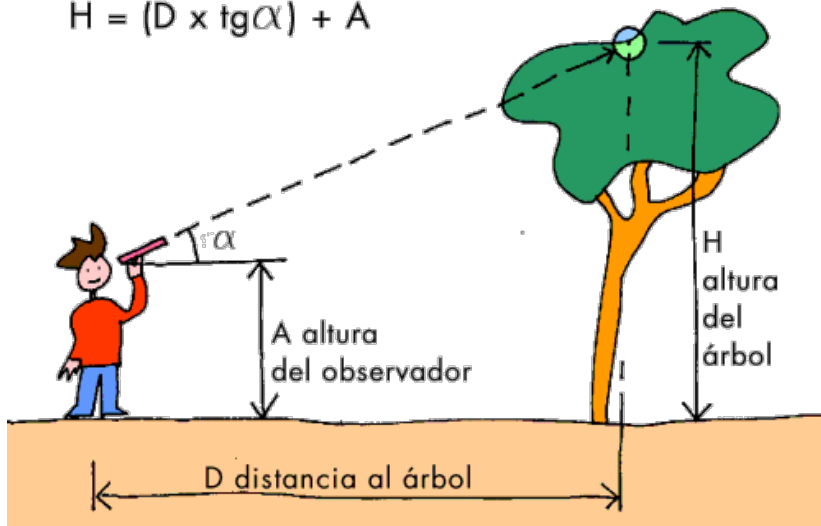


Matematica

TRIGONOMETRIA

Le equazioni
goniometriche

$$H = (D \times \operatorname{tg} \alpha) + A$$



DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica

Una identità goniometrica è una uguaglianza fra espressioni, contenente funzioni goniometriche di uno o più angoli, verificata per qualsiasi valore attribuito agli angoli (esclusi quelli per i quali le espressioni perdono di significato).

Per verificare un'identità goniometrica, si possono seguire tre metodi.

Primo Metodo - Trasformare il 1° membro e renderlo identico al 2° membro

Verificare la seguente identità:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha}$$

Trasformando l'espressione che sta al I membro, si ha:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha}.$$

Poiché il I membro trasformato risulta identico al II, l'identità è verificata per **tutti** i valori dell'angolo α , che non fanno perdere significato all'uguaglianza stessa.

Si ricordi che: $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ fa perdere significato alla tangente e $\alpha = k\pi$ alla cotangente.

Secondo Metodo - Trasformare il 2° membro e renderlo identico al 1° membro

Verificare la seguente identità:

$$4 = (tg\alpha + ctg\alpha)^2 - (tg\alpha - ctg\alpha)^2 \quad \text{con } \alpha \neq k\frac{\pi}{2}$$

Trasformando il II membro, si ha:

$$tg^2\alpha + ctg^2\alpha + 2tg\alpha ctg\alpha - tg^2\alpha - ctg^2\alpha + 2tg\alpha ctg\alpha = 4tg\alpha \cdot ctg\alpha.$$

Poiché $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$, allora $4tg\alpha \cdot ctg\alpha = 4$.

Poiché il II membro è risultato identico al I, l'uguaglianza data è una identità verificata per tutti i valori dell'angolo α , distinti da $k\frac{\pi}{2}$.

Terzo Metodo – Trasformare entrambi i membri per ottenere due espressioni identiche

Verificare la seguente identità:

$$\operatorname{sen}^2(\pi - \alpha) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sec^2(2\pi - \alpha) - \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \text{con } \alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

Trasformando il I membro, si ha:

$$\operatorname{sen}^2(\pi - \alpha) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Trasformando il II membro, si ha:

$$\begin{aligned} \sec^2(2\pi - \alpha) - \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \frac{1}{\cos^2(2\pi - \alpha)} - \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \\ &= \frac{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1. \end{aligned}$$

L'uguaglianza pertanto è verificata.

Verificare la seguente identità:

Deve essere $\alpha \neq 45^\circ + k180^\circ$ (per questi valori esistono $\sec 2\alpha$, $\tg 2\alpha$, $\tg(45^\circ + \alpha)$ e $\sec 2\alpha - \tg 2\alpha$).

Il 1° membro si può scrivere sotto la forma seguente:

$$\frac{\sec 2\alpha + \tg 2\alpha}{\sec 2\alpha - \tg 2\alpha} = \frac{\frac{1}{\cos 2\alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}}{\frac{1}{\cos 2\alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}} = \frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}.$$

Il 2° membro si può trasformare nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \tg^2(45^\circ + \alpha) &= \left(\frac{\tg 45^\circ + \tg \alpha}{1 - \tg 45^\circ \tg \alpha} \right)^2 = \left(\frac{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} \right)^2 = \left(\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} \right)^2 = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}. \end{aligned}$$

Siccome i due membri della (1) si sono trasformati nella stessa espressione goniometrica, la (1) è una identità.

Verificare la seguente identità:

con $\operatorname{tg} \alpha \neq -1$

ossia $\alpha \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Il primo membro, ricordando che $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$, diventa:

$$\frac{(\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha)(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)}{1 + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\cos \alpha (\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha)(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)}{\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha} = \cos \alpha (\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha).$$

Il secondo membro si può scrivere nel modo seguente:

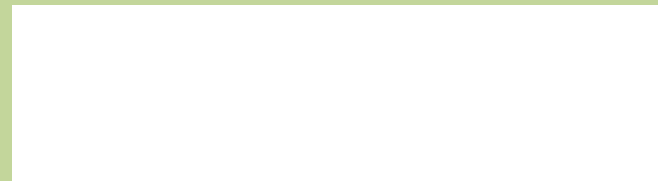
$$\cos^2 \alpha (\operatorname{tg} \alpha - 1) = \cos^2 \alpha \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} - 1 \right) = \cos^2 \alpha \frac{\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha} = \cos \alpha (\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha).$$

Poiché i due membri si sono trasformati nella stessa espressione goniometrica, l'identità è verificata.

Verificare la seguente identità:

$$\begin{aligned}\text{I membro: } \frac{\operatorname{ctg}(\pi - \alpha)}{\operatorname{cosec}^2(-\alpha)} + \frac{\operatorname{tg}(-\alpha)}{\sec^2 \alpha} &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} + \frac{-\operatorname{tg} \alpha}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \\ &= -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \sin^2 \alpha - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos^2 \alpha = -2 \sin \alpha \cos \alpha. \\ \text{II membro: } 1 - (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 &= 1 - (\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) = \\ &= 1 - 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = -2 \sin \alpha \cos \alpha.\end{aligned}$$

Verificare la seguente identità:



L'uguaglianza ha significato per $\sin 2\alpha \neq 0$ e $\sin \alpha \neq 0$, ovvero per $\alpha \neq k \frac{\pi}{2}$, ($k \in \mathbb{Z}$).

I membro:
$$\frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2 \sin \alpha \cos \alpha}.$$

II membro:
$$\frac{\sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha}{2} = \frac{\frac{1}{\cos \alpha}}{2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{2 \sin \alpha \cos \alpha}.$$

Si procederà alla stessa maniera con l'utilizzo delle altre formule goniometriche.

Un'equazione goniometrica è un'equazione che contiene almeno una funzione goniometrica dell'incognita.

$2\cos x - 1 = 0$ è un'equazione goniometrica perché contiene la funzione $\cos x$.

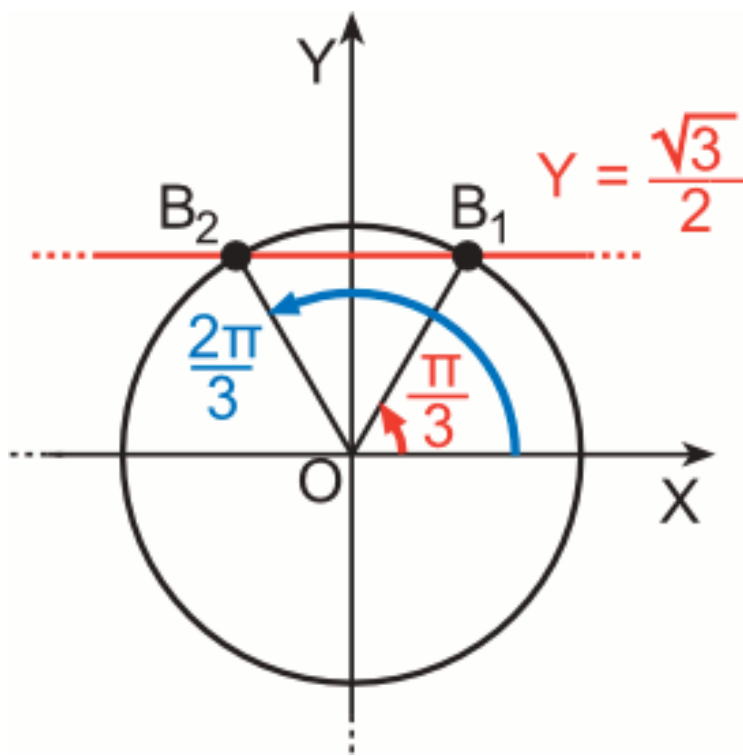
$2x\cos(\pi/4) - 1 = 0$ non è un'equazione goniometrica perché non contiene funzioni goniometriche dell'incognita x . L'espressione $\cos(\pi/4)$, che compare nell'equazione, è una quantità costante.

Le equazioni goniometriche elementari sono equazioni del tipo:

❑ Risolvere l'equazione:

$$\text{sen} x = a \Rightarrow \text{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Disegniamo la retta $Y = \sqrt{3}/2$. Le sue intersezioni con la circonferenza sono date dai punti B_1 e B_2 (entrambi ordinata pari a $\sqrt{3}/2$).



Poiché il seno di un angolo rappresenta l'ordinata del punto della circonferenza goniometrica a cui è associato, allora gli angoli che hanno seno uguale a $\sqrt{3}/2$ sono $(\pi/3)$ e $(\pi - \pi/3 = 2\pi/3)$.

Quindi, la soluzione dell'equazione goniometrica è:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

Poiché il seno è una funzione periodica, il periodo va sempre indicato nella soluzione.

E le equazioni:

$$\operatorname{sen} x = 2 \text{ e } \operatorname{sen} x = -3/2$$

che soluzione hanno?

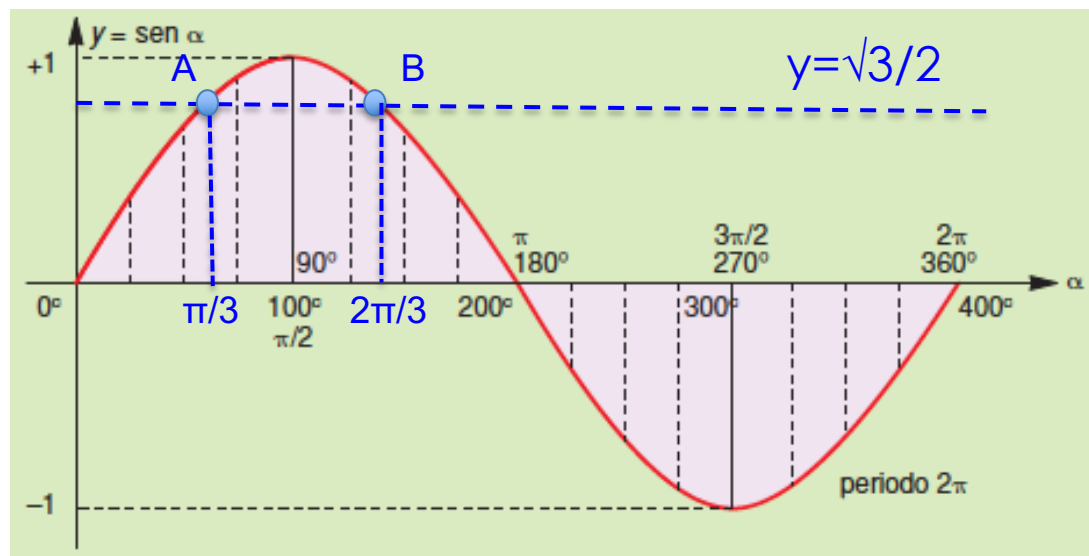
Poiché $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, allora l'equazione $\operatorname{sen} x = a$ con $a > 1$ o $a < -1$, non ammette soluzione (impossibile).

In generale

$$\operatorname{sen} x = a \Rightarrow \begin{cases} \text{determinata se } -1 \leq a \leq 1 & \xrightarrow{\text{soluzione}} x = \alpha + 2k\pi \vee x = (\pi - \alpha) + 2k\pi \\ \text{impossibile se } a < -1 \text{ o } a > 1 \end{cases}$$

metodo alternativo

Disegnare il grafico della funzione seno e tracciare su di esso la retta $y = \sqrt{3}/2$.

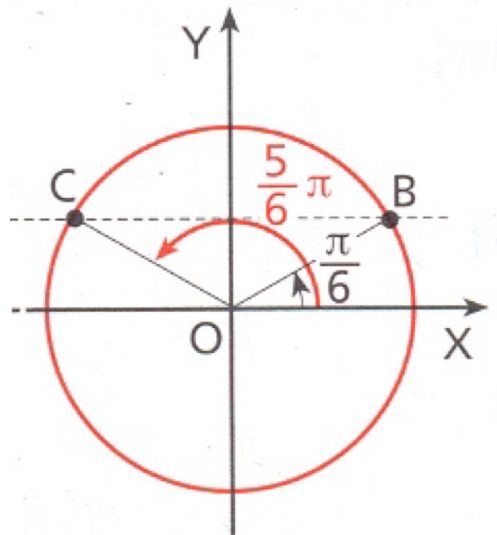
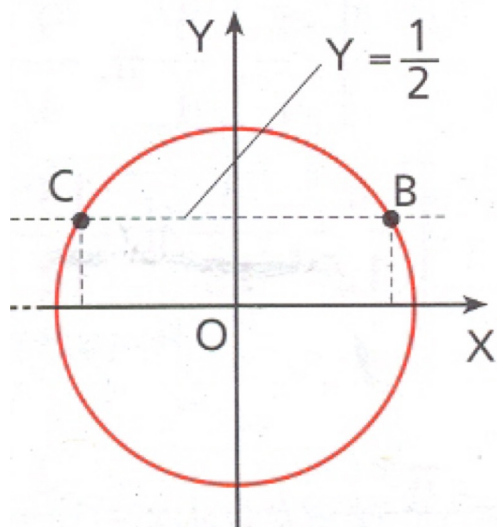


La retta interseca la funzione in due punti A e B. Le ascisse di questi due punti ($\pi/3$ e $2\pi/3$) sono le soluzioni dell'equazione:

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

Risolvere l'equazione goniometrica:

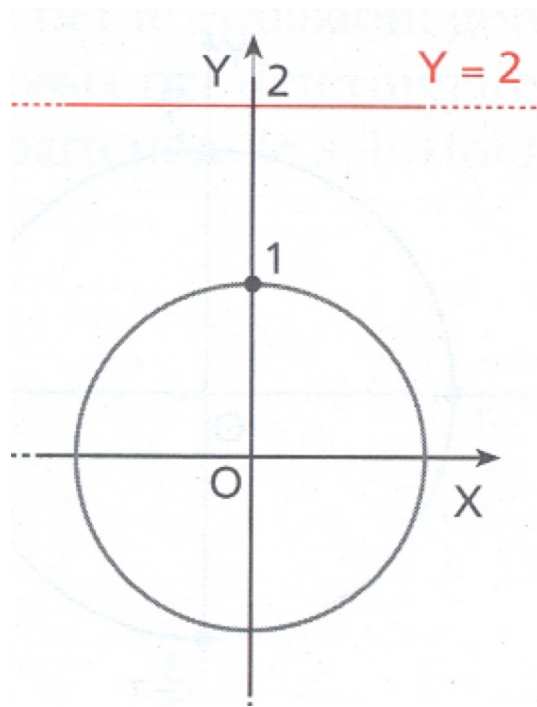
$$2\operatorname{sen}x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}x = \frac{1}{2}$$



Utilizzando la circonferenza goniometrica, cerchiamo i punti di ordinata $\frac{1}{2}$. Una soluzione si ha per $x = \frac{\pi}{6}$, un'altra per $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$.

Inoltre, tutti gli angoli che si ottengono da $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5}{6}\pi$ aggiungendo (o sottraendo) 2π e i suoi multipli hanno lo stesso seno, quindi sono soluzioni dell'equazione.

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$



L'equazione è impossibile anche nei seguenti casi:

$$\begin{aligned} \text{sen} x &= -2 & \text{sen} x &= 3/2 \\ \text{sen} x &= -5/4 \end{aligned}$$

Risolvere l'equazione goniometrica:

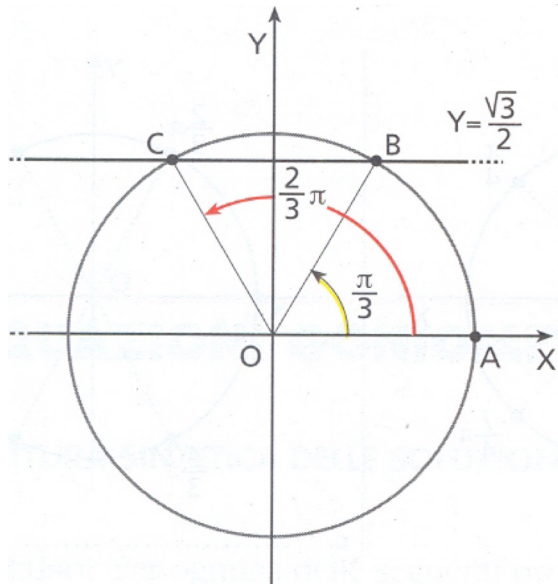
$$2\text{sen} x - 4 = 0 \Rightarrow \text{sen} x = 2$$

L'equazione è impossibile perché deve essere $-1 \leq \text{sen} x \leq 1$ per qualsiasi valore di x .

Controlliamo questo risultato graficamente con la circonferenza goniometrica. Tracciamo la retta $y=2$. La retta disegnata non incontra mai la circonferenza goniometrica e questo mostra che non esistono angoli il cui seno è 2.

Risolvere l'equazione goniometrica:

$$\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Per risolvere l'equazione poniamo $x - \frac{\pi}{6} = y$.

Otteniamo l'equazione goniometrica ausiliaria in y , che risolviamo nel modo consueto:

$$\operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le soluzioni sono $y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $y = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$.

Sostituiamo i valori trovati per y nell'equazione

$x - \frac{\pi}{6} = y$ e risolviamo le due equazioni in x :

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x - \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi.$$

L'equazione assegnata ammette le soluzioni:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

Risolvere l'equazione goniometrica:

$$\textit{sen}x = \frac{1}{3}$$

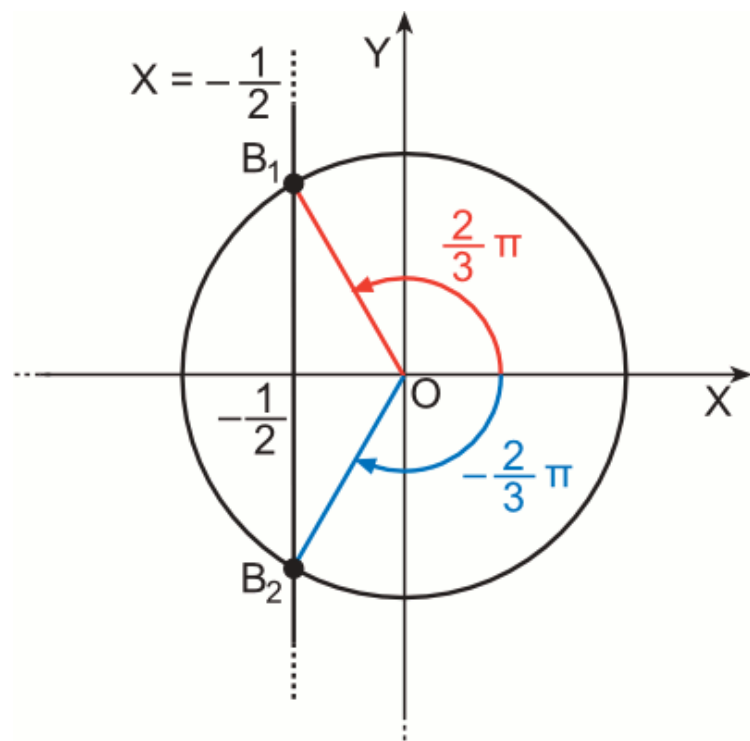
Notiamo che il seno non corrisponde ad angoli particolari, quindi la soluzione la esprimiamo mediante la funzione inversa arcoseno:

$$x = \arcsen \frac{1}{3} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{1}{3}\pi + 2k\pi$$

❑ Risolvere l'equazione:

$$\cos x = b \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

Disegniamo la retta $X = -1/2$. Le sue intersezioni con la circonferenza sono i punti B_1 e B_2 (entrambi ascissa pari a $-1/2$).



Poiché il coseno di un angolo rappresenta l'ascissa del punto della circonferenza goniometrica a cui è associato, allora gli angoli che hanno coseno uguale a $-1/2$ sono $(2\pi/3)$ e $(-2\pi/3)$.

Quindi, la soluzione dell'equazione goniometrica è:

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

Poiché il coseno è una funzione periodica, il periodo va sempre indicato nella soluzione.

E le equazioni:

$$\cos x = 2 \text{ e } \cos x = -3/2$$

che soluzione hanno?

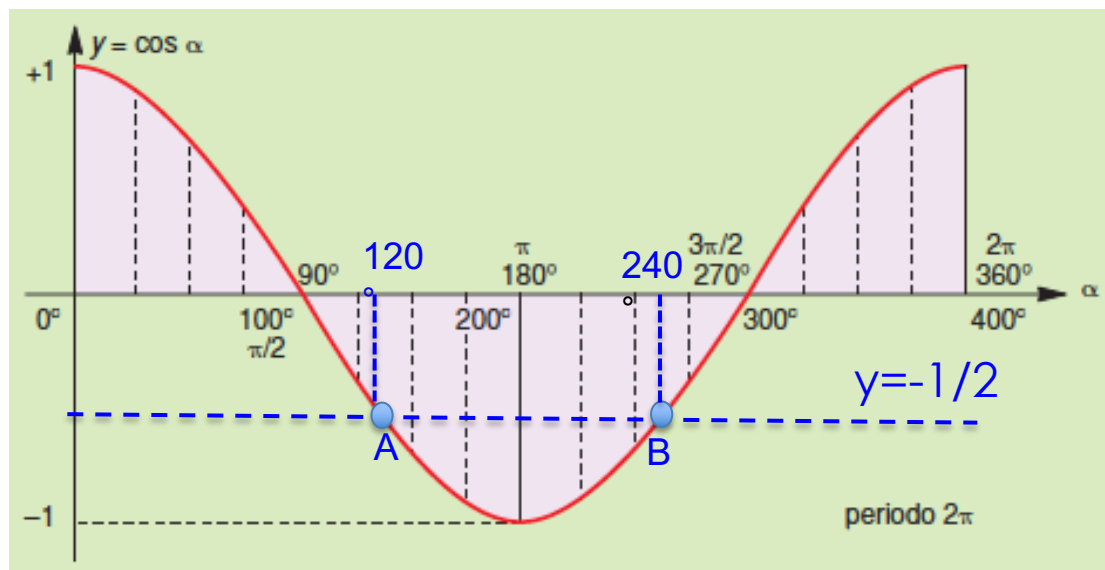
Poiché $-1 \leq \cos x \leq 1$, allora l'equazione $\cos x = b$ con $b > 1$ o $b < -1$, non ammette soluzione (impossibile).

