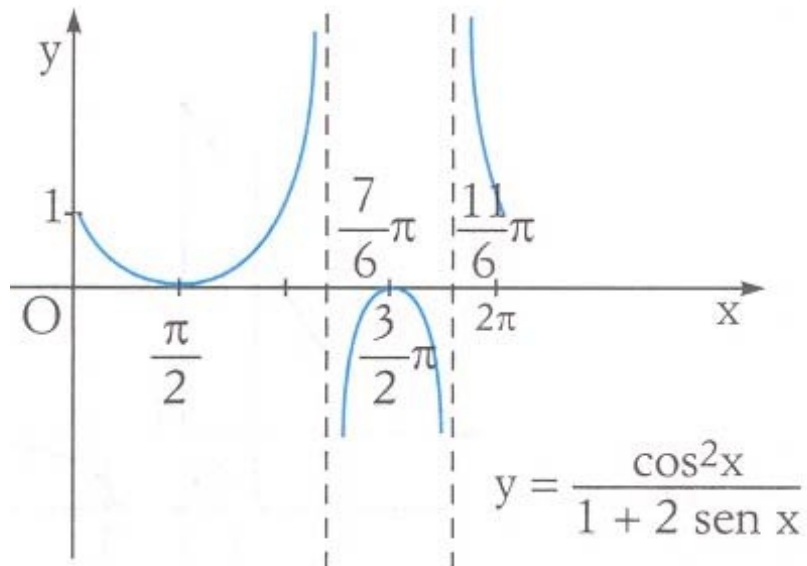


Matematica

TRIGONOMETRIA

Studio funzioni goniometriche



DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica

Studiare la seguente funzione:

$$y = 2\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}2x \quad \text{in } [0; 2\pi]$$

1) DOMINIO: $D = [0; 2\pi]$

2) INT. CON GLI ASSI:

$$\begin{cases} x=0 \\ f(x)=0 \end{cases} \rightarrow \underline{(0,0) \in f(x)}$$

$$f(x)=0 \rightarrow 2\operatorname{sen}x - 2\operatorname{sen}x\cos x = 0 \quad 2\operatorname{sen}x(1-\cos x)=0$$

$$2\operatorname{sen}x=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pi \\ x=2\pi \end{cases} \rightarrow \underline{(\pi,0) \in f(x)}$$

$$\cos x=1 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2\pi \end{cases} \rightarrow \underline{(2\pi,0) \in f(x)}$$

3. Simmetrie

$$f(-x) = 2\sin(-x) - \sin(-2x) = -2\sin x + \sin 2x = -f(x)$$

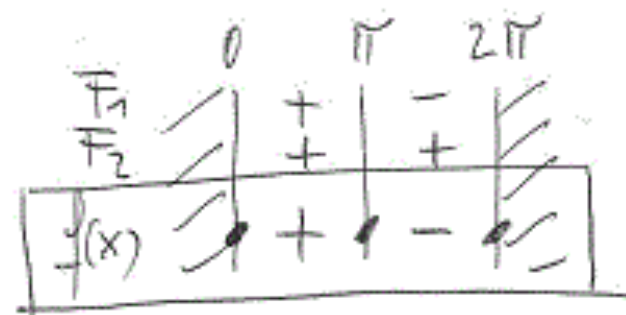
La funzione è dispari (oltre a essere periodica), quindi simmetrica rispetto all'origine degli assi.

3) SEGNO :

