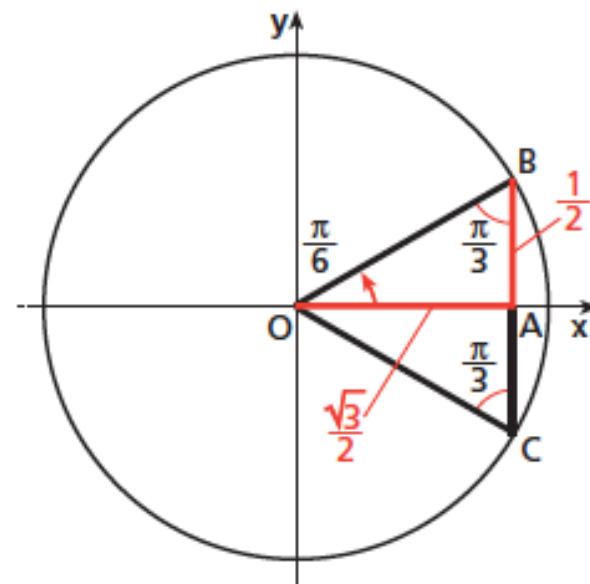
LE FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ANGOLI PARTICOLARI

Calcoliamo il valore delle funzioni goniometriche di alcuni angoli, sfruttando le proprietà delle figure geometriche.

angolo $\pi/6$ (30°)

Triangolo OBC è equilatero (tre angoli uguali $\pi/3$ e tre lati uguali $OB=BC=OC=1$).

$$AB = \frac{BC}{2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{poichè } AB=\text{sen}\alpha} \text{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$



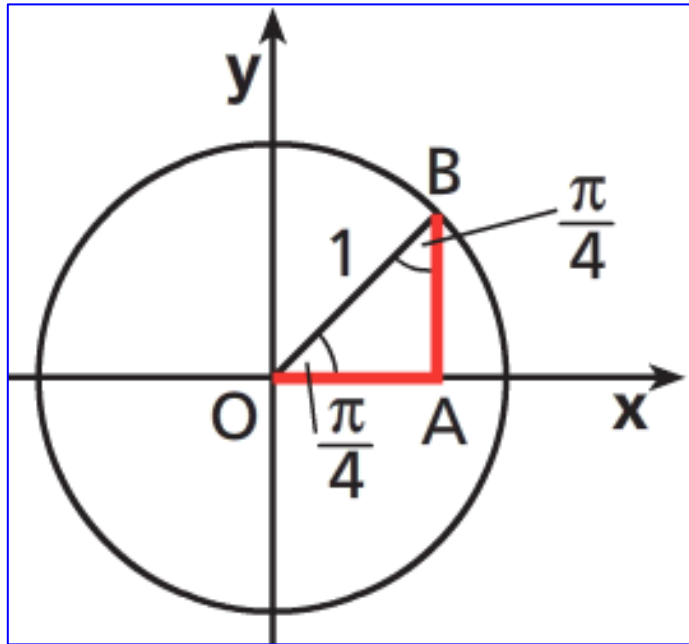
Teorema di Pitagora (triangolo OAB):

$$\overline{OA} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\text{poichè } OA=\text{cos}\alpha} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\text{sen} \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \text{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{cotg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\text{tg} \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow \text{cotg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

angolo $\pi/4$ (45°)



Sfruttando le proprietà della figura geometrica, si ottiene:

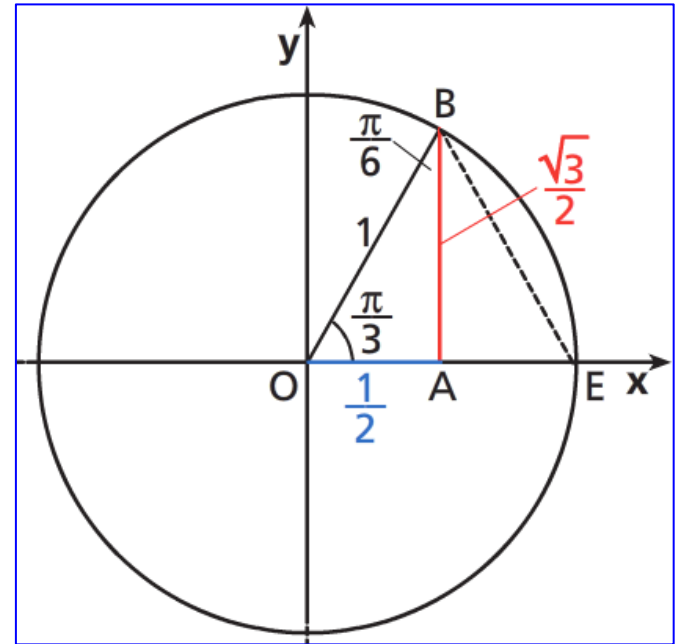
$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1$$

angolo $\pi/3$ (60°)



Sfruttando le proprietà della figura geometrica, si ottiene:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

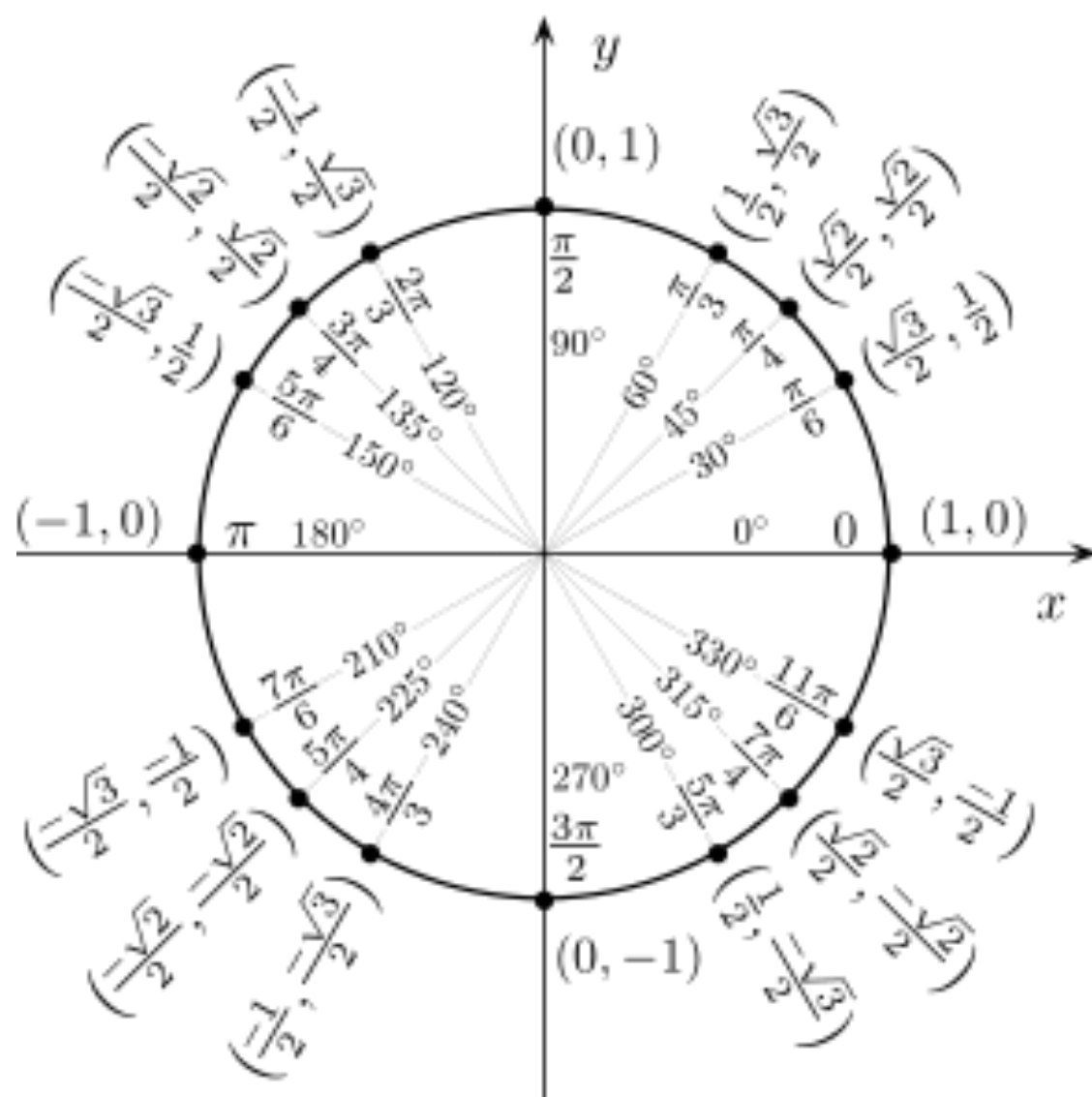
$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Riassunto

Angolo in gradi α_{gradi}	Angolo in radianti $\alpha_{radianti}$	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente
$0^\circ = 360^\circ$	2π	0	1	0	$+\infty$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$+\infty$	0
180°	π	0	-1	0	$-\infty$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$-\infty$	0



ESERCIZI

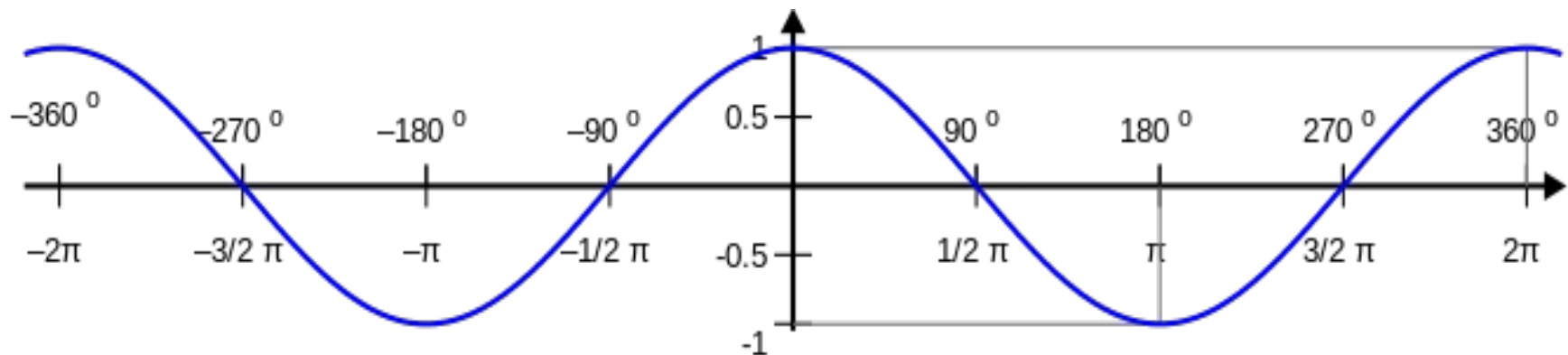
Trovare il campo di esistenza delle seguenti funzioni.

$$y = -\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}$$

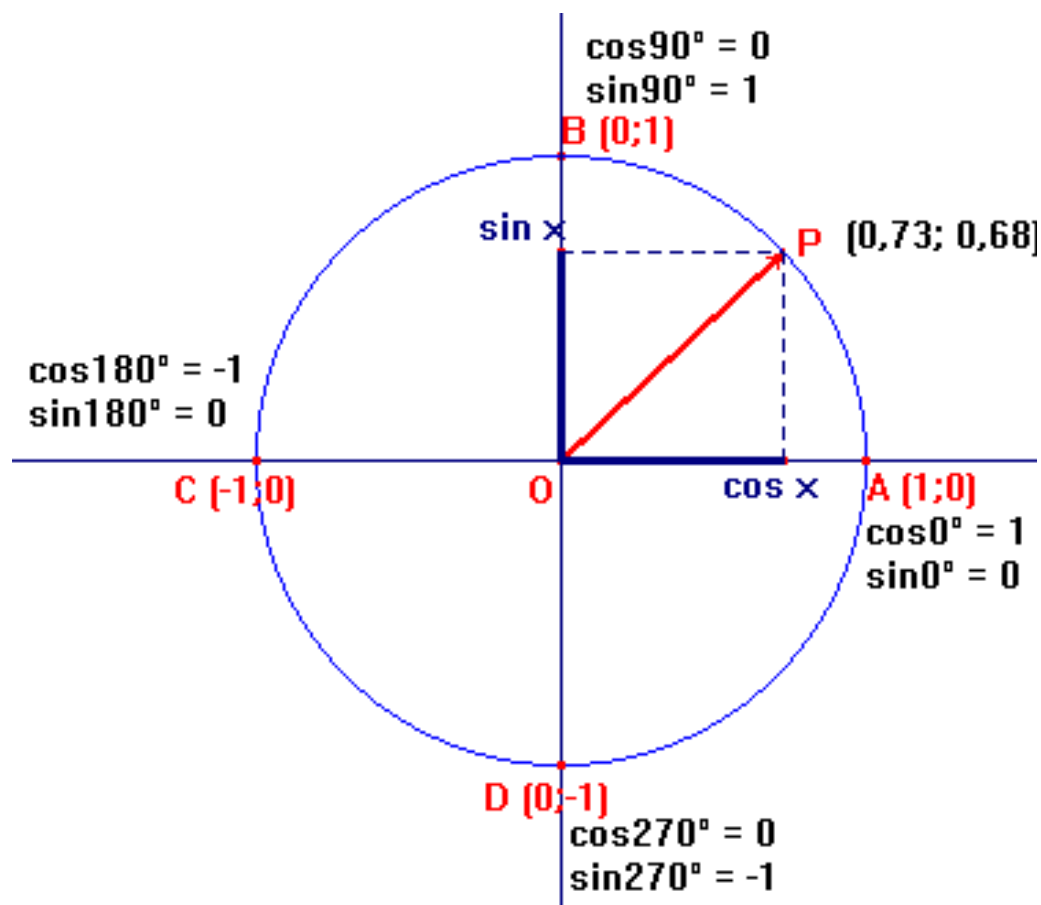
$$y = -\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\operatorname{sen} x} = -\frac{1}{\cos x} \xrightarrow{\text{DOMINIO}} \cos x \neq 0 \Rightarrow$$

$$\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Osservare sul grafico dove il **coseno** è diverso da zero:



Oppure osservare sulla
circonferenza goniometrica dove
il **coseno** è diverso da zero.



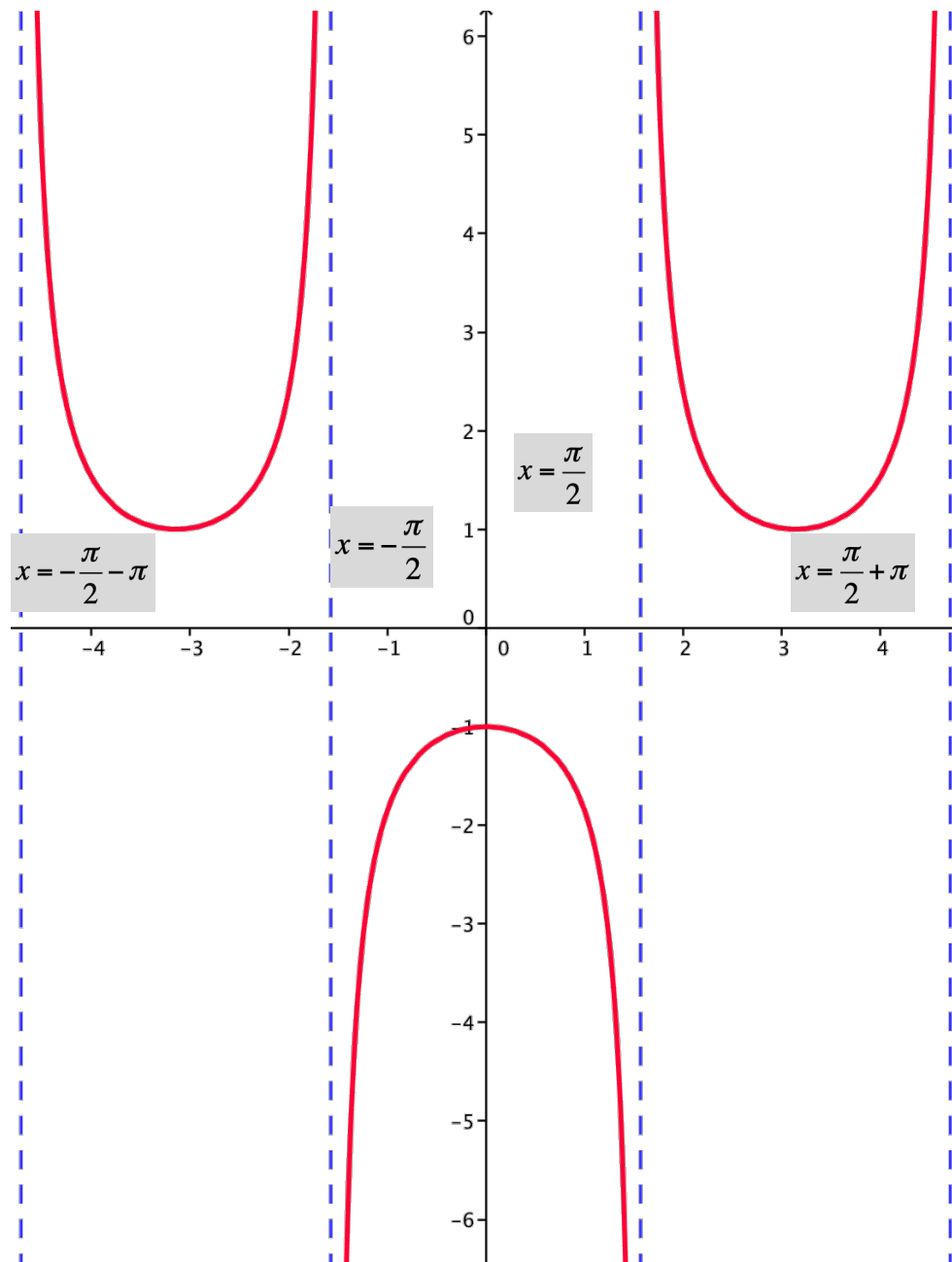


Grafico della funzione

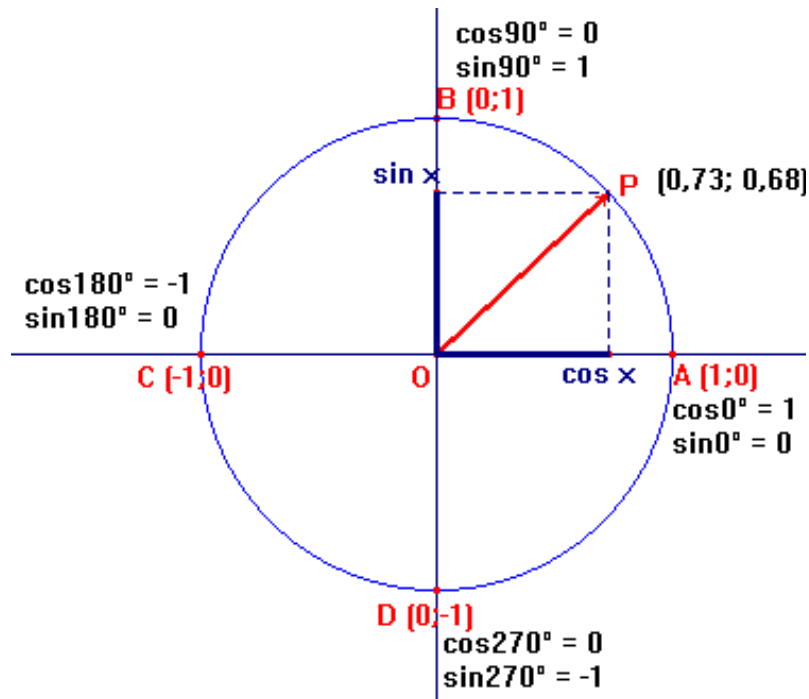
$$y = -\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\text{Dominio : } \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = k\frac{\pi}{2} \text{ asintoti verticali}$$

$$y = \frac{2}{\sin x} \xrightarrow{\text{DOMINIO}} \sin x \neq 0 \Rightarrow$$

$$\forall x \neq 0 + k\pi$$



Osservare sul grafico o sulla circonferenza goniometrica dove il seno è diverso da zero.