In generale

$$\cos x = b \Rightarrow \begin{cases} \text{determinata se } -1 \leq b \leq 1 & \xrightarrow{\text{soluzione}} x = \pm \alpha + 2k\pi \\ \text{impossibile se } b < -1 \text{ o } b > 1 \end{cases}$$

metodo alternativo

Disegnare il grafico della funzione coseno e tracciare su di esso la retta $y = -1/2$.



La retta interseca la funzione in due punti A e B. Le ascisse di questi due punti (120° e 240°) sono le soluzioni dell'equazione:

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = (180^\circ - 60^\circ) + k360^\circ \vee x = (180^\circ + 60^\circ) + k360^\circ$$

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$

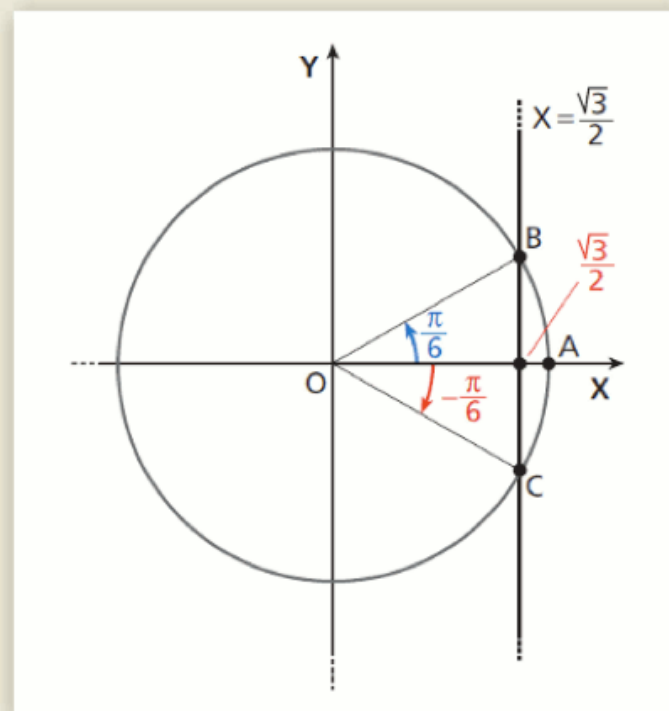
Risolviamo l'equazione rispetto a $\cos x$:

$$2 \cos x - \sqrt{3} = 0 \rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Sulla circonferenza goniometrica, cerchiamo i punti di ascissa $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

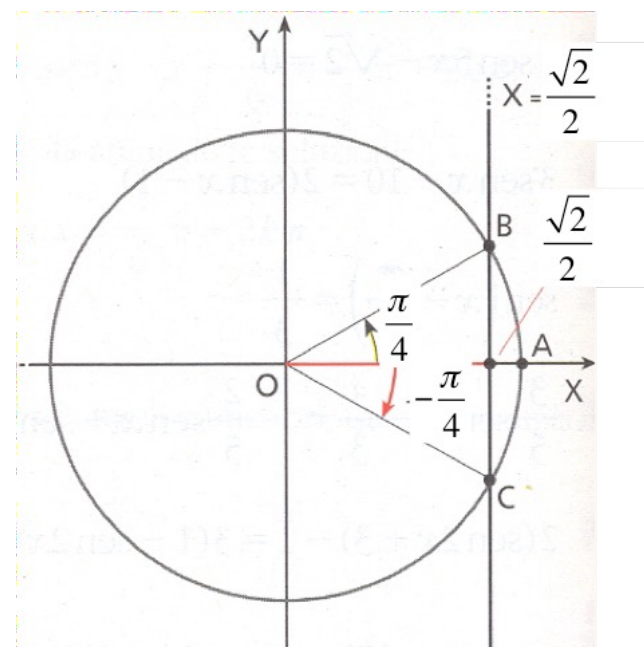
Una soluzione si ha per $x = \frac{\pi}{6}$, l'altra per $x = -\frac{\pi}{6}$. Tenendo conto che il periodo della funzione coseno è 2π , le soluzioni dell'equazione data, in forma sintetica, sono:

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$



Risolvere la seguente equazione goniometrica:

$$\cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Ponendo $5x=y$, l'equazione diventa elementare:

$$\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\text{soluzione}} y = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Sostituendo i valori di y in $5x=y$, troviamo la soluzione dell'equazione:

$$5x = y \Rightarrow 5x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}k\pi$$

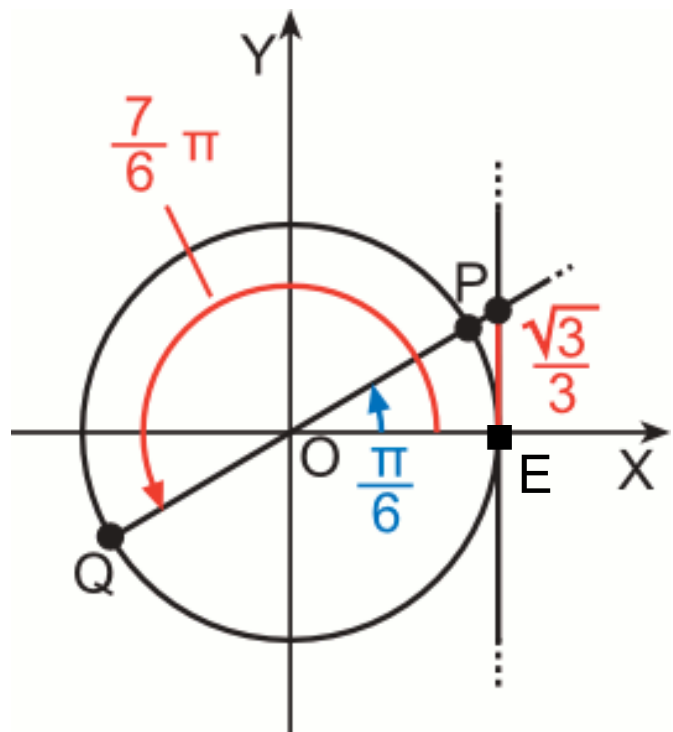
Risolvere le seguenti equazioni goniometriche:

$$\cos x = 2 \quad \cos x = -3/2 \quad \cos x = 5/4 \quad \cos x = -1,2$$

Le equazioni sono impossibili perché deve essere $-1 \leq \cos x \leq 1$ per qualsiasi valore di x .

❑ Risolvere l'equazione:

$$\operatorname{tg} x = c \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Tenendo presente che la tangente di un angolo è l'ordinata del punto d'intersezione della retta tangente in E con la retta OP che individua l'angolo, allora:

1. Tracciamo la retta tangente in E alla circonferenza e individuiamo il punto di ordinata $\sqrt{3}/3$. La retta OP, che interseca la retta tangente in E in $\sqrt{3}/3$, individua l'angolo $\pi/6$.
2. Prolungando OP otteniamo il punto Q, corrispondente a un secondo angolo $7\pi/6$ con tangente $\sqrt{3}/3$, ottenuto aggiungendo a $\pi/6$ il periodo π .

Quindi, la soluzione dell'equazione goniometrica è:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

Poiché la tangente è una funzione periodica, il periodo va sempre indicato nella soluzione.

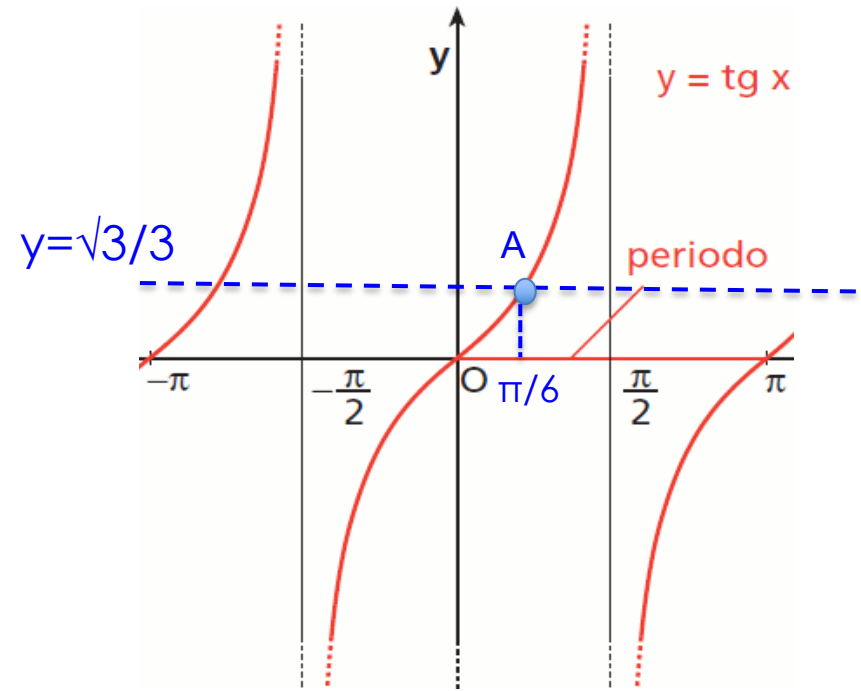
A differenza delle funzioni seno e coseno, la funzione tangente è determinata per qualunque valore reale di c .

In generale

$$\operatorname{tg} x = c \Rightarrow \text{determinata } \forall c \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{soluzione}} x = \alpha + k\pi$$

metodo alternativo

Disegnare il grafico della funzione tangente e tracciare su di esso la retta $y = \sqrt{3}/3$.



Nel periodo $(0, \pi)$ della tangente, la retta interseca la funzione in un solo punto A . L'ascissa $\pi/6$ del punto rappresenta la soluzione dell'equazione:

$$\text{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo l'equazione:

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

Poniamo $x + \frac{\pi}{3} = y$.

Otteniamo l'equazione $\operatorname{tg} y = \sqrt{3}$.

Tracciamo la retta tangente alla circonferenza nel punto A origine degli archi e prendiamo sulla tangente il punto T di ordinata $\sqrt{3}$. Tracciata TO , vediamo che al valore $\sqrt{3}$ della tangente corrispondono l'angolo $\frac{\pi}{3}$ e tutti quelli che si ottengono da $\frac{\pi}{3}$ aggiungendo un multiplo di π .

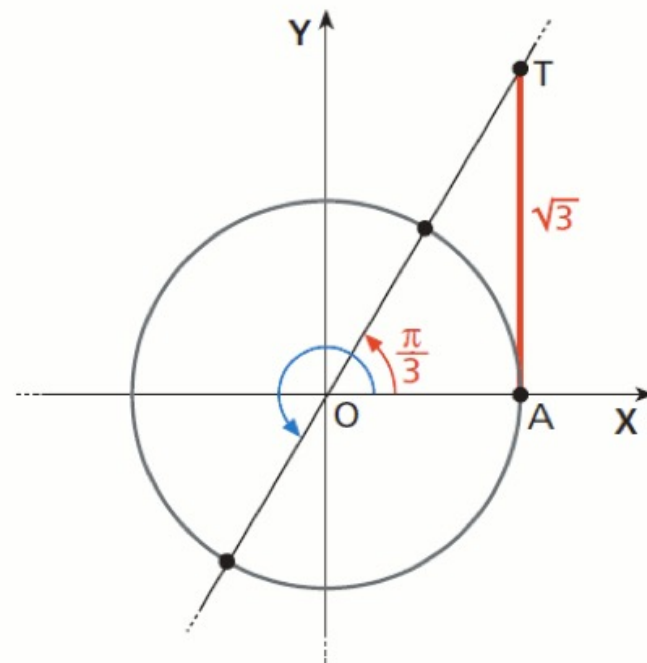
Le soluzioni sono $y = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Sostituiamo il valore trovato per y in $x + \frac{\pi}{3} = y$ e risolviamo l'equazione ottenuta:

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k\pi \rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + k\pi \rightarrow x = k\pi.$$

Le soluzioni dell'equazione assegnata sono:

$$x = k\pi.$$



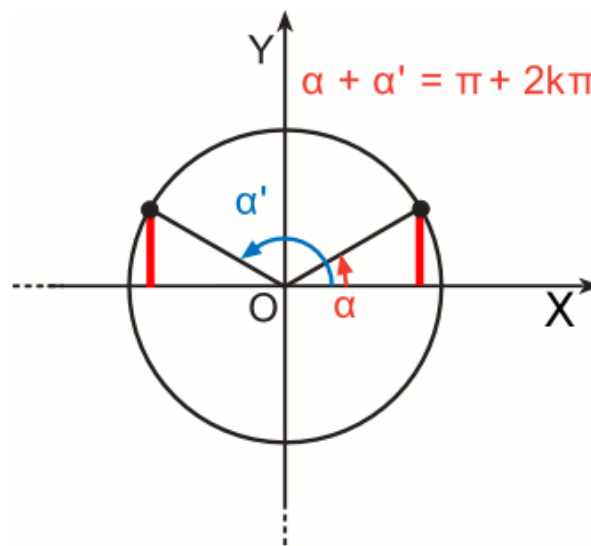
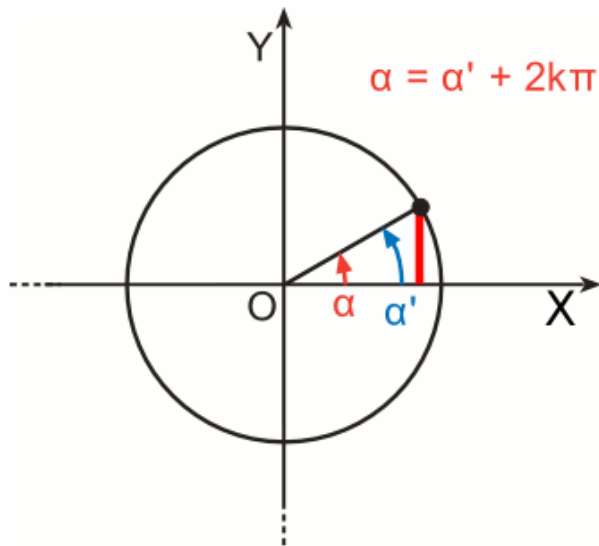
Le seguenti equazioni si risolvono come quelle elementari, ossia tenendo conto della definizione e della periodicità.

1) Risolvere l'equazione:

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \alpha'$$

□ Soluzione:

$$\alpha = \alpha' + 2k\pi \vee \alpha + \alpha' = \pi + 2k\pi$$



Due angoli hanno lo stesso seno quando sono congruenti o supplementari, a meno di un numero intero di angoli giro.

❑ Risolvere l'equazione:

$$\operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen} \alpha'$$

Poiché $-\operatorname{sen} \alpha' = \operatorname{sen}(-\alpha')$ (angoli associati), l'equazione diventa:

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(-\alpha') \xrightarrow{\beta=\alpha \quad \beta'=-\alpha'} \operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} \beta'$$

In questo modo ci siamo ricondotti al primo caso.

❑ Risolvere l'equazione:

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha'$$

Poiché $\cos \alpha' = \operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha')$ (seno e coseno sono uguali quando gli angoli sono complementari), l'equazione diventa:

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right) \xrightarrow{\beta=\alpha \quad \beta'=\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)} \operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} \beta'$$

In questo modo ci siamo ricondotti al primo caso.

❑ Risolvere l'equazione:

$$\operatorname{sen} \alpha = -\cos \alpha'$$

Poiché $-\cos \alpha' = -\operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha')$,
l'equazione diventa:

$$\operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha' \right) \xrightarrow{\beta = \alpha \quad \beta' = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha' \right)} \operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} \beta'$$

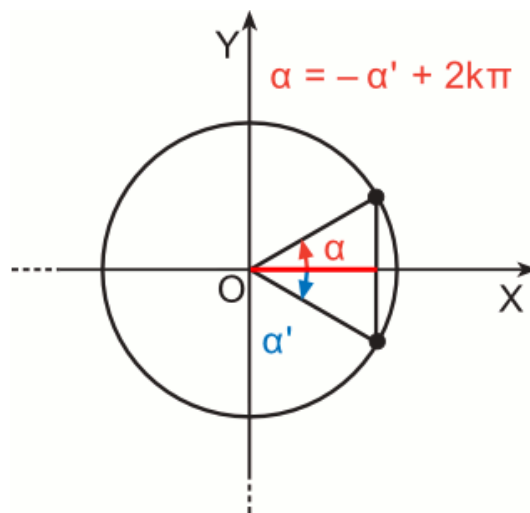
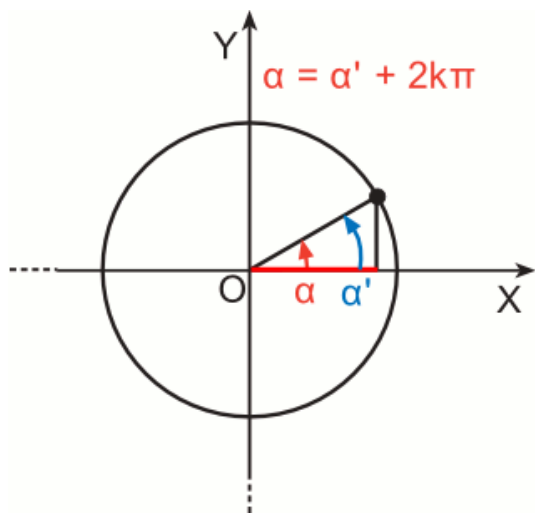
In questo modo ci siamo ricondotti al primo caso.

2) Risolvere l'equazione:

$$\cos \alpha = \cos \alpha'$$

❑ Soluzione:

$$\alpha = \alpha' + 2k\pi \vee \alpha + \alpha' = 2k\pi \xrightarrow{\text{forma compatta}} \alpha = \pm \alpha' + 2k\pi$$



Due angoli hanno lo stesso coseno quando sono congruenti oppure opposti, a meno di un numero intero di angoli giro.

❑ Risolvere l'equazione:

$$\cos \alpha = -\cos \alpha'$$

Poiché $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ (angoli supplementari hanno coseni opposti), l'equazione diventa:

$$\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha') \xrightarrow{\beta = \alpha \quad \beta' = \pi - \alpha'} \cos \beta = \cos \beta'$$

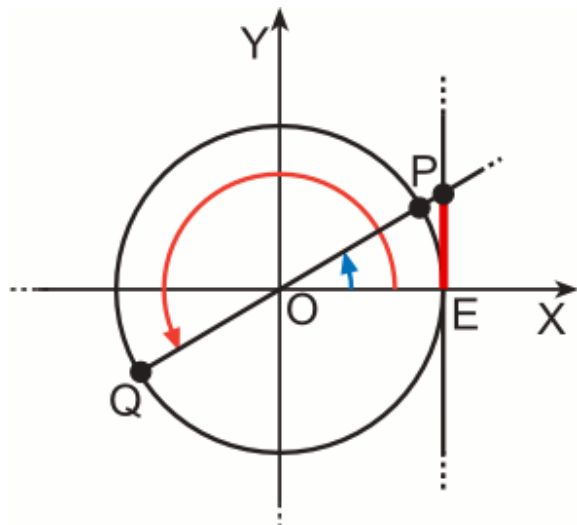
In questo modo ci siamo ricondotti al secondo caso.

3) Risolvere l'equazione:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha'$$

❑ Soluzione:

$$\alpha = \alpha' + k\pi$$



Due angoli hanno la stessa tangente quando sono congruenti, a meno di un numero intero di angoli piatti.

❑ Risolvere l'equazione:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \alpha'$$

Poiché $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ (angoli associati), l'equazione diventa:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(-\alpha') \xrightarrow{\beta=\alpha \quad \beta'=-\alpha'} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \beta'$$

In questo modo ci siamo ricondotti al terzo caso.

Risolvere la seguente equazione:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Poniamo: $\alpha = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}$ $\alpha' = \frac{1}{4}x - \frac{\pi}{4}$

Soluzione $\Rightarrow \alpha = \alpha' + 2k\pi \vee \alpha + \alpha' = \pi + 2k\pi$

$$\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi$$

Svolgiamo i calcoli:

$$x = \pi + 8k\pi \vee x = \frac{7}{3}\pi + \frac{8}{3}k\pi$$

Risolvere la seguente equazione:

$$\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{7}\right) = \operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{8}\right)$$

Poniamo: $\alpha = 3x + \frac{\pi}{7}$ $\alpha' = 4x - \frac{\pi}{8}$

$$\text{Soluzione} \Rightarrow \alpha = \alpha' + k\pi \Rightarrow 3x + \frac{\pi}{7} = 4x - \frac{\pi}{8} + k\pi$$

Svolgiamo i calcoli:

$$x = \frac{15}{56}\pi - k\pi$$

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo le seguenti equazioni:

a) $\text{sen } 4x = \text{sen} \left(2x - \frac{\pi}{3} \right).$

Poiché $\text{sen } \alpha = \text{sen } \alpha' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' + 2k\pi \vee \alpha + \alpha' = \pi + 2k\pi$ e nell'equazione data è $\alpha = 4x$ e $\alpha' = 2x - \frac{\pi}{3}$, dobbiamo risolvere le due equazioni:

- $4x = 2x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi;$
- $4x + 2x - \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi \rightarrow 6x = \frac{\pi}{3} + \pi + 2k\pi \rightarrow 6x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \rightarrow x = \frac{2}{9}\pi + k\frac{\pi}{3}.$

In sintesi: $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{2}{9}\pi + k\frac{\pi}{3}.$

$$\text{b) } \operatorname{sen}\left(3x + \frac{2}{5}\pi\right) = -\operatorname{sen}\left(2x - \frac{3}{4}\pi\right).$$

Per le proprietà degli archi associati $-\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(-\alpha)$, quindi riscriviamo l'equazione così:

$$\operatorname{sen}\left(3x + \frac{2}{5}\pi\right) = \operatorname{sen}\left(-2x + \frac{3}{4}\pi\right).$$

Procediamo in modo analogo a quello dell'equazione precedente. Dobbiamo risolvere le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \bullet \quad & 3x + \frac{2}{5}\pi = -2x + \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \rightarrow 3x + 2x = -\frac{2}{5}\pi + \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \rightarrow \\ & \rightarrow 5x = \frac{-8\pi + 15\pi}{20} + 2k\pi \rightarrow 5x = \frac{7}{20}\pi + 2k\pi \rightarrow x = \frac{7}{100}\pi + \frac{2}{5}k\pi; \\ \bullet \quad & 3x + \frac{2}{5}\pi - 2x + \frac{3}{4}\pi = \pi + 2k\pi \rightarrow 3x - 2x = -\frac{2}{5}\pi - \frac{3}{4}\pi + \pi + 2k\pi \rightarrow \\ & \rightarrow x = \frac{-8\pi - 15\pi + 20\pi}{20} + 2k\pi \rightarrow x = -\frac{3}{20}\pi + 2k\pi. \end{aligned}$$

$$\text{In sintesi: } x = \frac{7}{100}\pi + \frac{2}{5}k\pi \vee x = -\frac{3}{20}\pi + 2k\pi.$$

c) $\cos 6x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$

Tenendo conto che $\cos \alpha = \cos \alpha' \Leftrightarrow \alpha = \pm \alpha' + 2k\pi$, dobbiamo risolvere le seguenti equazioni:

- $6x = x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow 5x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow x = -\frac{\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi;$

- $6x = -x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow 7x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{21} + \frac{2}{7}k\pi.$

In sintesi: $x = -\frac{\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi \vee x = \frac{\pi}{21} + \frac{2}{7}k\pi.$

d) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 3x.$

L'equazione si può trasformare utilizzando gli angoli associati nella seguente:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right).$$

Si hanno le equazioni:

- $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi;$

- $x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - 3x = \pi + 2k\pi.$

Le soluzioni sono:

$$4x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee -2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad \text{ossia}$$

$$x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{8} - k\pi.$$

$$e) \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg} \frac{5x}{6}.$$

Poiché $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' + k\pi$, posta la condizione

$$x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge \frac{5}{6}x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x \neq \frac{2}{3}\pi + k\pi \wedge x \neq \frac{3}{5}\pi + k\frac{6}{5}\pi,$$

si ha:

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}x + k\pi \rightarrow x - \frac{5}{6}x = \frac{\pi}{6} + k\pi \rightarrow \frac{x}{6} = \frac{\pi}{6} + k\pi \rightarrow x = \pi + 6k\pi.$$

Le soluzioni sono accettabili.

$$f) \operatorname{tg}\left(3x + \frac{2}{5}\pi\right) = -\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{Poniamo: } 3x + \frac{2}{5}\pi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge 2x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x \neq \frac{\pi}{30} + k\frac{\pi}{3} \wedge x \neq \frac{3}{8}\pi + k\frac{\pi}{2}.$$

Per una delle relazioni fra archi associati, l'equazione è equivalente a:

$$\operatorname{tg}\left(3x + \frac{2}{5}\pi\right) = \operatorname{tg}\left(-2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Analogamente al caso precedente, dobbiamo risolvere l'equazione:

$$3x + \frac{2}{5}\pi = -2x + \frac{\pi}{4} + k\pi \rightarrow 5x = \frac{-8\pi + 5\pi}{20} + k\pi \rightarrow x = -\frac{3\pi}{100} + k\frac{\pi}{5}.$$

Le soluzioni sono accettabili.