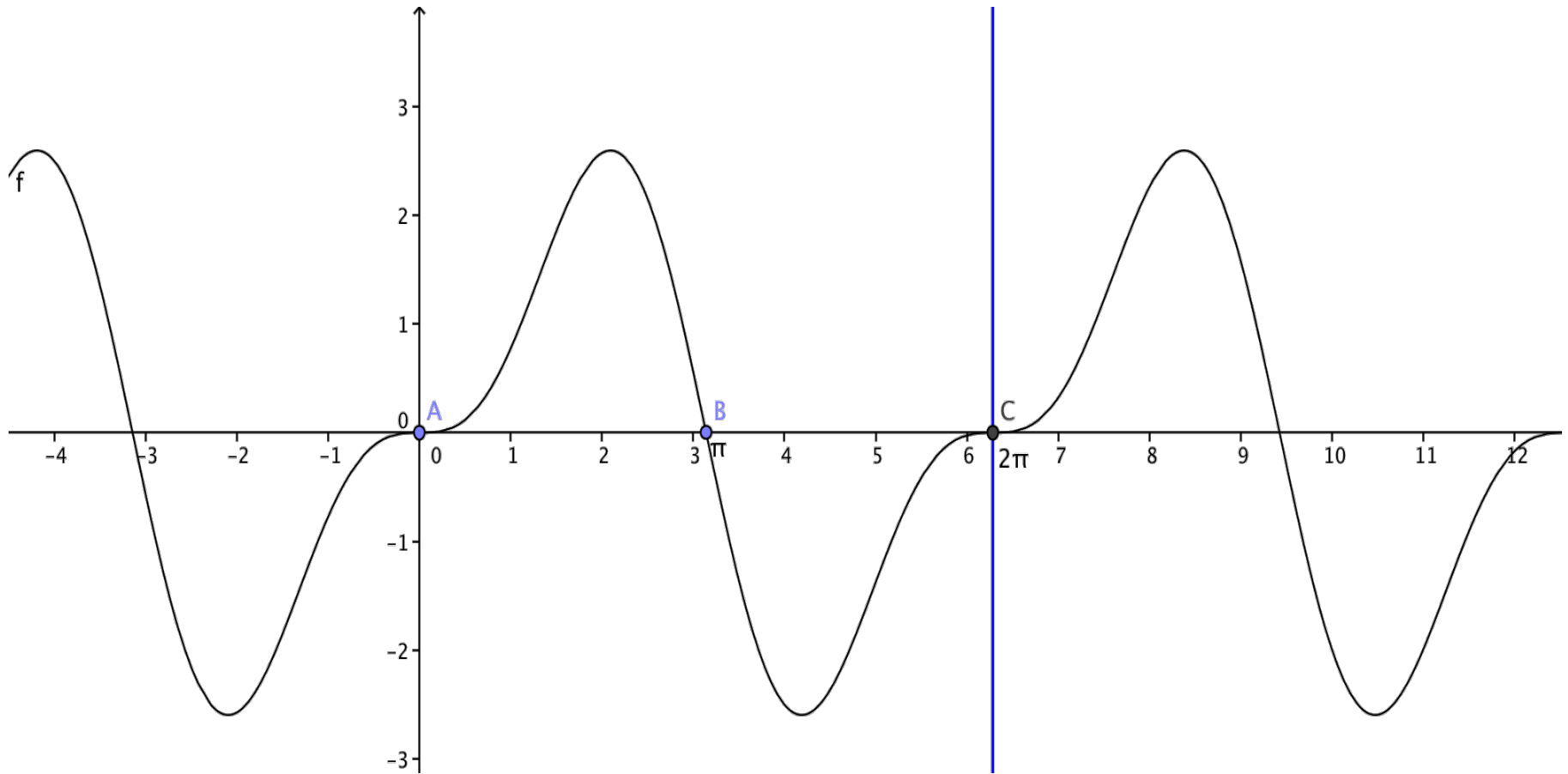
$$f(x) > 0 \quad \& \quad \sin x (1 - \cos x) > 0$$

$$F_1 > 0 \rightarrow \sin x > 0 \rightarrow 0 < x < \pi$$

$$F_2 > 0 \rightarrow \cos x < 1 \rightarrow \forall x \in \mathbb{D}$$



grafico



Studiare la seguente funzione:

$$y = \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x \quad \text{in } [0; 2\pi]$$

1) DOMINIO: $\mathbb{D} = [0; 2\pi]$

2) INT. CON GLI ASSI:

$$\begin{cases} x=0 \\ f(x)=1 \end{cases} \rightarrow \underline{(0, 1) \in f(x)}$$

$$f(x) = 0 \rightarrow \cos x + \sin x \cos x = 0 \rightarrow \cos x (\sin x + 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3}{2}\pi \end{cases} \quad \underline{\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \in f(x)}$$

$$\sin x = -1 \rightarrow x = \frac{3}{2}\pi \quad \underline{\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right) \in f(x)}$$

Inoltre $f(2\pi) = 1 \rightarrow \underline{(2\pi, 1) \in f(x)}$

3. Simmetrie

$$f(-x) = \cos(-x) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(-2x) = \cos x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \neq f(x) \neq -f(x)$$

La funzione è periodica, ma non presenta simmetrie (non è né pari né dispari).

3) SEGNO :

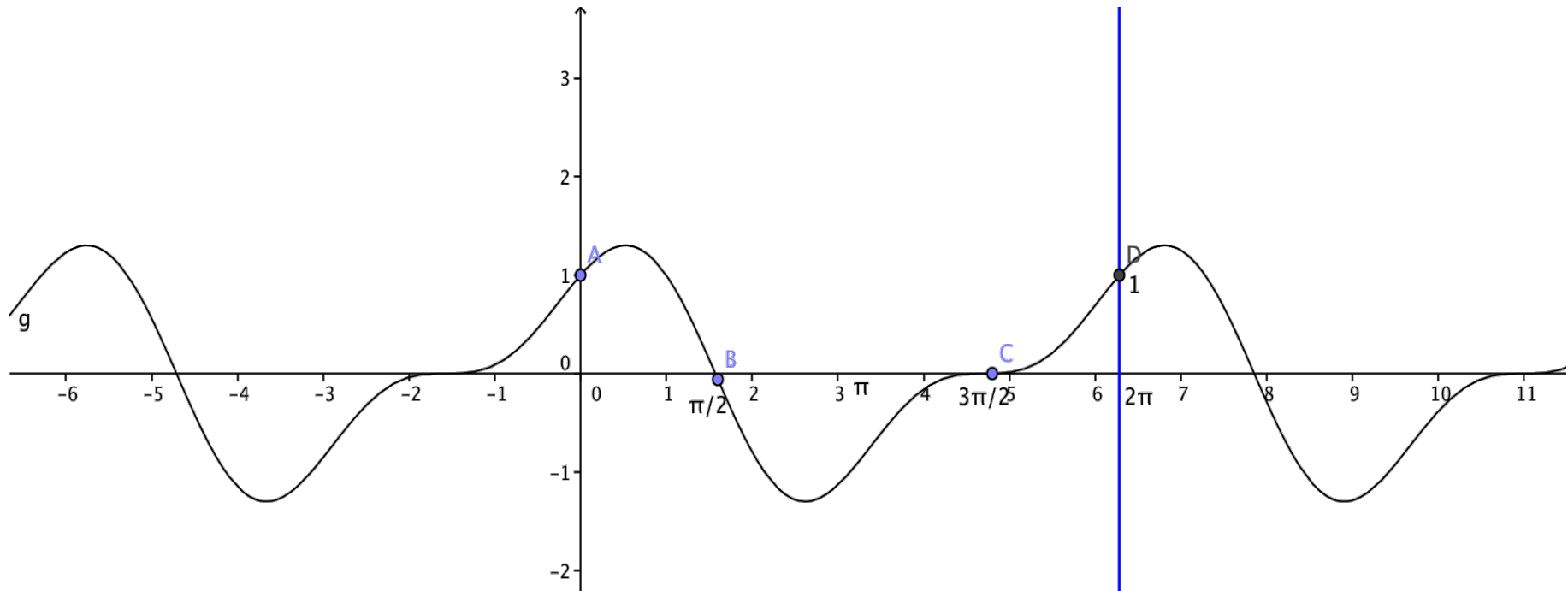
$$\phi(x) > 0 \quad \cos x (\sin x + 1) > 0$$