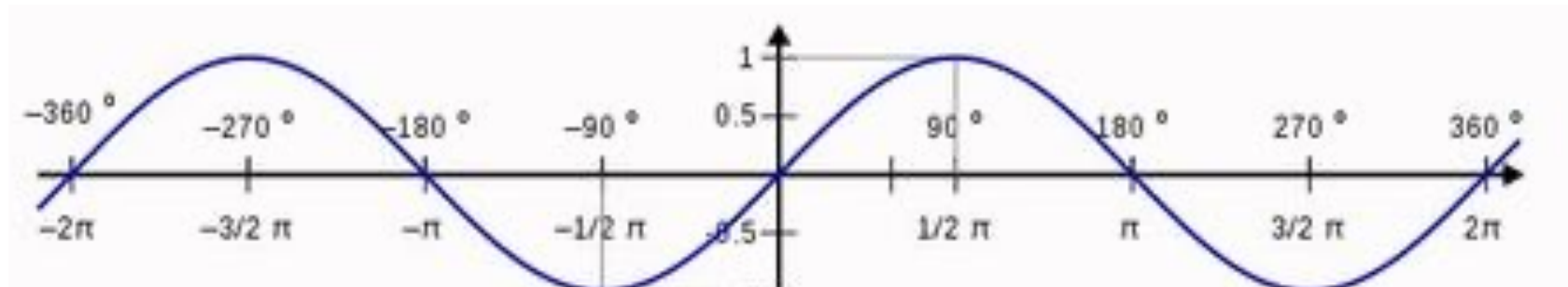
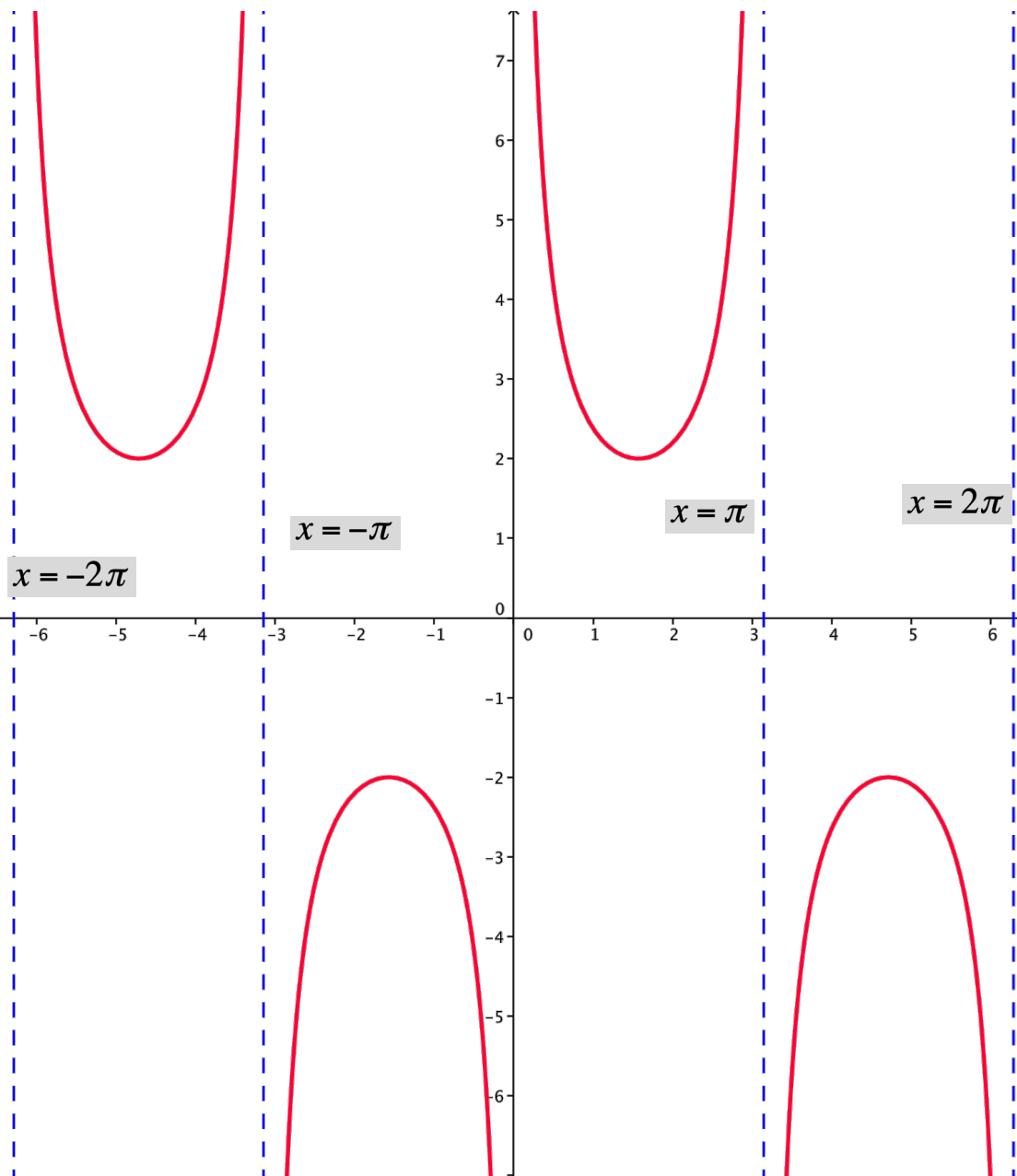


Grafico della funzione

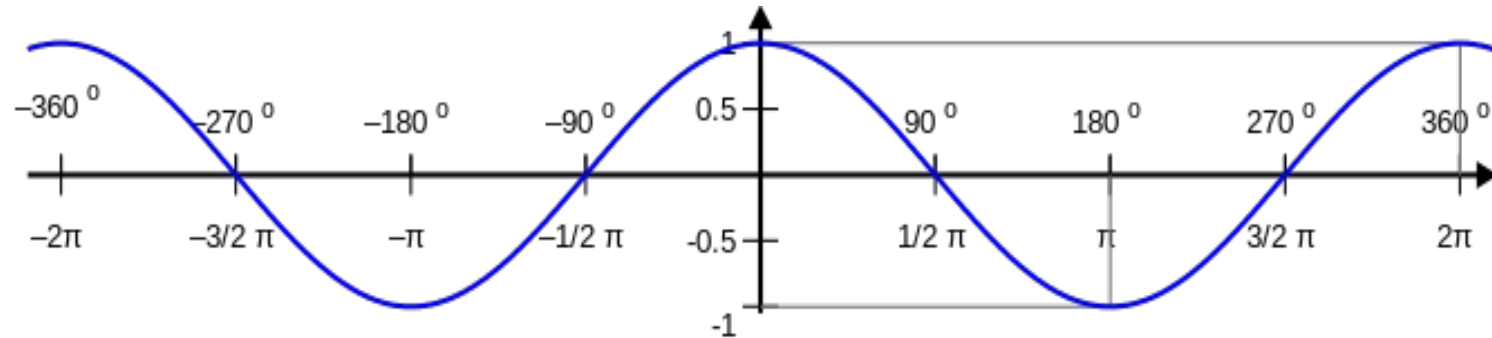
$$y = \frac{2}{\operatorname{sen} x}$$

Dominio : $\forall x \neq k\pi$
 $x = k\pi$ *asintoti verticali*



$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos x}} \xrightarrow{\text{DOMINIO}} 1 - \cos x > 0 \Rightarrow \cos x < 1 \Rightarrow$$

$$\forall x \neq 2k\pi$$



Osservare sul grafico o
sulla circonferenza
goniometrica dove il
coseno è minore di 1.

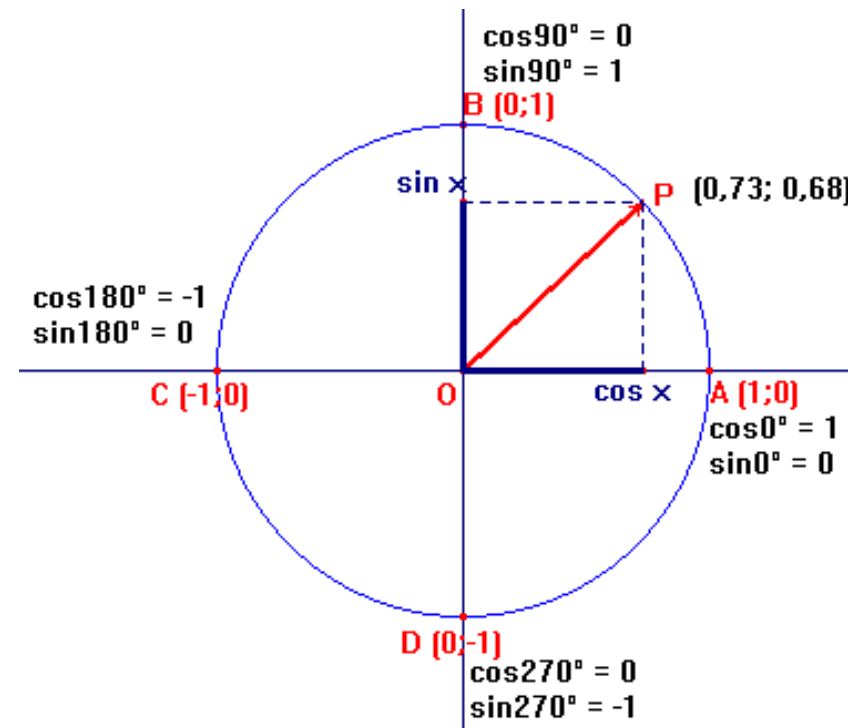
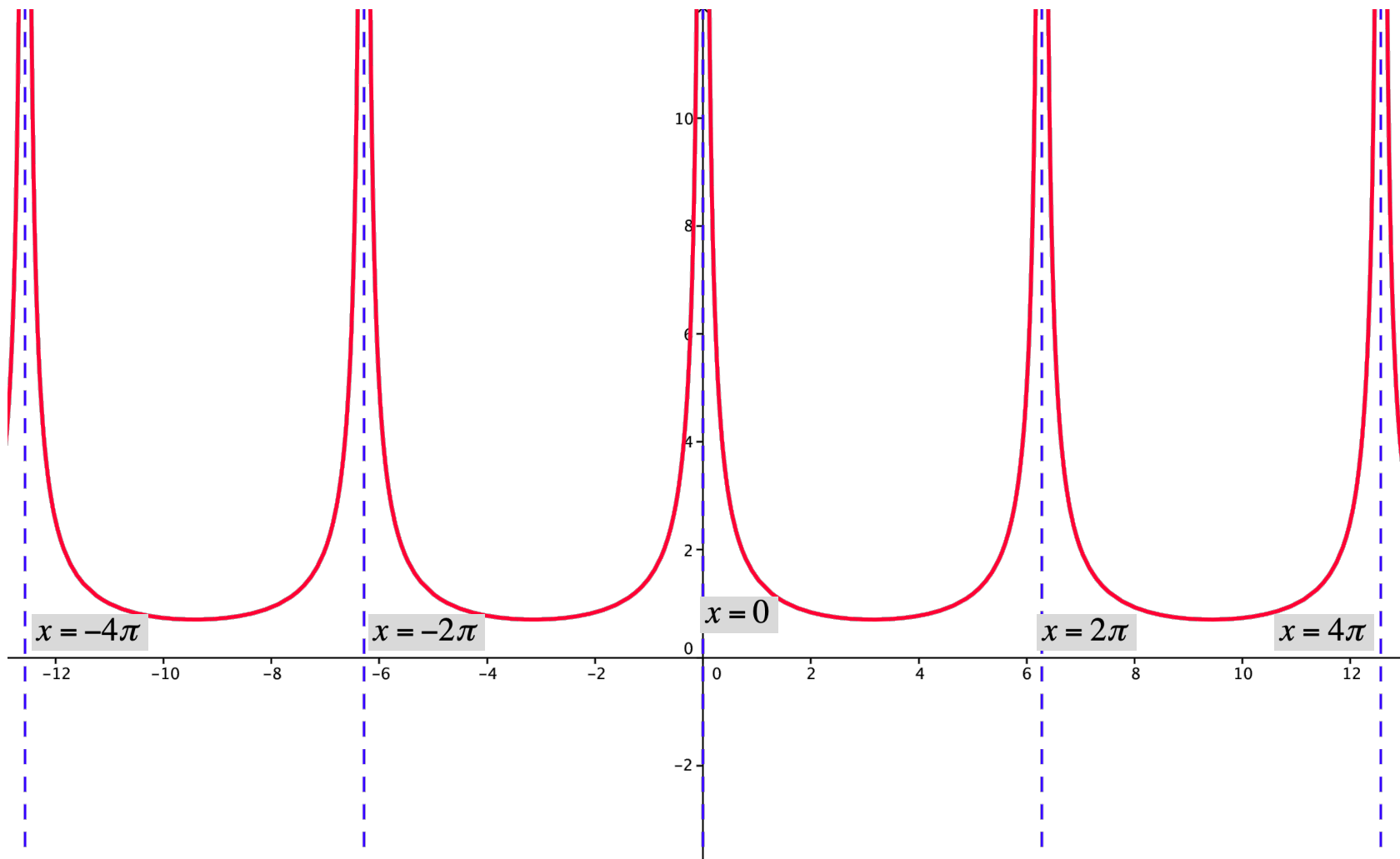


Grafico della funzione

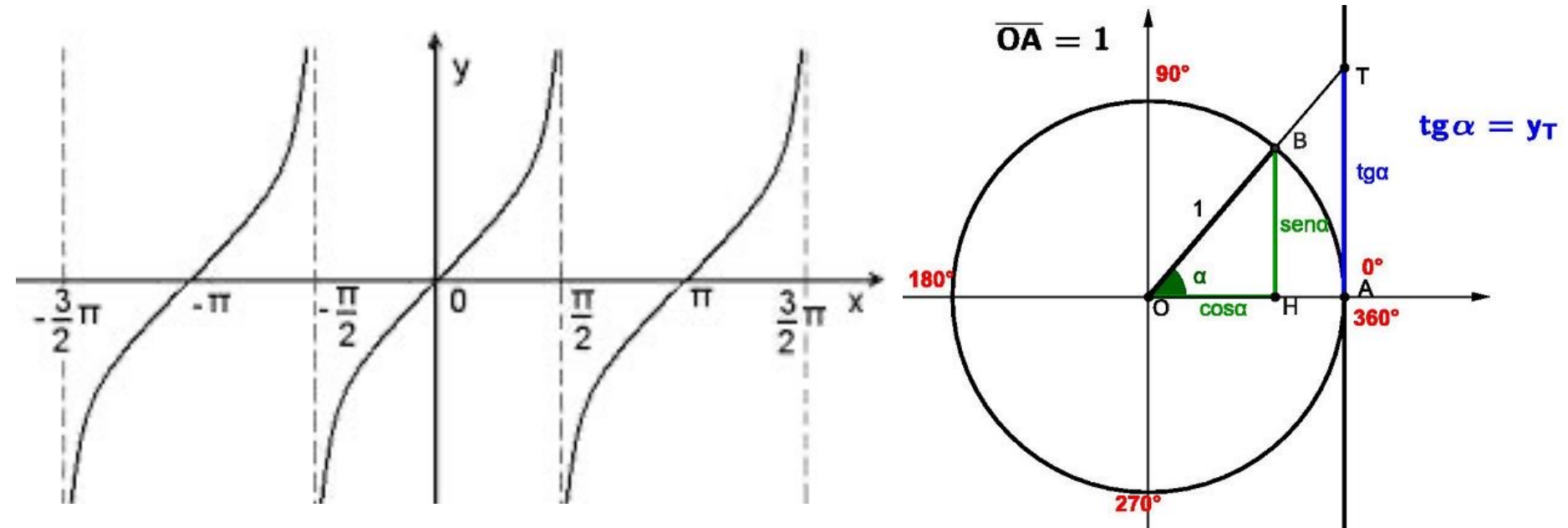
$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

*Dominio: $\forall x \neq 2k\pi$
 $x = 2k\pi$ asintoti verticali*



$$y = \frac{2\operatorname{sen}x - 1}{3\operatorname{tg}x} \xrightarrow{\text{DOMINIO}} \operatorname{tg}x \neq 0 \Rightarrow$$

$$\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$



Osservare sul grafico o sulla circonferenza goniometrica dove la **tangente è diversa da zero**.

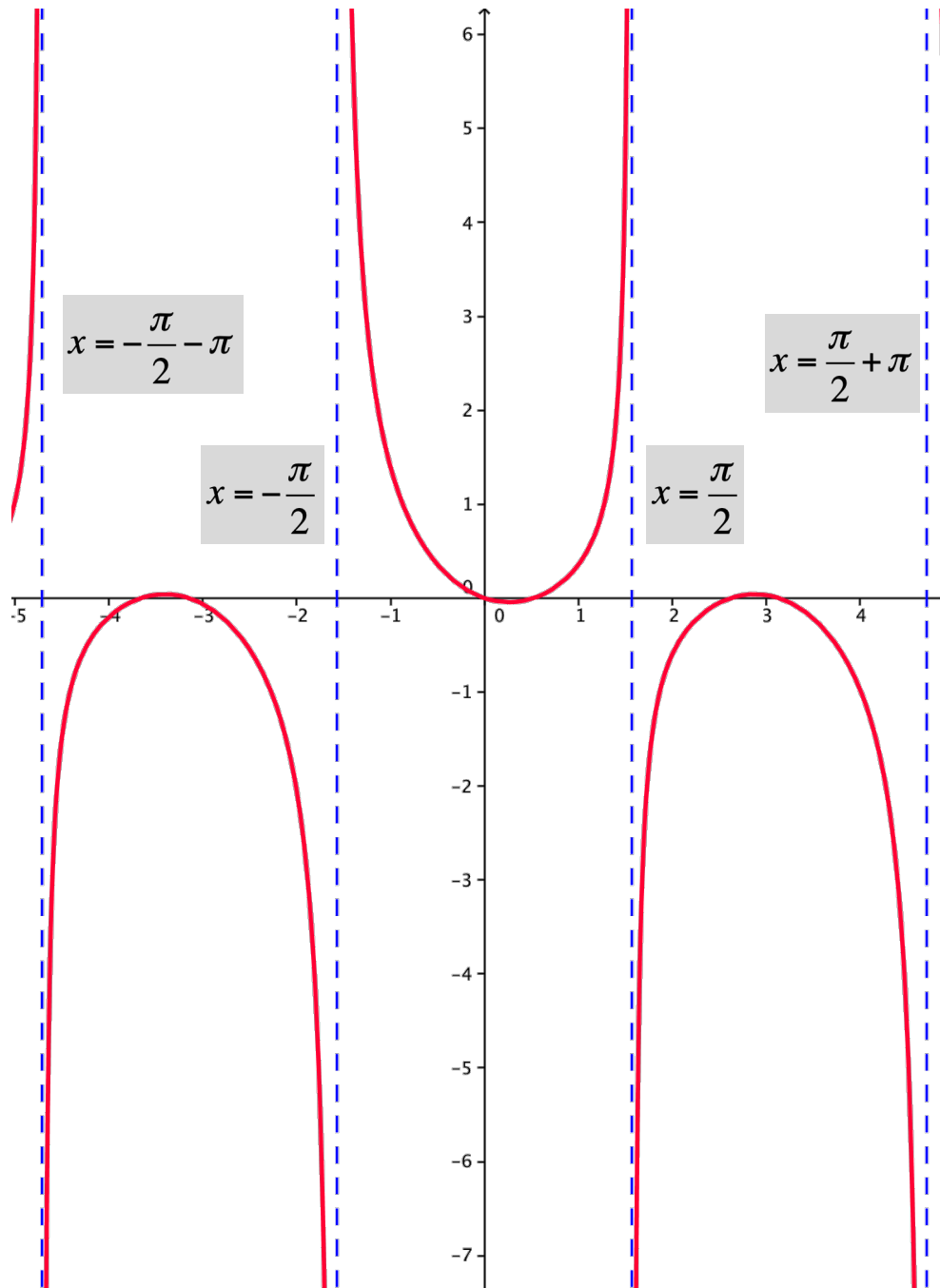


Grafico della funzione

$$y = \frac{2\text{sen}x - 1}{3\text{tg}x}$$

$$\text{Dominio : } \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ asintoti verticali}$$

La retta r forma con l'asse x un angolo α che ha $\cos\alpha=3/5$. Scrivere l'equazione di r sapendo che passa per il punto $P=(0;1)$.

Poiché l'equazione della retta è del tipo $y=mx+q$, per poterla scrivere, dobbiamo conoscere il coefficiente angolare m e l'intercetta q .

Il coefficiente angolare m non è altro che la tangente dell'angolo α ($m=\tan\alpha$), per cui:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

Poiché ci troviamo nel 1° quadrante ($\cos\alpha=3/5$), la tangente è positiva, per cui il coefficiente angolare è:

$$\sin\alpha = \frac{4}{5} \xrightarrow{\text{quindi}} m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cancel{4}/\cancel{5}}{\cancel{3}/\cancel{5}} = \frac{4}{3}$$

Sfruttiamo il passaggio per $P=(0;1)$ per calcolare l'intercetta:

$$1 = \frac{4}{3} \cdot 0 + q \Rightarrow q = 1$$

Conclusione - l'equazione della retta è:

$$y = \frac{4}{3}x + 1 \xrightarrow{\text{forma implicita}} 4x - 3y + 3 = 0$$

Trovare a quale condizione deve soddisfare il parametro k affinché sia verificata l'uguaglianza.

$$\cos x = k - 2 \xrightarrow[\text{-1} \leq \cos x \leq 1]{\text{poichè}} -1 \leq k - 2 \leq 1 \rightarrow 1 \leq k \leq 3$$

$$\sin x = -2k \xrightarrow[\text{-1} \leq \sin x \leq 1]{\text{poichè}} -1 \leq -2k \leq 1 \xrightarrow[\text{cambiare segno alla disequazione}]{\text{poichè}} -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$$

$$4k \cos x = k + 1 \rightarrow \cos x = \frac{k+1}{4k} \xrightarrow[\text{-1} \leq \cos x \leq 1]{\text{poichè}} -1 \leq \frac{k+1}{4k} \leq 1 \xrightarrow[\text{al sistema}]{\text{equivale}} \begin{cases} \frac{k+1}{4k} \geq -1 \\ \frac{k+1}{4k} \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5k+1}{4k} \geq 0 \\ \frac{-3k+1}{4k} \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k \leq -\frac{1}{5} \vee k > 0 \\ k < 0 \vee k \geq \frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{SOLUZIONE}} k \leq -\frac{1}{5} \vee k \geq \frac{1}{3}$$

$$6k \operatorname{sen} x = -k^2 - 9 \quad \text{con } x \in 3^\circ \text{ quadrante} \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-k^2 - 9}{6k}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{nel } 3^\circ \text{ quadrante} \\ -1 \leq \operatorname{sen} x \leq 0}]{\quad} -1 \leq \frac{-k^2 - 9}{6k} \leq 0 \xrightarrow{\text{equivalente}} \begin{cases} \frac{-k^2 - 9}{6k} \geq -1 \\ \frac{-k^2 - 9}{6k} \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{-k^2 + 6k - 9}{6k} \geq 0 \\ \frac{-k^2 - 9}{6k} \leq 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 0 < k \leq 3 \\ k > 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{SOLUZIONE}} k = 3$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3k - 1}{k - 2} \quad \text{con } \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi \xrightarrow[\substack{\text{nel } 4^\circ \text{ quadrante} \\ \operatorname{tg} \alpha < 0}]{\quad} \frac{3k - 1}{k - 2} < 0$$

$$\left[\begin{array}{l} N > 0 : 3k - 1 > 0 \\ D > 0 : k - 2 > 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{SOLUZIONE}} \frac{1}{3} < k < 2$$

ESERCIZIO GUIDA

Sapendo che $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ e che $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcoliamo il valore di $\cos \alpha$.