Risolvere la seguente equazione:

$$2\cos^2 x - \cos x = 0$$

Ponendo $\cos x = y$, l'equazione diventa:

$$2y^2 - y = 0 \Rightarrow y(2y - 1) = 0 \xrightarrow[\text{eq. 2° grado}]{\text{soluzione}} y_1 = 0 \quad y_2 = \frac{1}{2}$$

Pertanto, la soluzione dell'equazione di partenza consiste nell'unione delle soluzioni delle seguenti equazioni goniometriche elementari:

$$\cos x = y_1 \Rightarrow \cos x = 0 \xrightarrow{\text{soluzione}} x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\cos x = y_2 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{soluzione}} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Risolvere la seguente equazione:

$$2\operatorname{sen}^2 x + 5\cos x - 4 = 0$$

1. Utilizzando la relazione fondamentale:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \xrightarrow{\text{da cui}} \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$

esprimiamo l'equazione in funzione soltanto di $\cos x$:

$$2(1 - \cos^2 x) + 5\cos x - 4 = 0 \xrightarrow{\text{da cui}} 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$$

2. Ponendo $\cos x = y$, l'equazione diventa:

$$2y^2 - 5y + 2 = 0 \xrightarrow{\text{soluzione}} y_1 = 2 \quad y_2 = \frac{1}{2}$$

3. La soluzione è:

$$\cos x = y_1 \Rightarrow \cos x = 2 \quad \text{impossibile}$$

$$\cos x = y_2 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{soluzione}} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Risolvere la seguente equazione:

$$\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x = 3$$

Utilizzando la definizione di cotangente ed effettuando i dovuti passaggi algebrici, l'equazione diventa:

$$\operatorname{tg} x + 2 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 3 \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 2}{\operatorname{tg} x} = 0$$

Discussione dominio
dell'equazione:

$$\operatorname{tg} x \neq 0 \xrightarrow{\text{soluzione}} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Si può eliminare il mcm, e ponendo $\operatorname{tg} x = y$, l'equazione diventa:

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \xrightarrow{\text{soluzione}} y_1 = 1 \quad y_2 = 2$$

La soluzione dell'equazione di partenza consiste nell'unione delle soluzioni delle seguenti equazioni goniometriche elementari:

$$tgx = y_1 \Rightarrow tgx = 1 \xrightarrow{\text{soluzione}} x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$tgx = y_2 \Rightarrow tgx = 2 \xrightarrow{\text{soluzione}} x = arctg2 + k\pi$$

Le soluzioni sono entrambe accettabili in quanto fanno parte del dominio delle soluzioni dell'equazione.

Risolvere la seguente equazione:

$$\cos 2x + \cos x = 0$$

Utilizzando le formule di duplicazione: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
esprimiamo l'equazione in funzione soltanto di $\cos x$:

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \xrightarrow{\cos x = y} 2y^2 + y - 1 = 0 \xrightarrow{\text{soluzione}} y_1 = -1 \quad y_2 = \frac{1}{2}$$

La soluzione è:

$$\cos x = y_1 \Rightarrow \cos x = -1 \xrightarrow{\text{soluzione}} x = \pi + 2k\pi$$

$$\cos x = y_2 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{soluzione}} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\xrightarrow{\text{oppure}} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$$

Risolvere la seguente equazione:

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos x = 1$$

Utilizzando le formule di bisezione: $\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

nell'equazione
compare solo $\cos x$:

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + \cos x = 1 \Rightarrow \frac{\cos^2 x - \cos x}{1 + \cos x} = 0$$

Discussione dominio
dell'equazione:

$$1 + \cos x \neq 0 \xrightarrow{\text{soluzione}} x \neq \pm\pi + 2k\pi$$

Si può eliminare il mcm,
e ponendo $\cos x = y$,
l'equazione diventa:

$$y^2 - y = 0 \xrightarrow{\text{soluzione}} y_1 = 0 \quad y_2 = 1$$

Come al solito, la soluzione si riduce a quella delle equazioni goniometriche elementari:

$$\begin{aligned}\cos x = y_1 &\Rightarrow \cos x = 0 \xrightarrow{\text{soluzione}} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos x = y_2 &\Rightarrow \cos x = 1 \xrightarrow{\text{soluzione}} x = 2k\pi\end{aligned}$$

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo le seguenti equazioni:

a) $\cos^2 x + \sin^2 2x = 1$.

Questa equazione contiene funzioni goniometriche sia di x , sia di $2x$.

Esprimiamo tutto soltanto con funzioni goniometriche di x , utilizzando le formule di duplicazione:

$$\cos^2 x + (2 \sin x \cdot \cos x)^2 = 1.$$

Svolgiamo i calcoli: $\cos^2 x + 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1$.

Esprimiamo $\sin^2 x$ come $(1 - \cos^2 x)$, in modo da avere un'equazione contenente solo il coseno di x :

$$\cos^2 x + 4(1 - \cos^2 x) \cdot \cos^2 x = 1.$$

Svolgiamo i calcoli: $4 \cos^4 x - 5 \cos^2 x + 1 = 0$.

Questa è un'equazione biquadratica del tipo $ay^4 + by^2 + c = 0$.

Poniamo $\cos^2 x = y$ e otteniamo l'equazione:

$$4y^2 - 5y + 1 = 0, \text{ da cui } y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{8} = \frac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$y_1 = \frac{1}{4}, \text{ da cui } \cos^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2} \rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi;$$

$$y_2 = 1, \text{ da cui } \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos x = \pm 1 \rightarrow x = k\pi.$$

$$\text{b) } \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) + \cos 2x = 0.$$

Applichiamo le formule di addizione, sottrazione e duplicazione in modo che l'argomento delle funzioni sia solo x :

$$\left(\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{6}\right) + \left(\cos x \cdot \cos \frac{2}{3}\pi - \sin x \cdot \sin \frac{2}{3}\pi\right) + (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0.$$

Svolgiamo i calcoli:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x\right) + \left(-\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x\right) + [\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)] = 0$$

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Poniamo $\cos x = y$,

$$2y^2 - y - 1 = 0 \rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

da cui:

$$y_1 = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi;$$

$$y_2 = 1 \rightarrow \cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi.$$

Un'equazione goniometrica si dice **lineare** in $\sin x$ e $\cos x$ quando assume la forma:

$$a \sin x + b \cos x = c$$

Metodi risolutivi

❑ Metodo algebrico

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0 \quad \text{caso in cui } c = 0$$

Dividiamo entrambi i membri per $\cos x \neq 0$ (con la **condizione** $x \neq \pi/2 + k\pi$):

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \sqrt{3} \frac{\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x} \xrightarrow[\text{equazione elementare}]{\text{otteniamo una}} \tan x = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{soluzione}} x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Soluzione accettabile in quanto soddisfa la condizione.

$$\text{sen} x + \cos x - 1 = 0$$

caso in cui $c \neq 0$

In questo caso dobbiamo utilizzare le formule parametriche:

$$\text{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\text{con } t = \text{tg} \frac{x}{2} \xrightarrow{\text{condizione}} \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \pi + 2k\pi$$

Pertanto, prima di risolvere l'equazione, dobbiamo verificare se l'equazione soddisfa la condizione $x \neq \pi + 2k\pi$.

Poniamo $x = \pi$ nell'equazione:

$$\text{sen} \pi + \cos \pi - 1 = 0 \xrightarrow{\text{calcoli}} 0 + (-1) - 1 \neq 0$$

Poichè l'uguaglianza è falsa, la condizione è soddisfatta per cui $x = \pi + 2k\pi$ non è soluzione dell'equazione.

Possiamo passare alla soluzione dell'equazione, sostituendo a $\sin x$ e $\cos x$ le formule parametriche:

$$\sin x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1 = 0 \xrightarrow[\text{equazione di 2° grado}]{\text{calcoli, otteniamo}} t^2 - t = 0$$
$$\xrightarrow{\text{soluzione}} t_1 = 0 \quad t_2 = 1$$

Ci siamo così ridotti a risolvere equazioni goniometriche elementari:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t_1 \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0 \xrightarrow{\text{soluzione}} \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t_2 \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 \xrightarrow{\text{soluzione}} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Soluzione

$$x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

❑ Metodo grafico

$$\sqrt{3}\operatorname{sen}x + \cos x - 2 = 0$$

Usiamo la geometria analitica, trasformando l'equazione nel seguente sistema:

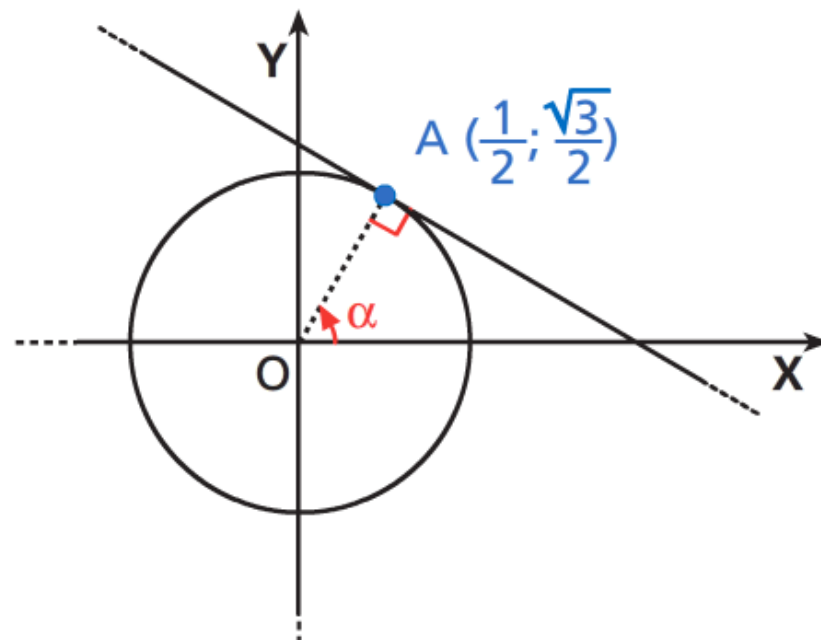
$$\begin{cases} \sqrt{3}\operatorname{sen}x + \cos x = 2 \\ \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \end{cases}$$

Graficamente corrisponde all'intersezione di una retta con una circonferenza di raggio 1.

Poniamo $\operatorname{sen}x=Y$ e $\cos x=X$:

$$\begin{cases} \sqrt{3} Y + X = 2 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{soluzione}} \begin{cases} X = \frac{1}{2} \\ Y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Rappresentiamo graficamente la soluzione, disegnando la retta, la circonferenza e il loro punto d'intersezione (retta tangente).



Sostituendo a $X=\cos x$ e a $Y=\sin x$, il sistema diventa:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{1}{2} \\ Y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right. \xrightarrow{\substack{X=\cos x \\ Y=\sin x}} \left\{ \begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{soluzione}} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

❑ Metodo angolo aggiunto

$$a \sin x + b \cos x + c = 0 \xrightarrow{\text{equivalente a:}} r \sin(x + \alpha) + c = 0 \Rightarrow \sin(x + \alpha) = -\frac{c}{r}$$

$$\text{dove } r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x + 1 = 0 \xrightarrow[r = \sqrt{1+3}=2]{\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3} \rightarrow \alpha = -\pi/3} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

Abbiamo così trasformato l'equazione lineare in una equazione elementare, la cui soluzione è:

$$x - \frac{\pi}{3} = \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{13}{6}\pi + 2k\pi$$

$$x - \frac{\pi}{3} = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

Risolvere la seguente equazione goniometrica lineare:

□ Metodo algebrico

L'equazione è del tipo $a \cos x + b \sin x + c = 0$ con $c \neq 0$. Per risolverla ci serviamo delle formule parametriche:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Poiché tali formule valgono per $x \neq \pi + 2k\pi$, dobbiamo verificare se $x = \pi + 2k\pi$ è una soluzione dell'equazione data. Sostituiamo alla x il valore π nel primo membro dell'equazione data:

$$\sqrt{3} \cos \pi + \sin \pi = -\sqrt{3} + 0 = -\sqrt{3} \neq \sqrt{3}.$$

In questo caso $x = \pi + 2k\pi$ **non** è soluzione dell'equazione data.

Se $x = \pi + 2k\pi$ avesse soddisfatto l'equazione, l'avremmo considerata come una soluzione.

Determiniamo le soluzioni diverse da $\pi + 2k\pi$. Ponendo $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, le formule parametriche diventano:

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Sostituiamo tali espressioni nell'equazione data:

$$\sqrt{3} \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + \frac{2t}{1 + t^2} = \sqrt{3} \rightarrow \frac{\sqrt{3}(1 - t^2) + 2t}{1 + t^2} = \frac{\sqrt{3}(1 + t^2)}{1 + t^2} \rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{3}t^2 + 2t = \sqrt{3} + \sqrt{3}t^2.$$

L'equazione ridotta in forma normale è:

$$\sqrt{3}t^2 - t = 0 \rightarrow t(\sqrt{3}t - 1) = 0 \begin{cases} t = 0 \\ \sqrt{3}t - 1 = 0 \rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Poiché $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, per risolvere l'equazione di partenza dobbiamo risolvere le equazioni elementari:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\bullet \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{2} = k\pi \quad \rightarrow \quad x = 2k\pi;$$

$$\bullet \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi \rightarrow x = \frac{2\pi}{6} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Le soluzioni dell'equazione data sono: $x = 2k\pi$; $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

❑ Metodo grafico

Trasformiamo l'equazione nel sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{3} \\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \end{cases}$$

Poniamo $\sin x = Y$ e $\cos x = X$ e sostituiamo nel sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{3} \cdot X + Y = \sqrt{3} & \rightarrow \text{equazione di una retta} \\ X^2 + Y^2 = 1 & \rightarrow \text{equazione della circonferenza goniometrica} \end{cases}$$

Risolviamo il sistema ricavando Y dalla prima equazione e sostituendo nella seconda:

$$\begin{cases} Y = -\sqrt{3} \cdot X + \sqrt{3} \\ X^2 + (-\sqrt{3} \cdot X + \sqrt{3})^2 = 1 \end{cases}$$

Risolviamo la seconda equazione:

$$X^2 + (3X^2 + 3 - 6X) = 1 \rightarrow 4X^2 - 6X + 2 = 0 \rightarrow 2X^2 - 3X + 1 = 0$$

$$X = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Riprendiamo il sistema:

$$\begin{cases} Y = -\sqrt{3} \cdot X + \sqrt{3} \\ X = 1 \vee X = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = 1 \\ Y = 0 \end{cases} \rightarrow E(1; 0)$$

$$\rightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{2} \\ Y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Disegniamo sul piano cartesiano la retta e la circonferenza (figura a).

La retta interseca la circonferenza nei due punti E e A.

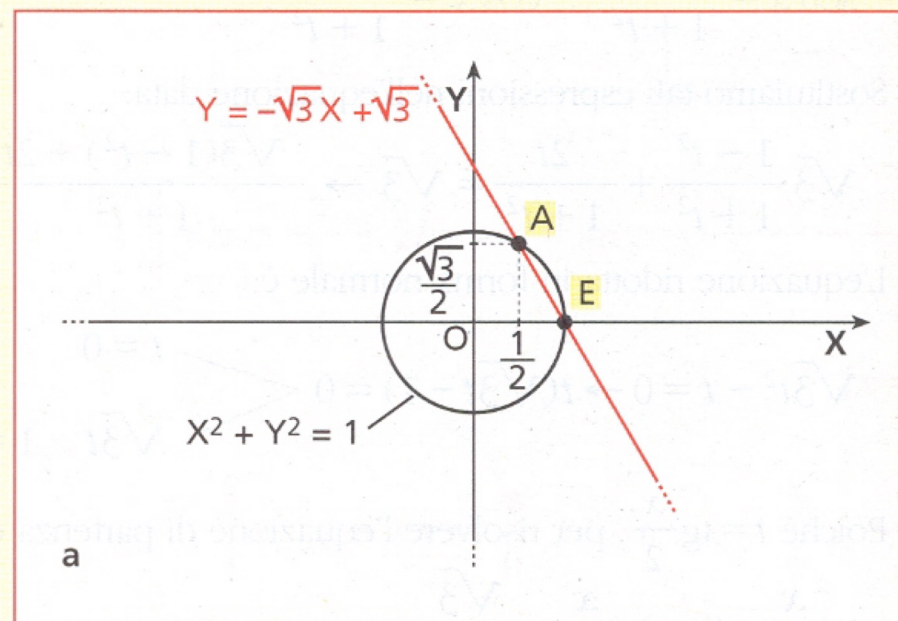
Sostituiamo i valori trovati a $\cos x$ e $\sin x$, ottenendo due sistemi di due disequazioni elementari:

$$1. \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \rightarrow x = 2k\pi;$$

$$2. \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Le soluzioni dell'equazione data sono (figura b):

$$x = 2k\pi \quad \text{e} \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$



❑ Metodo angolo aggiunto

Poiché $a \sin x + b \cos x = r \sin(x + \alpha)$ con $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

e $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$, nell'equazione data, per l'espressione

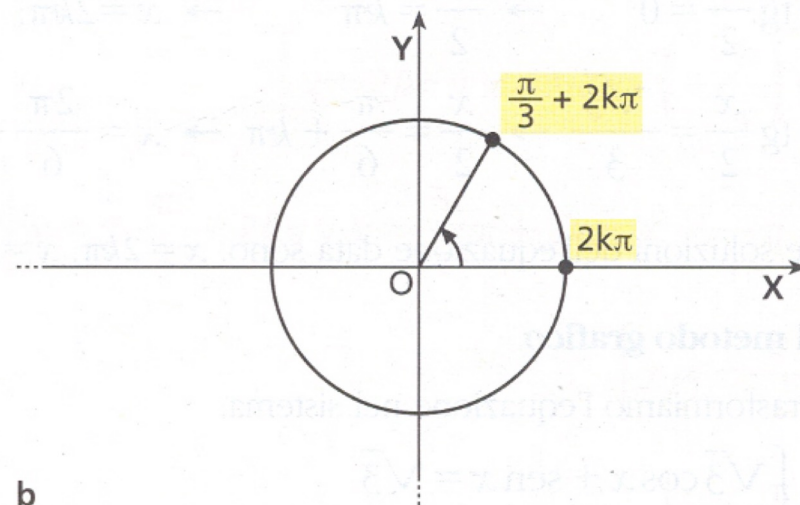
$\sqrt{3} \cos x + \sin x$ abbiamo:

$$r = \sqrt{1 + 3} = 2; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3};$$

quindi l'equazione equivale a:

$$2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3},$$

equazione elementare che sappiamo risolvere.



$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow[y=x+\frac{\pi}{3}]{\text{poniamo}} \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\text{soluzione}} y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee y = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$$

La soluzione dell'equazione è:

$$x + \frac{\pi}{3} = y \Rightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \xrightarrow{\text{soluzione}} x = 2k\pi$$

$$x + \frac{\pi}{3} = y \Rightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \xrightarrow{\text{soluzione}} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

EQUAZIONI OMOGENEE DI 2° GRADO IN SENO E COSENO

definizione

Un'equazione goniometrica si dice **omogenea di 2° grado** in $\sin x$ e $\cos x$ quando assume la forma:

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

□ 1° caso: $a=0$ oppure $c=0$

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x = 0$$

Raccogliamo a fattor comune e risolviamo:

$$\cos x (\sin x + \cos x) = 0 \quad \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \xrightarrow{\text{soluzione}} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \sin x + \cos x = 0 \xrightarrow[\substack{\text{equazione lineare} \\ \text{dividiamo per} \\ \cos x \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi}]{\text{soluzione}} \text{tg} x = -1 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array} \right.$$

□ 2° caso: $a \neq 0$ e $c \neq 0$

$$\operatorname{sen}^2 x - (1 + \sqrt{3}) \operatorname{sen} x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$$

Dividiamo entrambi i membri per $\cos^2 x \neq 0$ (con la **condizione** $x \neq \pi/2 + k\pi$) e risolviamo:

$$\operatorname{tg}^2 x - (1 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0 \xrightarrow{\operatorname{tg} x = y} y^2 - (1 + \sqrt{3})y + \sqrt{3} = 0 \xrightarrow{\text{soluzione}} y_1 = 1 \quad y_2 = \sqrt{3}$$

Ci siamo così ridotti a risolvere equazioni goniometriche elementari:

$$\operatorname{tg} x = y_1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \xrightarrow{\text{soluzione}} x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\operatorname{tg} x = y_2 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{soluzione}} x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Soluzione

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

❑ Osservazione

$$5\operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{3}\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x - 2 = 0$$

Un'equazione omogenea di 2° grado può essere risolta trasformandola in una equazione lineare tenendo presente le seguenti formule goniometriche:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$$

Quindi, l'equazione assume la forma:

$$5\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) - \sqrt{3}\operatorname{sen} 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} - 2 = 0 \xrightarrow{\text{da cui}} \sqrt{3}\operatorname{sen} 2x + 3\cos 2x = 0$$

Risolviamola con uno dei metodi studiati (metodo algebrico):

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\sin 2x + 3\cos 2x = 0 & \xrightarrow[\cos 2x \neq 0 \rightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}]{\text{dividiamo per}} \tan 2x = -\sqrt{3} \\ \xrightarrow{\text{soluzione}} 2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} & \text{accettabile} \end{aligned}$$

❑ equazione riconducibile a omogenea di 2° grado

$$2\sqrt{3}\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = \sqrt{3}$$

Moltiplichiamo il secondo membro per $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ (operazione possibile perché $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$):

$$2\sqrt{3}\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = \sqrt{3}(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) \xrightarrow{\text{calcoli}} \sqrt{3}\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \cos x = 0$$

Abbiamo così ottenuto un'equazione omogenea di 2° grado con $c=0$. Raccogliamo a fattor comune e risolviamo:

$$\operatorname{sen} x (\sqrt{3}\operatorname{sen} x - \cos x) = 0 \left[\begin{array}{l} \operatorname{sen} x = 0 \xrightarrow{\text{soluzione}} x = k\pi \\ \sqrt{3}\operatorname{sen} x - \cos x = 0 \xrightarrow[\substack{\text{equazione lineare} \\ \text{dividiamo per} \\ \cos x \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi}]{\text{soluzione}} \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{array} \right.$$

Risolvere la seguente equazione omogenea di 2° grado:



Risolvere l'equazione: $\sqrt{3} \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} x = \sqrt{3} + 1$.