$$F_1 > 0 \rightarrow \cos x > 0 \rightarrow \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$$

$$F_2 > 0 \rightarrow \sin x > -1 \quad \forall x \in \mathbb{D}$$

	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{2}\pi$	2π
F_1	↗	+	-	+
F_2	↗	+	+	+
$\phi(x)$	↗	+	-	+

grafico



Studiare la seguente funzione:

$$y = \frac{\cos x}{1 - \cos x} \quad \text{in } [0; 2\pi]$$

1) DOMINIO:

$$1 - \cos x \neq 0 \rightarrow \cos x \neq 1 \quad \begin{cases} x=0 \\ x=2\pi \end{cases} \quad \underline{\mathbb{D} = (0; 2\pi)}$$

2) INT. CON GLI ASSI:

$$x=0 \notin f(x), \quad f(x)=0 \rightarrow \cos x = 0 \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

$$\underline{\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \in f(x)}, \quad \underline{\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right) \in f(x)}$$

3. Simmetrie

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{1 - \cos(-x)} = \frac{\cos x}{1 - \cos x} = f(x)$$

La funzione è pari (oltre a essere periodica), quindi simmetrica rispetto all'asse y.

3) SEGNO:

$$f(x) > 0 \quad N > 0 \rightarrow \cos x > 0 \rightarrow \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$$

$$D > 0 \rightarrow \cos x < 1 \quad \forall x \in \mathbb{D}$$

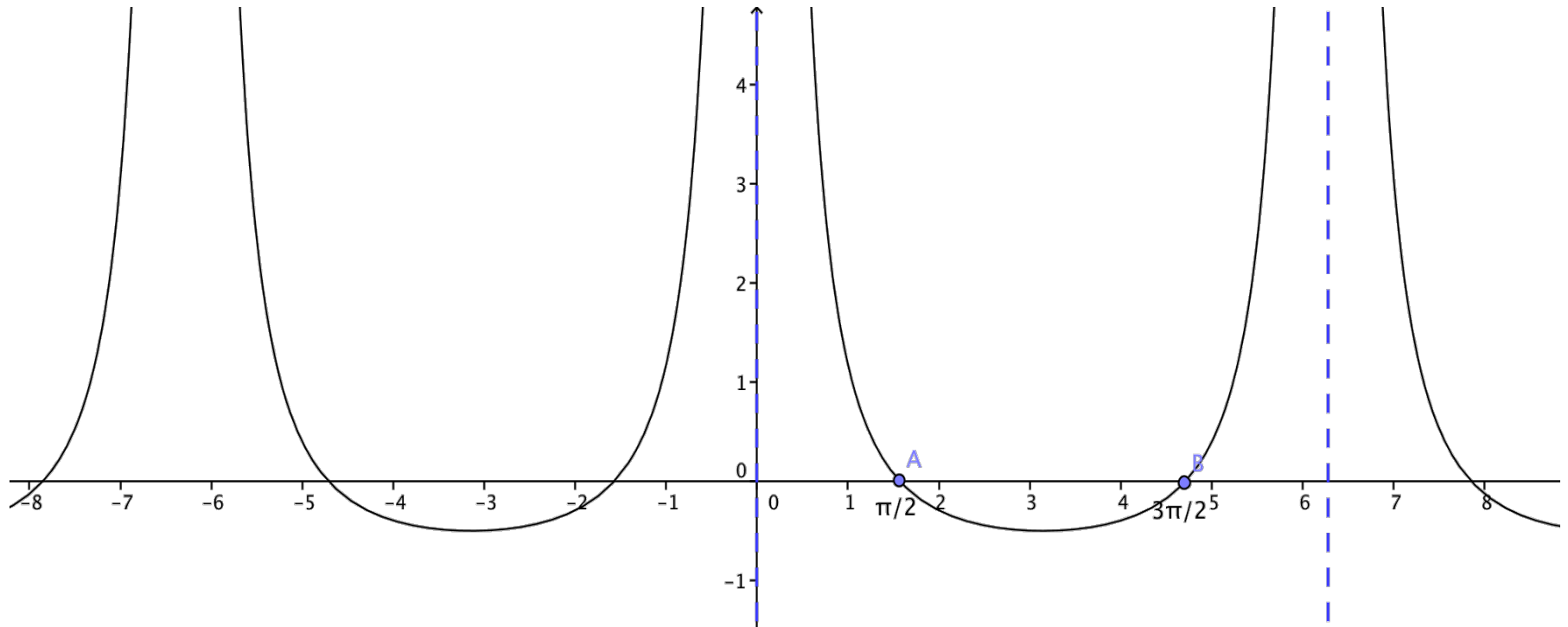
	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{2}\pi$	2π
N	+	+	-	+
D	+	+	+	+
f(x)	+	+	-	+