Utilizziamo la prima relazione fondamentale della goniometria $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, sostituendo a $\sin \alpha$ il valore $\frac{5}{13}$. Otteniamo così:

$$\frac{25}{169} + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{144}{169} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{12}{13}.$$

Poiché $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ e per tali angoli il coseno è negativo, allora:

$$\cos \alpha = -\frac{12}{13}.$$

ESERCIZIO GUIDA

Sapendo che $\sin \alpha = \frac{5}{7}$ e che $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcoliamo il valore di $\operatorname{tg} \alpha$.

Utilizziamo la prima relazione fondamentale della goniometria, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, per determinare il valore di $\cos \alpha$:

$$\frac{25}{49} + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{24}{49}.$$

Poiché $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e per tali angoli il coseno è positivo, abbiamo:

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}.$$

Sfruttiamo ora la seconda relazione fondamentale della goniometria, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, per determinare $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{2\sqrt{6}}{7}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}.$$

Determinare le funzioni goniometriche dell'angolo α sapendo che $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ e che $\text{sen}\alpha = 24/25$

Applicando le note formule otteniamo:

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} = -\frac{7}{25}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = -\frac{24}{7}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = -\frac{25}{7}$$

$$\cot g \alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha} = -\frac{7}{24}$$

$$\text{cosec}\alpha = \frac{1}{\text{sen}\alpha} = \frac{25}{24}$$

ESERCIZIO GUIDA

Sapendo che $\cotg \alpha = 3$ e che α appartiene al I quadrante, determiniamo $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ e $\tg \alpha$.

Poiché $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, seno, coseno e tangente di α sono tutti positivi.

- Calcoliamo $\sin \alpha$ applicando la formula $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \cotg^2 \alpha}}$:

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

- Calcoliamo $\cos \alpha$ applicando la formula $\cos \alpha = \frac{\cotg \alpha}{\sqrt{1 + \cotg^2 \alpha}}$:

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{1 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3 \cdot \sqrt{10}}{10}.$$

- Calcoliamo $\tg \alpha$ tenendo presente che $\tg \alpha = \frac{1}{\cotg \alpha}$, quindi:

$$\tg \alpha = \frac{1}{3}.$$

Calcolare il valore delle seguenti espressioni.

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{7}{2} \pi - \cos(-7\pi) + 2\operatorname{sen}\left(-\frac{11}{2} \pi\right)}{2\operatorname{sen}\left(-\frac{3}{2} \pi\right) + \cos 4\pi - 4 \cos \frac{5}{2} \pi} = \frac{-1 + 1 + 2}{2 + 1 - 0} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2\operatorname{sen}90^\circ - 2\sqrt{6}\operatorname{sen}780^\circ + \sqrt{2} \cos 45^\circ}{2\operatorname{sen}150^\circ + \operatorname{tg}(-60^\circ) - 5\operatorname{tg}225^\circ} = \frac{2 \cdot 1 - 2\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2 \cdot \frac{1}{2} - \sqrt{3} - 5} = \frac{3(\sqrt{2} - 1)}{4 + \sqrt{3}}$$

$$\frac{a^2 \operatorname{tg}45^\circ + ab \operatorname{cosec}30^\circ + b^2 \sec 0^\circ}{a \operatorname{cosec}90^\circ - b \operatorname{sen}270^\circ} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a + b} = \frac{(a + b)^2}{a + b} = a + b$$

Semplificare la seguente espressione:

$$\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \operatorname{tg}^2 \alpha \right) \cdot \frac{1}{\sec^2 \alpha}$$

Utilizziamo la seconda relazione fondamentale:

$$\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) \frac{1}{\sec^2 \alpha}.$$

Eseguiamo il calcolo all'interno della parentesi e utilizziamo la definizione di $\sec \alpha$:

$$\left(\frac{1 + \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}}.$$

Trasformiamo il tutto in prodotto fra frazioni:

$$\frac{1 + \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha = 1 + \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

Verificare le seguenti identità.

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{cosec}^2 \alpha} \xrightarrow{\text{sostituire definizioni funzioni goniometriche}} \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \frac{\sin^2 \alpha}{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} \\ &\xrightarrow{\text{relazione fondamentale } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} \frac{\sin^4 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \sin^4 \alpha \xrightarrow{\text{identità verificata}} \sin^4 \alpha = \sin^4 \alpha \end{aligned}$$

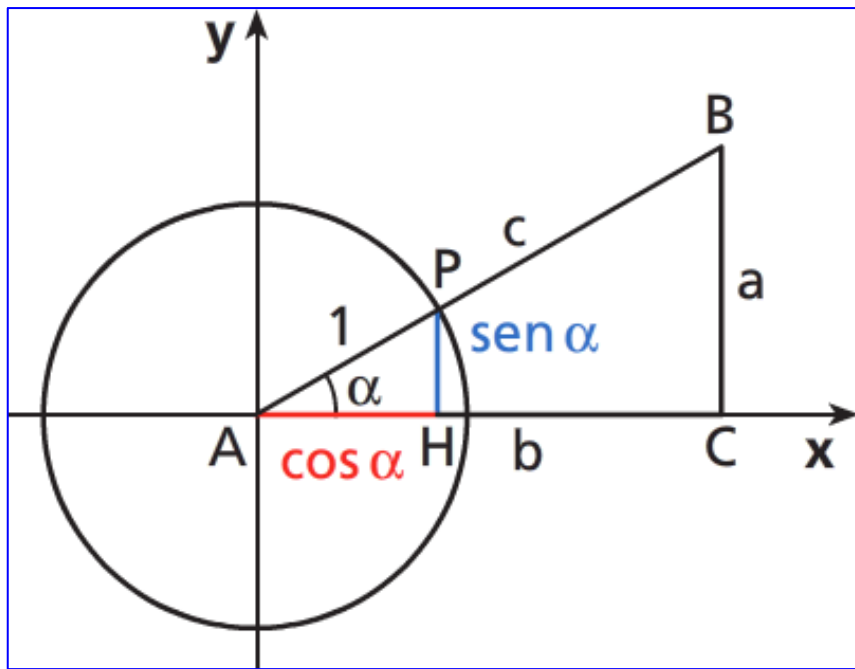
$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$1^\circ \text{ membro} = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$2^\circ \text{ membro} = 1 + \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = 1 + \frac{2 \sin \alpha}{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = 1 + \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{1} = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$1^\circ \text{ membro} = 2^\circ \text{ membro} \Rightarrow \text{identità verificata}$$

Teoremi triangolo rettangolo



I due triangoli APH e ABC sono simili:

$$\overline{BC} : \overline{AB} = \overline{PH} : \overline{AP}$$

$$\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{AH} : \overline{AP}$$

$$\overline{AP} = 1 \quad \overline{PH} = \text{sen } \alpha \quad \overline{AH} = \text{cos } \alpha$$

si ha il seguente teorema:

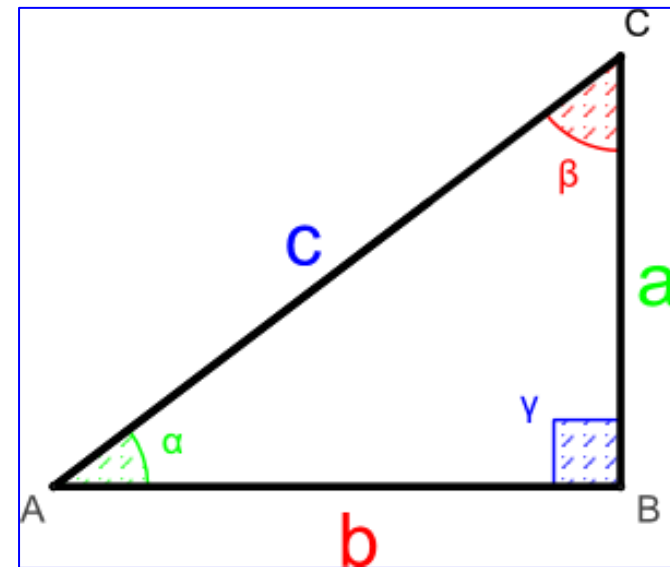
Primo teorema dei triangoli rettangoli

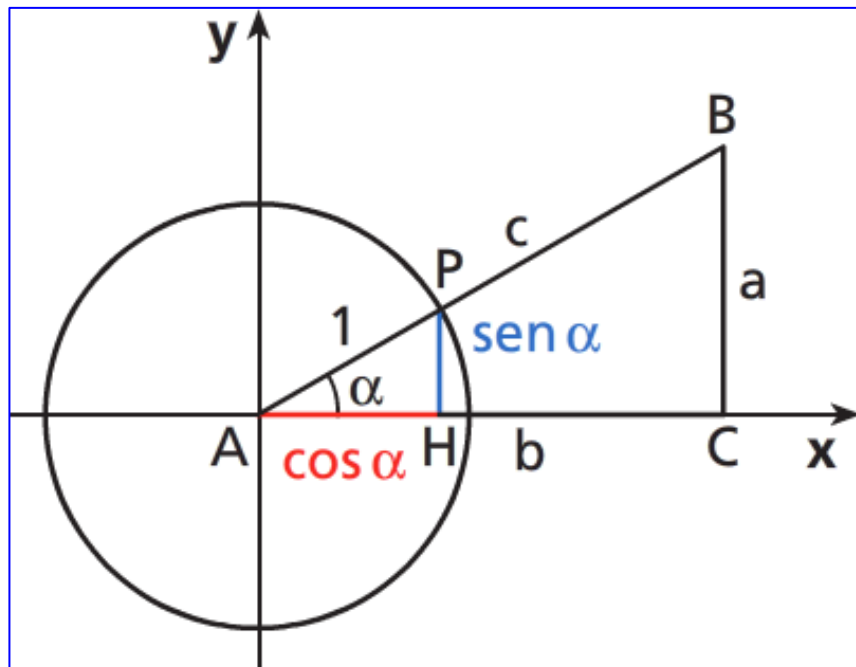
Cateto = ipotenusa $\times$ seno dell'angolo
opposto al cateto

$$a = c \cdot \text{sen } \alpha \quad b = c \cdot \text{sen } \beta$$

Cateto = ipotenusa $\times$ coseno dell'angolo
adiacente al cateto

$$a = c \cdot \text{cos } \beta \quad b = c \cdot \text{cos } \alpha$$





Per i due triangoli APH e ABC, essendo simili, possiamo anche scrivere:

$$\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{PH} : \overline{AH}$$

$$\overline{BC} = \text{sen} \alpha \quad \overline{AC} = \cos \alpha$$

$$\overline{PH} = \text{sen} \alpha \quad \overline{AH} = \cos \alpha$$

si ha il seguente teorema:

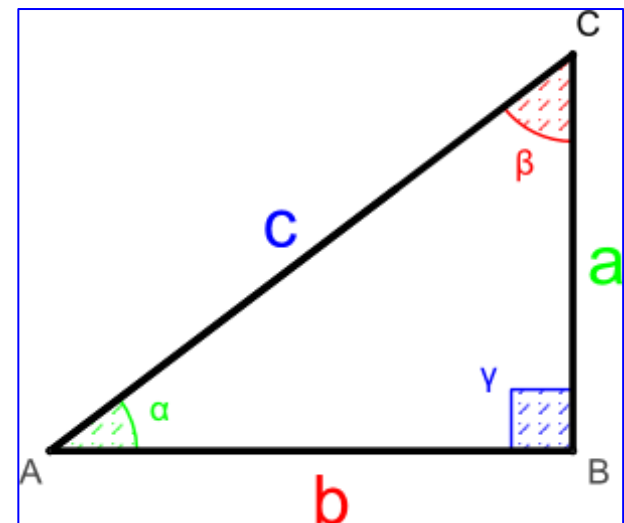
Secondo teorema dei triangoli rettangoli

Cateto=altro cateto x tangente dell'angolo opposto al cateto

$$a = b \cdot \text{tg} \alpha \quad b = a \cdot \text{tg} \beta$$

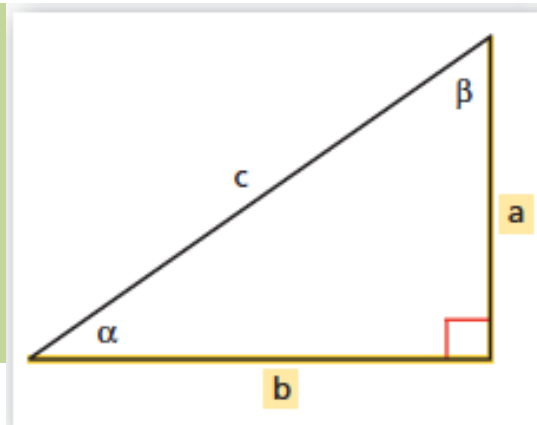
Cateto=altro cateto x cotangente dell'angolo adiacente al cateto

$$a = b \cdot \cot g \beta \quad b = a \cdot \cot g \alpha$$



ESERCIZI

Sono noti due
cateti (a,b) ,
determinare
 (α, β, c)



$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$, da cui ricaviamo

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a}{b};$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha;$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ per il teorema di Pitagora.}$$

ESEMPIO

Le misure dei due cateti del triangolo in figura sono $a = 40$ e $b = 110$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{40}{110} = 0,3\overline{6}, \quad \text{da cui}$$

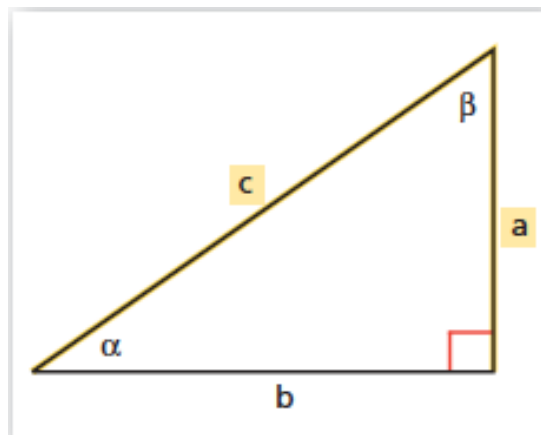
$$\alpha \simeq 19^\circ 58' 59'', \text{ che approssimiamo a } 20^\circ,$$

$$\alpha \simeq 20^\circ \rightarrow \beta \simeq 90^\circ - 20^\circ \simeq 70^\circ.$$

$$c = \sqrt{40^2 + 110^2} = \sqrt{1600 + 12100} = \sqrt{13700} \simeq 117.$$

È possibile calcolare il valore di c anche senza applicare il teorema di Pitagora, ma ricavando c dalla formula: $a = c \sin \alpha$.

Sono noti due
cateti (a, c) ,
determinare
 (α, β, b)



$\sin \alpha = \frac{a}{c}$, da cui ricaviamo

$$\alpha = \arcsin \frac{a}{c};$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha;$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}, \text{ per il teorema di Pitagora.}$$

Si può ricavare b anche senza applicare il teorema di Pitagora, ma con:

$$b = c \cos \alpha \text{ o } b = c \sin \beta.$$

ESEMPIO

In un triangolo rettangolo le misure di un cateto e dell'ipotenusa sono $a = 21,13$ e $c = 50$.

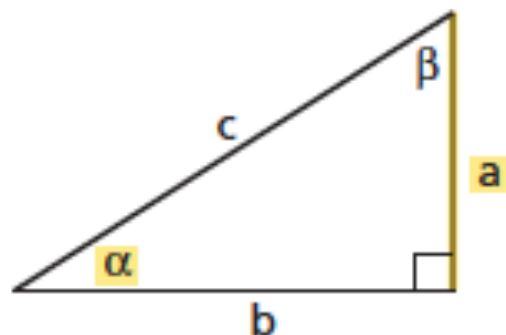
Ricaviamo:

$$\sin \alpha = \frac{21,13}{50} = 0,4226 \rightarrow \alpha \simeq 25^\circ;$$

$$\beta \simeq 90^\circ - 25^\circ \simeq 65^\circ;$$

$$b = \sqrt{50^2 - (21,13)^2} = \sqrt{2500 - 446,4769} = \sqrt{2053,5231} \simeq 45,3.$$

Sono noti un cateto
e un angolo acuto
(a, α), determinare
(β, b, c).



$$\beta = 90^\circ - \alpha;$$

$$b = a \operatorname{tg} \beta;$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

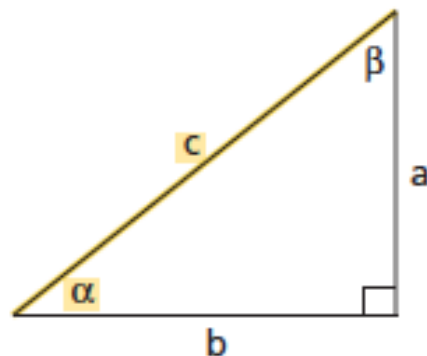
ESEMPIO

Consideriamo il triangolo rettangolo in cui sono noti $a = 8$ e $\alpha = 28^\circ$.
Si ricava:

$$\beta = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ; \quad b = 8 \operatorname{tg} 62^\circ \simeq 8 \cdot 1,88 \simeq 15;$$

$$c \simeq \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17.$$

Sono noti l'ipotenusa e un angolo acuto (c, α), determinare (β, a, b).



$$\beta = 90^\circ - \alpha;$$

$$a = c \sin \alpha;$$

$$b = c \sin \beta.$$

ESEMPIO

Consideriamo il triangolo rettangolo della figura a lato. Le misure dell'ipotenusa e dell'angolo sono rispettivamente $c = 28,3$ e $\alpha = 58^\circ$.

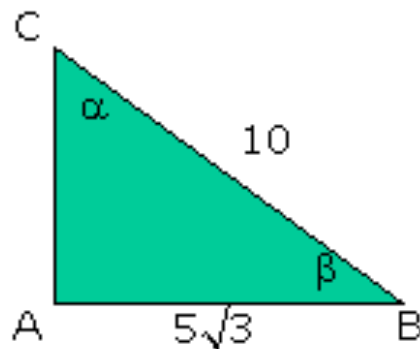
Si ricava:

$$\beta = 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ;$$

$$a = 28,3 \cdot \sin 58^\circ \simeq 28,3 \cdot 0,848 \simeq 24;$$

$$b = 28,3 \cdot \sin 32^\circ \simeq 28,3 \cdot 0,5299 \simeq 15.$$

Utilizzando i dati della figura, deduci ciò che è indicato a fianco:



$\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\cos \beta$, $\sin \beta$, AC

SOLUZIONE

Applichiamo i teoremi sul triangolo rettangolo:

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{100 - 75} = 5$$

$$AC = BC \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

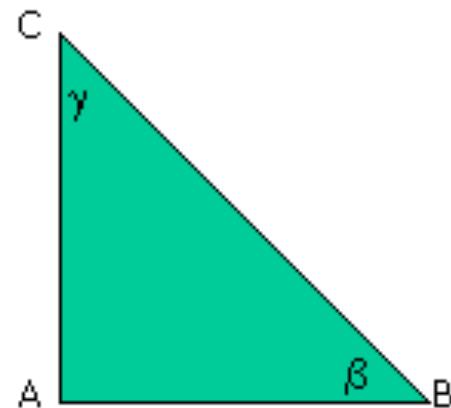
$$AB = BC \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$AB = BC \cdot \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{AB}{BC} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$AC = BC \cdot \sin \beta \Rightarrow \sin \beta = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Risolvere il triangolo rettangolo ABC, retto in A, sapendo che il cateto AB misura 1 cm e $\sin\beta = 2/3$.

Risolvere il triangolo rettangolo significa calcolare i tre lati e i tre angoli. Applichiamo i teoremi sul triangolo rettangolo:



$$\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\beta = \arccos \frac{\sqrt{5}}{3} = 41,8^\circ$$

$$\sin\gamma = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\gamma = \arcsin \frac{\sqrt{5}}{3} = 48,2^\circ$$

$$AB = BC \cdot \cos\beta \Rightarrow BC = \frac{AB}{\cos\beta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{\frac{9}{5} - 1} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo un triangolo ABC rettangolo in A , sapendo che:

- a) un cateto è lungo 10 cm e l'ipotenusa 26 cm;
- b) i due cateti sono lunghi 30 cm e 40 cm.

- a) Troviamo gli elementi incogniti del triangolo.

Per ricavare β , applichiamo il primo teorema dei triangoli rettangoli:

$$\overline{AB} = \overline{BC} \cos \beta$$

$$10 = 26 \cos \beta \rightarrow \cos \beta = \frac{5}{13} \rightarrow \beta = \arccos \frac{5}{13}.$$

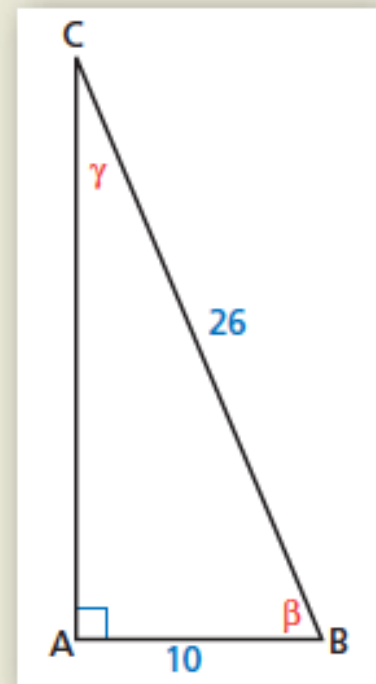
Ricaviamo γ :

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{5}{13}.$$

Essendo $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$, ricaviamo $\sin \beta$:

$$\sin \beta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \beta} \rightarrow \sin \beta = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13};$$

abbiamo scelto il valore positivo perché β è un angolo acuto.