Esprimendo $\operatorname{ctg} x$ mediante la sua reciproca $\operatorname{tg} x$ e ponendo la condizione $x \neq k\pi$ e $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$, si ottiene un'equazione equivalente di 2° grado in $\operatorname{tg} x$:

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \sqrt{3} + 1 \Rightarrow \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - (\sqrt{3} + 1) \operatorname{tg} x + 1 = 0.$$

Risolvendo quest'ultima equazione si hanno le due equazioni elementari:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ e } \operatorname{tg} x = 1,$$

che, nel loro complesso, risultano equivalenti alla data.

Le soluzioni di queste due equazioni elementari sono, nell'ordine:

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi; \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tutti questi valori sono accettabili, perché diversi da $k\pi$ e $(2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Risolvere la seguente equazione omogenea biquadratica:



Dividendo i due membri per $\cos^4 x$ ($\neq 0$), si ottiene l'equazione equivalente (in quanto $\cos x = 0$ non è soluzione):

$$\operatorname{tg}^4 x - 4 \operatorname{tg}^2 x + 3 = 0.$$

Questa è un'equazione biquadratica nell'incognita $\operatorname{tg} x$, che, risolta, dà:

$$\operatorname{tg}^2 x = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = 2 \pm 1 = \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix},$$

ossia: $\operatorname{tg}^2 x = 3$ e $\operatorname{tg}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$ e $\operatorname{tg} x = \pm 1$, le cui soluzioni sono, rispettivamente:

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; \quad x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo l'equazione:

$$2\sqrt{3} \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cos x = \sqrt{3}.$$

L'equazione non è, così come è scritta, un'equazione omogenea, perché compare il termine noto $\sqrt{3}$. Usiamo la relazione $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ per trasformare l'equazione data nell'equazione equivalente:

$$2\sqrt{3} \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cos x = \sqrt{3} (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) \rightarrow \sqrt{3} \cos^2 x - \sqrt{3} \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0.$$

Risolviamo l'equazione omogenea ottenuta.

Verifichiamo innanzitutto se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ è soluzione dell'equazione data. Sostituendo $\frac{\pi}{2}$ alla x nel primo membro:

$$2\sqrt{3} \cos^2 \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0 - 2 \cdot 1 \cdot 0 \neq \sqrt{3}.$$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ **non** è soluzione dell'equazione data. In caso contrario, avremmo considerato tali angoli tra le soluzioni.

Cerchiamo eventuali altre soluzioni. Supponiamo $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e, dividendo entrambi i membri dell'equazione per $\cos^2 x$, otteniamo un'equazione equivalente alla data:

$$\sqrt{3} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \sqrt{3} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - 2 \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x} \rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{3} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)^2 - 2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0.$$

Poniamo $y = \operatorname{tg} x$,

$$\sqrt{3} y^2 + 2y - \sqrt{3} = 0,$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \sqrt{3}(-\sqrt{3})}}{\sqrt{3}} = \frac{-1 \pm \sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{-1 \pm 2}{\sqrt{3}} = \begin{cases} \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Poiché $y = \operatorname{tg} x$, si ha:

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi; \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

Le soluzioni dell'equazione data sono: $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

Sistemi Equazioni Goniometriche

I sistemi di equazioni goniometriche vengono studiati e risolti con i metodi algebrici applicati ai sistemi di equazioni algebriche.

$$\begin{cases} 4\cos^2 x + 3\cos^2 y = 4 \\ 2\cos x + 5\cos y = 6 \end{cases}$$

Ponendo $\cos x = X$ e $\cos y = Y$, il sistema diventa:

$$\begin{cases} 4X^2 + 3Y^2 = 4 \\ 2X + 5Y = 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{metodo sostituzione}} \begin{cases} 4\left(\frac{6-5Y}{2}\right)^2 + 3Y^2 = 4 \\ X = \frac{6-5Y}{2} \end{cases}$$

Risolviamo la prima equazione. Facendo i calcoli diventa:

$$7Y^2 - 15Y + 8 = 0 \xrightarrow{\text{soluzione}} Y_1 = \frac{8}{7} \quad Y_2 = 1$$

$$\cos y = Y_1 \Rightarrow \cos y = \frac{8}{7} > 1$$

Soluzione impossibile perché
deve essere $-1 \leq \cos y \leq 1$ per
qualsiasi valore di y .

Consideriamo, pertanto, solo la soluzione $Y=1$, per cui la
soluzione del sistema è:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y = 1 \\ X = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos y = 1 \xrightarrow{\text{soluzione}} y = 2k\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{soluzione}} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \xrightarrow{\text{soluzione sistema}} \left\{ \begin{array}{l} y = 2k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right.$$

Risolvere il seguente sistema di equazioni goniometriche:

a) Ricaviamo x dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - y \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + \sin y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - y \\ \cos y + \sin y = 1 \end{cases}$$

Per risolvere la seconda equazione, utilizziamo le formule parametriche: $\cos y = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin y = \frac{2t}{1+t^2}$, dove

$t = \tan \frac{y}{2}$, con $y \neq \pi + 2k\pi$:

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} = 1 \rightarrow 1-t^2+2t=1+t^2 \rightarrow -2t^2+2t=0 \rightarrow 2t^2-2t=0.$$

Le soluzioni sono:

$$t=0 \text{ da cui } \frac{y}{2} = k\pi \rightarrow y = 2k\pi; t=1 \text{ da cui } \frac{y}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \rightarrow y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi \\ y = 2k\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2k\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

Risolvere il seguente sistema di equazioni goniometriche:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \\ \cos x - \cos y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases}$$

b) Sommiamo membro a membro le due equazioni del sistema:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \\ \cos x - \cos y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases}$$

$$2\cos x = \sqrt{3} \rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

Sottraiamo la seconda equazione dalla prima:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \\ \cos x - \cos y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases}$$

$$2\cos y = 1 \rightarrow \cos y = \frac{1}{2} \rightarrow y = \pm \frac{1}{3}\pi + 2k_1\pi.$$

Le soluzioni del sistema dato sono:

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ y = \pm \frac{1}{3}\pi + 2k_1\pi \end{cases}$$

Equazioni goniometriche parametriche

Se in una equazione che dipende dal parametro k fissiamo un intervallo a cui devono appartenere le soluzioni, il numero di soluzioni varia al variare di k .

Utilizziamo il **metodo grafico** nei seguenti esempi di discussione di equazioni parametriche goniometriche, ossia della ricerca di tale numero di soluzioni.

DISCUSSIONE EQUAZIONI GONIOMETRICHE PARAMETRICHE DI 1° GRADO

Discutere la seguente equazione
goniometrica parametrica di 1° grado:

$$\begin{cases} k \operatorname{sen} x - 2k + 1 = 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \end{cases}$$

Dividiamo per $k \neq 0$ e isoliamo $\operatorname{sen} x$:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2k-1}{k}.$$

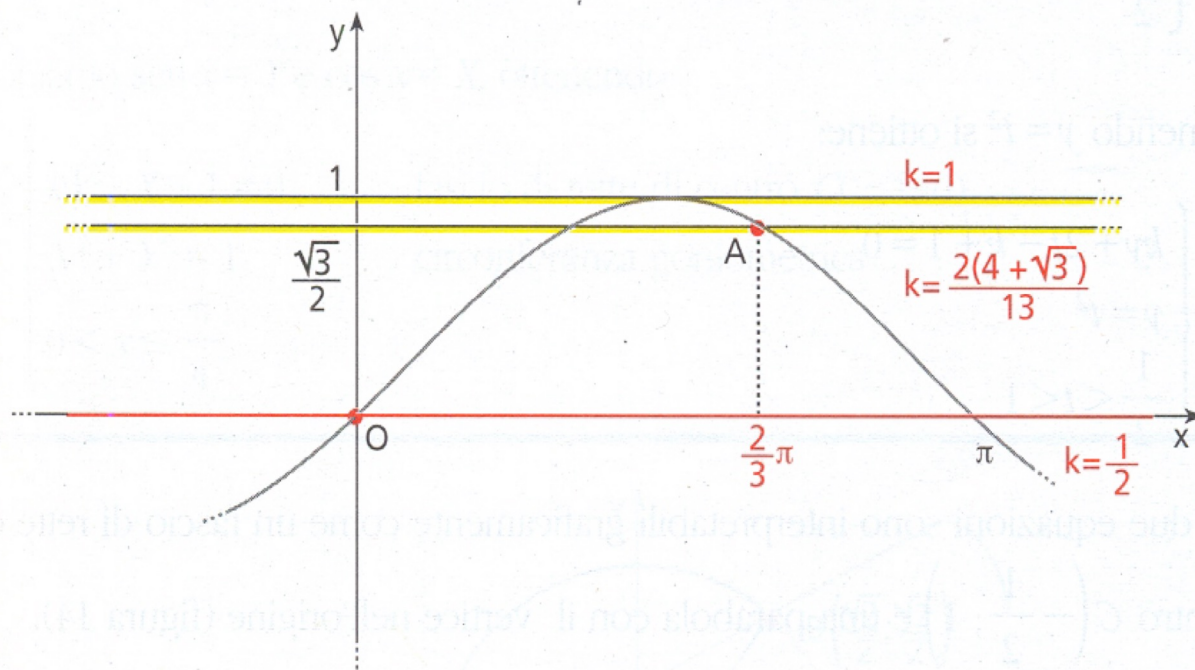
Poniamo uguali a y i membri dell'uguaglianza:

$$\begin{cases} y = \operatorname{sen} x \\ y = \frac{2k-1}{k} \end{cases}$$

■ Supponiamo $k \neq 0$ in quanto per $k = 0$ l'equazione diventa:

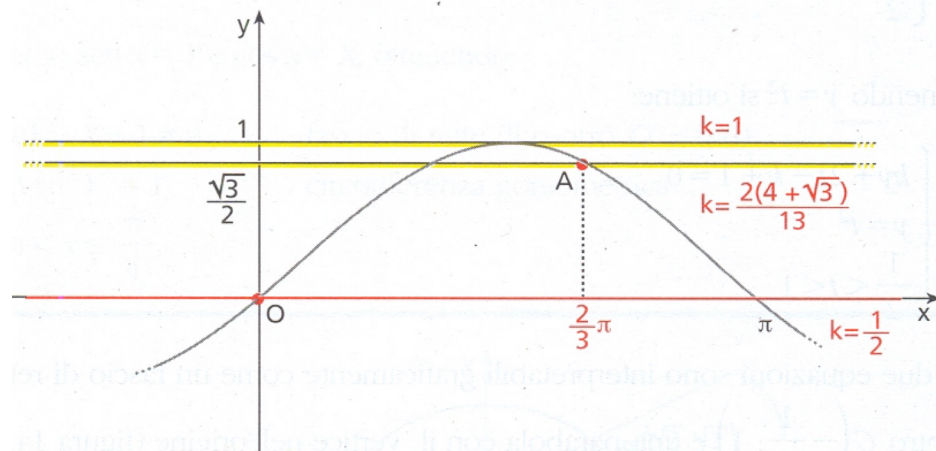
$$0 \cdot \operatorname{sen} x - 2 \cdot 0 + 1 = 0, \\ 1 = 0, \text{ impossibile.}$$

Graficamente le soluzioni dell'equazione sono le ascisse dei punti di intersezione fra la senoide e il fascio di rette parallele all'asse x , rappresentato dalla seconda equazione, nell'intervallo $\left[0; \frac{2}{3}\pi\right]$ (figura 13).



◀ **Figura 13.** Gli intervalli in cui si hanno soluzioni hanno per estremi i

valori $0, \frac{\sqrt{3}}{2}$ e 1 .
 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ è $\sin \frac{2}{3}\pi$.



Determiniamo i valori di k corrispondenti ai valori di y estremi degli intervalli da considerare:

$$\text{retta per } O \rightarrow y = 0 \quad \rightarrow \frac{2k-1}{k} = 0 \rightarrow k = \frac{1}{2};$$

$$\text{retta per } A \rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \frac{2k-1}{k} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow 4k-2 = \sqrt{3}k \rightarrow$$

$$\rightarrow k = \frac{2}{4-\sqrt{3}} \rightarrow k = \frac{2(4+\sqrt{3})}{13};$$

$$\text{retta tangente} \rightarrow y = 1 \quad \rightarrow \frac{2k-1}{k} = 1 \rightarrow k = 1.$$

L'equazione ha:

una soluzione per $\frac{1}{2} \leq k < \frac{2(4+\sqrt{3})}{13}$;

due soluzioni per $\frac{2(4+\sqrt{3})}{13} \leq k \leq 1.$

Discutere la seguente equazione goniometrica parametrica di 1° grado:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = k \\ 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Ponendo $x + \frac{\pi}{3} = x'$ si ottiene l'equazione $y = \operatorname{tg} x'$ con le limitazioni

$$0 + \frac{\pi}{3} < x' < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{\pi}{3} < x' < \frac{5}{6}\pi.$$

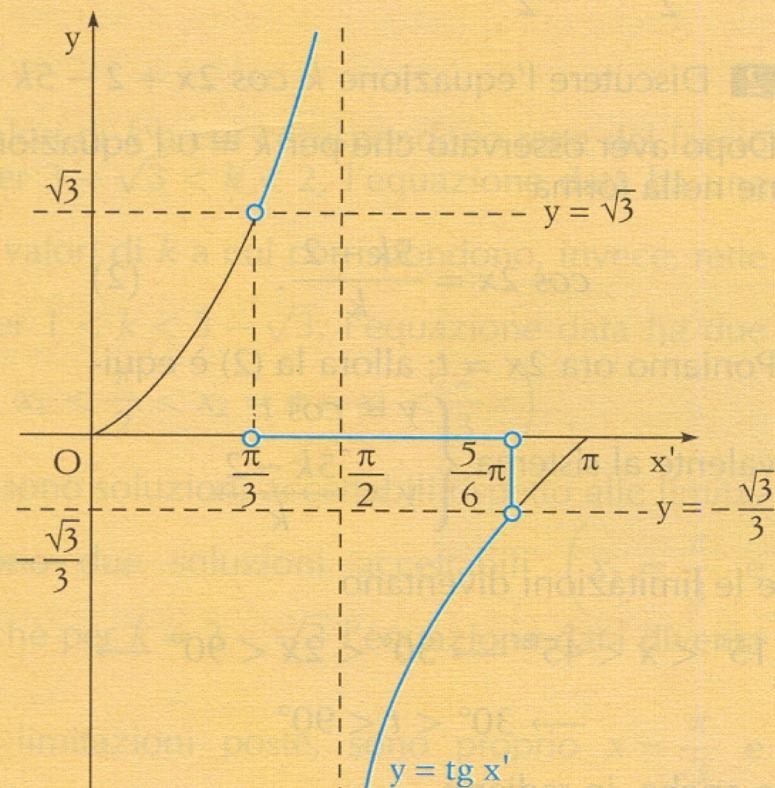
Si tratta perciò di discutere il seguente sistema misto

$$\begin{cases} y = \operatorname{tg} x' \\ y = k \\ \frac{\pi}{3} < x' < \frac{5}{6}\pi, \end{cases}$$

che rappresentiamo graficamente nel sistema cartesiano $x'Oy$.

Dalla figura 4 si può notare che interessano le intersezioni delle rette del fascio di equazione $y = k$ con gli archi di tangente disegnati in colore; possiamo così concludere che vi è una soluzione per $k < -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee k > \sqrt{3}$.

Osservazione. Si poteva anche procedere considerando il grafico della funzione



DISCUSSIONE EQUAZIONI GONIOMETRICHE PARAMETRICHE DI 2° GRADO

Discutere la seguente equazione
goniometrica parametrica di 2° grado:

$$\begin{cases} k \cos^2 x + 2 \cos x - k + 1 = 0 \\ 0 < x < \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Discutiamo:

$$\begin{cases} k \cos^2 x + 2 \cos x - k + 1 = 0 \\ 0 < x < \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Poniamo $\cos x = t$. Di conseguenza:

$$\text{se } 0 < x < \frac{\pi}{3}, \text{ allora } \frac{1}{2} < t < 1.$$

Il sistema diventa:

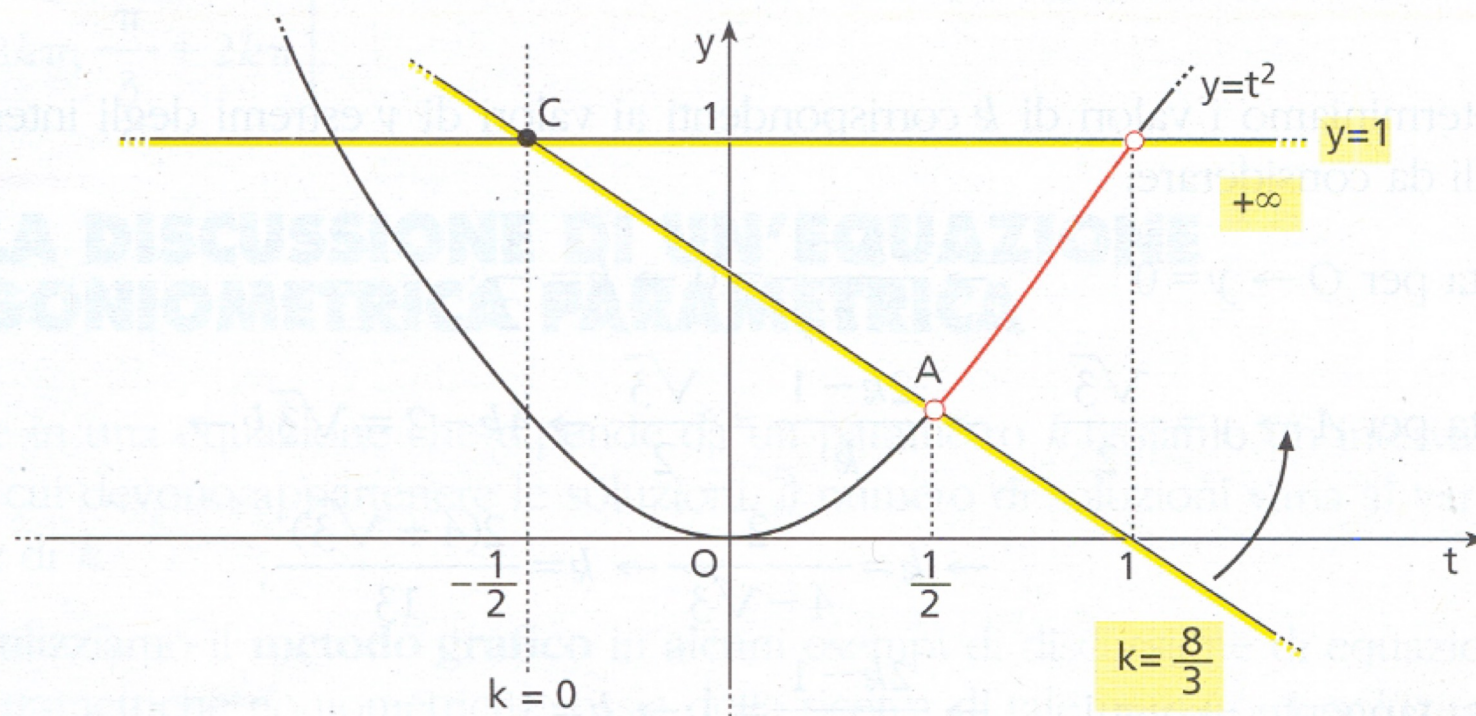
$$\begin{cases} kt^2 + 2t - k + 1 = 0 \\ \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$

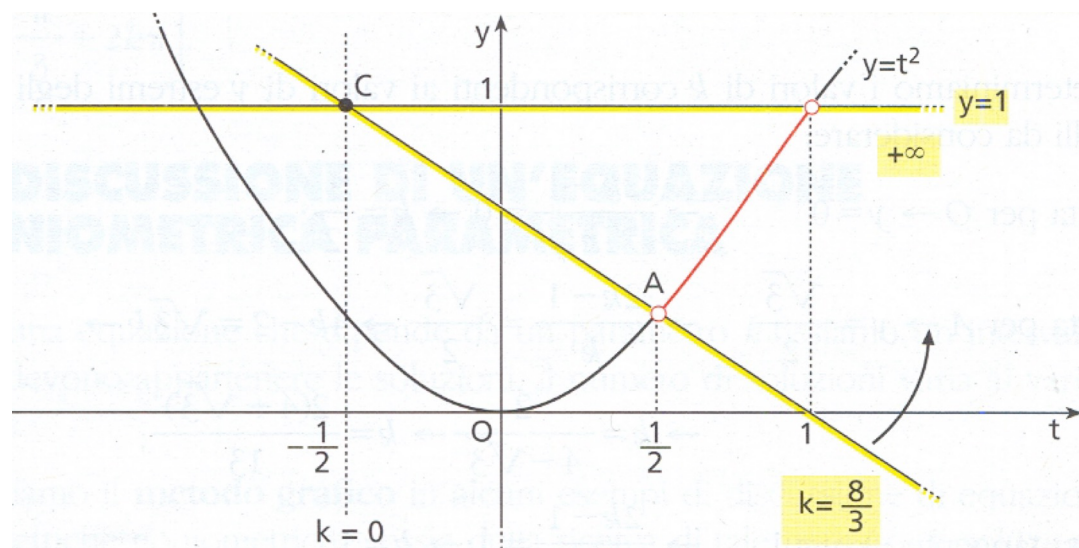
Ponendo $y = t^2$ si ottiene:

$$\begin{cases} ky + 2t - k + 1 = 0 \\ y = t^2 \\ \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ky + 2t - k + 1 = 0 \\ y = t^2 \\ \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$

Le due equazioni sono interpretabili graficamente come un fascio di rette di centro $C\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ e una parabola con il vertice nell'origine (figura 14).





$$\begin{cases} ky + 2t - k + 1 = 0 \\ y = t^2 \\ \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$

Per determinare il valore di k corrispondente a $t = \frac{1}{2}$, troviamo l'ordinata di A mediante l'equazione della parabola:

$$y_A = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

e sostituiamo le coordinate di $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ nell'equazione del fascio:

$$\frac{1}{4}k + 1 - k + 1 = 0 \rightarrow k - 4k + 8 = 0 \rightarrow k = \frac{8}{3}.$$

Dal grafico ricaviamo che l'equazione ha:

una soluzione per $k > \frac{8}{3}$.