4) LIMITI:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} f(x) = +\infty \rightarrow \underline{x=0}, \underline{x=2\pi}$$

ASINTOTI
VERTICALI

grafico



Studiare la seguente funzione:

$$y = \frac{1 + \cos x}{\cos x - \sin x} \quad \text{in } [0; 2\pi]$$

1) DOMINIO:

$$\cos x - \sin x \neq 0 \rightarrow 1 - \tan x \neq 0 \rightarrow \tan x \neq 1$$

$$\rightarrow x \neq \frac{\pi}{4}, x \neq \frac{5\pi}{4} \rightarrow \mathbb{D} = \left[0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}; 2\pi\right)$$

2) INT. CON GLI ASSI:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \rightarrow \underline{(0, 2) \in f(x)} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x=2\pi \\ y=2 \end{cases} \rightarrow \underline{(2\pi, 2) \in f(x)}$$

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ 1 + \cos x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \cos x = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\pi \end{cases} \rightarrow \underline{(\pi, 0) \in f(x)}$$

3. Simmetrie

$$f(-x) = \frac{1 + \cos(-x)}{\cos(-x) - \sin(-x)} = \frac{1 + \cos x}{\cos x - \sin x} \neq f(x) \neq -f(x)$$

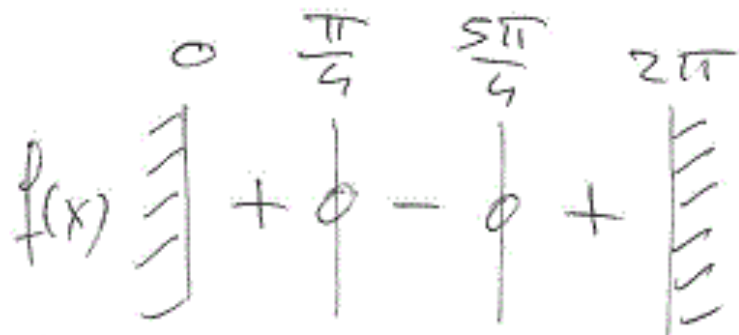
La funzione è periodica, ma non presenta simmetrie (non è né pari né dispari).

3) SEGNO:

$$f(x) > 0$$

$$N > 0 \rightarrow \cos x > -1 \quad \forall x \neq \pi$$

$$D > 0 \rightarrow \cos x > \sin x \rightarrow \left[0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}; 2\pi\right)$$