Per il primo teorema dei triangoli rettangoli si ha:

$$\overline{AC} = \overline{CB} \sin \beta \rightarrow \overline{AC} = 26 \cdot \frac{12}{13} = 24. \text{ La lunghezza di } AC \text{ è } 24 \text{ cm.}$$

b) Per il secondo teorema dei triangoli rettangoli,

$$\overline{AC} = \overline{AB} \tan \beta \rightarrow 40 = 30 \tan \beta \rightarrow \tan \beta = \frac{4}{3}$$

$$\beta = \arctan \frac{4}{3},$$

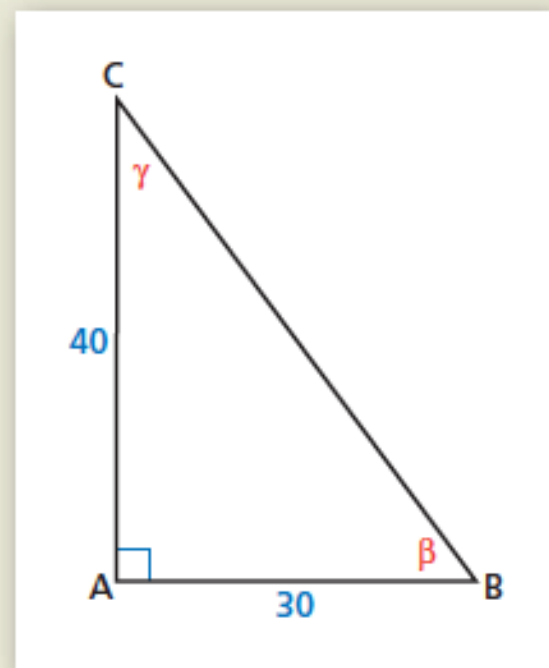
da cui:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{4}{3}.$$

Con il teorema di Pitagora calcoliamo $\overline{BC}$:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50.$$

L'ipotenusa BC ha lunghezza 50 cm.

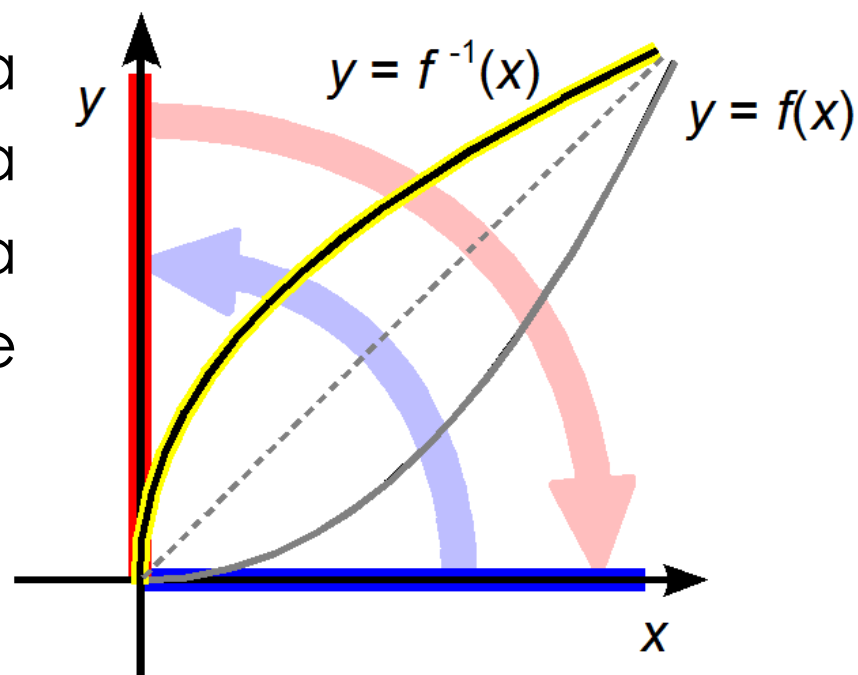


Funzioni goniometriche inverse

teorema – Una funzione è invertibile (ammette inversa) se e solo se è biiettiva (iniettiva e suriettiva).

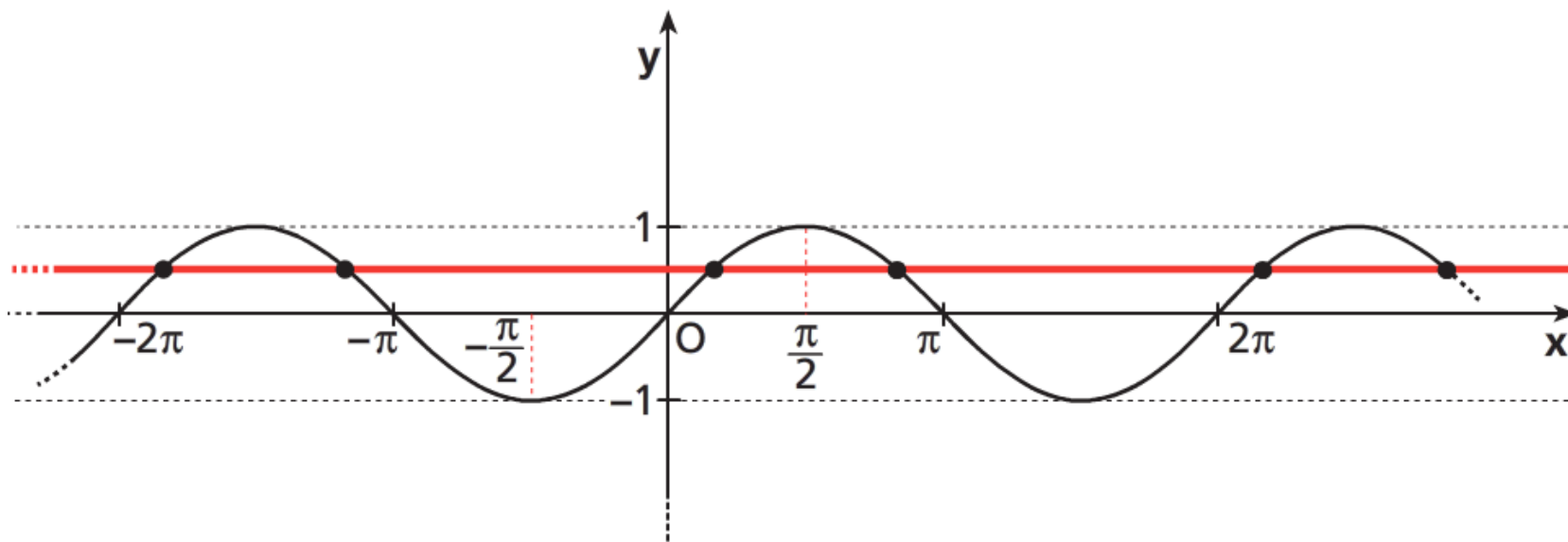
Data una funzione biiettiva $y=f(x)$, disegnare il grafico della funzione inversa f^{-1} equivale a partire dalle ordinate di f e ricavare le ascisse.

Ordinate e ascisse si scambiano i ruoli.



Il grafici di f e di f^{-1} sono simmetrici rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

funzione inversa di $y=\sin x$



La funzione $y=\sin x$ non è biiettiva nel suo dominio (perché non è iniettiva), quindi non è invertibile.

Infatti la retta $y=k$ interseca la funzione $y=\sin x$ in infiniti punti, quindi ogni valore del codominio $[-1;1]$ è il corrispondente di infiniti valori del dominio $\mathbb{R}$.

*Come facciamo a rendere invertibile la
funzione $y=\sin x$?*

Dobbiamo restringere il dominio della
funzione all'intervallo $[-\pi/2; \pi/2]$. In
questo intervallo la funzione $y=\sin x$ è
biiettiva, quindi invertibile. La funzione
inversa del seno si chiama arcoseno
($y=\arcsin x$).

DEFINIZIONE

Arcoseno

Dati i numeri reali x e y , con

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2},$$

diciamo che y è l'arcoseno di x se x è il seno di y .

Scriviamo: $y = \arcsen x$.

$$y = \arcsen x$$

$$D = [-1; 1]$$

$$C = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$



$$x = \sen y$$

esempio

$$\arcsen 1 = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{x=1 \quad y=\pi/2} \sen \frac{\pi}{2} = 1$$

esempio

$$\arcsen \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \xrightarrow{x=1/2 \quad y=\pi/6} \sen \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

esempio

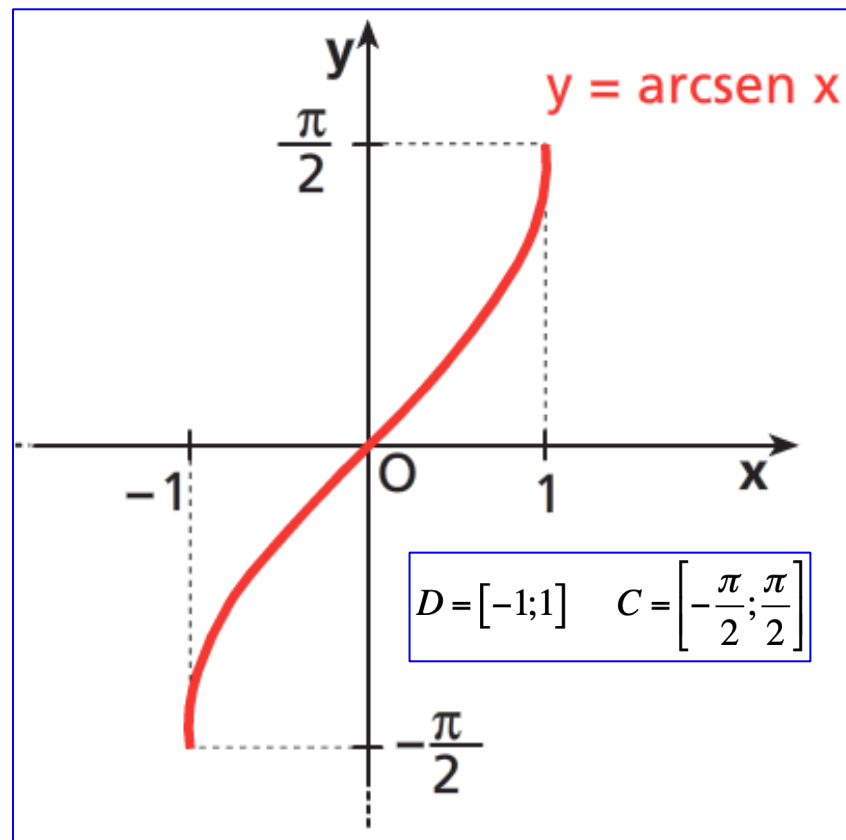
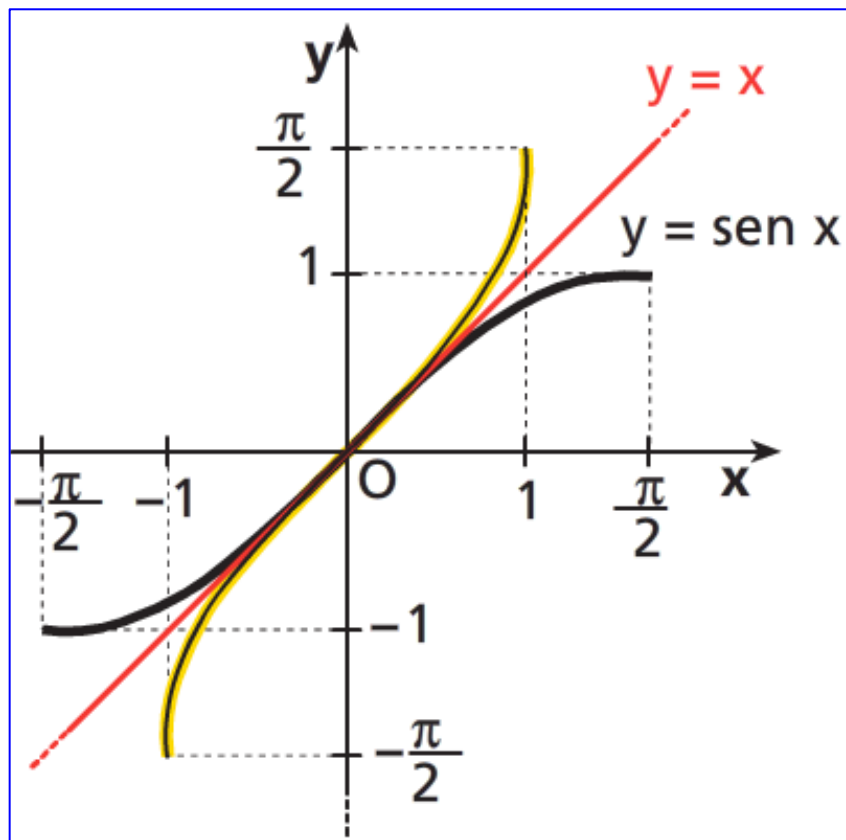
$$y = \arcsen 1 \xrightarrow{x=\sen y} \sen y = 1 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$$

esempio

$$y = \arcsen \frac{1}{2} \xrightarrow{x=\sen y} \sen y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6}$$

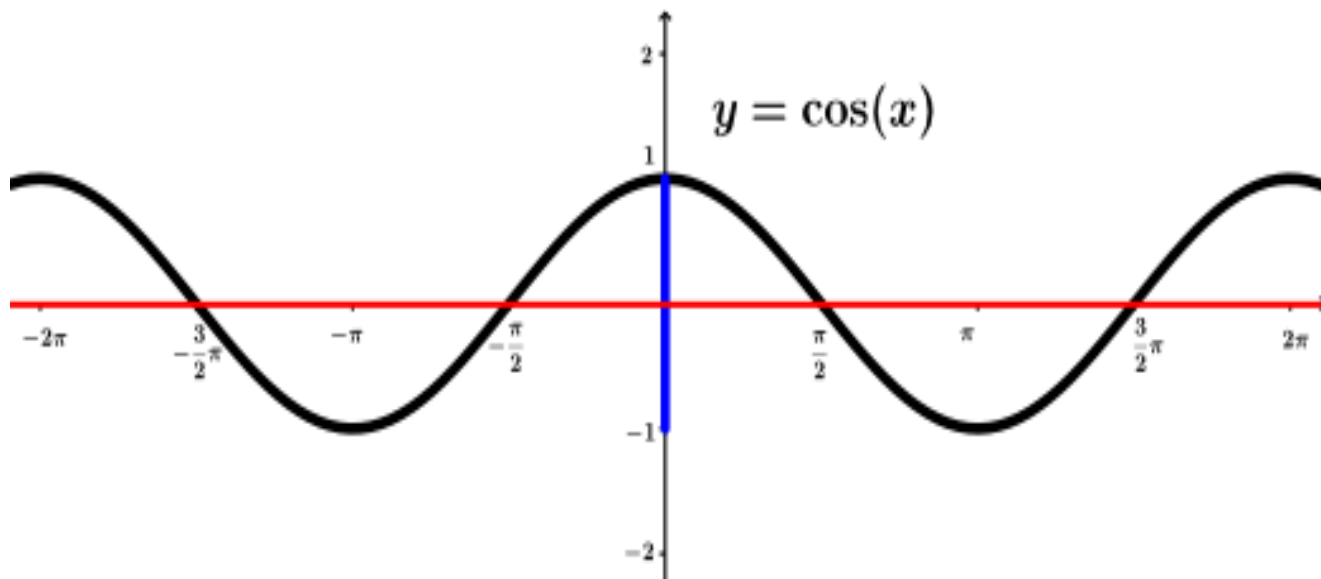
Come ottenere il grafico della funzione $y=\arcsen x$:

dato il grafico di $y=\sen x$ in $[-\pi/2;\pi/2]$, tracciare il simmetrico rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante.



funzione inversa di $y=\cos x$

Le considerazioni fatte sull'invertibilità della funzione $y=\sin x$, valgono anche per la funzione $y=\cos x$.



La funzione $y=\cos x$ è invertibile se restringiamo il suo dominio all'intervallo $[0;\pi]$. La funzione inversa del coseno si chiama arcocoseno ($y=\arccos x$).

DEFINIZIONE

Arcocoseno

Dati i numeri reali x e y , con $-1 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq \pi$, diciamo che y è l'arcocoseno di x se x è il coseno di y .

Scriviamo: $y = \arccos x$.

$$y = \arccos x$$

$$D = [-1; 1]$$



$$C = [0; \pi]$$

$$x = \cos y$$

esempio

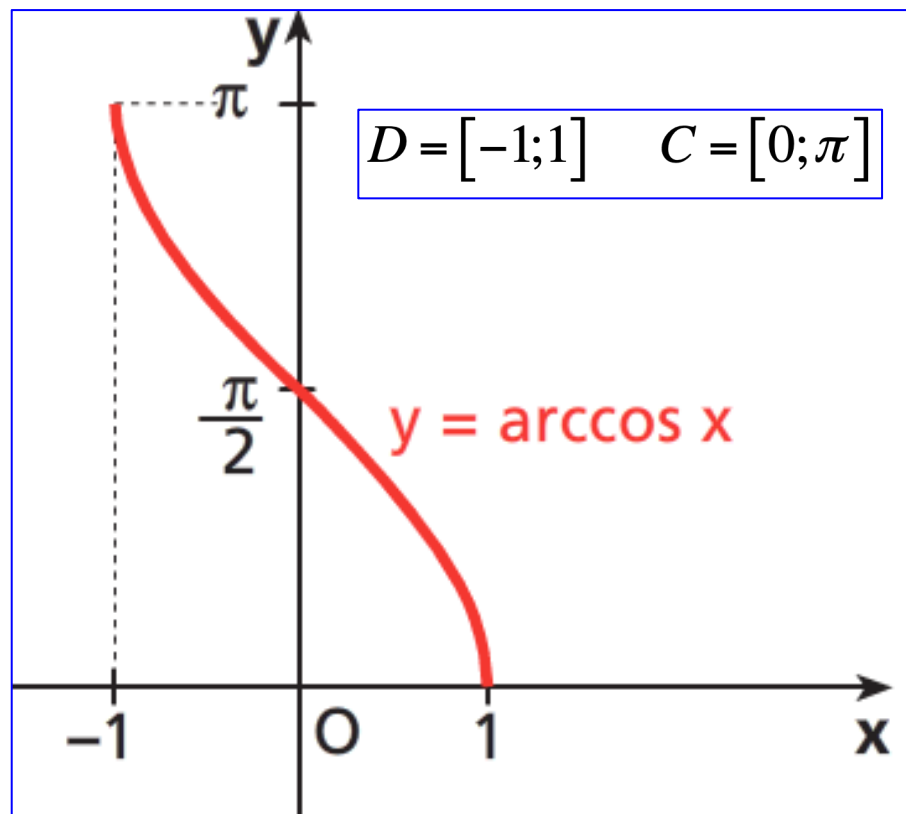
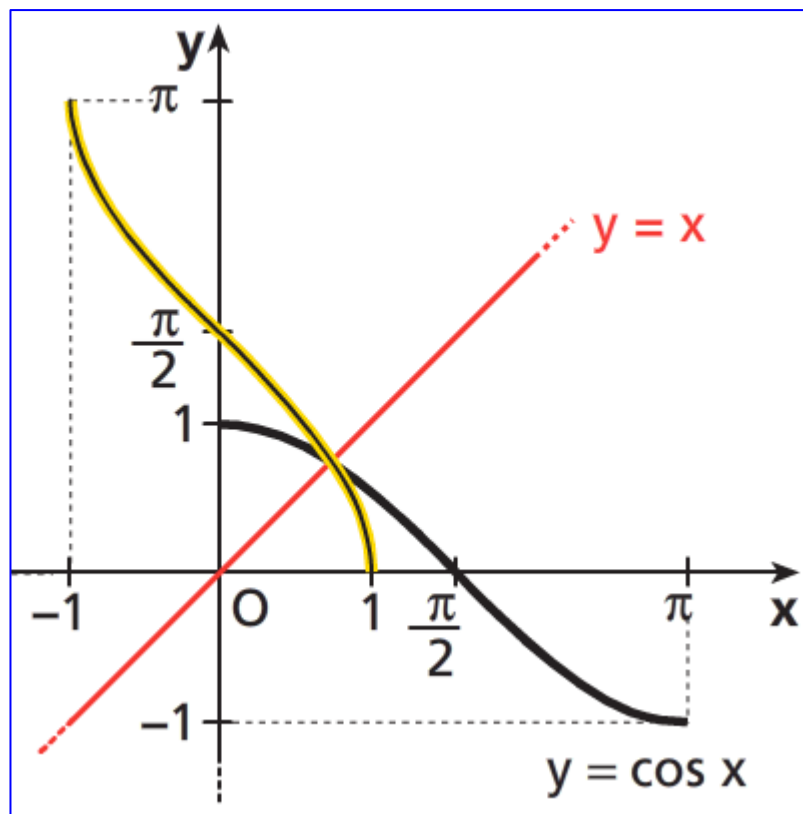
$$\arccos(-1) = \pi \xrightarrow{x=-1 \quad y=\pi} \cos \pi = -1$$

esempio

$$y = \arccos(-1) \xrightarrow{x=\cos y} \cos y = -1 \Rightarrow y = \pi$$

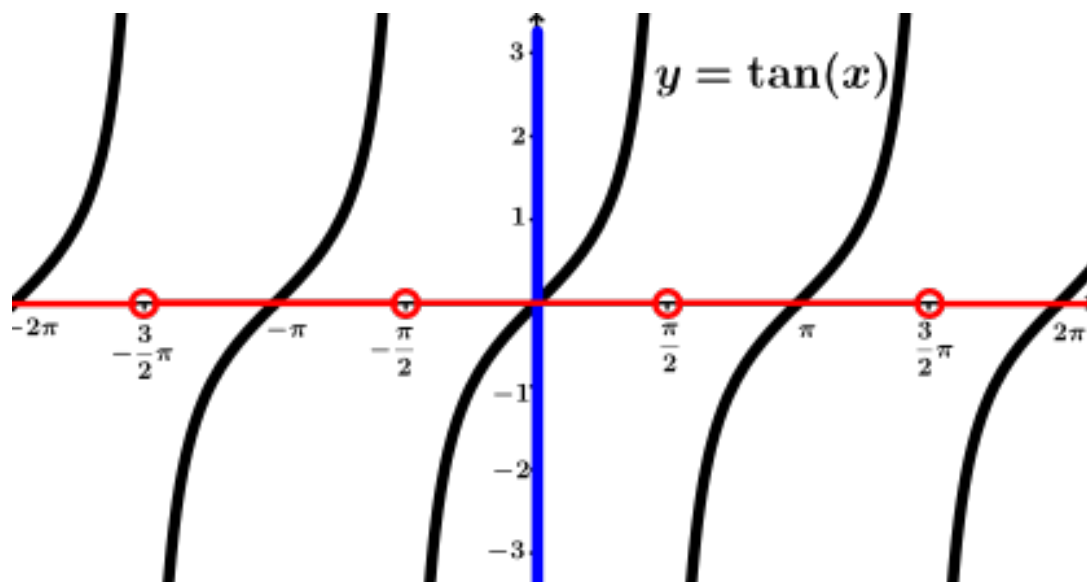
Come ottenere il grafico della funzione $y=\arccos x$:

dato il grafico di $y=\cos x$ in $[0;\pi]$, tracciare il simmetrico rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante.



funzione inversa di $y=\operatorname{tg}x$

Le considerazioni fatte sull'invertibilità della funzione $y=\operatorname{sen}x$ e $y=\operatorname{cos}x$, valgono anche per la funzione $y=\operatorname{tg}x$.