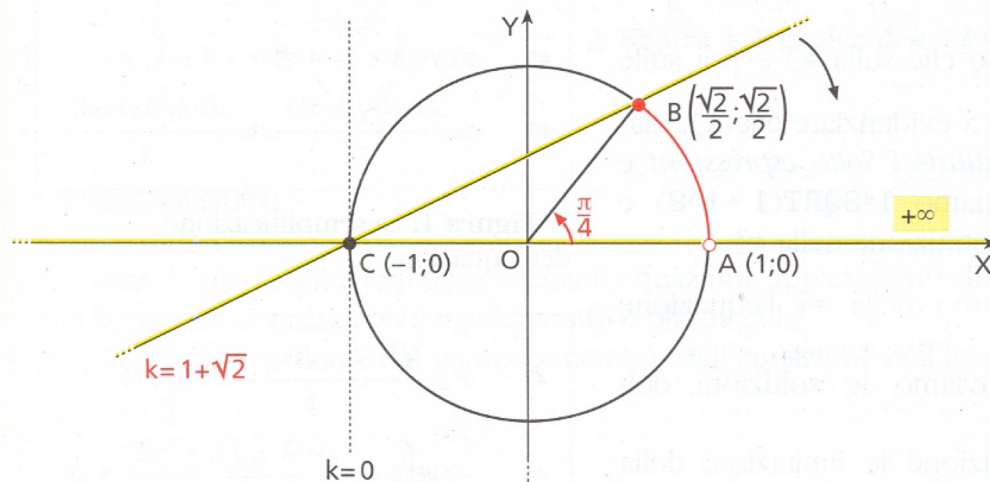
DISCUSSIONE EQUAZIONI GONIOMETRICHE PARAMETRICHE LINEARI

Discutere la seguente equazione
goniometrica parametrica lineare:

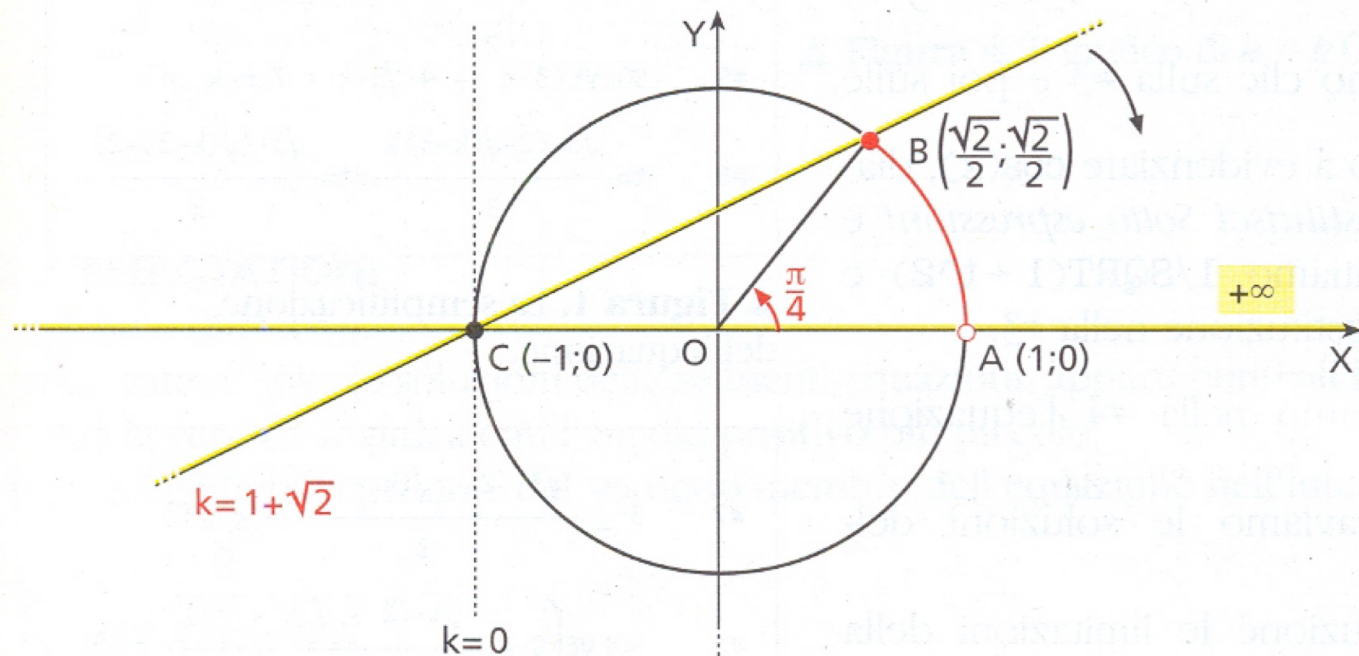
$$\begin{cases} k \operatorname{sen} x - \cos x - 1 = 0 \\ 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Poniamo $\operatorname{sen} x = Y$ e $\cos x = X$, ottenendo:

$$\begin{cases} kY - X - 1 = 0 & \text{fascio di rette di centro } C(-1; 0) \\ X^2 + Y^2 = 1 & \text{circonferenza goniometrica} \\ 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$



◀ **Figura 15.** I valori di k tendono a $+\infty$ procedendo in senso orario dalla retta $X = -1$, corrispondente a $k = 0$, verso la retta $Y = 0$.



Determiniamo il valore di k corrispondente alla retta passante per

$$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right):$$

$$k \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{2}k = \sqrt{2} + 2 \rightarrow k = \frac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

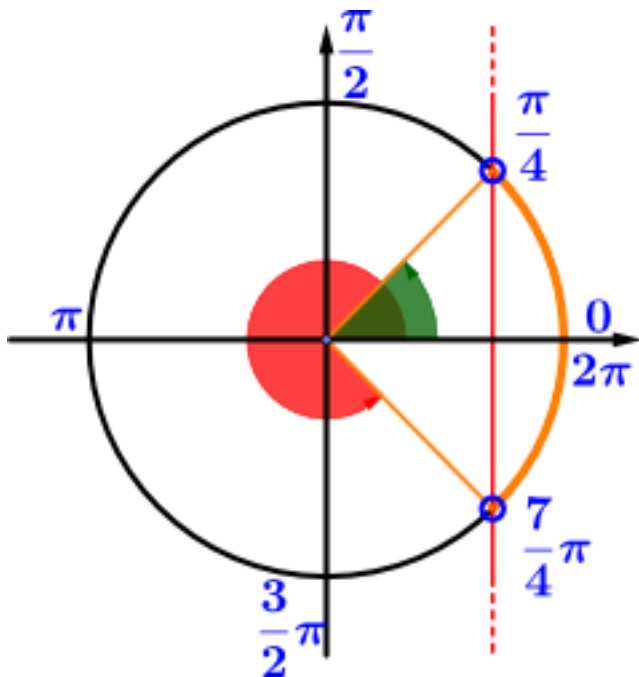
L'equazione ha:

una soluzione per $k \geq 1 + \sqrt{2}$.

Matematica

TRIGONOMETRIA

Le disequazioni
goniometriche



DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica

definizione

Una disequazione si dice goniometrica se contiene almeno una funzione goniometrica dell'incognita.

esempio

$2\cos x - 1 < 0$ è una disequazione goniometrica perché contiene la funzione $\cos x$.

$2x\cos(\pi/4) - 1 > 0$ non è una disequazione goniometrica perché non contiene funzioni goniometriche dell'incognita x . L'espressione $\cos(\pi/4)$ è una quantità costante.

definizione

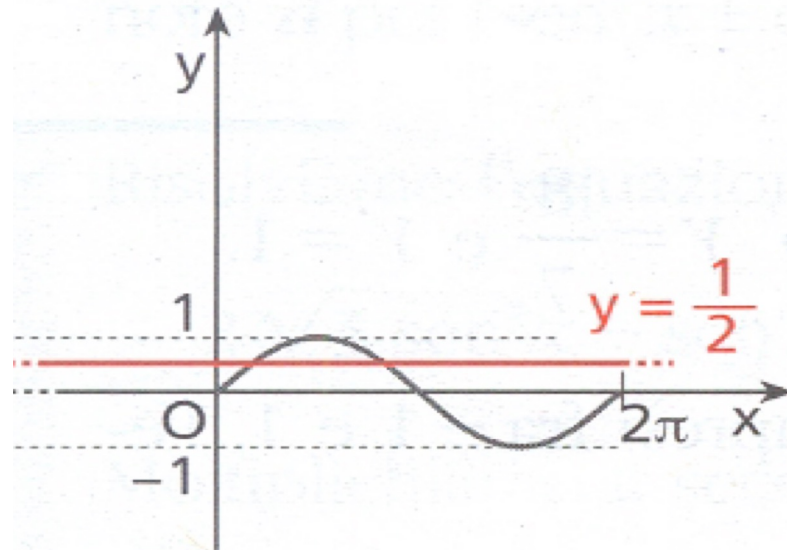
Le disequazioni goniometriche elementari sono disequazioni del tipo:

❑ Risolvere la disequazione:

$$\text{sen} x < \frac{1}{2}$$

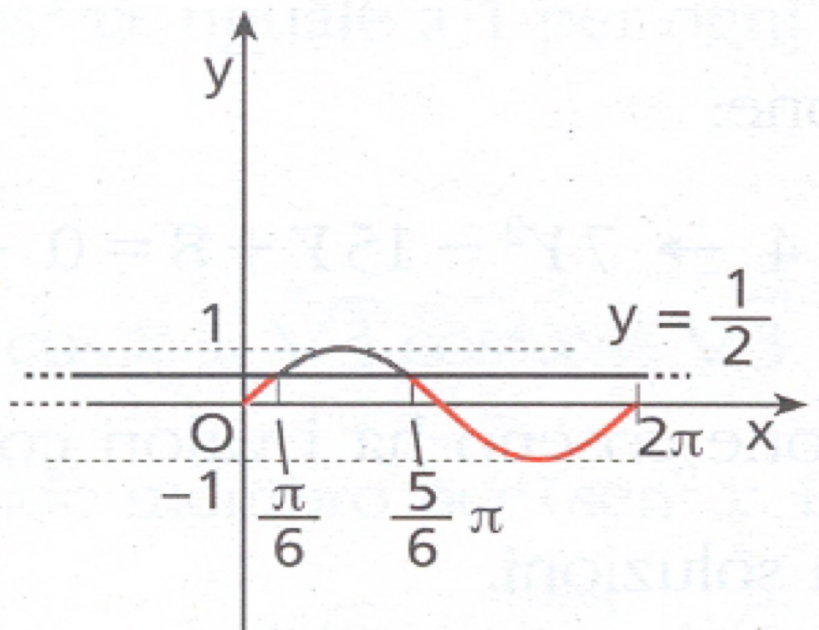
➤ 1° Metodo

1. Disegnare il grafico della funzione seno nell'intervallo $(0; 2\pi)$ e tracciare su di esso la retta $y = 1/2$.



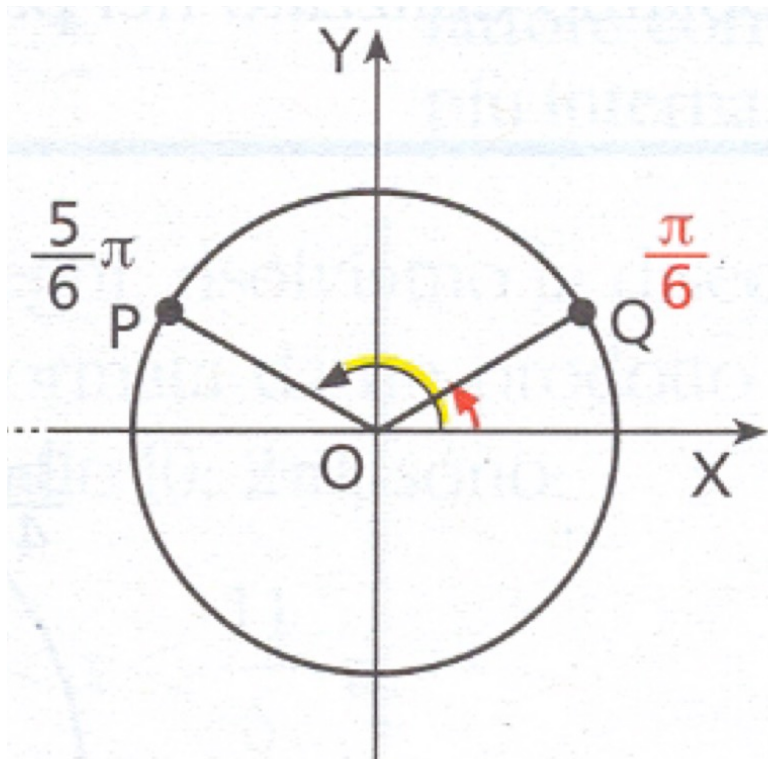
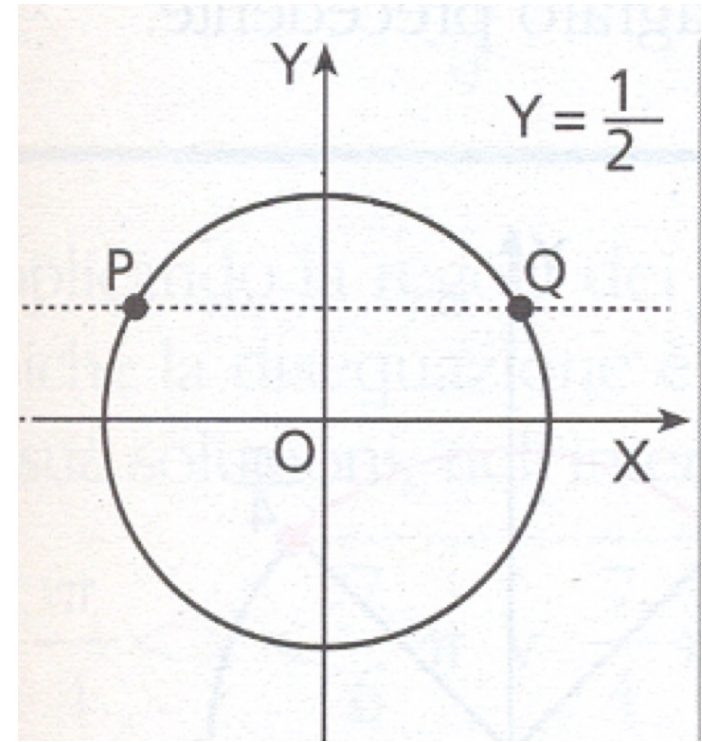
2. La retta interseca la funzione in due punti, le cui ascisse $(\pi/6$ e $5\pi/6)$ sono le soluzioni dell'equazione:

$$\text{sen} x = \frac{1}{2}$$

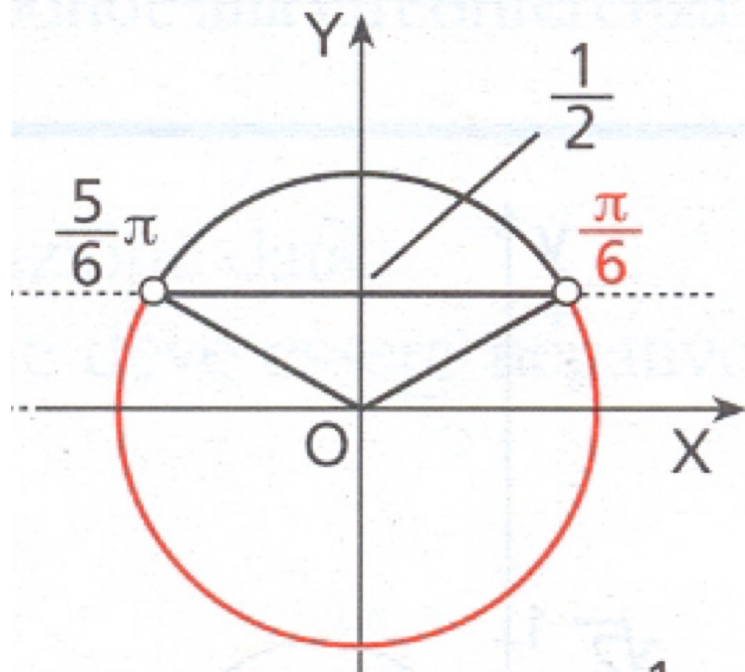


➤ 2° Metodo

1. Tracciare la retta $Y=1/2$ sulla circonferenza goniometrica e indicare con P e Q i punti aventi ordinata $1/2$.



2. Evidenziare gli angoli $\pi/6$ e $5\pi/6$ individuati da P e Q, che rappresentano le soluzioni dell'equazione associata $\text{sen}x=1/2$.



3. Poiché deve essere $\sin x < 1/2$, coloriamo (rosso) gli archi i cui punti hanno ordinata $y < 1/2$ (la parte di circonferenza “sotto” $Y = 1/2$).

4. La soluzione nell'intervallo $(0; 2\pi)$ è formata da tutti gli angoli a cui corrisponde sulla circonferenza goniometrica un punto con ordinata minore di $1/2$.

soluzione

$$0 + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \cup \frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi$$

oppure

$$\left[2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right[\cup \left] \frac{5}{6}\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi \right]$$

❑ Risolvere la disequazione:

$$\cos x \geq -\frac{1}{2}$$

➤ 1° Metodo

I Metodo

Costruiamo i grafici delle funzioni $y = \cos x$ e $y = -\frac{1}{2}$ (fig. 4.3).

Il periodo della funzione $y = \cos x$ è 2π e quindi basta risolvere la disequazione proposta in un intervallo di lunghezza 2π .

Nell'intervallo $[0, 2\pi]$ la soluzione della disequazione proposta consiste di «due pezzi»; pertanto è più conveniente (anche se non strettamente necessario) risolvere la disequazione nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

In tale intervallo si ha: $-\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ e quindi la soluzione completa è:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

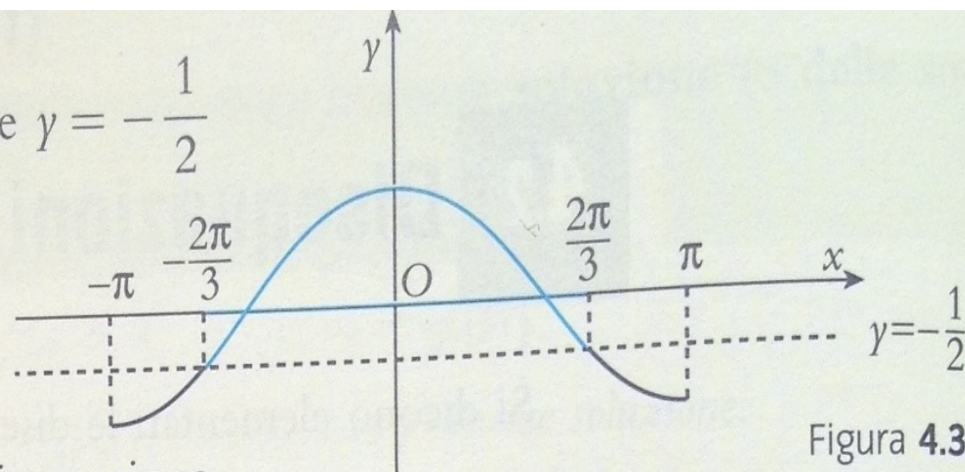


Figura 4.3

➤ 2° Metodo

$$\cos x \geq -\frac{1}{2}$$

II Metodo

Sulla circonferenza goniometrica individuiamo i punti A e B di ascissa $-\frac{1}{2}$ (fig. 4.4).

La semiretta OA forma col semiasse positivo delle x un angolo *positivo* di $\frac{2\pi}{3}$ radianti e la semiretta OB un angolo *negativo* di $-\frac{2\pi}{3}$ radianti.

I punti dell'arco $\widehat{BCA}$ hanno ascissa maggiore o uguale a $-\frac{1}{2}$. Pertanto la disequazione è soddisfatta per:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

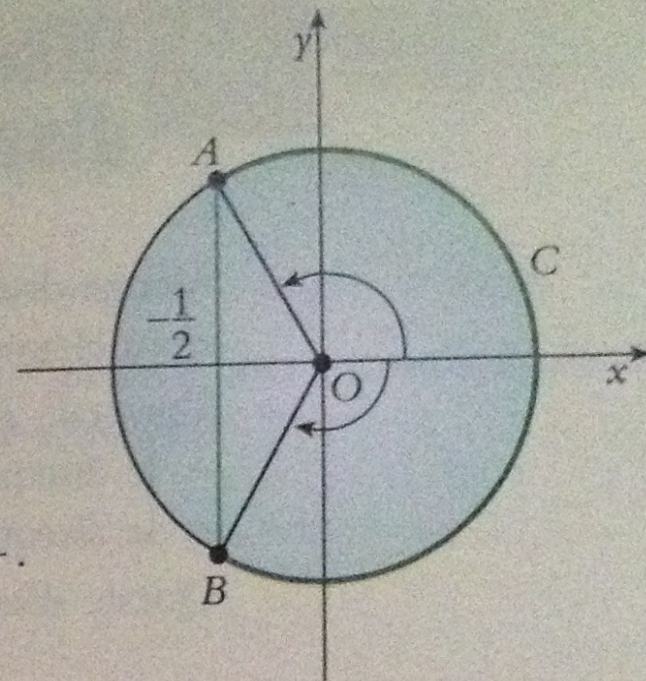
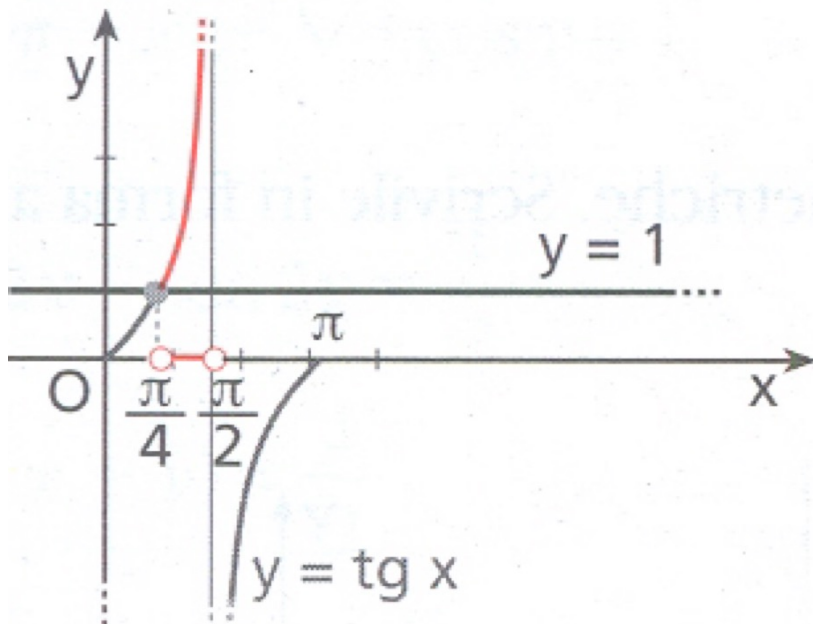