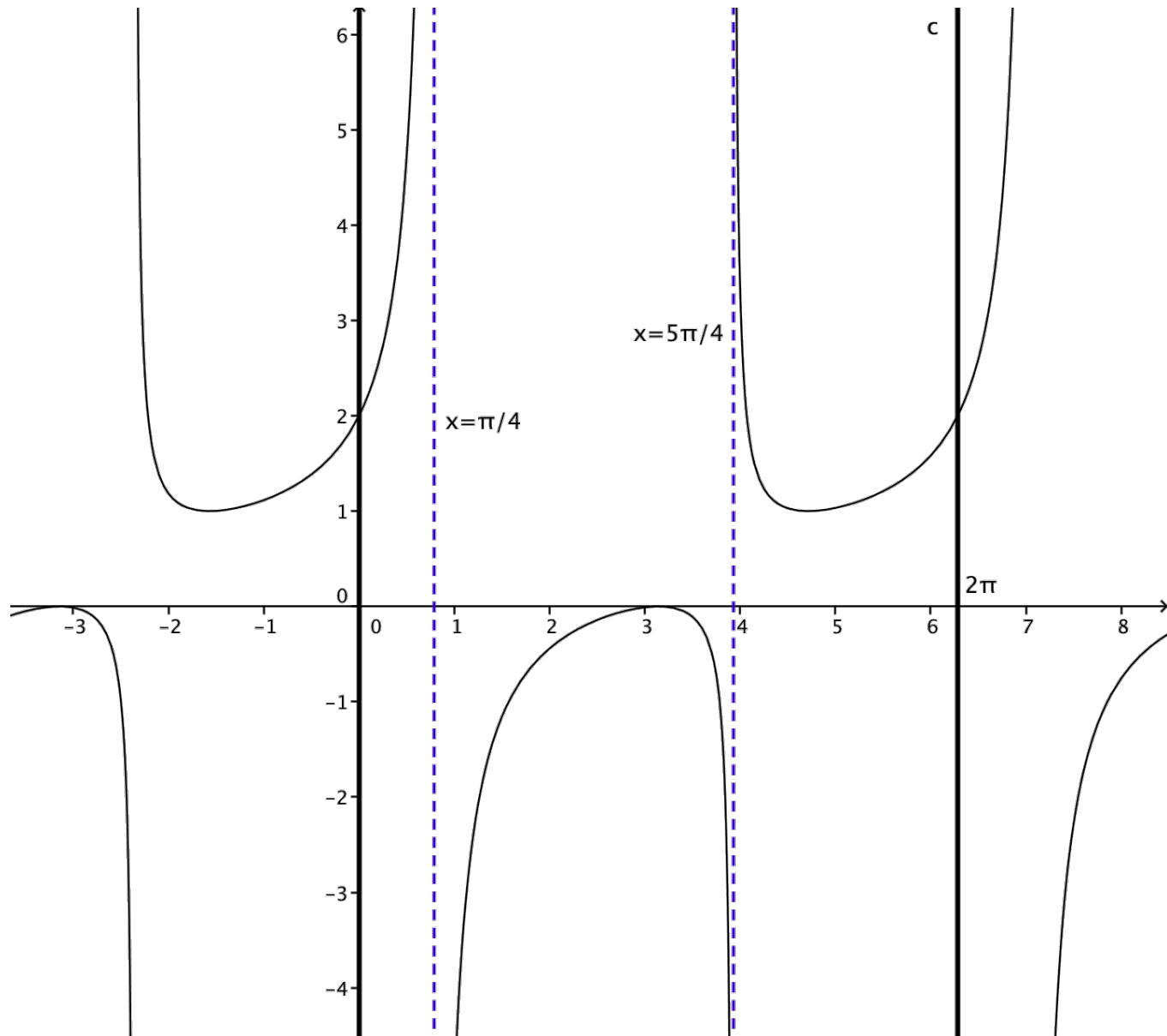


4) LIMITI:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{4}^+} f(x) = \frac{\pm \frac{\sqrt{2}}{2}}{0^+} = \pm \infty$$

$x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}$
 ASINTOTI
 VERTICALI

grafico



Studiare la seguente funzione:

$$y = \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\sqrt{3} \operatorname{sen} x - \cos x} \quad \text{in } [0; 2\pi]$$

1) DOMINIO : $\sqrt{3} \operatorname{sen} x - \cos x \neq 0$
 $\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1 \neq 0 \rightarrow \operatorname{tg} x \neq \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x \neq \frac{\pi}{6}$
 $\rightarrow x \neq \frac{7\pi}{6}$
 $\mathbb{D} = \left[0; \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6}; 2\pi\right]$

2) INT. CON GLI ASSI :

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \rightarrow \underline{(0, 1) \in f(x)}$$

$$\begin{cases} x=2\pi \\ y=1 \end{cases} \rightarrow \underline{(2\pi, 1) \in f(x)}$$

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ \operatorname{sen} x = \cos x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\frac{\pi}{4} \vee x=\frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$\underline{\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \in f(x)}$$

$$\underline{\left(\frac{5\pi}{4}, 0\right) \in f(x)}$$

3) SEGNO:

$$f(x) > 0$$

$$N > 0 \rightarrow \sin x > \cos x \rightarrow \frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$$

$$D > 0 \rightarrow \sqrt{3}\sin x > \cos x \rightarrow \frac{\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}$$

		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	2π
N	✓	-	-	+	+	-
D	✓	-	+	+	-	-
f(x)	✓	+	-	+	-	+