La funzione $y=\operatorname{tg}x$ è invertibile se restringiamo il suo dominio all'intervallo $]-\pi/2;\pi/2[$. La funzione inversa della tangente si chiama arcotangente ($y=\operatorname{arctg}x$).

DEFINIZIONE

Arcotangente

Dati i numeri reali x e y , con $x \in \mathbb{R}$ e $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, diciamo che y è l'arcotangente di x se x è la tangente di y .

Scriviamo: $y = \operatorname{arctg} x$.

$$y = \operatorname{arctg} x$$

$$D = \mathbb{R}$$



$$x = \operatorname{tg} y$$

$$C = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

esempio

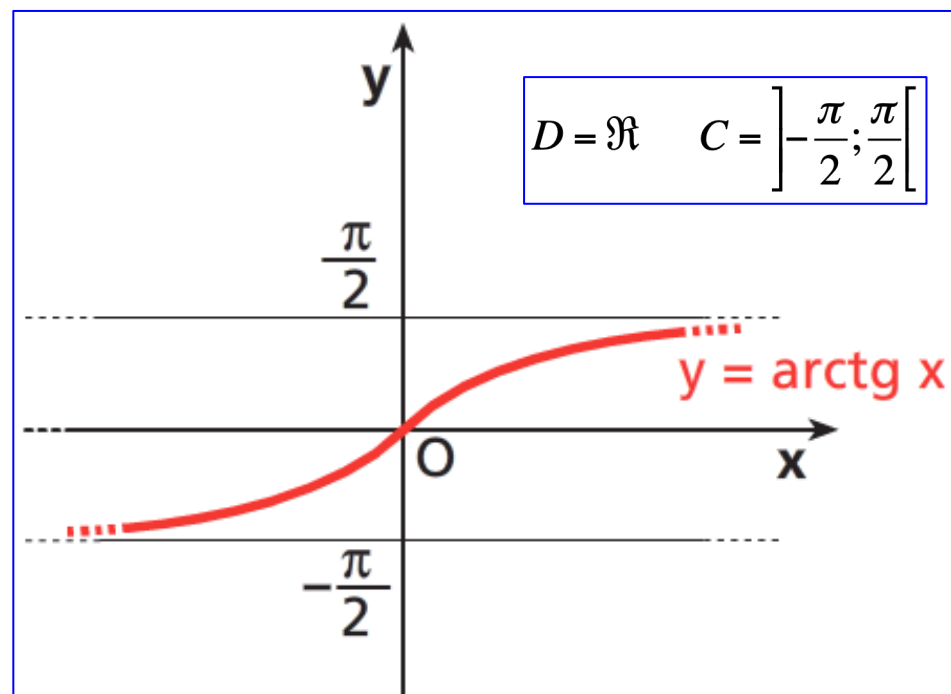
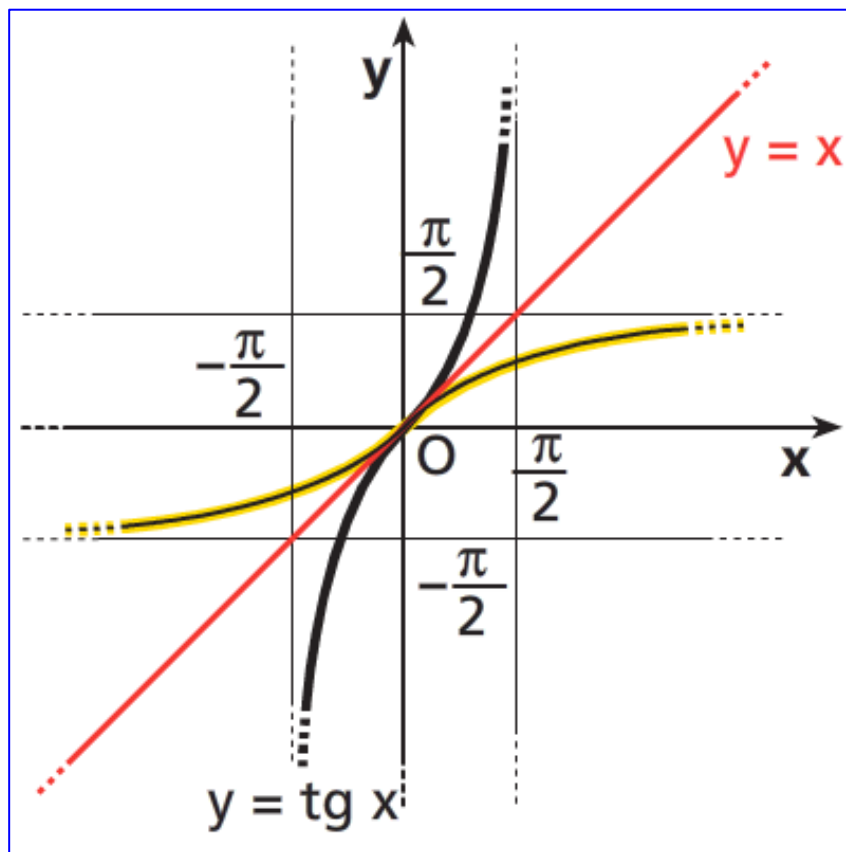
$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x=1 \quad y=\pi/4} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$$

esempio

$$y = \operatorname{arctg} 1 \xrightarrow{x=\operatorname{tgy}} \operatorname{tgy} = 1 \Rightarrow y = \frac{\pi}{4}$$

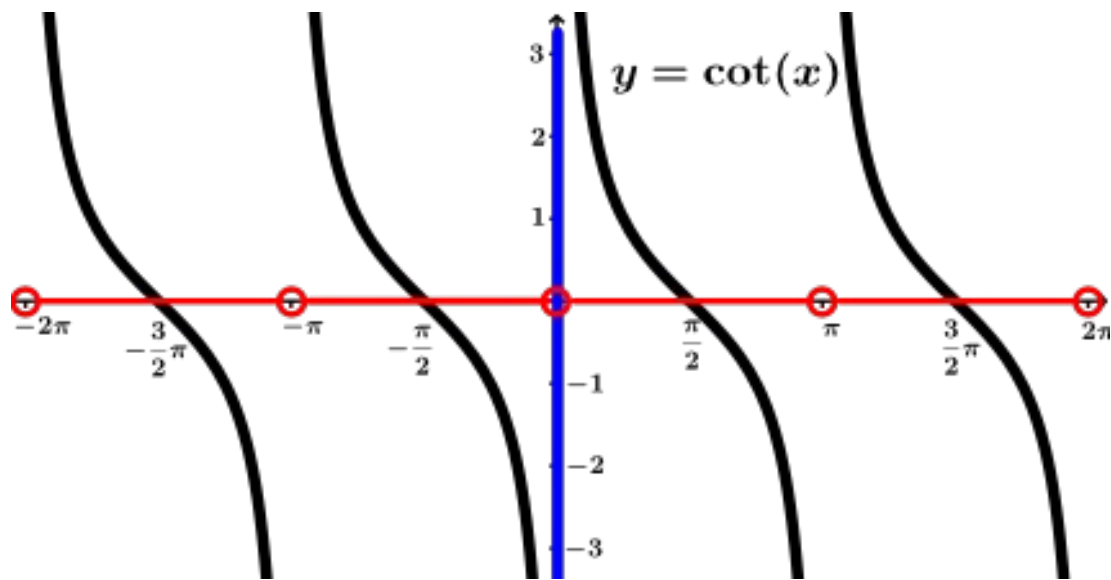
Come ottenere il grafico della funzione $y=\operatorname{arctg}x$:

dato il grafico di $y=\operatorname{tg}x$ in $]-\pi/2;\pi/2[$, tracciare il simmetrico rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante.



funzione inversa di $y=\cot x$

Le considerazioni fatte sull'invertibilità della funzione $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, valgono anche per la funzione $y=\cot x$.



La funzione $y=\cot x$ è invertibile se restringiamo il suo dominio all'intervallo $]0;\pi[$. La funzione inversa della cotangente si chiama arcocotangente ($y=\text{arccot} x$).

DEFINIZIONE

Arcocotangente

Dati i numeri reali x e y , con $x \in \mathbb{R}$ e $0 < y < \pi$, diciamo che y è l'arcocotangente di x se x è la cotangente di y .
Scriviamo: $y = \operatorname{arccotg} x$.

$$y = \operatorname{arccotg} x$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$C =]0; \pi[$$



$$x = \operatorname{cotg} y$$

esempio

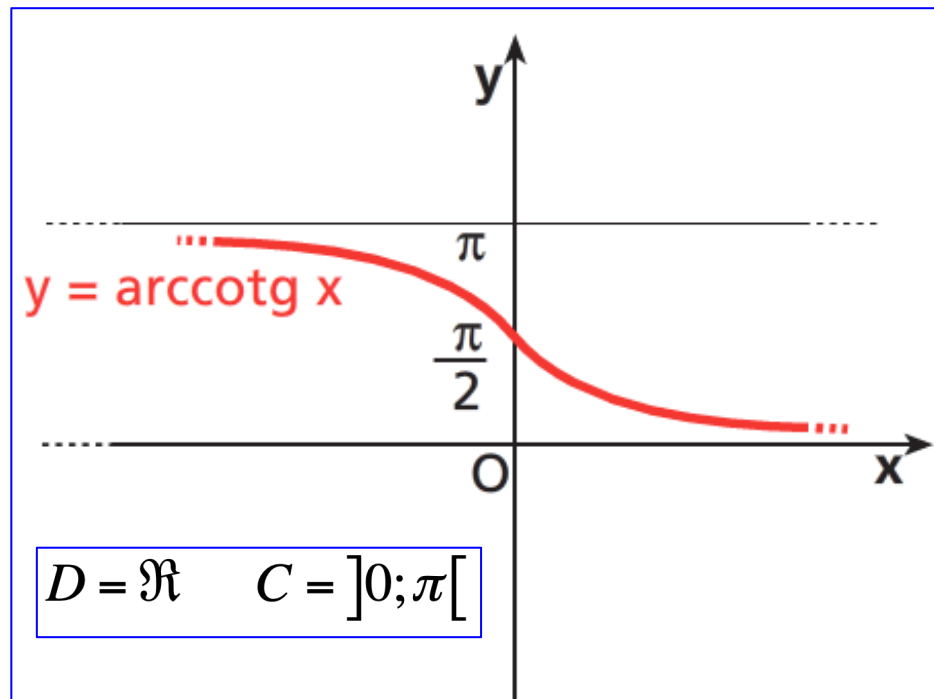
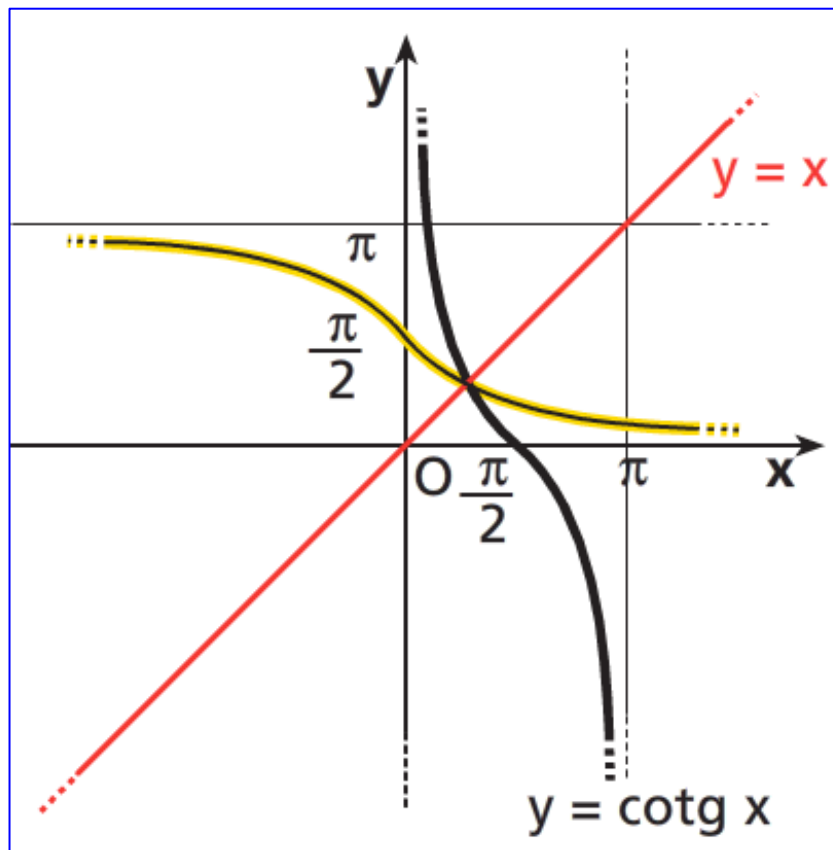
$$\operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{x=0 \quad y=\pi/2} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} = 0$$

esempio

$$y = \operatorname{arccotg} 0 \xrightarrow{x=\operatorname{cotg} y} \operatorname{cotg} y = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$$

Come ottenere il grafico della funzione $y = \operatorname{arccotg} x$:

dato il grafico di $y = \cotg x$ in $]0; \pi[$, tracciare il simmetrico rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante.



ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\cos\left[\arcsen\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$.

- Si tratta di una funzione composta; calcoliamo il valore della funzione più «interna», $\arcsen\left(-\frac{1}{2}\right)$, tenendo conto che il codominio dell'arcoseno è $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Pertanto } \cos\left[\arcsen\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

- Calcoliamo ora il valore della funzione «esterna»:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Determinare il campo di esistenza della funzione:

$$y = \arcsen \frac{x+1}{x-2}$$

Poiché il campo di esistenza della funzione $y = \arcsen x$ è $[-1; 1]$, dobbiamo imporre:

$$-1 \leq \frac{x+1}{x-2} \leq 1$$

che equivale a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-2} \geq -1 \\ \frac{x+1}{x-2} \leq 1 \end{cases}$$

Risolviamo separatamente le due disequazioni fratte che formano il sistema.

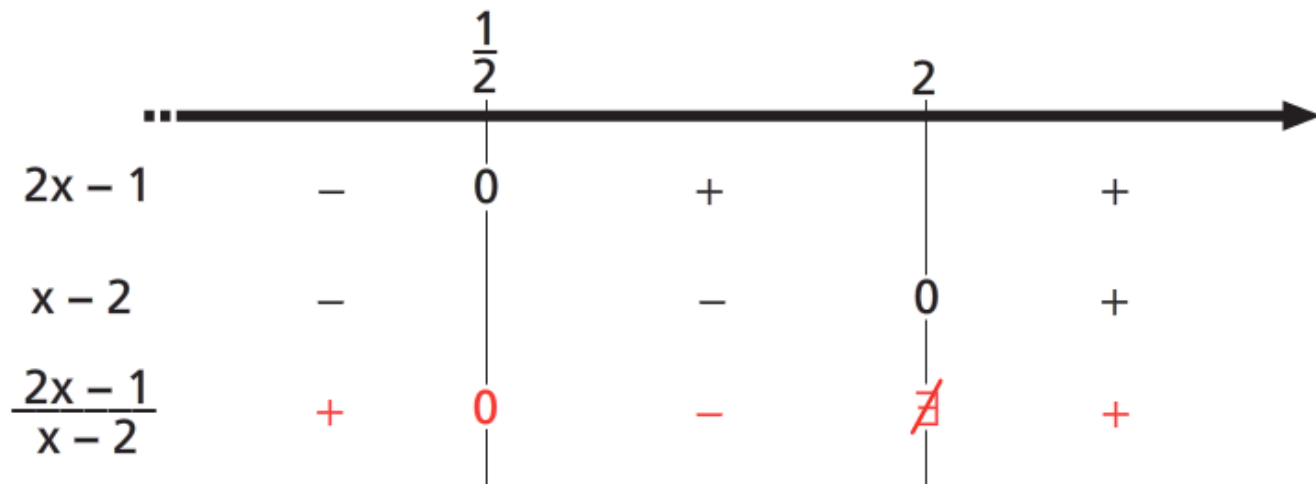
prima disequazione

$$\frac{x+1}{x-2} \geq -1 \xrightarrow[\text{algebrici}]{\text{calcoli}} \frac{2x-1}{x-2} \geq 0$$

$$\xrightarrow{\text{soluzione}} x \leq \frac{1}{2} \vee x > 2$$

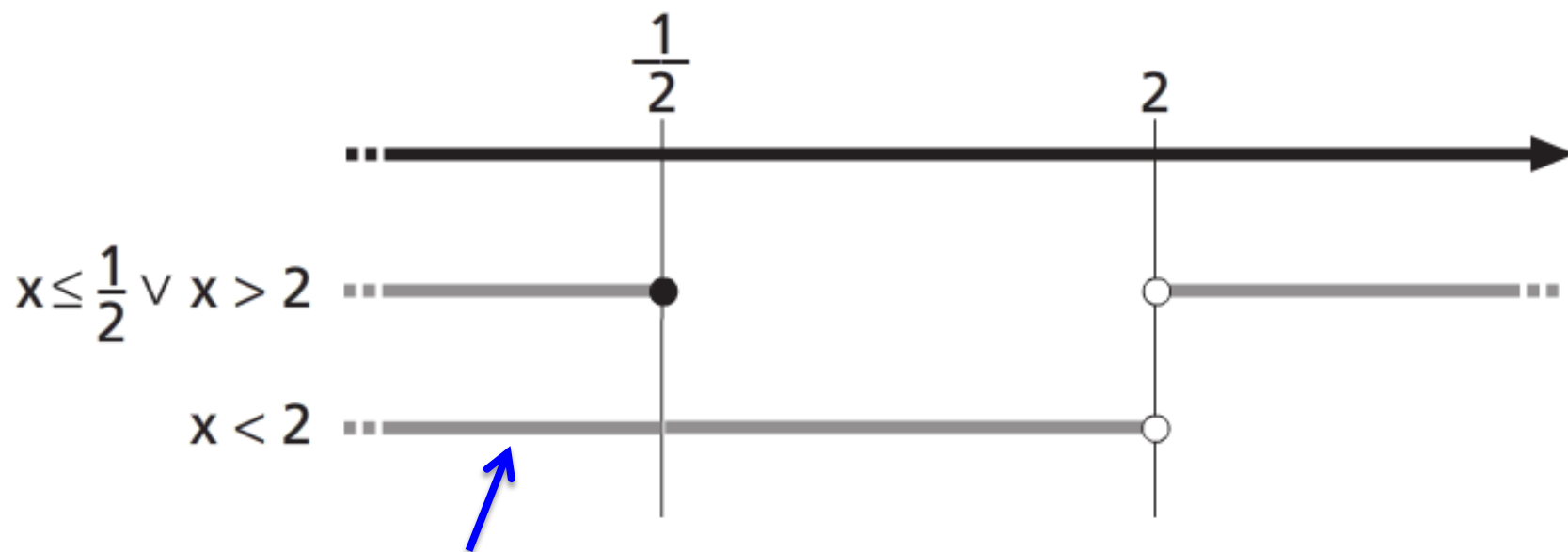
seconda disequazione

$$\frac{x+1}{x-2} \leq 1 \xrightarrow[\text{algebrici}]{\text{calcoli}} \frac{3}{x-2} \leq 0 \xrightarrow{\text{soluzione}} x < 2$$



soluzione sistema

$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \vee x > 2 \\ x < 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{soluzione}} x \leq \frac{1}{2}$$