Figura 4.4

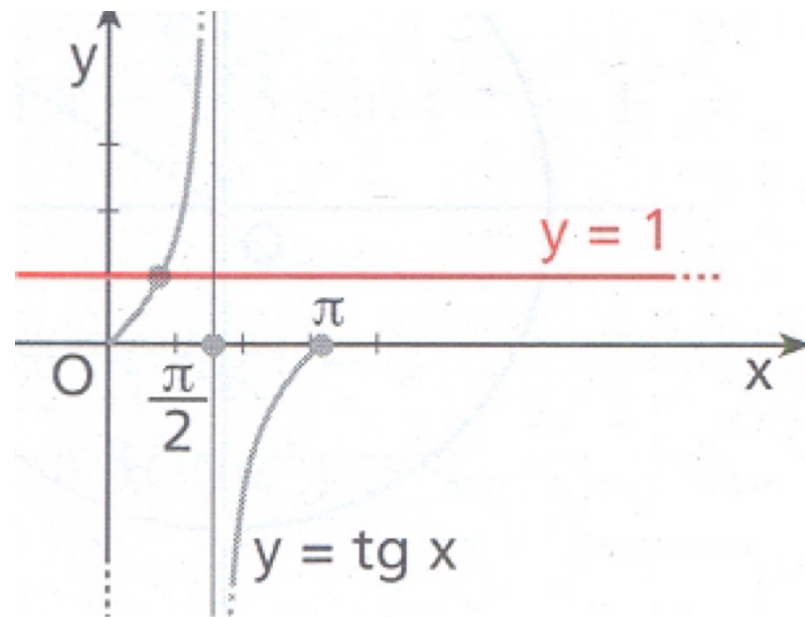
❑ Risolvere la disequazione:

$$\operatorname{tg} x > 1$$

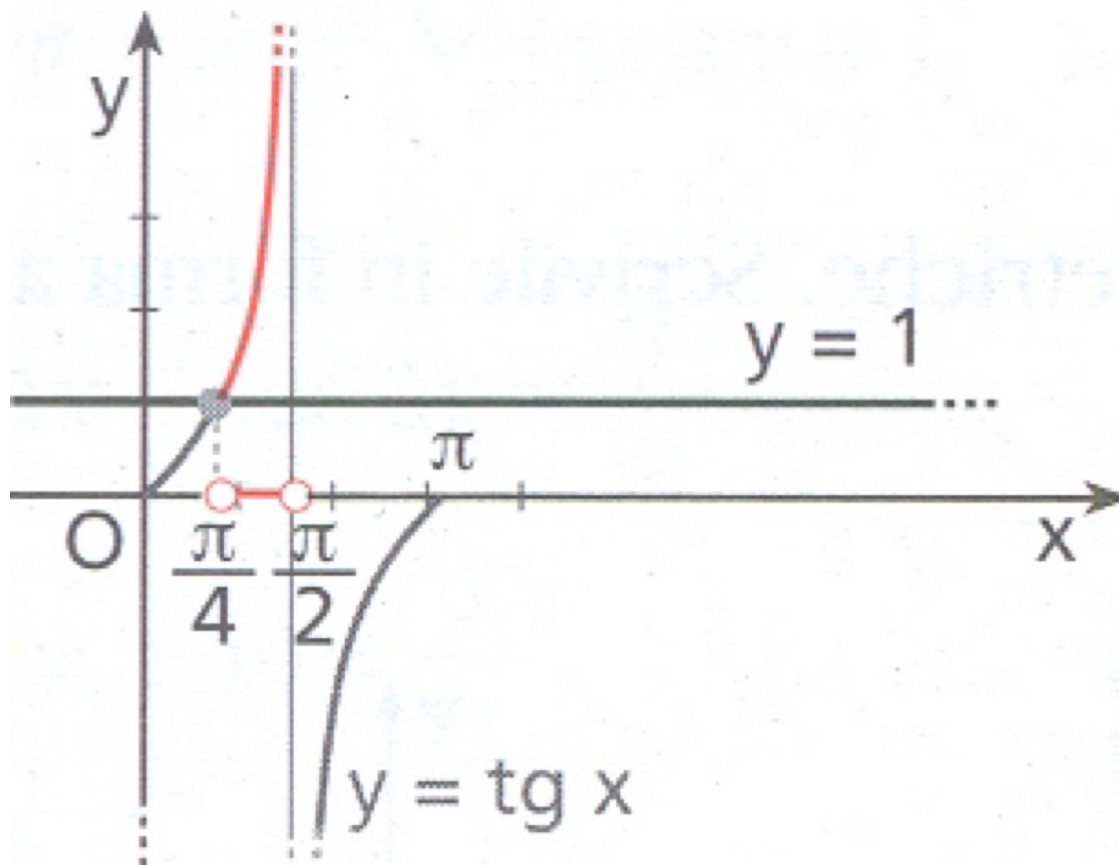
Disegniamo il grafico della funzione $y = \operatorname{tg} x$ e la retta $y = 1$ nell'intervallo $(0; \pi)$, e determiniamo i punti che hanno ordinata > 1 .



➤ 1° Metodo



I due grafici si intersecano nel punto di ascissa $\frac{\pi}{4}$, soluzione dell'equazione $\operatorname{tg} x = 1$ nell'intervallo $(0; \pi)$.



Poiché deve essere $\operatorname{tg} x > 1$, coloriamo (rosso) la parte di tangente che sta "sopra" la retta $y=1$. La soluzione è formata da quelle x corrispondenti alla parte colorata:

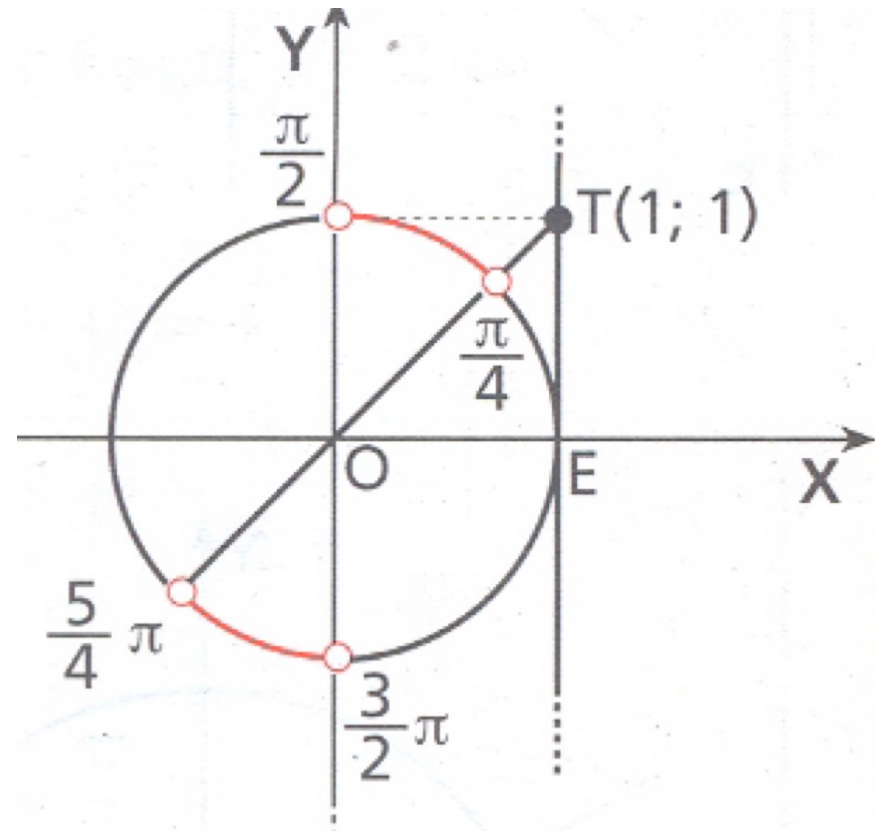
soluzione

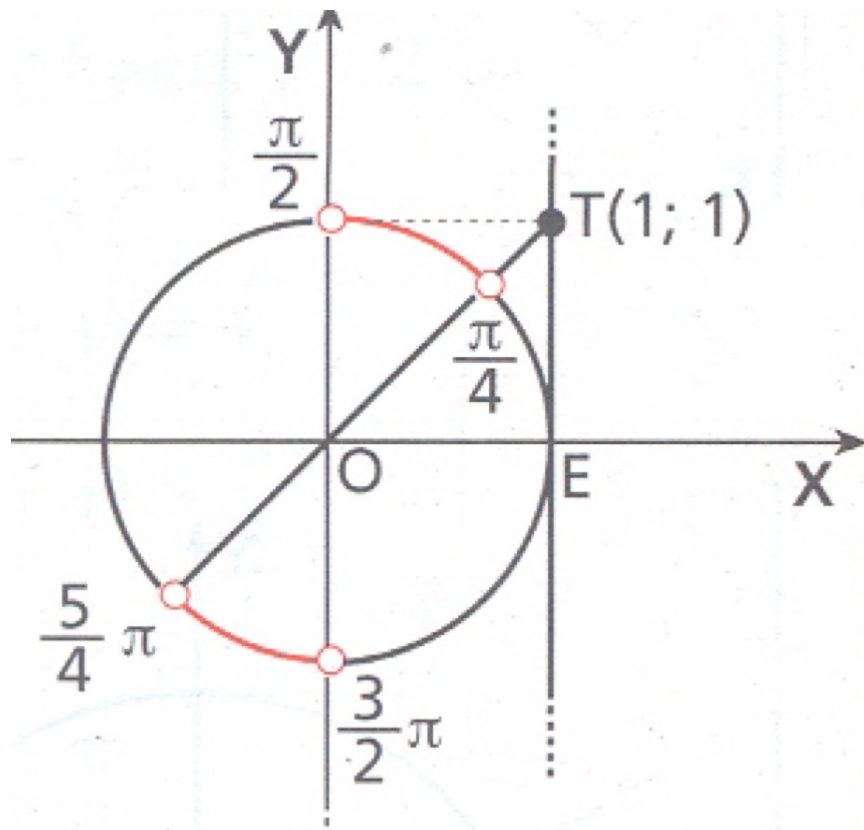
$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \xrightarrow{\text{oppure}} \left[\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$$

➤ 2° Metodo

$$\operatorname{tg} x > 1$$

Disegniamo la circonferenza goniometrica e la retta tangente nel punto $E(1;0)$. Su tale retta scegliamo il punto $T(1;1)$ e tracciamo OT in modo da individuare gli angoli con tangente $=1$, cioè $x=\pi/4$ e $x=5\pi/4$.





Poiché deve essere $\operatorname{tg} x > 1$,
 gli angoli che soddisfano
 tale condizione sono quelli
 corrispondenti all'arco
 disegnato in rosso. Quindi
 la soluzione è:

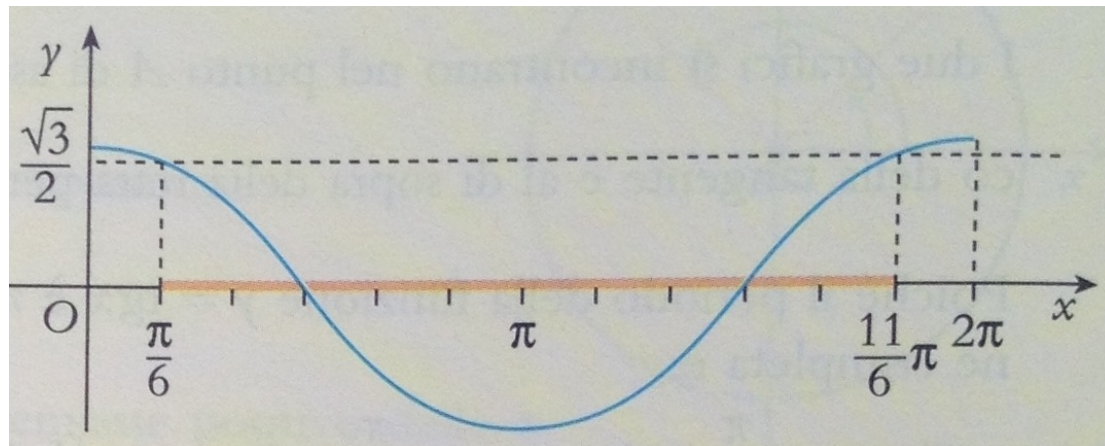
soluzione

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \xrightarrow{\text{oppure}} \left[\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

Risolvere la seguente disequazione goniometriche:



Dall'esame del grafico si deduce che la disequazione è verificata quando:

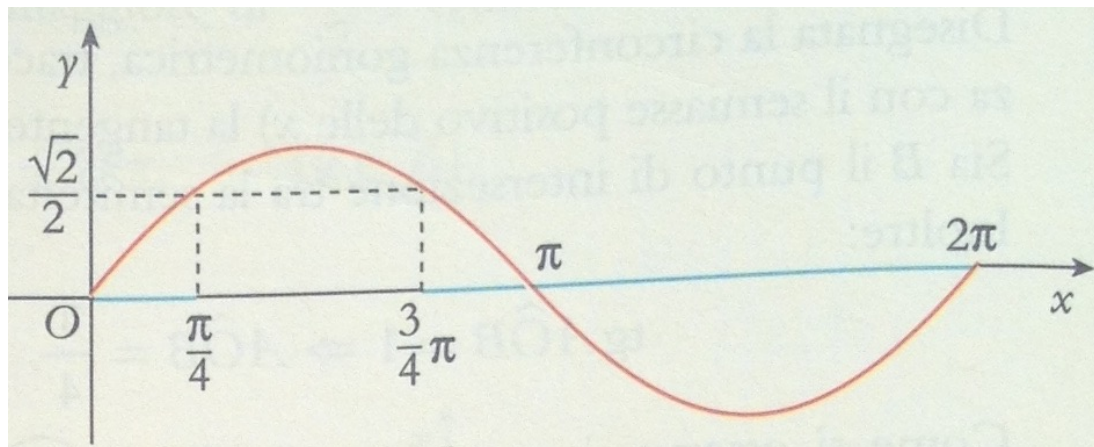


soluzione

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < 3x < \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \xrightarrow{\text{ossia}} \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi < x < \frac{11}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi$$

Risolvere la seguente disequazione goniometriche:

Dall'esame del grafico si deduce che la disequazione è verificata quando:



soluzione

$$2k\pi \leq 3x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee \frac{3}{4}\pi + 2k\pi < 3x + \frac{\pi}{4} \leq 2\pi + 2k\pi$$

$$\xrightarrow{\text{ossia}} -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi \leq x < \frac{2}{3}k\pi \vee \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi < x \leq \frac{7}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi$$

forma compatta

$$\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi < x < \frac{2}{3}(k+1)\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Risolvere la seguente disequazione goniometriche di 2° grado:

$$\sqrt{2}\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \geq 0$$

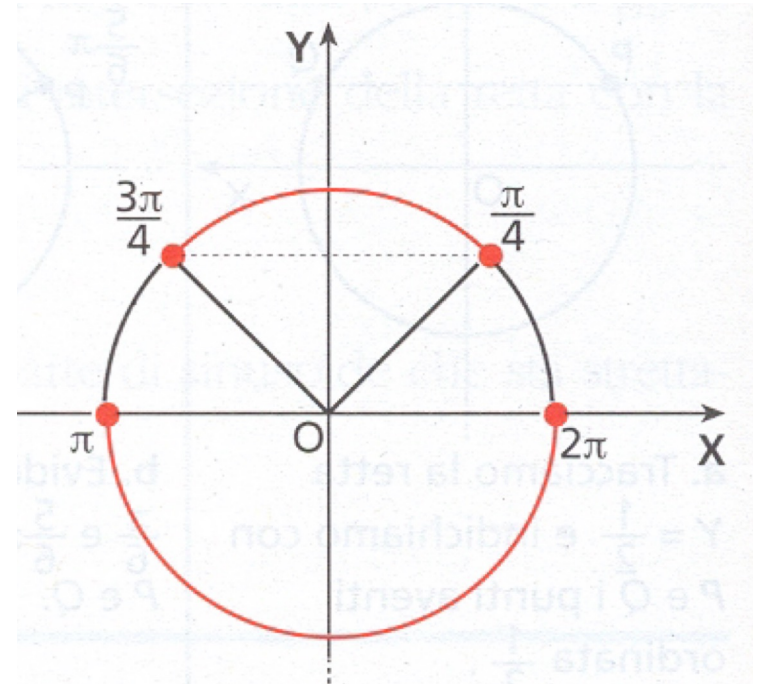
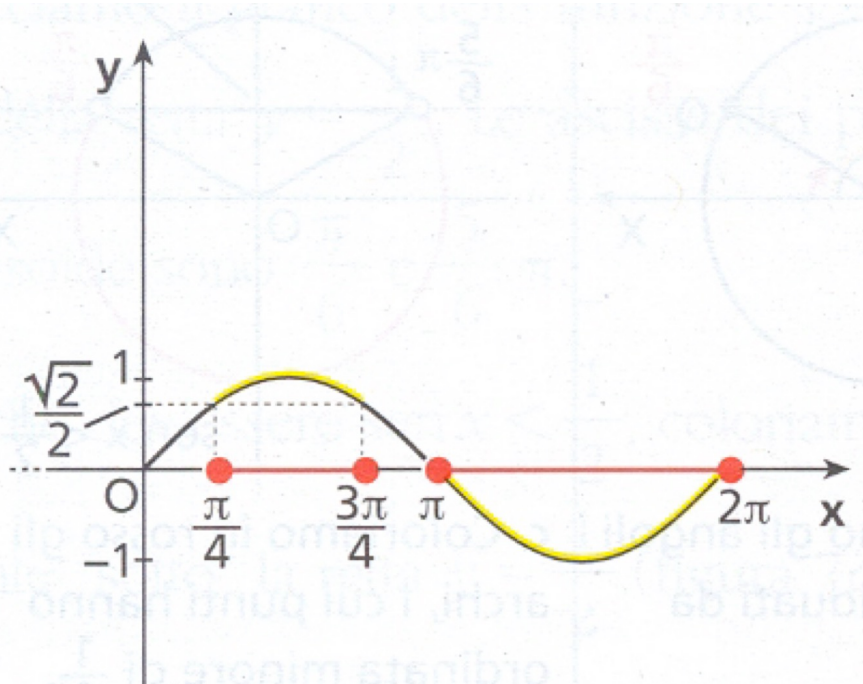
Ponendo $\operatorname{sen} x = y$, l'equazione associata diventa:

$$\sqrt{2}y^2 - y = 0 \Rightarrow y(\sqrt{2}y - 1) = 0 \xrightarrow[\text{eq. 2° grado}]{\text{soluzione}} y_1 = 0 \quad y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Essendo $\Delta > 0$, la disequazione è soddisfatta per valori esterni:

$$y_1 \leq 0 \vee y_2 \geq 0 \xrightarrow{\text{ossia}} \operatorname{sen} x \leq 0 \vee \operatorname{sen} x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Rappresentiamo graficamente gli intervalli di soluzione della disequazione secondo i due metodi che abbiamo utilizzato negli esercizi guida precedenti:



soluzione

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\pi \vee \pi \leq x \leq 2\pi \xrightarrow{\text{oppure}} \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi \right] \cup [\pi; 2\pi]$$

Risolvere la seguente disequazione goniometriche di 2° grado:

$$4\cos^2 x - 4\cos x - 3 \leq 0$$

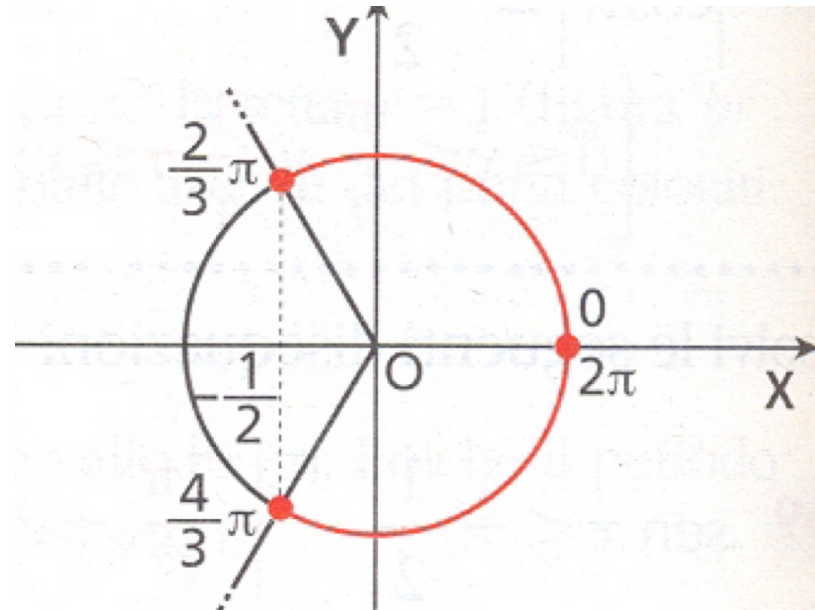
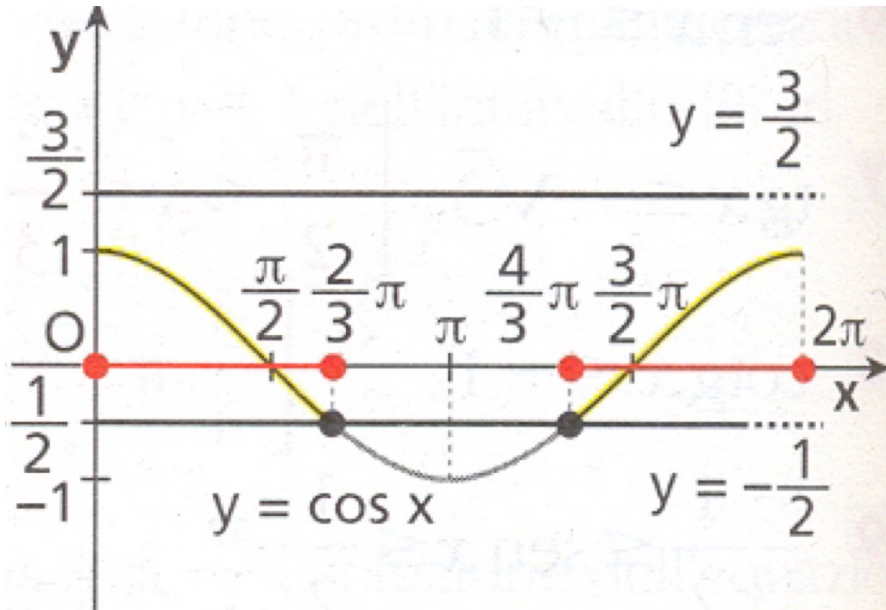
Ponendo $\cos x = y$, l'equazione associata diventa:

$$4y^2 - 4y - 3 = 0 \xrightarrow[\text{eq. 2° grado}]{\text{soluzione}} y_1 = -\frac{1}{2} \quad y_2 = \frac{3}{2}$$

Essendo $\Delta > 0$, la disequazione è soddisfatta per valori interni:

$$-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{ossia}} -\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{3}{2}$$

Rappresentiamo graficamente gli intervalli di soluzione della disequazione secondo i due metodi che abbiamo utilizzato negli esercizi guida precedenti:



soluzione

$$2k\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \vee \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi$$

$$\xrightarrow{\text{oppure}} \left[2k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \right] \cup \left[\frac{4}{3}\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi \right]$$

Risolvere la seguente disequazione lineare:

$$\sqrt{3}\operatorname{sen} x + \cos x - \sqrt{3} > 0$$

Si risolvono in modo analogo alle equazioni lineari.