4. Simmetrie

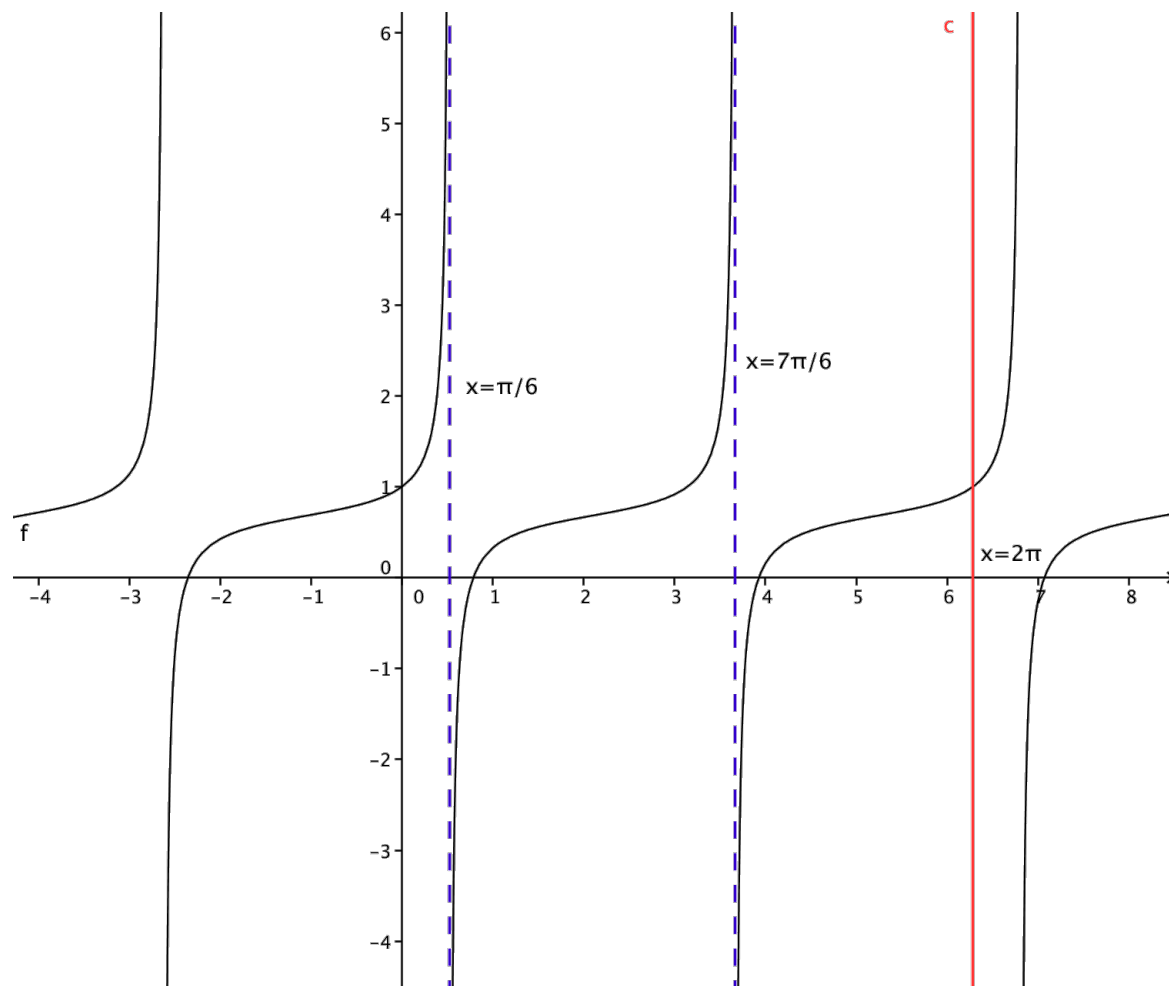
$$f(-x) = \frac{\sin(-x) - \cos(-x)}{\sqrt{3}\sin(-x) - \cos(-x)} = \frac{-\sin x - \cos x}{-\sqrt{3}\sin x - \cos x} \neq f(x) \neq -f(x)$$

La funzione è periodica, ma non presenta simmetrie (non è né pari né dispari).

5) limiti

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^{\pm}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{7\pi}{6}^{\pm}} f(x) = \infty$$

$x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{6}$
ASINTOTI
VERTICALI



grafico

Studiare la seguente funzione:

$$y = 3\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen}^3 x \quad \text{in } [0; 2\pi]$$

1) DOMINIO : $\mathbb{D} = [0; 2\pi]$

2) INT. CON GLI ASSI :

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} / \begin{cases} x=2\pi \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \underline{(0,0), (2\pi,0) \in f(x)}$$

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ \operatorname{sen}^2 x (3 - 2\operatorname{sen} x) = 0 \end{cases} \begin{cases} \nearrow x=0 \\ \nearrow x=2\pi \end{cases} \uparrow, x=\pi \rightarrow \underline{(\pi,0) \in f(x)}$$

$\rightarrow \operatorname{sen} x = 3/2 \rightarrow \emptyset$

3) SEGNO:

$$f(x) > 0 \rightarrow \sin^2 x (3 - 2\sin x) > 0$$

$$\sin^2 x > 0 \quad \forall x \in (0; 2\pi)$$

$$3 - 2\sin x > 0 \rightarrow \sin x < 3/2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in (0; 2\pi)$$

4. Simmetrie

$$f(-x) = 3\sin^2(-x) - 2\sin^3(-x) = 3\sin^2 x - 2\sin^3(x) \neq f(x) \neq -f(x)$$

La funzione è periodica, ma non presenta simmetrie (non è né pari né dispari).

3) SEGNO:

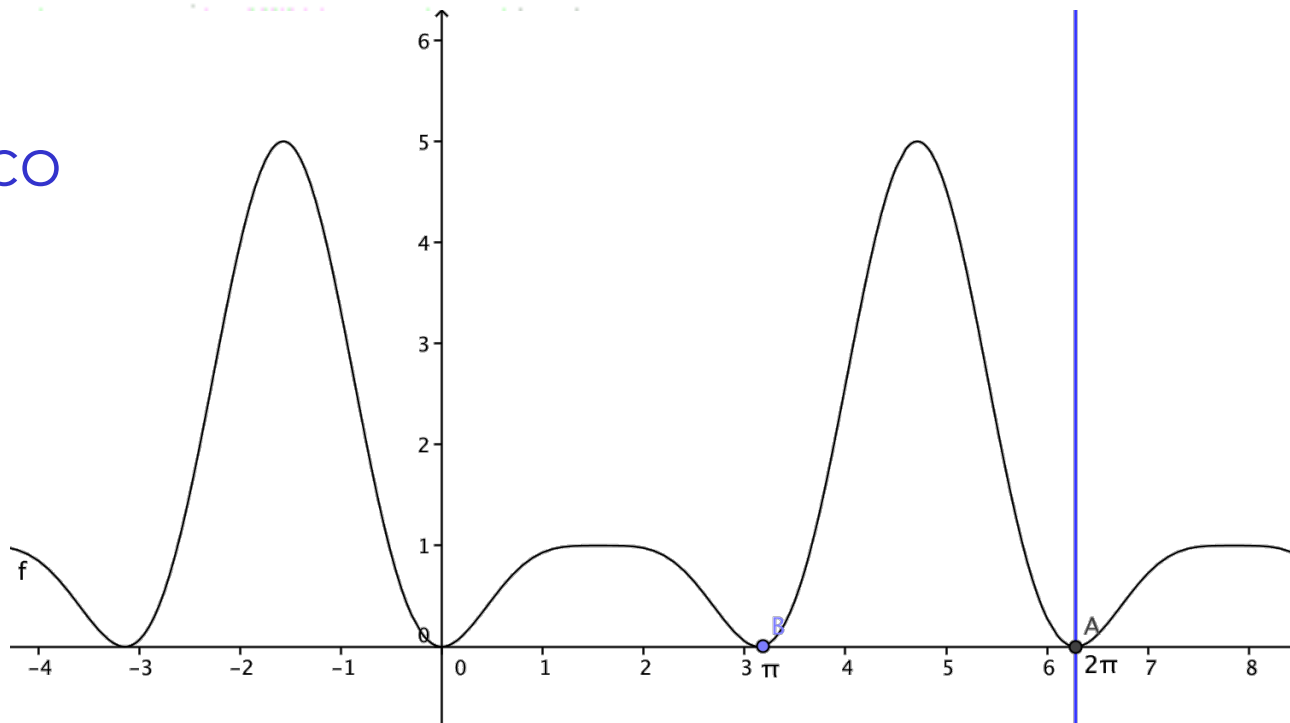
$$f(x) > 0 \rightarrow \sin^2 x (3 - 2\sin x) > 0$$

$$\sin^2 x > 0 \quad \forall x \in (0; 2\pi)$$

$$3 - 2\sin x > 0 \rightarrow \sin x < 3/2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in (0; 2\pi)$$

grafico



Studiare la seguente funzione:

$$y = \frac{\cos^2 x}{1 + 2\sin x} \quad \text{in } [0; 2\pi]$$

1) DOMINIO: $1 + 2\sin x \neq 0 \rightarrow \sin x \neq -\frac{1}{2} \rightarrow$
 $\rightarrow x \neq \frac{7}{6}\pi, x \neq \frac{11}{6}\pi \rightarrow \mathbb{D} = [0; \frac{7}{6}\pi) \cup (\frac{7}{6}\pi; \frac{11}{6}\pi) \cup (\frac{11}{6}\pi; 2\pi]$

2) INT. CON GLI ASSI:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=2\pi \\ y=1 \end{cases} \rightarrow \underline{(0, 1), (2\pi, 1) \in f(x)}$$

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ \cos^2 x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x=\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{3\pi}{2} \end{matrix} \rightarrow \underline{(\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{3\pi}{2}, 0) \in f(x)}$$

3) SEGNO:

$$f(x) > 0$$

$$N > 0 \rightarrow \cos^2 x > 0 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} \wedge x \neq \frac{3\pi}{2}$$

$$D > 0 \rightarrow \sin x > -\frac{1}{2} \rightarrow \left[0; \frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$$

	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
N	+	+	+	+	+	+
D	+	+	-	-	+	+
f(x)	+	+	-	-	+	+

4) LIMITI:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{7\pi}{6}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{11\pi}{6}^-} f(x) = \frac{3/4}{0^\pm} = \pm \infty$$