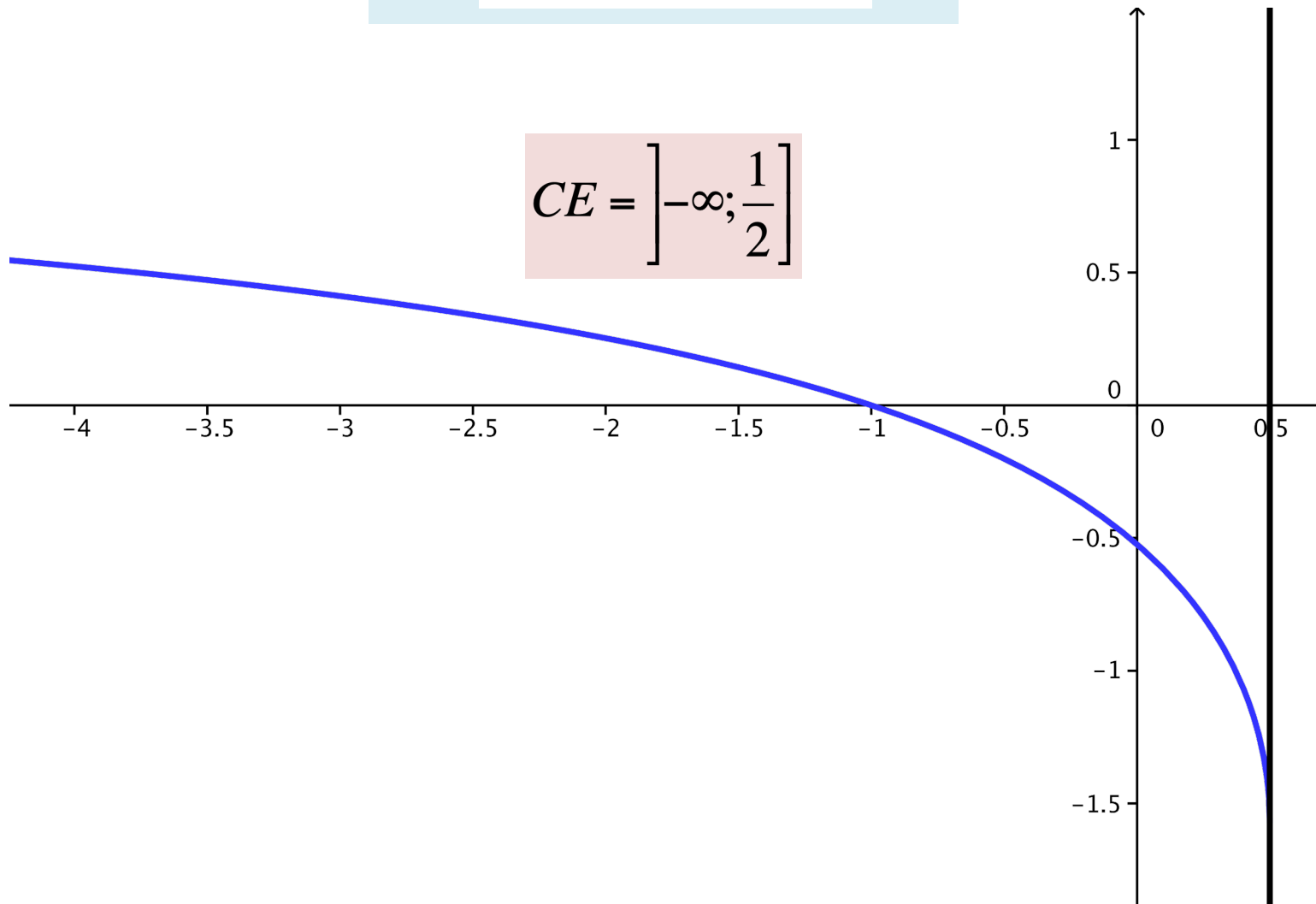


$$CE = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right]$$

Grafico della funzione

$$y = \arcsen \frac{x+1}{x-2}$$

$$CE = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right]$$



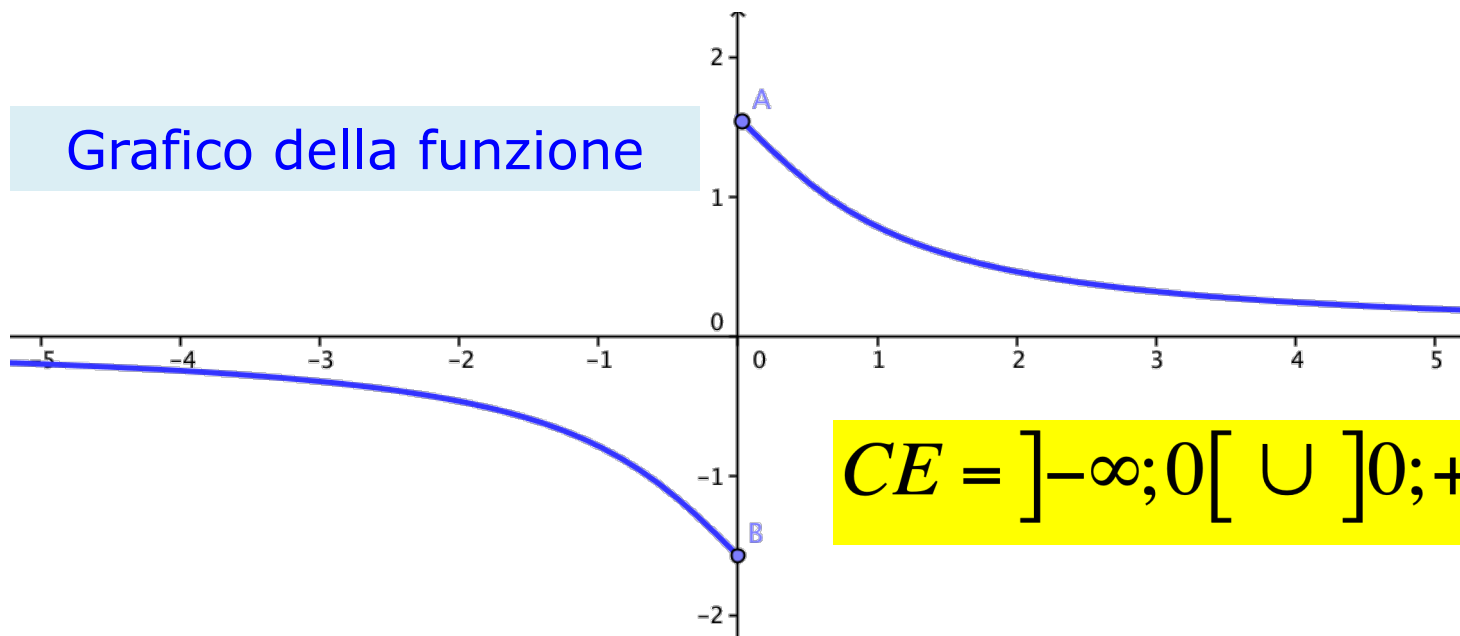
Determinare il campo di esistenza della funzione:

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

Poiché il campo di esistenza della funzione $y = \operatorname{arctg} x$ è l'insieme $\mathbb{R}$, allora:

$$-\infty < \frac{1}{x} < +\infty \xrightarrow{\text{ossia}} \forall x \neq 0$$

Grafico della funzione



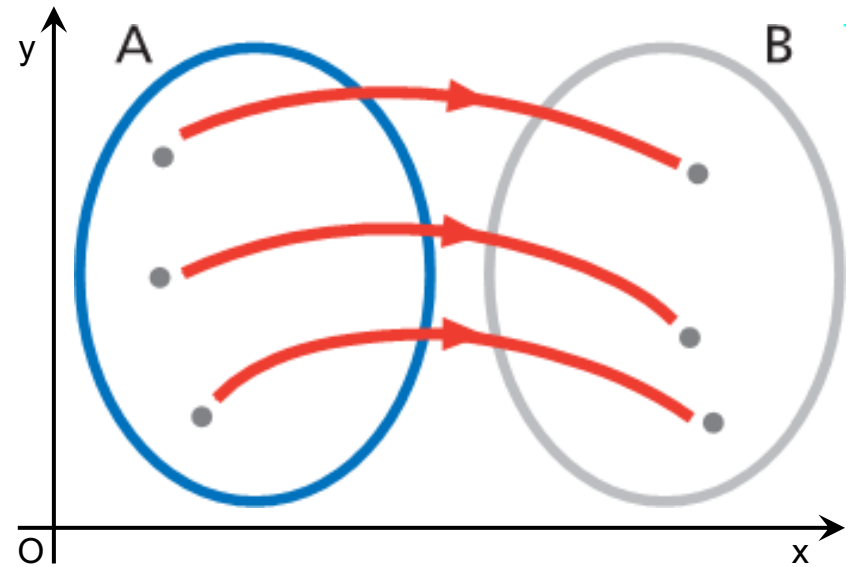
$$CE =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

Notare come la funzione nel punto $x=0$ (punto in cui non esiste) presenta una discontinuità, ossia salta da B ad A.

Grafici funzioni
goniometriche e
trasformazioni geometriche

DEFINIZIONE

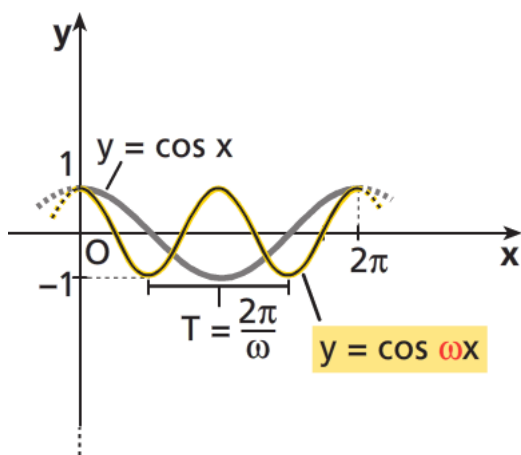
Una **trasformazione geometrica** nel piano è una corrispondenza biunivoca che associa a ogni punto del piano uno e un solo punto del piano stesso.



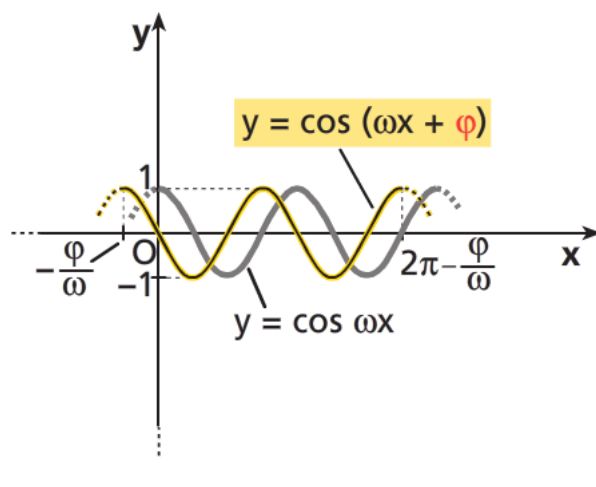
Dai grafici delle funzioni goniometriche si ottengono grafici di altre funzioni mediante le trasformazioni geometriche (traslazioni, simmetrie, dilatazioni e contrazioni).

Esaminiamo come cambia la seguente funzione (già incontrata nello studio del moto ondulatorio).

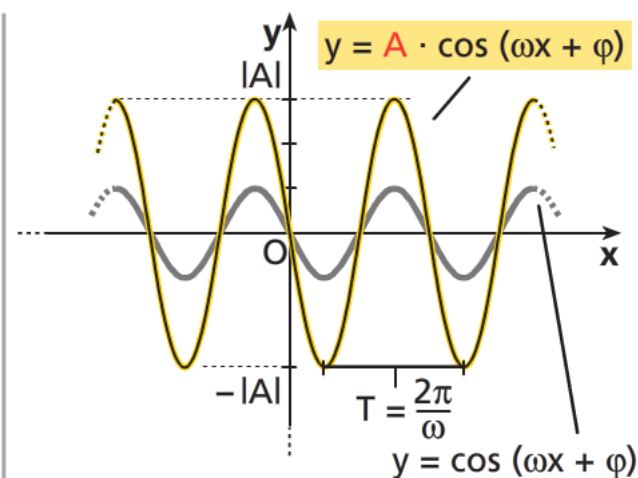
$$y = A \sin(\omega x + \varphi) = A \cos(\omega x + \varphi) \quad \text{con } (A, \omega, \varphi) \in \mathbb{R}$$



Il cambiamento di ω
(**pulsazione**) produce
una contrazione
orizzontale e modifica il
periodo della funzione



Il cambiamento di φ
(**sfasamento**) produce una
traslazione orizzontale



Il cambiamento di $|A|$
(**ampiezza**) genera una
dilatazione o contrazione
verticale

ESERCIZI

Calcolare il periodo della funzione:

$$y = A \sin(\omega x + \varphi)$$

La funzione $y = \sin x$ è periodica di periodo 2π , quindi:

$$A \sin(\omega x + \varphi + 2k\pi) = A \sin(\omega x + \varphi) \Rightarrow$$

$$A \sin[(\omega x + 2k\pi) + \varphi] = A \sin(\omega x + \varphi)$$

$$A \sin\left[\omega\left(x + k \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right] = A \sin(\omega x + \varphi) \xrightarrow[\text{il periodo}]{\text{da cui deduciamo}} \rightarrow$$

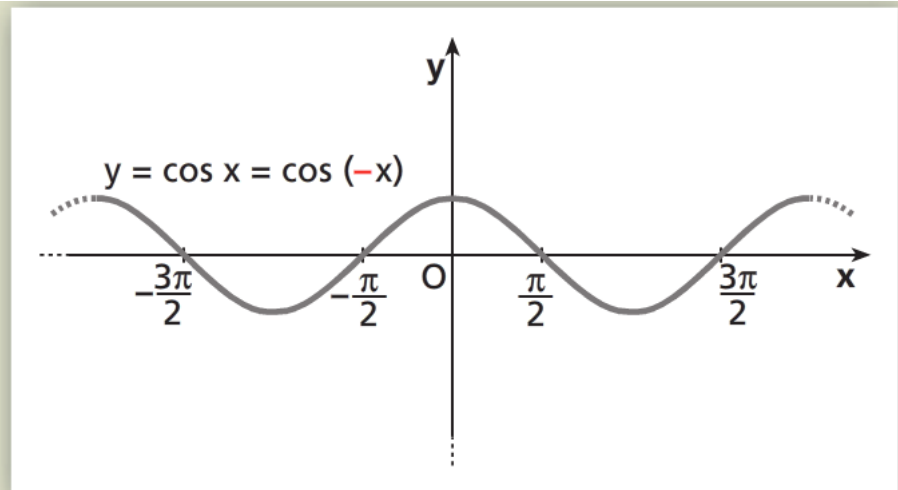
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

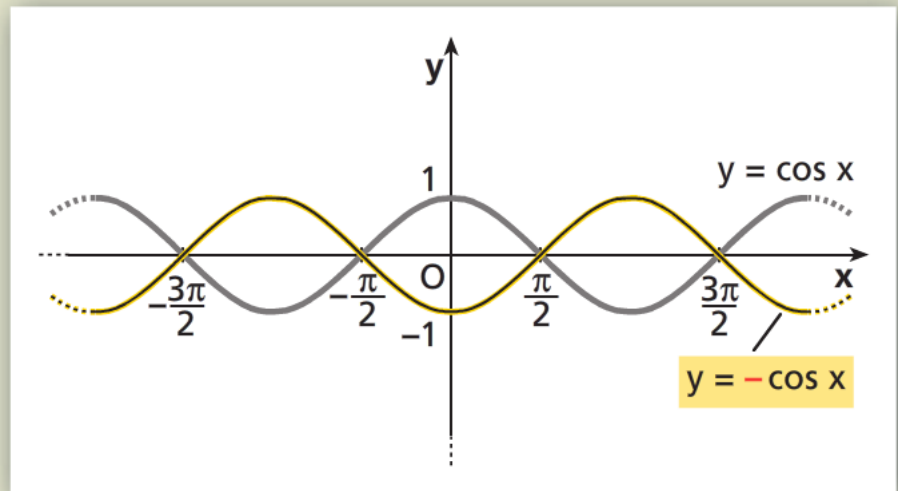
$$y = -\cos(x)$$

$$y = \cos(-x)$$

- a) Sappiamo che il grafico di $y = f(-x)$ è simmetrico di quello di $y = f(x)$ rispetto all'asse y . Poiché il grafico di $y = \cos x$ è simmetrico rispetto all'asse y , il grafico di $y = \cos(-x)$ coincide con quello di $y = \cos x$.



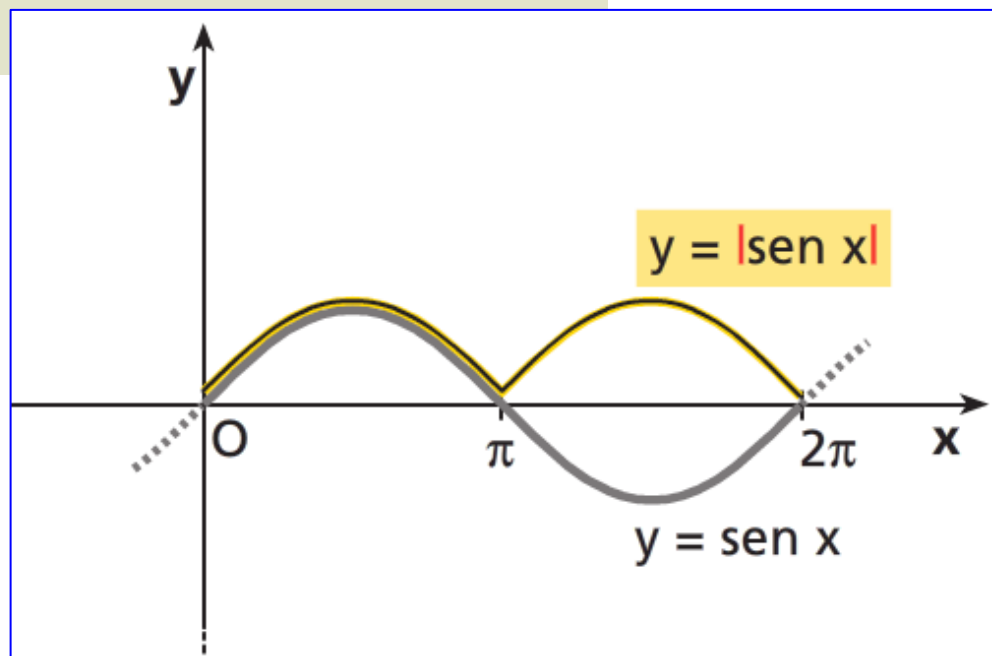
- b) Il grafico della funzione $y = -f(x)$ è simmetrico di quello di $y = f(x)$ rispetto all'asse x . Quindi, tracciato il grafico di $y = \cos x$, consideriamo il suo simmetrico rispetto all'asse delle ascisse.



Disegnare il grafico della funzione:

$$y = |\operatorname{sen} x| \quad \text{con } 0 \leq x \leq 2\pi$$

- a) Disegniamo $y = \operatorname{sen} x$ e confermiamo la parte di curva che sta nel semipiano positivo delle y .
- b) Negli intervalli in cui la curva sta nel semipiano negativo delle y , tracciamo la curva simmetrica rispetto all'asse x .

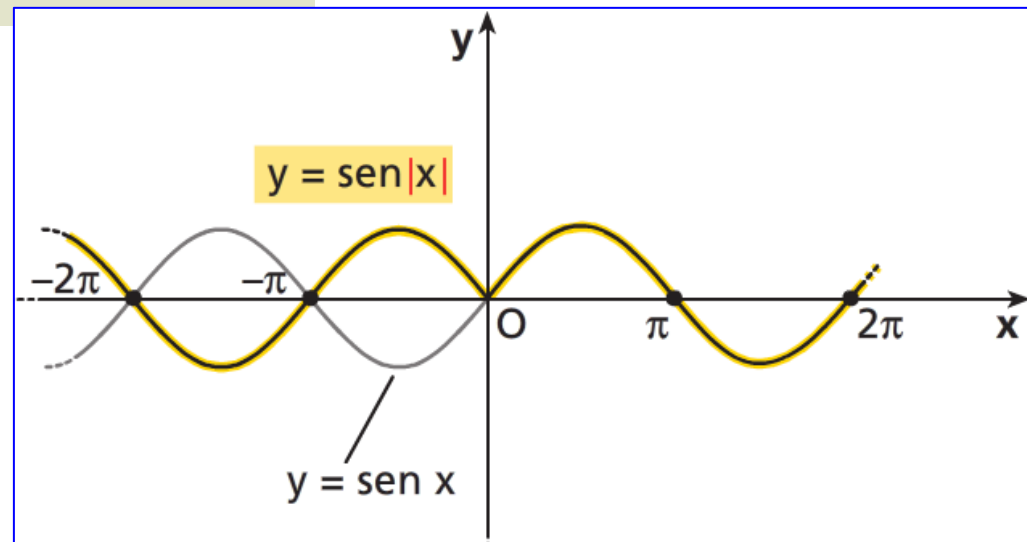


Disegnare il grafico della funzione:

$$y = \text{sen}|x|$$

Sappiamo che $f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$

- a) Disegniamo $y = \text{sen } x$ nel semipiano positivo delle x .
- b) Per $x < 0$ disegniamo il simmetrico del grafico precedente rispetto all'asse y .