❑ Metodo algebrico

Si verifica facilmente che i valori $x = \pi + 2k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$), non sono soluzioni dell'equazione data. Questa è dunque equivalente a:

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{3}t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \sqrt{3} > 0 &\Rightarrow 2\sqrt{3}t + 1 - t^2 - \sqrt{3} - \sqrt{3}t^2 > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\sqrt{3}+1)t^2 - 2\sqrt{3}t + \sqrt{3}-1 < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3 - (\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{3}+1} = \begin{cases} 1 \\ 2-\sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi, poiché $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ e $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, si ha:

$$2 - \sqrt{3} < \operatorname{tg} \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow \frac{\pi}{12} + k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

❑ Metodo angolo ausiliario

$$\sqrt{3}\operatorname{sen} x + \cos x - \sqrt{3} > 0$$

Si può scrivere la disequazione nella forma:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Si può porre: $\frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$ e $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$, da cui:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} x + \cos \frac{\pi}{3} \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) > \frac{\sqrt{3}}{2},$$

da cui (fig. 4.9):

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

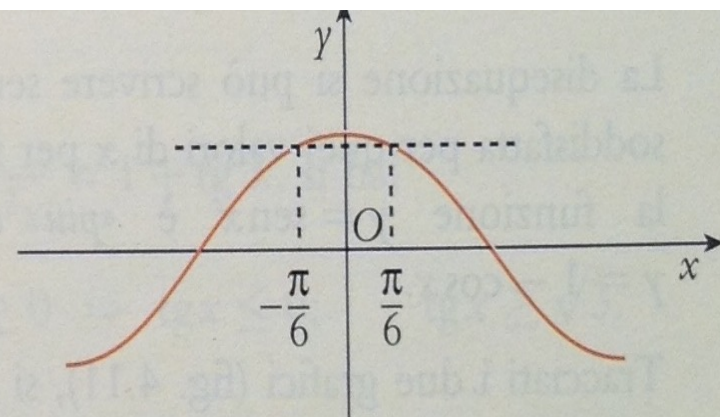


Figura 4.9

Risolvere la seguente disequazione lineare:

$$\sin x + \cos x - 1 \geq 0$$

❑ Metodo grafico

Risolvere la disequazione: $\sin x + \cos x - 1 \geq 0$.

Posto $X = \cos x$ e $Y = \sin x$, la disequazione equivale al sistema:

$$\begin{cases} Y + X - 1 \geq 0 \\ X^2 + Y^2 = 1. \end{cases}$$

La retta $X + Y - 1 = 0$ incontra la circonferenza nei punti $A(1, 0)$ e $B(0, 1)$.

Il semipiano $X + Y - 1 \geq 0$ è quello colorato in fig. 4.10, dalla quale si conclude che la disequazione è soddisfatta per:

$$2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

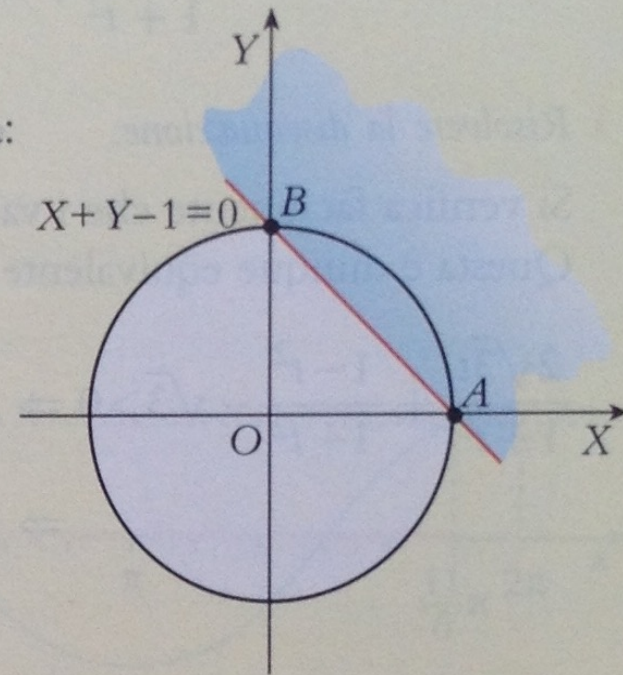


Figura 4.10

Risolvere la seguente disequazione lineare:

$$\sqrt{3}\operatorname{sen} x - \cos x \leq 0$$

$$\sqrt{3}\operatorname{sen} x - \cos x \leq 0 \xrightarrow[\text{i membri per } \cos x]{\text{dividere entrambi}} \sqrt{3} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x} \leq 0 \Rightarrow \sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1 \leq 0$$

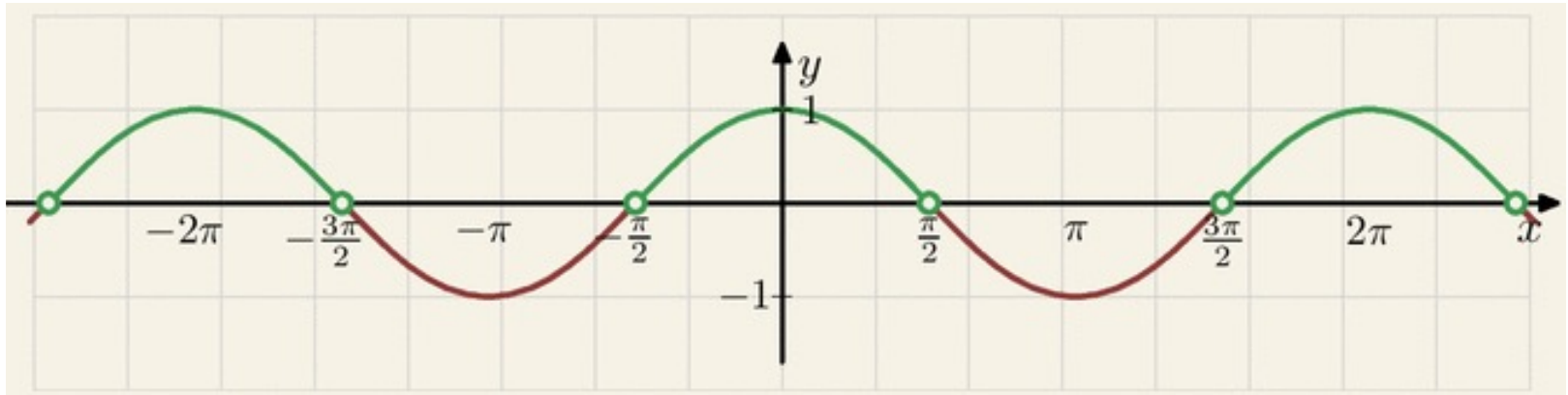
NOTA BENE: La risoluzione della disequazione sopra non corrisponde alla risoluzione della disequazione data ; tutto questo poiché il coseno, termine che esprime il divisore , può assumere valori sia positivi che negativi . Ecco quindi che sarà necessario mettere a grafico finale i risultati parziali che esprimono i corrispondenti segni.

Allora avremo:

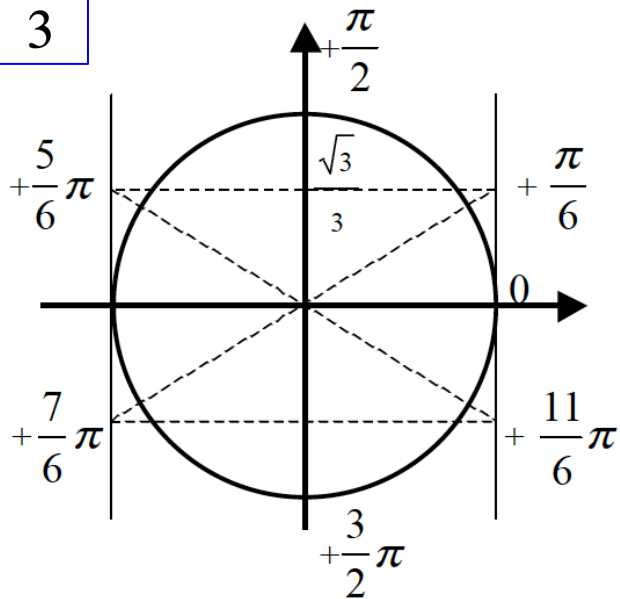
$$\cos x > 0 \qquad \operatorname{tg} x \leq \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Risolviamo separatamente le due disequazioni.

$$\cos x > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad , \quad \frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$



$$\operatorname{tg} x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

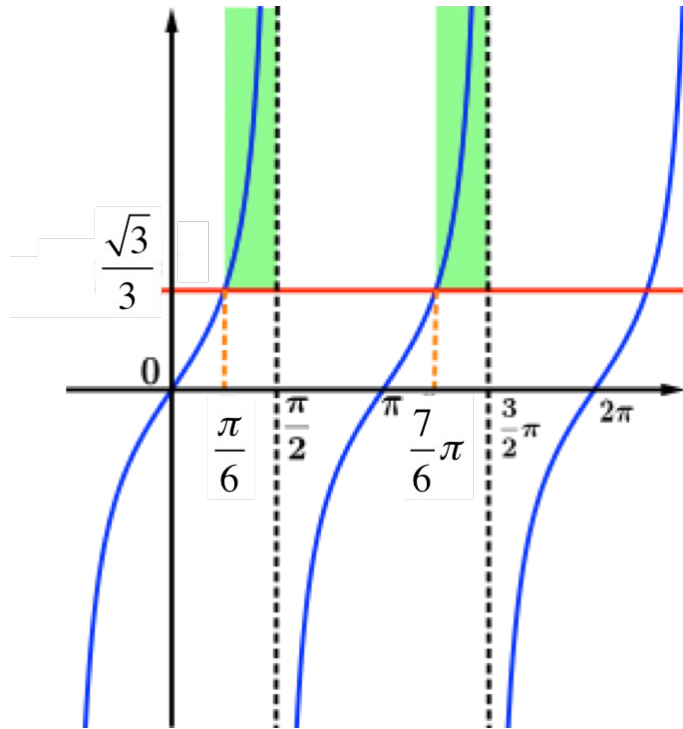


$$0 + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \quad , \quad \frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq \frac{7}{6}\pi + k\pi$$

$$\frac{3}{2}\pi + k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi$$

Oppure:

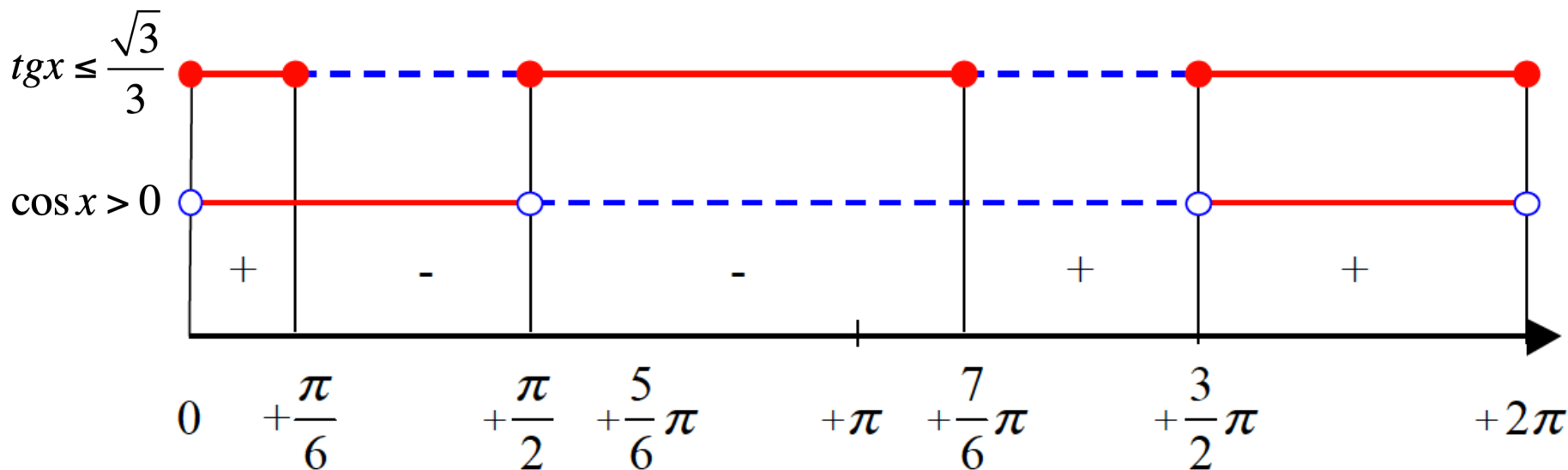
$$\operatorname{tg} x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$0 + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \quad , \quad \frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq \frac{7}{6}\pi + k\pi$$

$$\frac{3}{2}\pi + k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi$$

Riuniamo in un unico grafico le soluzioni trovate e cerchiamo la soluzione della disequazione di partenza:



La disequazione di partenza:

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x \leq 0$$

è soddisfatta per:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \quad x \neq \frac{\pi}{2}$$

Risolvere la seguente disequazione lineare



$$\operatorname{sen} x + \cos x > 0 \xrightarrow[\text{i membri per } \cos x]{\text{dividere entrambi}} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x + 1 > 0$$

NOTA BENE: La risoluzione della disequazione sopra non corrisponde alla risoluzione della disequazione data ; tutto questo poiché il coseno, termine che esprime il divisore , può assumere valori sia positivi che negativi . Ecco quindi che sarà necessario mettere a grafico finale i risultati parziali che esprimono i corrispondenti segni.

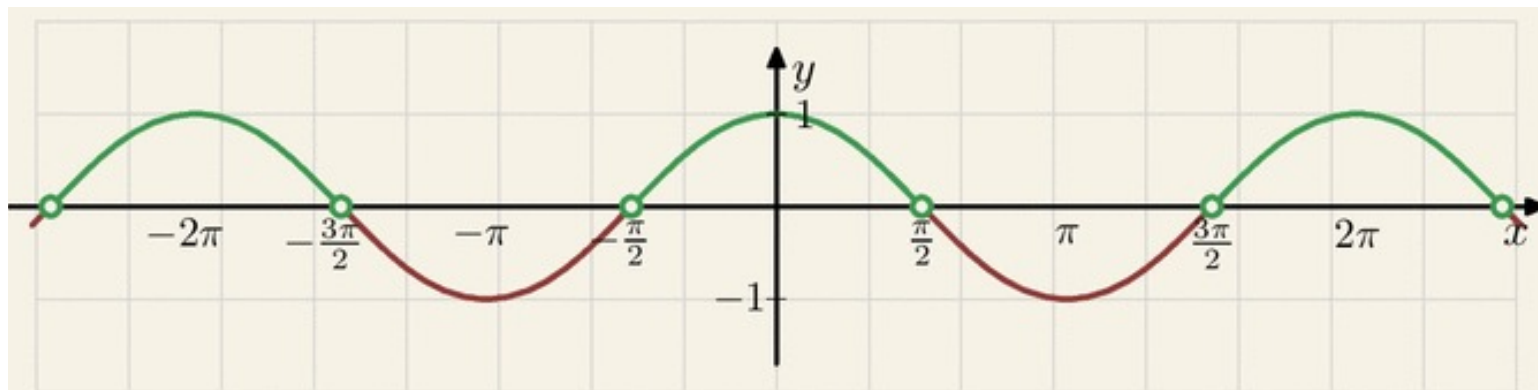
Allora avremo:

$$\cos x > 0$$

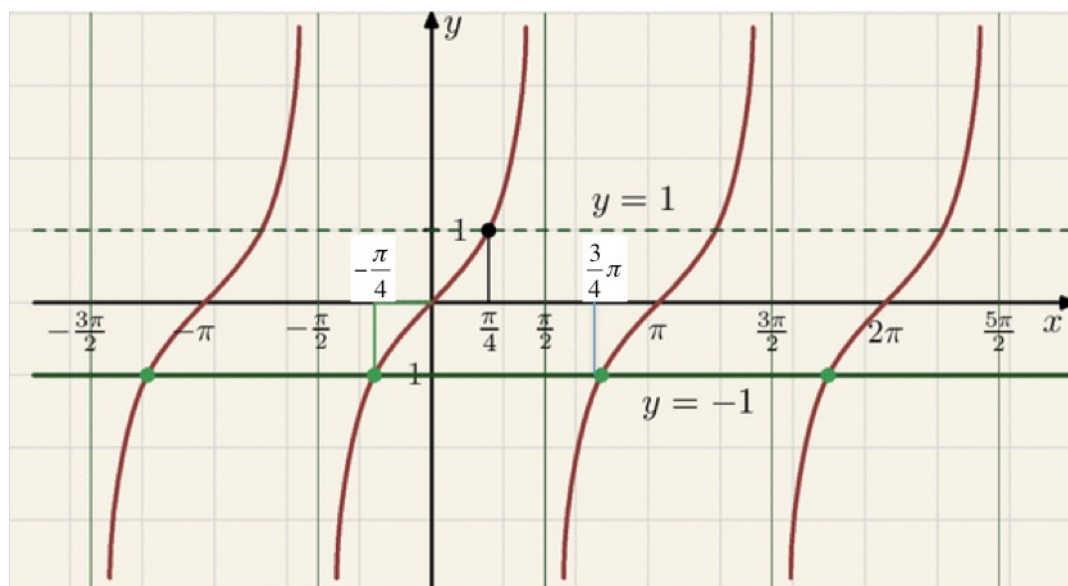
$$\operatorname{tg} x > -1$$

Risolviamo separatamente le due disequazioni.

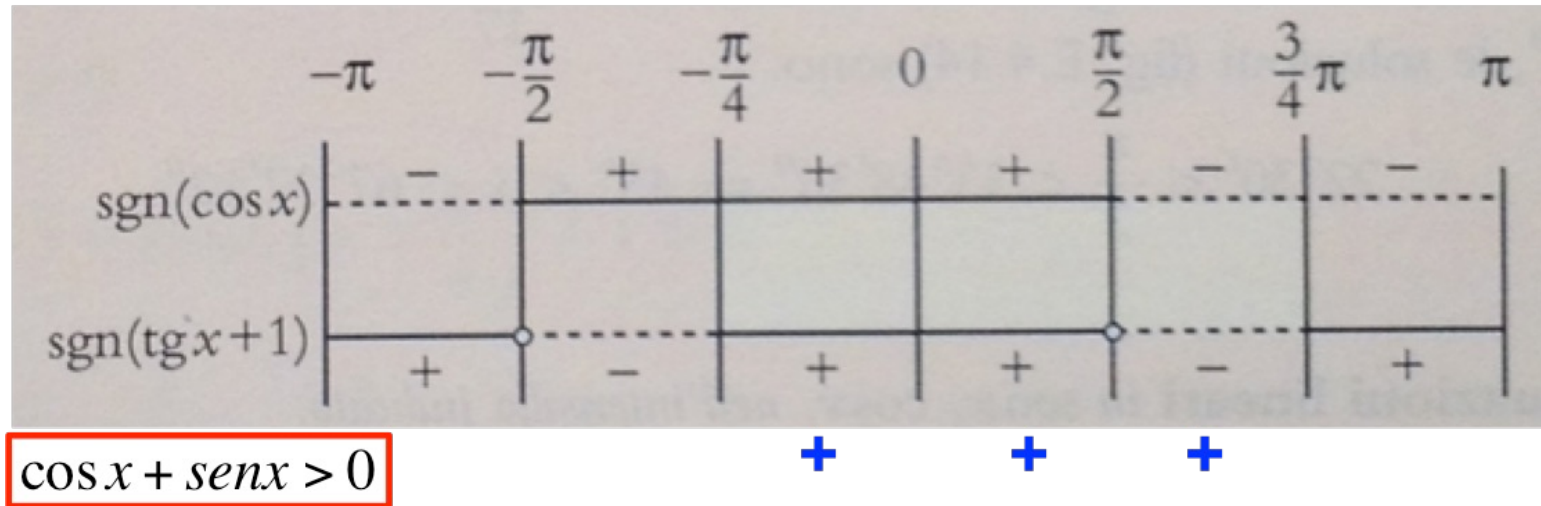
$$\cos x > 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$



$$\operatorname{tg} x > -1 \Rightarrow -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \vee -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{3}{4}\pi < x < \pi$$



Riuniamo in un unico grafico le soluzioni trovate e cerchiamo la soluzione della disequazione di partenza:



La disequazione di partenza:

$$\cos x + \sin x > 0 \quad \text{per } -\pi < x < \pi$$

è verificata per:

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$$

DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE DI 2° GRADO OMOGENEE

definizione

Una disequazione goniometrica si dice **omogenea di 2° grado** in $\sin x$ e $\cos x$ quando assume la forma:



Si procede come per le equazioni omogenee, dopo aver imposto la condizione:

$$\cos^2 x \neq 0 \xrightarrow{\text{ossia}} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Risolvere la seguente disequazione goniometrica omogenea di 2° grado:



Per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ si ha: $\sqrt{3} \cdot 1 - 0 > 0$ e quindi per tali valori la disequazione non è verificata.

Dividendo i due membri per $\cos^2 x$, la disequazione diventa:

$$\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x < 0 \Rightarrow 0 < \operatorname{tg} x < \sqrt{3}.$$

Quindi la disequazione è soddisfatta per:

$$k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Oppure, la disequazione data si può scrivere $\sqrt{3} \sin x (\sin x - \sqrt{3} \cos x) < 0$; per risolvere la disequazione si studiano i segni dei fattori $\sin x$ e $(\sin x - \sqrt{3} \cos x)$, per determinare gli intervalli in cui tali fattori risultano discordi.

Risolvere la seguente disequazione goniometrica omogenea di 2° grado:



Per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ la disequazione è soddisfatta.

Dividendo i due membri per $\cos^2 x$ e ricordando che $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, si ha:

$$2 \operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 \geq 1 + \operatorname{tg}^2 x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x \geq 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x \leq 0; \quad \operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}.$$

Quindi:

$$\operatorname{tg} x \leq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq k\pi;$$

$$\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

cui va aggiunta la soluzione $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

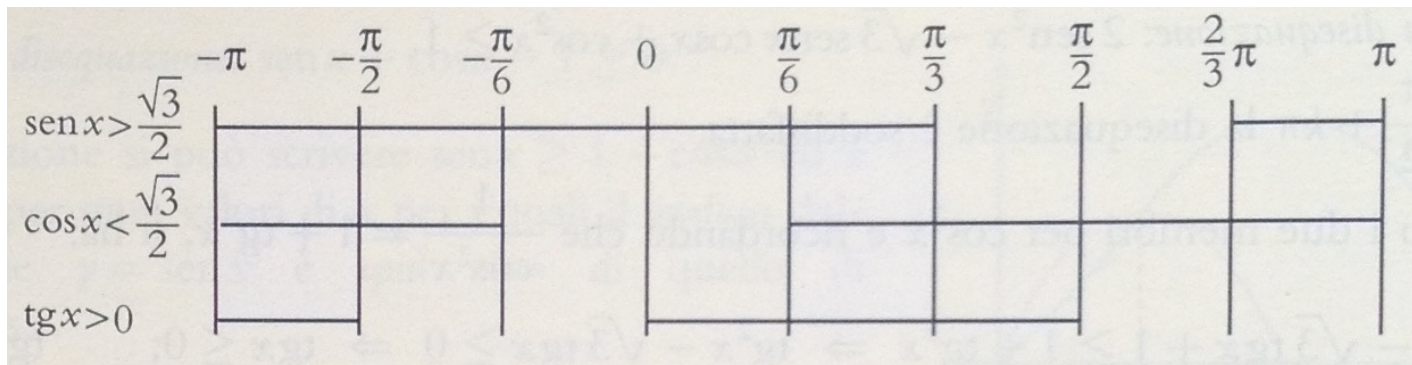
Sistemi Disequazioni Goniometriche

SISTEMI DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

Risolvere un sistema di disequazioni goniometriche significa determinare tutti quei valori dell'argomento x per i quali sono verificate contemporaneamente tutte le disequazioni che formano il sistema. Ossia scegliere gli intervalli del grafico dove si sovrappongono le linee continue delle soluzioni delle singole disequazioni.