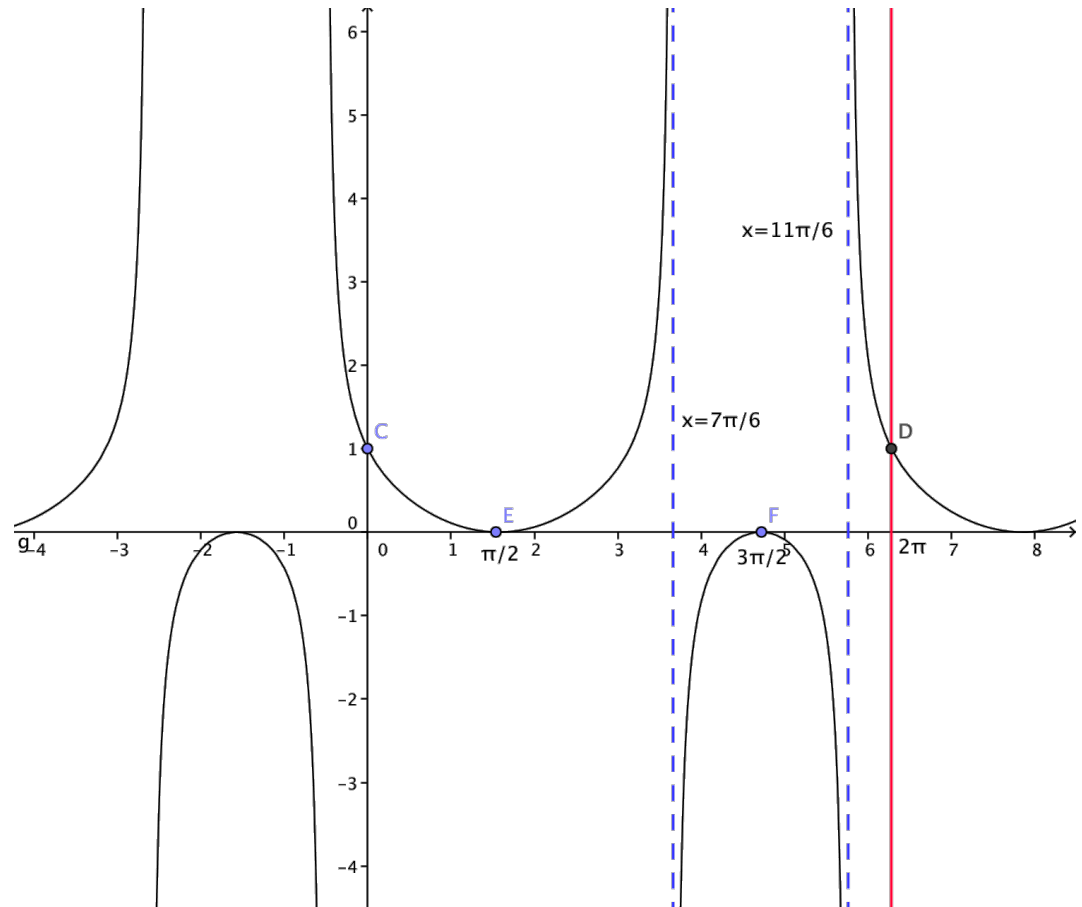
$x = \frac{7\pi}{6}, x = \frac{11\pi}{6}$
ASINTOTI
VERTICALI

5. Simmetrie

$$f(-x) = \frac{\cos^2(-x)}{1+2\operatorname{sen}(-x)} = \frac{\cos^2 x}{1-2\operatorname{sen}x} \neq f(x) \neq -f(x)$$

La funzione è periodica, ma non presenta simmetrie (non è né pari né dispari).

grafico



Studiare la seguente funzione:

$$y = \sin\left(\frac{10}{x^2 + 1}\right)$$

1. Dominio

$$x^2 + 1 \neq 0 \xrightarrow{\text{soluzione}} \forall x \in \mathfrak{R}$$

2. Simmetrie

$$f(-x) = \sin\left(\frac{10}{(-x)^2 + 1}\right) = \sin\left(\frac{10}{x^2 + 1}\right) = f(x)$$

La funzione è pari, quindi simmetrica rispetto all'asse Y.

3. Intersezioni con gli assi

$$X: \begin{cases} y = \sin\left(\frac{10}{x^2 + 1}\right) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \sin\left(\frac{10}{x^2 + 1}\right) = 0 \Rightarrow \frac{10}{x^2 + 1} = k\pi \Rightarrow$$

$$k\pi x^2 + k\pi - 10 = 0 \xrightarrow{\text{soluzione}} x = \pm \sqrt{\frac{10 - k\pi}{k\pi}}$$

Ma attenzione, la soluzione non è accettabile per ogni k .

Dobbiamo imporre la condizione di esistenza alla soluzione:

$$\frac{10 - k\pi}{k\pi} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} N \geq 0 \Rightarrow 10 - k\pi \geq 0 \rightarrow k \leq \frac{10}{\pi} \\ D > 0 \Rightarrow k\pi > 0 \rightarrow k > 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{soluzione}} 0 < k \leq \frac{10}{\pi}$$

Quindi, i valori di k che appartengono all'intervallo trovato sono:

$$k = 1, 2, 3$$

Allora, le soluzioni (le intersezioni con l'asse x) sono:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{10 - \pi}{\pi}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{10 - \pi}{\pi}}$$

$$x_3 = -\sqrt{\frac{5 - \pi}{\pi}}, \quad x_4 = \sqrt{\frac{5 - \pi}{\pi}}$$

$$x_5 = -\sqrt{\frac{10 - 3\pi}{3\pi}}, \quad x_6 = \sqrt{\frac{10 - 3\pi}{3\pi}}$$

$$Y : \begin{cases} y = \sin\left(\frac{10}{x^2 + 1}\right) \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \sin 10 = -0,54 \text{ rad}$$

4. Segno della funzione

$$f(x) > 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{10}{x^2 + 1}\right) > 0 \Rightarrow 2k\pi < \frac{10}{x^2 + 1} < (2k + 1)\pi \xrightarrow{\text{equivalente a}} \begin{cases} \frac{10}{x^2 + 1} > 2k\pi \\ \frac{10}{x^2 + 1} < (2k + 1)\pi \end{cases}$$

Tralascio i calcoli, che sono lunghi e noiosi.

grafico