Determinare il luogo geometrico descritto, al variare di α , dal punto $P(x;y)$, le cui coordinate sono date dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x = 2 \cos \alpha - 1 \\ y = 3 \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$$

Ricaviamo $\cos \alpha$ e $\operatorname{sen} \alpha$:

$$\begin{cases} x = 2 \cos \alpha - 1 \\ y = 3 \operatorname{sen} \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{x+1}{2} \\ \operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{3} \end{cases}$$

Eleviamo al quadrato i due membri e sommiamo membro a membro:

$$\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = \left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + \left(\frac{y}{3} \right)^2$$

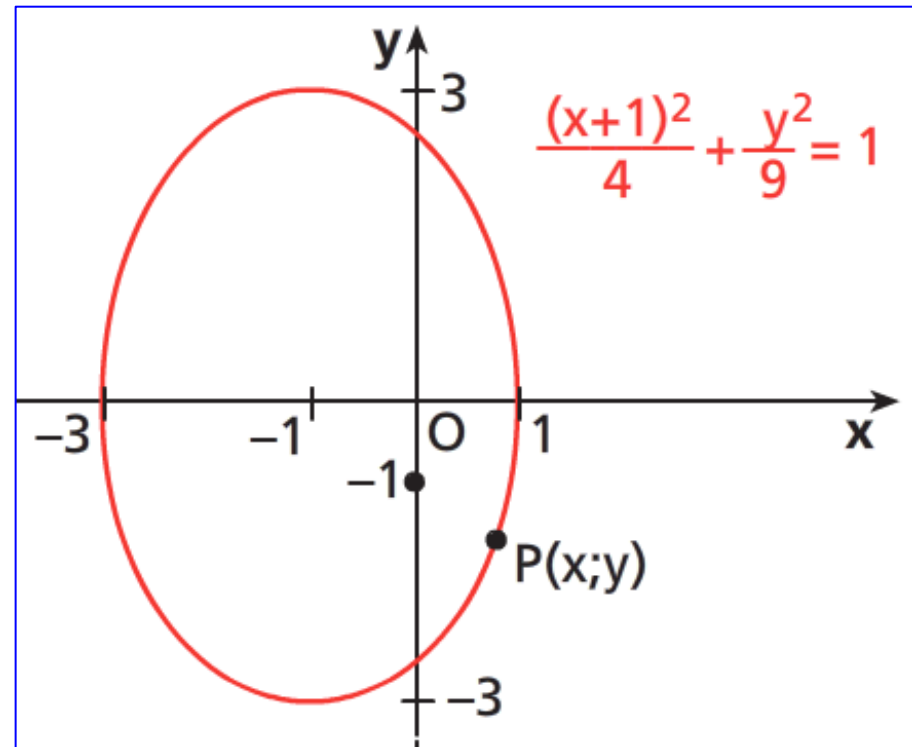
Poiché:

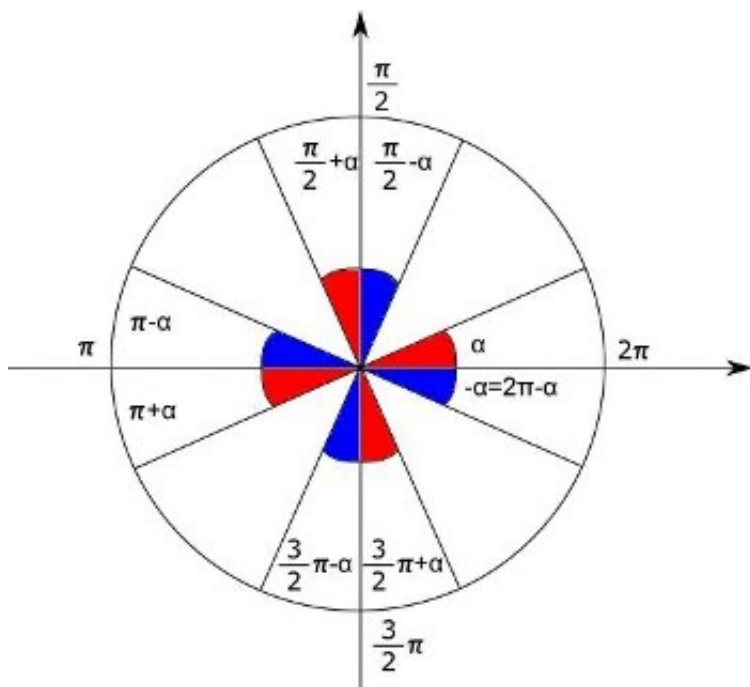
$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

allora:

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Il luogo cercato è un'ellisse
traslata di centro $C(-1;0)$ e
semiassi di ampiezza 2 e 3.





Matematica

GONIOMETRIA

Le formule goniometriche

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica

Sono detti **angoli associati** a un angolo α quegli angoli la cui somma o differenza con α abbia i seguenti valori: 0° , 90° , 180° , 270° e 360° . Ossia:



Determiniamo le funzioni goniometriche degli angoli associati ad α in funzione delle funzioni goniometriche dell'angolo α .

➤ Angoli opposti: $\alpha + (-\alpha) = 0$

I due angoli α e $-\alpha$ sono congruenti e orientati in verso opposto, per cui:

$$\text{sen}(-\alpha) = y_{B'} = -y_B = -\text{sen}\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = x_{B'} = x_B = \cos\alpha$$

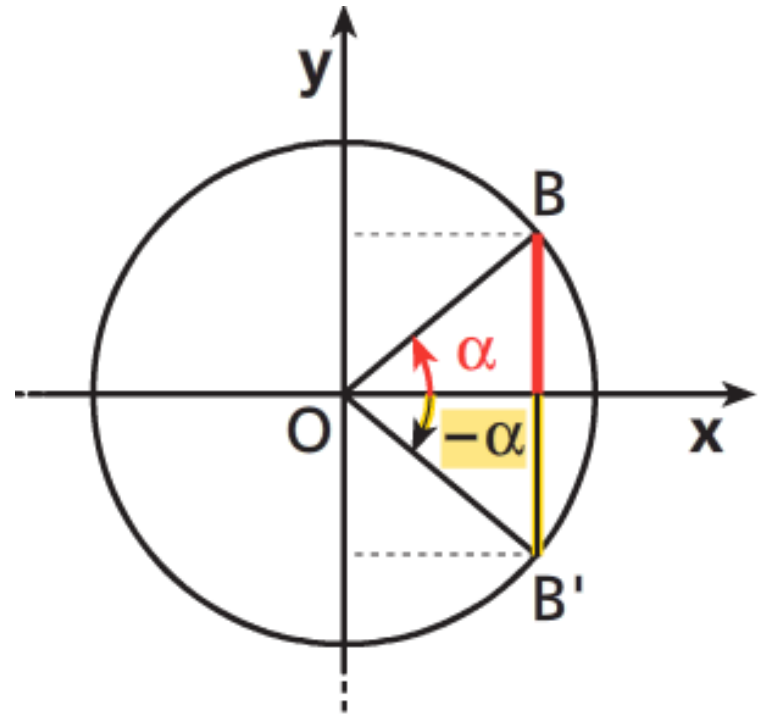
Pertanto:

$$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\alpha$$

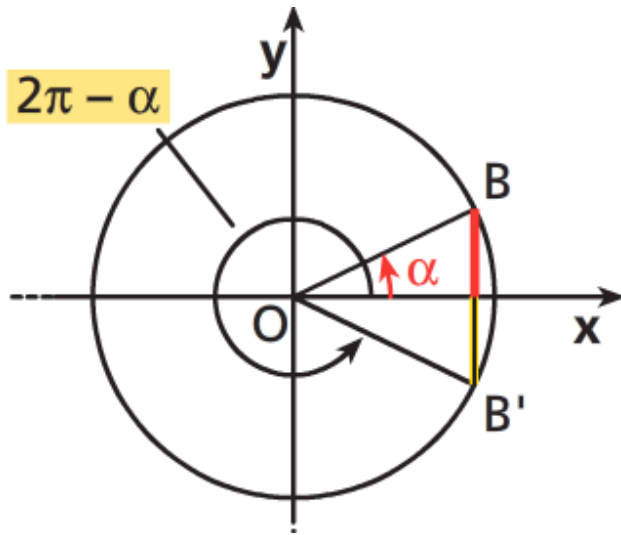
$$\text{tg}(-\alpha) = \frac{\text{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = -\text{tg}\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\text{cotg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\text{sen}(-\alpha)} = -\text{cotg}\alpha$$

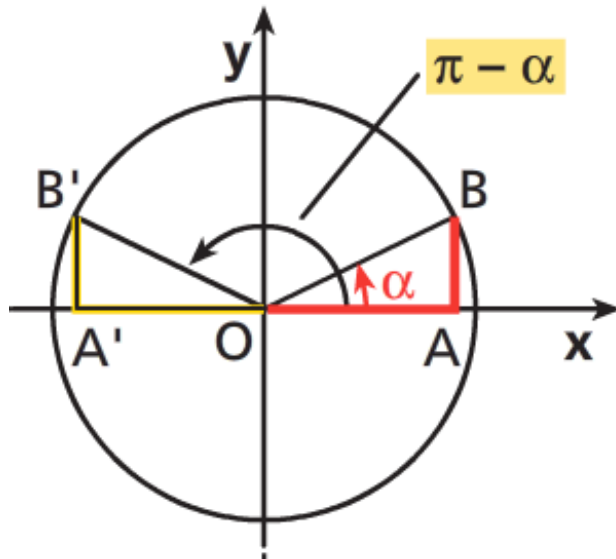


➤ Angoli esplementari: $\alpha + (2\pi - \alpha) = 2\pi$



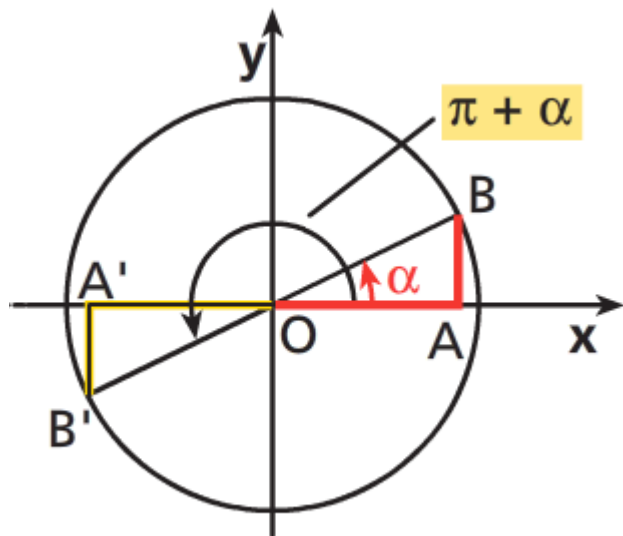
$$\begin{aligned}\text{sen}(2\pi - \alpha) &= -\text{sen}\alpha \\ \cos(2\pi - \alpha) &= \cos\alpha \\ \text{tg}(2\pi - \alpha) &= -\text{tg}\alpha \\ \text{cotg}(2\pi - \alpha) &= -\text{cotg}\alpha\end{aligned}$$

➤ Angoli supplementari: $\alpha + (\pi - \alpha) = \pi$



$$\begin{aligned}\text{sen}(\pi - \alpha) &= \text{sen}\alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos\alpha \\ \text{tg}(\pi - \alpha) &= -\text{tg}\alpha \\ \text{cotg}(\pi - \alpha) &= -\text{cotg}\alpha\end{aligned}$$

➤ Angoli che differiscono di π : $(\pi + \alpha) - \alpha = \pi$



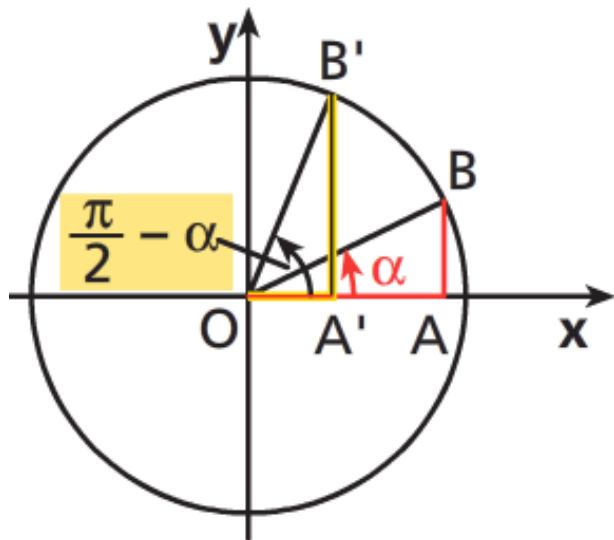
$$\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen}\alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\text{tg}(\pi + \alpha) = \text{tg}\alpha$$

$$\text{cotg}(\pi + \alpha) = \text{cotg}\alpha$$

➤ Angoli complementari: $(\pi/2 - \alpha) + \alpha = \pi/2$



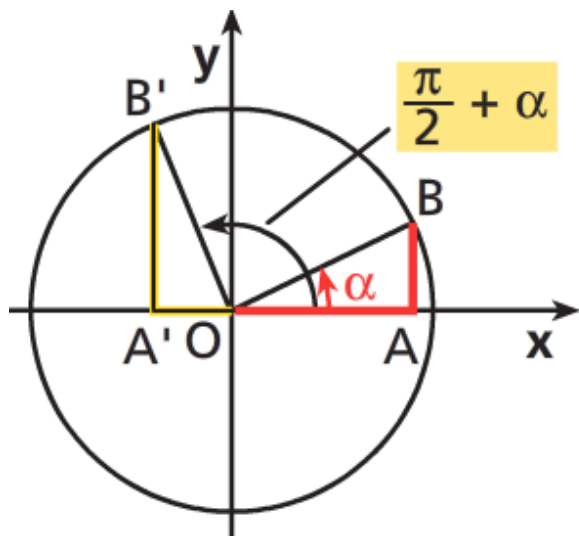
$$\text{sen}(\pi / 2 - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(\pi / 2 - \alpha) = \text{sen}\alpha$$

$$\text{tg}(\pi / 2 - \alpha) = \text{cotg}\alpha$$

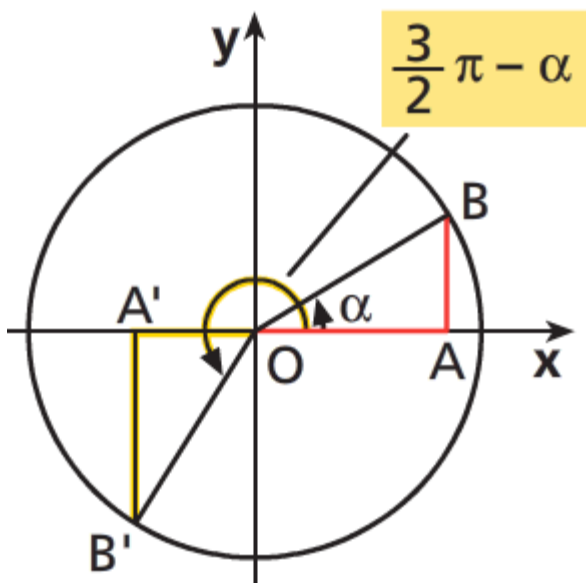
$$\text{cotg}(\pi / 2 - \alpha) = \text{tg}\alpha$$

➤ Angoli che differiscono di $\pi/2$: $(\pi/2+\alpha)-\alpha=\pi/2$



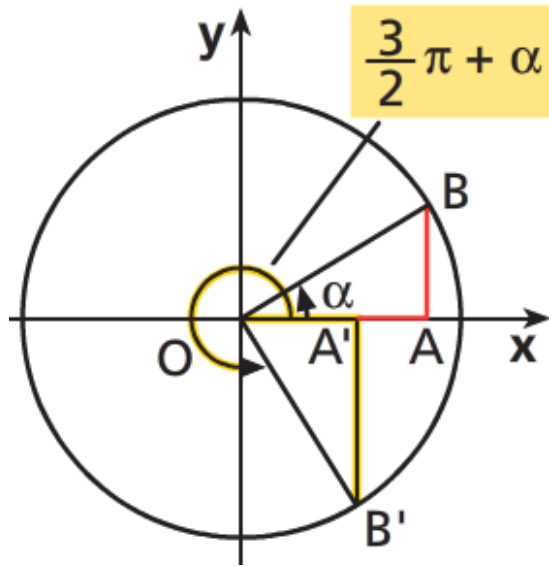
$$\begin{aligned}\sin(\pi / 2 + \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(\pi / 2 + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \operatorname{tg}(\pi / 2 + \alpha) &= -\operatorname{cotg} \alpha \\ \operatorname{cotg}(\pi / 2 + \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha\end{aligned}$$

➤ Angoli la cui somma è $3\pi/2$: $(3\pi/2-\alpha)+\alpha=3\pi/2$



$$\begin{aligned}\sin(3\pi / 2 - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \cos(3\pi / 2 - \alpha) &= -\sin \alpha \\ \operatorname{tg}(3\pi / 2 - \alpha) &= \operatorname{cotg} \alpha \\ \operatorname{cotg}(3\pi / 2 - \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha\end{aligned}$$

➤ Angoli la cui differenza è $3\pi/2$: $(3\pi/2 + \alpha) - \alpha = 3\pi/2$



$$\sin(3\pi/2 + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos(3\pi/2 + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(3\pi/2 + \alpha) = -\cot \alpha$$

$$\cot(3\pi/2 + \alpha) = -\tan \alpha$$

➤ Riduzione al primo quadrante

Significa trovare un angolo del primo quadrante le cui funzioni goniometriche abbiano, eventualmente a meno del segno, gli stessi valori dell'angolo dato.

esempio

angoli opposti
(α e $-\alpha$)

Semplificare la seguente espressione:

$$\operatorname{sen}(-\alpha) + 2 \cos(-\alpha) + \sec(-\alpha) \cot g(-\alpha) \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha$$

Trasformiamo prima di tutto le funzioni di $-\alpha$ in funzioni di α notando in figura che:

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha; \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

e quindi:

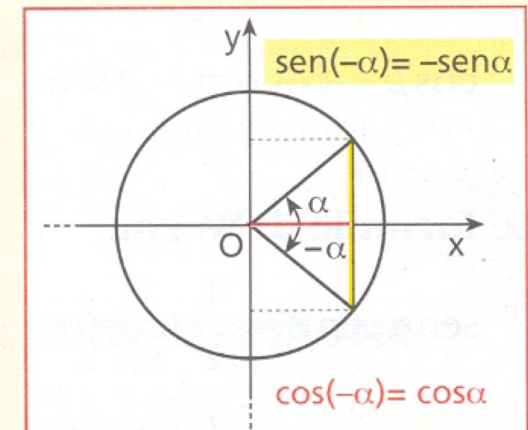
$$\sec(-\alpha) = \sec \alpha; \quad \cot g(-\alpha) = -\cot g \alpha.$$

L'espressione diventa:

$$-\operatorname{sen} \alpha + 2 \cos \alpha + \sec \alpha (-\cot g \alpha) \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha.$$

Trasformiamo $\sec \alpha$ e $\cot g \alpha$ in funzione di $\operatorname{sen} \alpha$ e $\cos \alpha$ e semplifichiamo:

$$-\operatorname{sen} \alpha + 2 \cos \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \left(\frac{-\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \right) \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha = 2 \cos \alpha - 1.$$



Semplificare la seguente espressione:

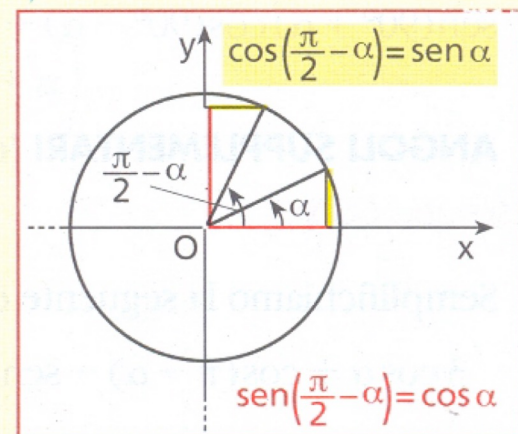
$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos \alpha + \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Trasformiamo $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ in funzione di $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos \alpha + \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Trasformiamo le funzioni di $\frac{\pi}{2} - \alpha$ in funzione di α tenendo conto delle relazioni della figura.

L'espressione diventa: $\cos \alpha - \cos \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha.$



angoli che differiscono di un angolo retto (α e $\pi/2 + \alpha$)

Semplificare la seguente espressione:

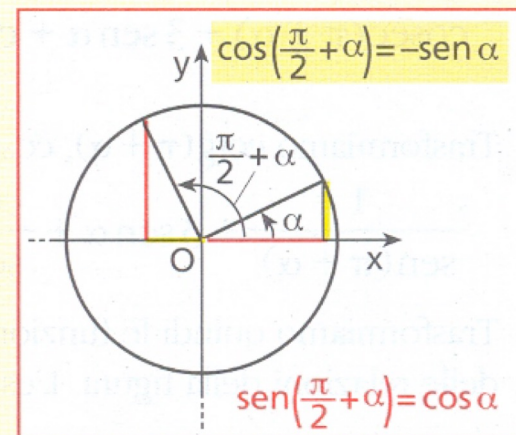
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{sen}\alpha + \sec\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

Trasformiamo $\sec\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ in funzione di $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right).$$

Trasformiamo quindi le funzioni di $\frac{\pi}{2} + \alpha$ in funzione di α tenendo conto delle relazioni della figura.