Si procede come per i sistemi di disequazioni algebriche.

esempio



Risolvere il seguente sistema di disequazioni goniometriche:

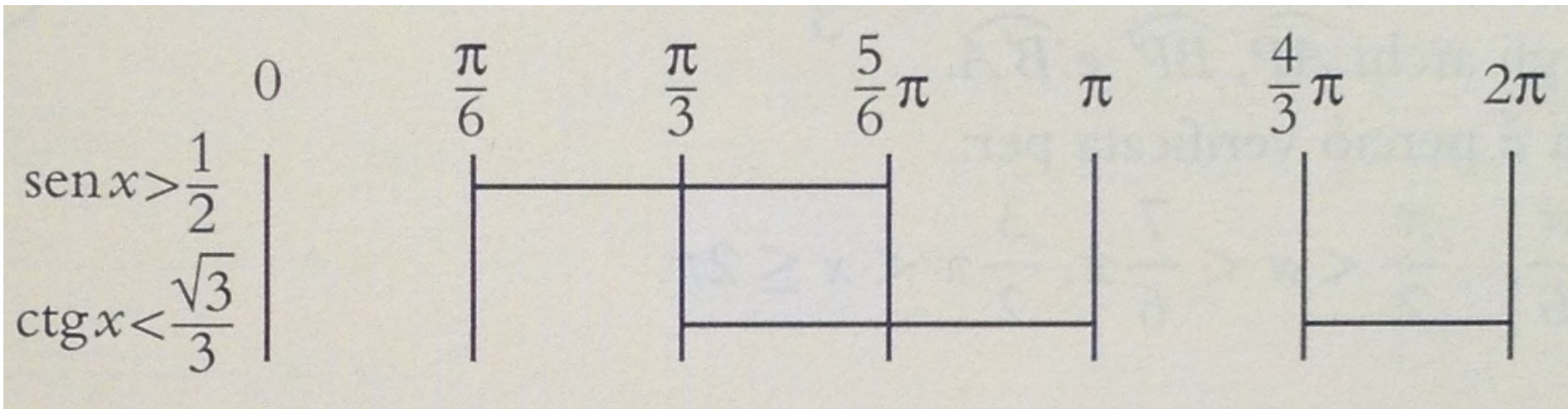
$$\begin{cases} \operatorname{sen} x > \frac{1}{2} \\ \operatorname{ctg} x < \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad \text{per } 0 < x < 2\pi$$

1. Si risolvono singolarmente le disequazioni che formano il sistema.

La prima disequazione è verificata per: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$.

La seconda disequazione è verificata per: $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ e $\frac{4}{3}\pi < x < 2\pi$

2. Si riportano le soluzioni nel seguente schema:



3. I valori dell'argomento x per i quali sono verificate contemporaneamente tutte le disequazioni che formano il sistema sono quelli relativi agli intervalli in cui si sovrappongono le linee continue delle soluzioni:

$$\text{soluzione}$$
$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{6}\pi \longrightarrow \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5}{6}\pi \right]$$

Risolvere il seguente sistema di disequazioni goniometriche:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases} \quad \text{per } -\pi < x < \pi$$

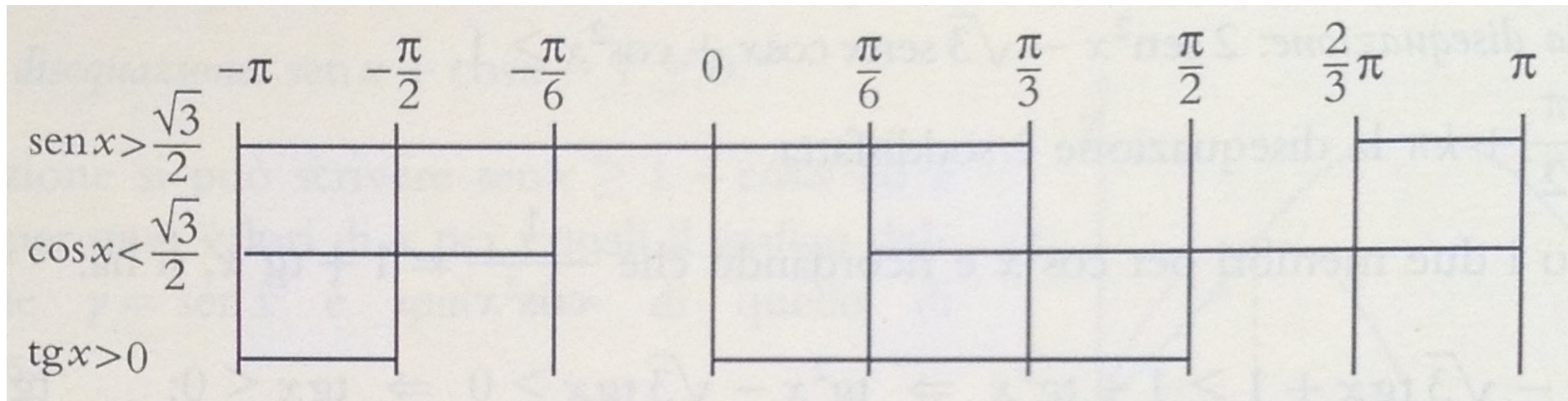
1. Si risolvono singolarmente le disequazioni che formano il sistema.

La prima disequazione è verificata per: $-\pi < x < \frac{\pi}{3}$ e $\frac{2}{3}\pi < x < \pi$.

La seconda disequazione è verificata per: $-\pi < x < -\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{6} < x < \pi$.

La terza disequazione è verificata per: $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

2. Si riportano le soluzioni nel seguente schema:



3. I valori dell'argomento x per i quali sono verificate contemporaneamente tutte le disequazioni che formano il sistema sono quelli relativi agli intervalli in cui si sovrappongono le linee continue delle soluzioni:

soluzione

$$-\pi < x < -\frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$$

Risolvere il seguente sistema di disequazioni goniometriche:

$$\begin{cases} 3\operatorname{tg}^2 x - 4\sqrt{3}\operatorname{tg} x < -3 \\ \operatorname{tg}^2 x > 1 \end{cases} \quad \text{per } 0 \leq x \leq \pi$$

1. Risolvere le singole disequazioni che formano il sistema.

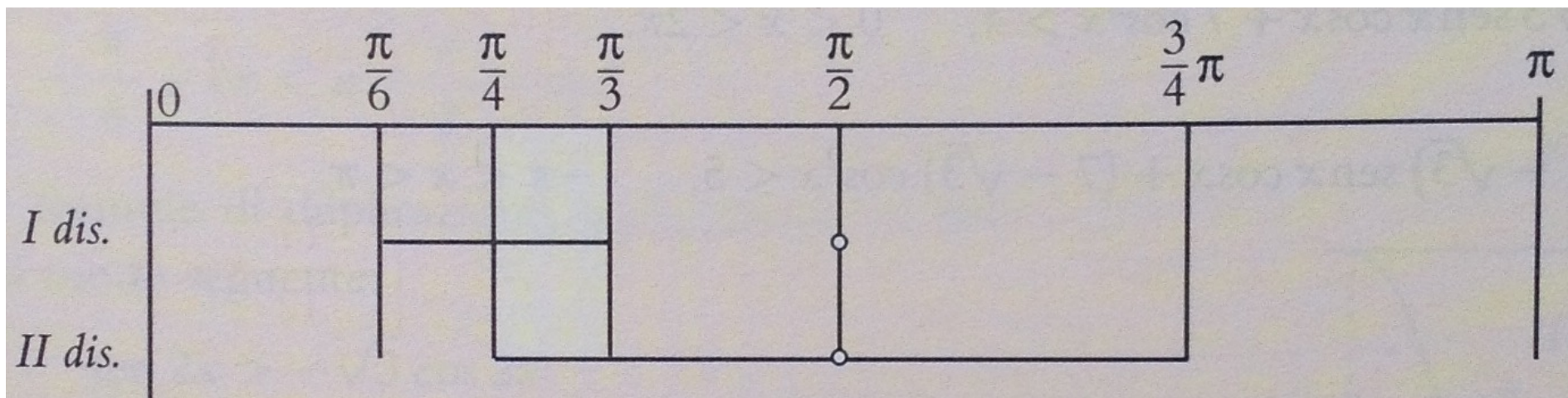
1^a Disequazione: $3\operatorname{tg}^2 x - 4\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 < 0$.

Risolvendo rispetto a $\operatorname{tg} x$, si ha:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} < \operatorname{tg} x < \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}.$$

2^a Disequazione: $\operatorname{tg}^2 x > 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x > 1$ e $\operatorname{tg} x < -1 \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$.

2. Riportare le soluzioni nel seguente schema:



3. La soluzione del sistema (valori delle x che soddisfano contemporaneamente tutte le disequazioni del sistema) è data dagli intervalli in cui si sovrappongono le linee continue delle soluzioni:

$$\begin{array}{c} \text{soluzione} \\ \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3} \longrightarrow \text{oppure} \longrightarrow \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3} \right] \end{array}$$

Disequazioni Goniometriche Fratte

Risolvere una disequazione goniometrica fratta significa determinare tutti quei valori dell'argomento x per i quali l'intera frazione soddisfi il segno di disuguaglianza. Ossia scegliere gli intervalli del grafico dove è verificato il segno della frazione.

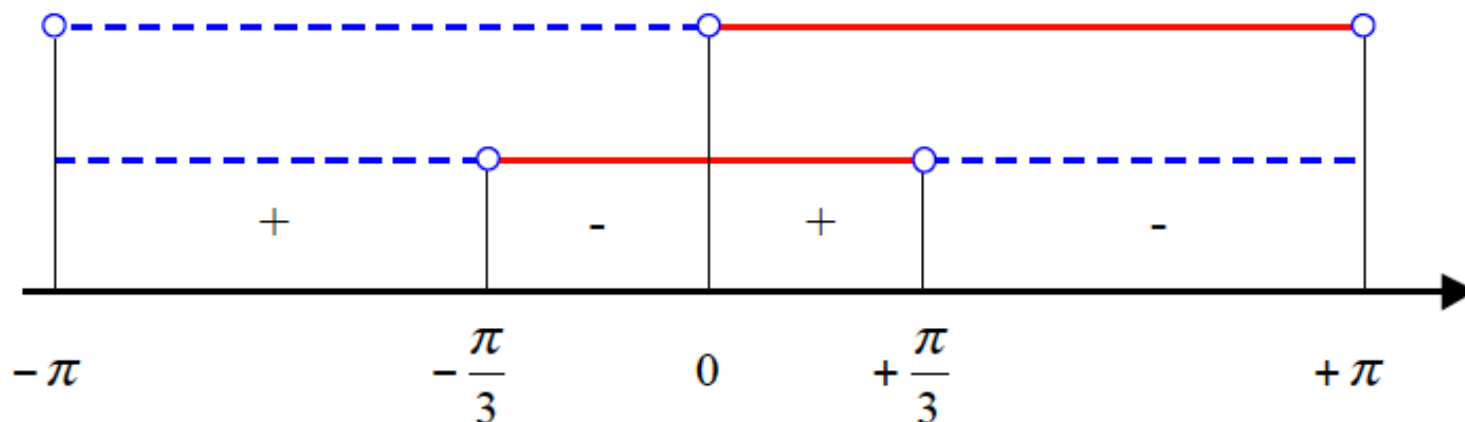
Si procede come per le disequazioni algebriche fratte.

Risolvere la seguente disequazioni goniometrica fratta:

$$\frac{\cos x - \frac{1}{2}}{\sin x} > 0$$

$$\frac{\cos x - \frac{1}{2}}{\sin x} > 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \cos x > \frac{1}{2} \\ \sin x > 0 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} -\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < +\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \end{array} \right|$$

e graficamente nell'intervallo $[-\pi ; +\pi]$:



soluzione

$$-\pi + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad 2k\pi < x < +\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Risolvere la seguente disequazioni goniometrica fratta:

$$\frac{\operatorname{sen} 2x}{1 - \sqrt{1 - \cos x}} \leq 0$$

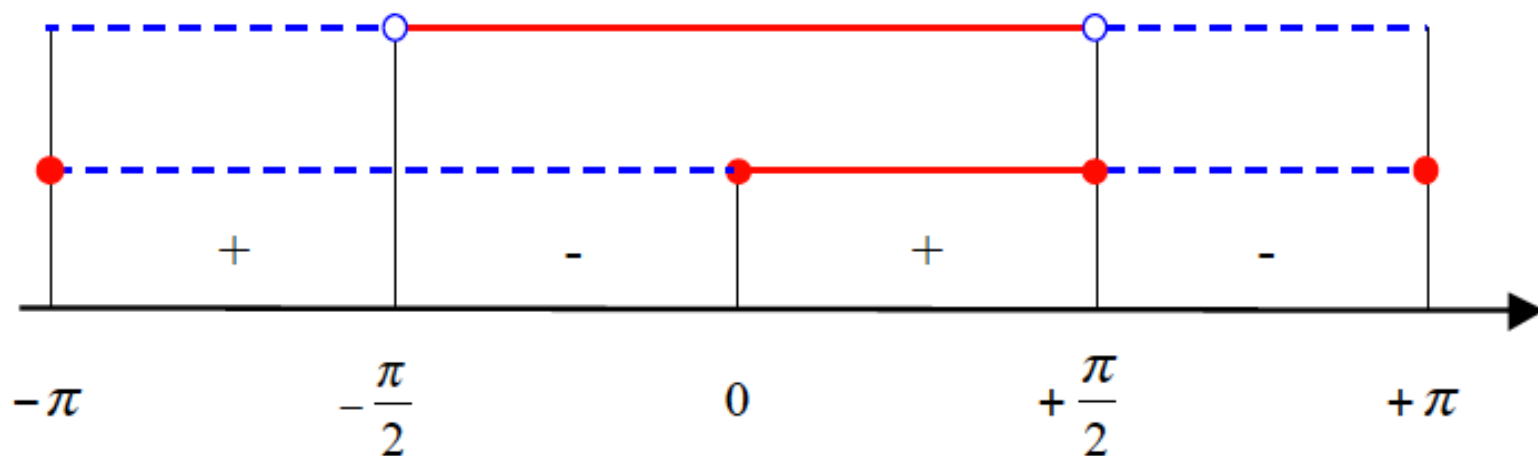
$$\text{C.E.} \Rightarrow 1 - \cos x \geq 0 \Rightarrow \cos x \leq 1 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R}$$

$$\frac{\operatorname{sen} 2x}{1 - \sqrt{1 - \cos x}} \leq 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \operatorname{sen} 2x \geq 0 \\ 1 - \sqrt{1 - \cos x} > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 2k\pi \leq 2x \leq +\pi + 2k\pi \\ \sqrt{1 - \cos x} < 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} k\pi \leq x \leq +\frac{\pi}{2} + k\pi \\ -\cos x < 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} k\pi \leq x \leq +\frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos x > 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} k\pi \leq x \leq +\frac{\pi}{2} + k\pi \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < +\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array} \right.$$

e graficamente nell'intervallo $[-\pi ; +\pi]$:



soluzione

$$-\pi + 2k\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad 2k\pi \leq x \leq +\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Risolvere la seguente disequazioni goniometrica fratta:



1. Imporre numeratore e denominatore maggiori di zero e risolvere le relative disequazioni intere:

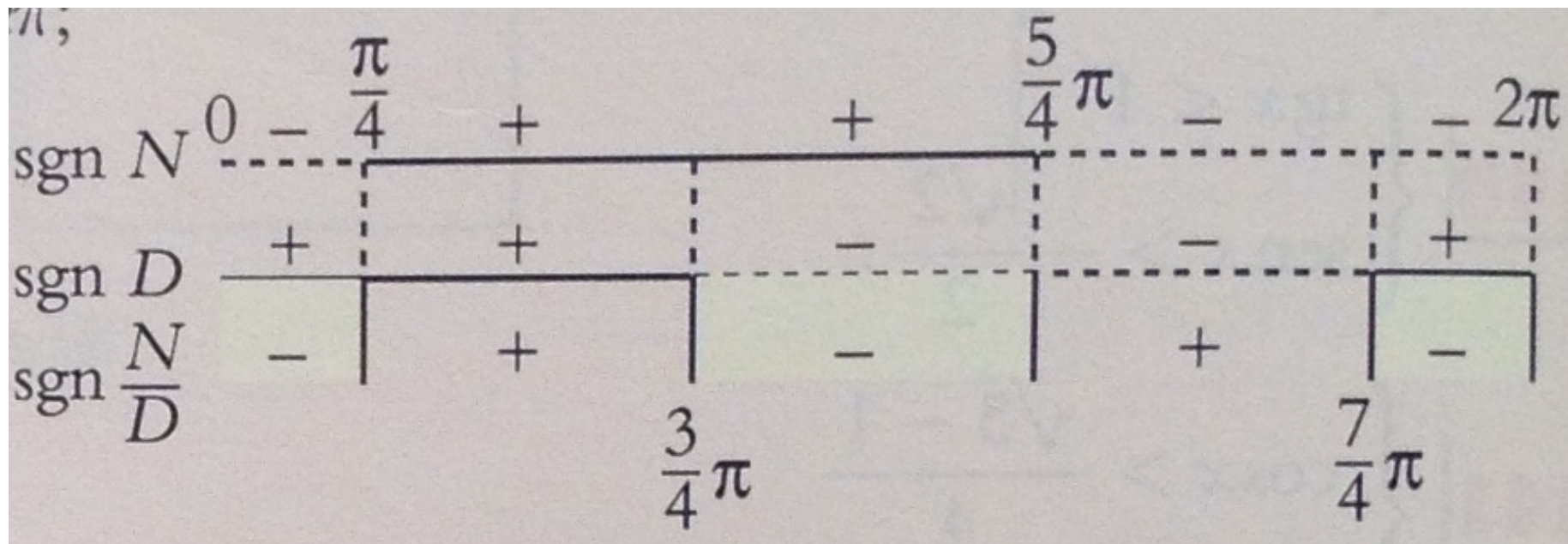
$$N > 0 \Rightarrow$$

$$\sin x - \cos x > 0, \text{ per: } \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi;$$

$$D > 0 \Rightarrow$$

$$\sin x + \cos x > 0, \text{ per: } 2k\pi \leq x < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi,$$
$$\frac{7}{4}\pi + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi.$$

2. Riportare le soluzioni nel seguente schema:



3. La soluzione della disequazione fratta è data da quelle x che rendono la frazione negativa. Ossia va cercata negli intervalli in cui il segno è negativo:

soluzione

$$2k\pi \leq x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee \frac{3}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \vee \frac{7}{4}\pi + 2k\pi < x \leq 2(k+1)\pi$$

Risolvere la seguente disequazioni goniometrica fratta:



Ricordando la formula di duplicazione $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, facendo il mcm e portando tutto al 1° membro, la disequazione si può scrivere come:

$$\frac{\cos 2x + \cos x - 1 - 2\cos 2x}{\cos 2x} > 0 \Rightarrow \frac{2\cos^2 x - 1 + \cos x - 1 - 2(2\cos^2 x - 1)}{2\cos^2 x - 1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x - 2\cos^2 x}{2\cos^2 x - 1} > 0$$

1. Imporre numeratore e denominatore maggiori di zero e risolvere le relative disequazioni intere:

$$\cos x - 2 \cos^2 x > 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x < 0$$

$$N > 0 \Rightarrow$$

$$0 < \cos x < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi;$$

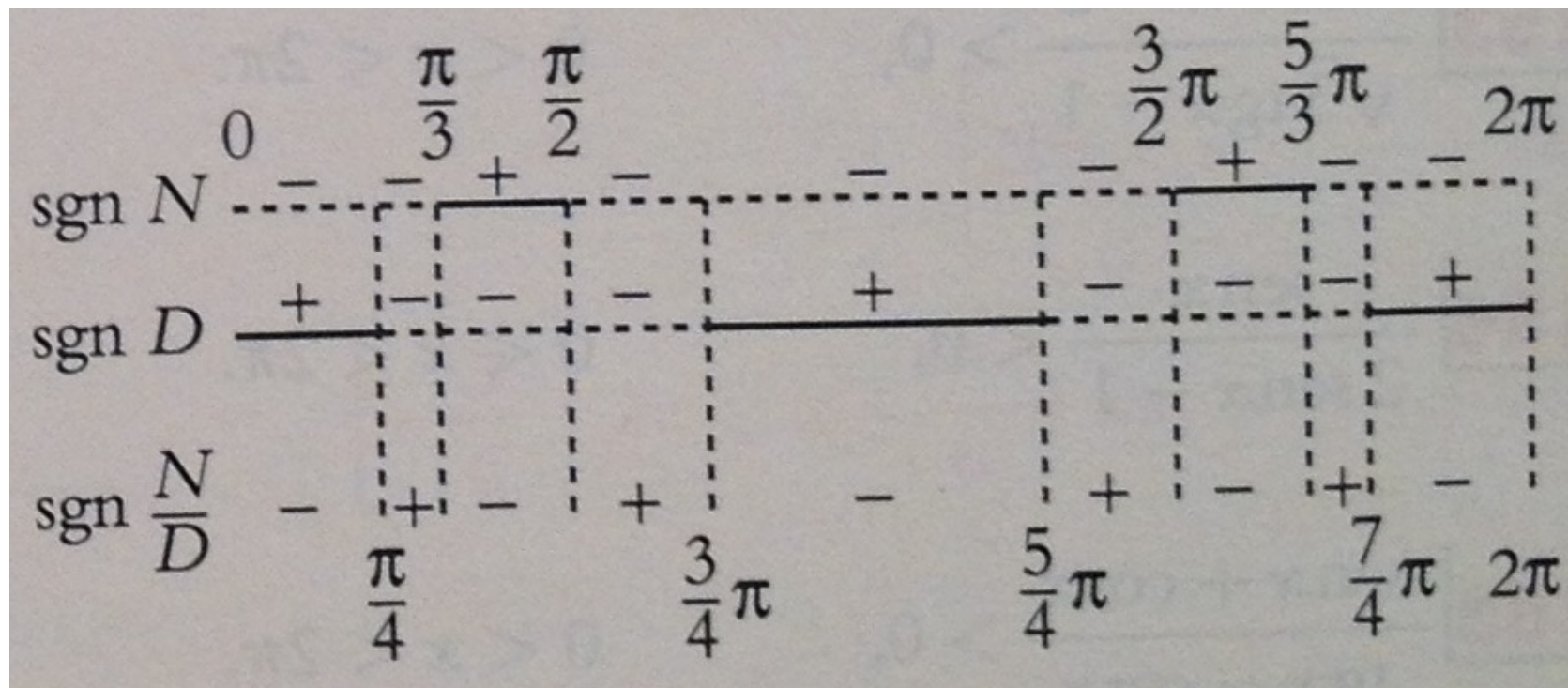
$$2 \cos^2 x - 1 > 0 \Rightarrow \cos^2 x > \frac{1}{2}$$

$$D > 0 \Rightarrow$$

$$\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi; \quad \frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi; \quad \frac{7\pi}{4} + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi.$$

2. Riportare le soluzioni nel seguente schema:



3. La soluzione è data da quelle x che rendono la frazione positiva. Ossia va cercata negli intervalli in cui il segno è positivo:

soluzione

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} + 2k\pi &< x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi &< x < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi; \\ \frac{5}{4}\pi + 2k\pi &< x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi; \\ \frac{5}{3}\pi + 2k\pi &< x < \frac{7}{4}\pi + 2k\pi. \end{aligned}$$