L'espressione diventa: $-\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{-\operatorname{sen}\alpha} \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = -1 + \cos\alpha.$

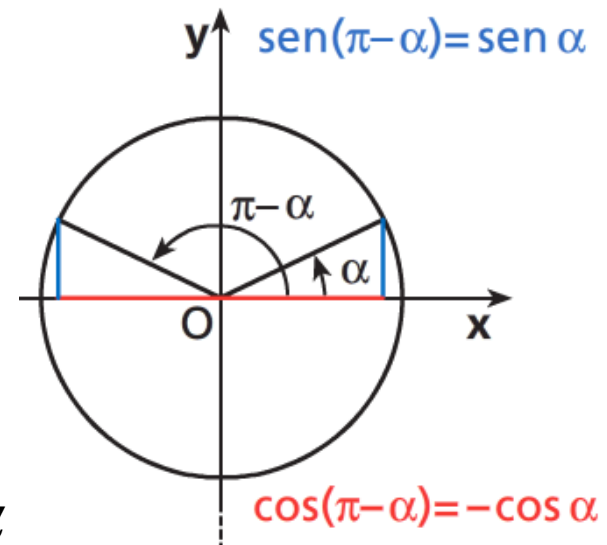


Semplificare la seguente espressione:

$$3\cos\alpha + \cos(\pi - \alpha) - \operatorname{sen}\alpha + 2\cot g(\pi - \alpha)\operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}(\pi - \alpha)$$

Utilizzando la definizione di cotangente e le relazioni indicate in figura, l'espressione diventa:

$$3\cos\alpha - \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha + 2\frac{-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha$$



Semplificando si ottiene:

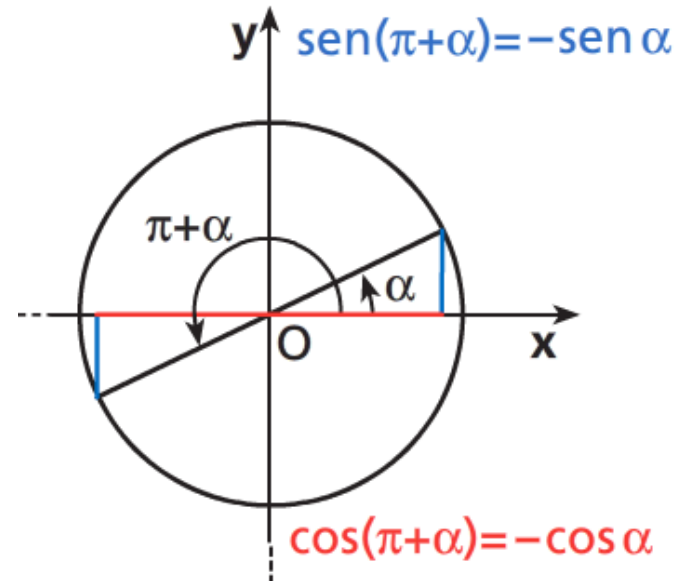
$$2\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha - 2\cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha$$

angoli differiscono
angolo piatto (α e $\pi + \alpha$)

Semplificare la seguente espressione:

$$\operatorname{cosec}(\pi + \alpha) + 3\operatorname{sen}\alpha + \cot g(\pi + \alpha)\sec\alpha + 2\operatorname{sen}(\pi + \alpha)$$

Utilizzando la definizione di cosec, cotg e sec, e le relazioni indicate in figura, l'espressione diventa:



$$\frac{1}{-\operatorname{sen}\alpha} + 3\operatorname{sen}\alpha + \frac{-\cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha} \cdot \frac{1}{\cos\alpha} - 2\operatorname{sen}\alpha$$

Semplificando si ottiene:

$$-\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} + \operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{sen}\alpha$$

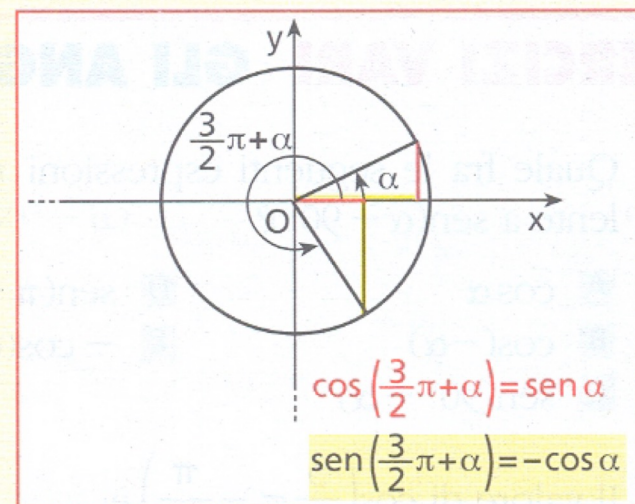
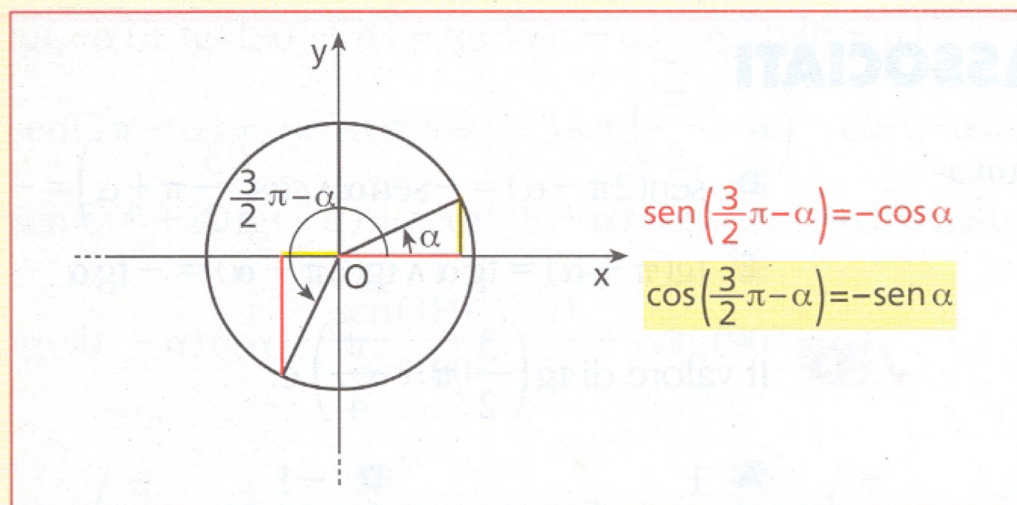
angoli la cui somma o differenza è $3/2\pi$ (α e $3/2\pi-\alpha$; α e $3/2\pi+\alpha$)

Semplificare la seguente espressione:

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)\cos\alpha + \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) - \cot g\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$$

Trasformiamo le funzioni di $\frac{3}{2}\pi - \alpha$ e $\frac{3}{2}\pi + \alpha$ in funzioni di α tenendo conto delle relazioni delle figure:

$$-\cos\alpha \cos\alpha + \sin\alpha(-\sin\alpha) + \operatorname{tg}\alpha = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha = -1 + \operatorname{tg}\alpha.$$



angoli esplementari (α e $2\pi-\alpha$)

Semplificare la seguente espressione:

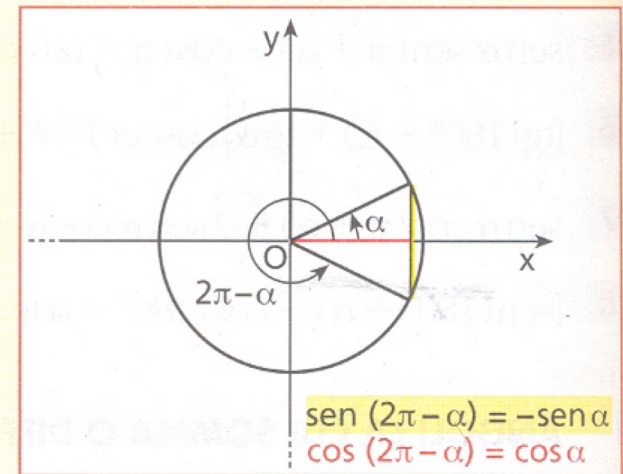
$$3\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) + \cos(2\pi - \alpha)\sec \alpha + 2\operatorname{sen}\alpha - 1$$

Trasformiamo $\sec \alpha$ in funzione del coseno:

$$3\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) + \cos(2\pi - \alpha)\frac{1}{\cos \alpha} + 2\operatorname{sen} \alpha - 1.$$

Trasformiamo quindi le funzioni di $2\pi - \alpha$ in funzione di α tenendo conto delle relazioni della figura. L'espressione diventa:

$$\begin{aligned} & -3\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha \frac{1}{\cos \alpha} + 2\operatorname{sen} \alpha - 1 = \\ & = -3\operatorname{sen} \alpha + 1 + 2\operatorname{sen} \alpha - 1 = -\operatorname{sen} \alpha. \end{aligned}$$



Riduzione al primo quadrante

Esprimere i seguenti angoli mediante la riduzione al primo quadrante:

$$\text{sen}225^\circ \quad \text{tg} \frac{5}{3} \pi$$

$$\text{sen}225^\circ = \text{sen}(180^\circ + 45^\circ) \xrightarrow{\text{sen}(180^\circ + \alpha) = -\text{sen}\alpha} -\text{sen}45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg} \frac{5}{3} \pi = \text{tg} \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) \xrightarrow{\text{tg}(2\pi - \alpha) = -\text{tg}\alpha} -\text{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

Risolvere la seguente espressione con l'aiuto degli angoli associati:

$$\sin(\pi - x) + \frac{\cos(-x)}{1 - \tan(\pi - x)} - \sin(2\pi + x) - \frac{\cos(2\pi - x)}{\tan(\pi + x)} - 1$$

Semplificare l'espressione trigonometrica con l'aiuto degli angoli associati:

$$\sin(x) + \frac{\cos(x)}{1 + \tan(x)} - \sin(x) - \frac{\cos(x)}{\tan(x)} - 1$$

Introducendo la definizione di tangente e semplificando, si ottiene:

$$\frac{\cos^2(x)}{\cos(x) + \sin(x)} - \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} - 1$$

Effettuiamo il mcm:

$$\frac{\sin x \cos^2 x - \cos^2 x(\cos x + \sin x) - \sin x(\cos x + \sin x)}{\sin x(\cos x + \sin x)}$$

Svolgendo le parentesi e semplificando, si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin x \cos^2 x - \cos^3 x - \sin x \cos^2 x - \sin x \cos x - \sin^2 x}{\sin x(\cos x + \sin x)} = \\ & = \frac{-\cos^3 x - \sin x \cos x - \sin^2 x}{\sin x(\cos x + \sin x)} \end{aligned}$$

Verificare la seguente uguaglianza:

$$\frac{\cos 330^\circ}{\cos 30^\circ} + \frac{\sin^2(-150^\circ)}{\cos 420^\circ \cdot \operatorname{cosec} 210^\circ} = \cos^2 30^\circ$$

Utilizziamo le seguenti formule per gli angoli associati:

$$\cos 330^\circ = \cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ \quad \sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ$$

$$\sin^2(-150^\circ) = \sin^2 150^\circ = \sin^2(90^\circ + 60^\circ) = \cos^2 60^\circ$$

$$\cos 420^\circ = \cos(360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ \quad \operatorname{cosec} 210^\circ = \operatorname{cosec}(180^\circ + 30^\circ) = -\operatorname{cosec} 30^\circ$$

e sostituiamole
nell'uguaglianza:

$$\frac{\cos 30^\circ}{\cos 30^\circ} + \frac{\cos^2 60^\circ}{\cos 60^\circ \cdot (-\operatorname{cosec} 30^\circ)} = \cos^2 30^\circ$$

Introducendo la definizione di cosecante e semplificando,
l'uguaglianza sarà verificata:

$$\begin{aligned} 1 - \cos 60^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ &= \cos^2 30^\circ \xrightarrow{\cos 60^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ} 1 - \operatorname{sen}^2 30^\circ = \cos^2 30^\circ \\ &\xrightarrow{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos^2 \alpha} \cos^2 30^\circ = \cos^2 30^\circ \end{aligned}$$

Le funzioni goniometriche variano al variare dell'angolo α , ma non variano proporzionalmente a esso. Per esempio:

FALSO

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha - \cos \beta \xrightarrow{FALSO} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{6}$$

Con l'uso delle calcolatrici, le formule goniometriche attualmente conservano interesse solo in ambito teorico e per dimostrare alcuni enunciati.

□ Le formule di addizione

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

solo se:

$$\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k_1\pi, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k_2\pi$$

❑ Le formule di sottrazione

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

solo se:

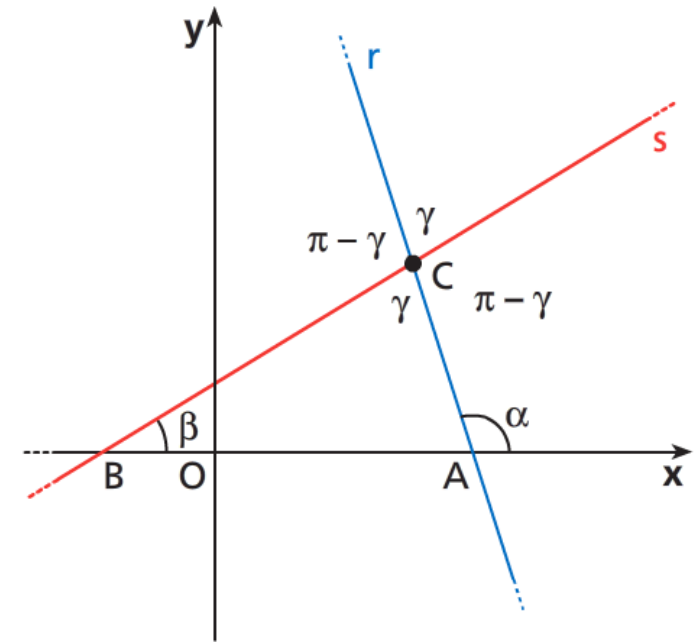
$$\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k_1\pi, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k_2\pi$$

Determinare l'angolo γ fra due rette.

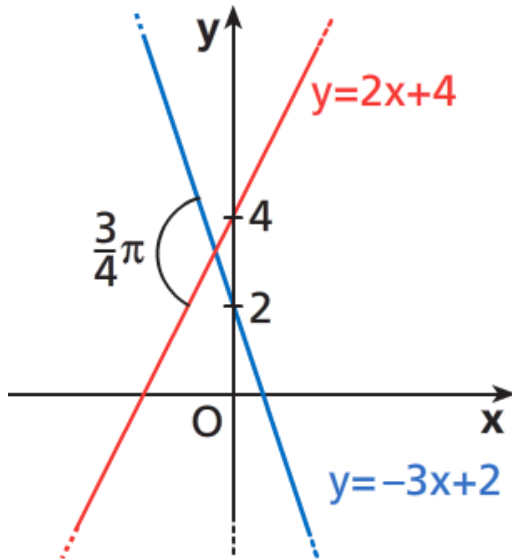
Poiché α è angolo esterno del triangolo ABC, allora:

$$\alpha = \beta + \gamma \Rightarrow \gamma = \alpha - \beta$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{m - m'}{1 + mm'}$$



$m = \operatorname{tg} \alpha$ coeff. ang. retta r
 $m' = \operatorname{tg} \beta$ coeff. ang. retta s



$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2 + 3}{1 - 2 \cdot 3} = -1 \Rightarrow \gamma = \operatorname{arctg}(-1) = \frac{3}{4} \pi$$

Calcolare le funzioni goniometriche di 75° e $\cos 15^\circ$.

Sappiamo che $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$.

Applichiamo le formule di addizione del seno, del coseno e della tangente e otteniamo:

$$\sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 30^\circ;$$

$$\cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ;$$

$$\operatorname{tg}(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 45^\circ}.$$

Poiché $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, se sostituiamo ed eseguiamo i calcoli otteniamo:

$$\sin 75^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4};$$

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4};$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \frac{\frac{\sqrt{3} + 3}{3}}{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3} \cdot \frac{3}{3 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}}.$$

Razionalizzando si ha: $\operatorname{tg} 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$.

Calcoliamo ora $\cos 15^\circ$.

Possiamo scrivere:

$$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ.$$

Per la formula di sottrazione del coseno, otteniamo:

$$\cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Sviluppare le seguenti espressioni:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \quad \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

Applichiamo le formule di addizione e sottrazione:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + x\right) &= \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \cos x + \operatorname{sen} x \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x; \\ \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) &= \cos\frac{\pi}{6} \cos x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

❑ Le formule di duplicazione

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \begin{cases} 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

solo se:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \wedge \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Queste formule permettono di calcolare le funzioni goniometriche dell'angolo 2α conoscendo il valore delle funzioni goniometriche dell'angolo α .

esistenza di	condizione
$\operatorname{tg} 2\alpha$	$2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
denominatore	$\operatorname{tg} \alpha \neq \pm 1 \rightarrow \alpha \neq \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$

In sintesi, la formula di $\operatorname{tg} 2\alpha$ vale per:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \wedge \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Sviluppare $\sin 4\alpha$ utilizzando le formule di duplicazione

Per far ciò dobbiamo applicare due volte tali formule. Nella prima applicazione scriviamo:

$$\sin 4\alpha = \sin(2 \cdot 2\alpha) = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha.$$

Sostituiamo nell'espressione trovata le espressioni corrispondenti a $\sin 2\alpha$ e $\cos 2\alpha$:

$$2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 2(2 \sin \alpha \cos \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 4(\sin \alpha \cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha \cos \alpha).$$

Quindi:

$$\sin 4\alpha = 4(\sin \alpha \cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha \cos \alpha).$$

Calcolare $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$, sapendo che il lato termine di α appartiene al 2° quadrante e $\cos \alpha = -4/5$

$$\sin \alpha = + \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = + \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}.$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4},$$

quindi:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25},$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25},$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{16}{7} = -\frac{24}{7}$$

■ Il seno è positivo perché l'angolo ha lato termine nel secondo quadrante.

Senza determinare il valore di α , calcolare $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ e $\tan(2\alpha + \pi/3)$ sapendo che $\sin \alpha = 3/5$ e $\pi/2 < \alpha < \pi$.

- Consideriamo $\sin 2\alpha$ e applichiamo la formula di duplicazione del seno, $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. Determiniamo $\cos \alpha$ per mezzo della prima relazione fondamentale, osservando che $\cos \alpha$ deve essere negativo, poiché

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi:$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

Sostituendo i valori di $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$ otteniamo:

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

- Per determinare $\cos 2\alpha$, applichiamo una delle formule di duplicazione e sostituiamo al seno e al coseno i valori corrispondenti:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}.$$

- Per calcolare $\operatorname{tg}\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ applichiamo la formula di addizione:

$$\operatorname{tg}\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}}.$$

Calcoliamo $\operatorname{tg} 2\alpha$ con la formula di duplicazione:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$\text{Essendo } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}, \text{ si ha:}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 - \frac{9}{16}}}{1 - \frac{9}{16}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{16}{7} = -\frac{24}{7}.$$

Sostituendo, otteniamo:

$$\operatorname{tg}\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\frac{24}{7} + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \frac{24}{7}} = \frac{-24 + 7\sqrt{3}}{7 + 24\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3} - 24}{7 + 24\sqrt{3}}$$

❑ Le formule di bisezione

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \quad \text{solo se } \alpha \neq \pi + 2k\pi$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad \text{solo se } \alpha \neq \pi + 2k\pi$$

$$= \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \quad \text{solo se } \alpha \neq \pi + k\pi$$

Nelle applicazioni il segno +/- va scelto in base al quadrante in cui si trova $\alpha/2$.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad \text{con } \alpha \neq \pi + 2k\pi$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \quad \text{con } \alpha \neq \pi + k\pi$$

Queste formule sono più comode perché sono razionali e non presentano il doppio segno $\pm$.

Calcoliamo $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ quando $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ e $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

Se $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3}{4}\pi$ quindi il lato termine di $\frac{\alpha}{2}$ appartiene al secondo quadrante.

Il valore del coseno di α è:

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{144}{169}} = -\frac{5}{13}.$$

Quindi:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{5}{13}}{2}} = -\sqrt{\frac{8}{13} \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13},$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{18}{13} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{13}}{13},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{-\frac{12}{13}}{\frac{8}{13}} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}.$$

■ Il valore assoluto di $\cos \alpha$ si ricava con:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

il segno « - » deriva dal fatto che il lato termine di α è nel terzo quadrante.

■ $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ si può ricavare anche applicando la definizione:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\frac{3\sqrt{13}}{13}}{-\frac{2\sqrt{13}}{13}} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

□ Le formule parametriche

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \\ \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \end{array} \right. \quad \text{con } \alpha \neq \pi + 2k\pi$$

Se poniamo $t = \operatorname{tg} \alpha / 2$, le formule assumono la forma parametrica nel parametro t :

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

❑ Le formule di prostaferesi

- $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2};$
- $\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2};$
- $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2};$
- $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}.$

Queste formule permettono di trasformare la somma o la differenza di due funzioni goniometriche in un prodotto di funzioni goniometriche.

□ Le formule di Werner

$$\operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

Queste formule permettono di trasformare espressioni contenenti prodotti di funzioni seno e coseno in somme e differenze di funzioni seno e coseno.

Applichiamo le formule di prostaferesi:

$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{12} &= 2 \cos \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}}{2} = \\ &= 2 \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{12},\end{aligned}$$

Applichiamo le formule di Werner:

$$\begin{aligned}\cos \frac{5}{12} \pi \cos \frac{\pi}{12} &= \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{5}{12} \pi + \frac{\pi}{12} \right) + \cos \left(\frac{5}{12} \pi - \frac{\pi}{12} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{3} \right] = \frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo il periodo delle seguenti funzioni:

a) $y = \sin 3x + \cos 5x$; b) $y = \frac{\sin 4x - \sin 2x}{\cos 3x}$.

a) Il periodo di $\sin 3x$ è $T_1 = \frac{2\pi}{3}$, quello di $\cos 5x$ è $T_2 = \frac{2\pi}{5}$.

Scriviamo T_1 e T_2 con denominatore comune: $T_1 = \frac{10}{15}\pi$, $T_2 = \frac{6}{15}\pi$.

Consideriamo il minimo comune multiplo fra i numeratori:

$$\text{m.c.m.}(10; 6) = 30.$$

Si ha pertanto uno stesso valore della funzione per x_0 e $x_0 + \frac{30}{15}\pi$, perché $\frac{30}{15}\pi$ contiene un numero intero di volte sia T_1 sia T_2 .

Quindi $\frac{30}{15}\pi = 2\pi$ è il periodo cercato.

Osservazione. In generale, non ci sono regole per determinare il periodo di funzioni che siano somme o prodotti di altre funzioni periodiche. Tuttavia, se si hanno due funzioni periodiche con periodi diversi T_1 e T_2 , e se esistono multipli comuni di T_1 e T_2 , allora le funzioni somma o prodotto hanno periodo uguale al minimo comune multiplo dei periodi.

b) Deve essere $\cos 3x \neq 0$, cioè:

$$3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}.$$

Applicando una delle formule di prostaferesi, otteniamo:

$$\frac{\sin 4x - \sin 2x}{\cos 3x} = \frac{2 \cancel{\cos 3x} \sin x}{\cancel{\cos 3x}} = 2 \sin x.$$

Quindi il periodo cercato è 2π .