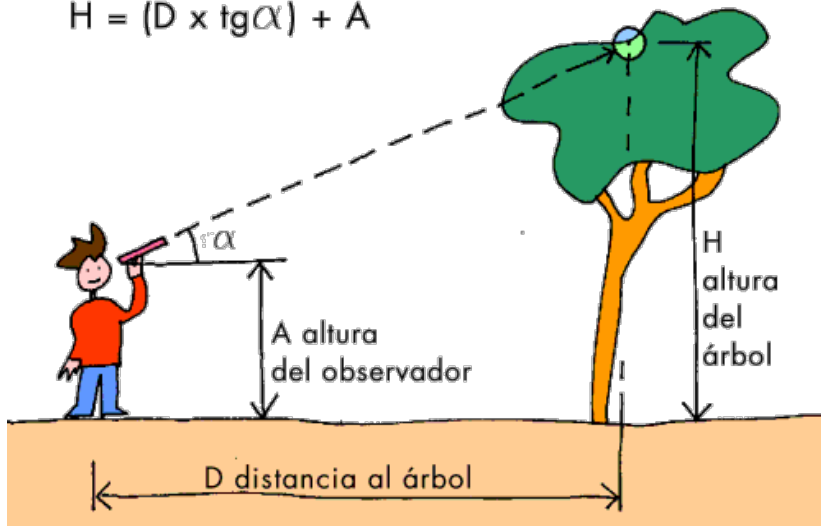


Matematica

TRIGONOMETRIA

La trigonometria

$$H = (D \times \operatorname{tg} \alpha) + A$$



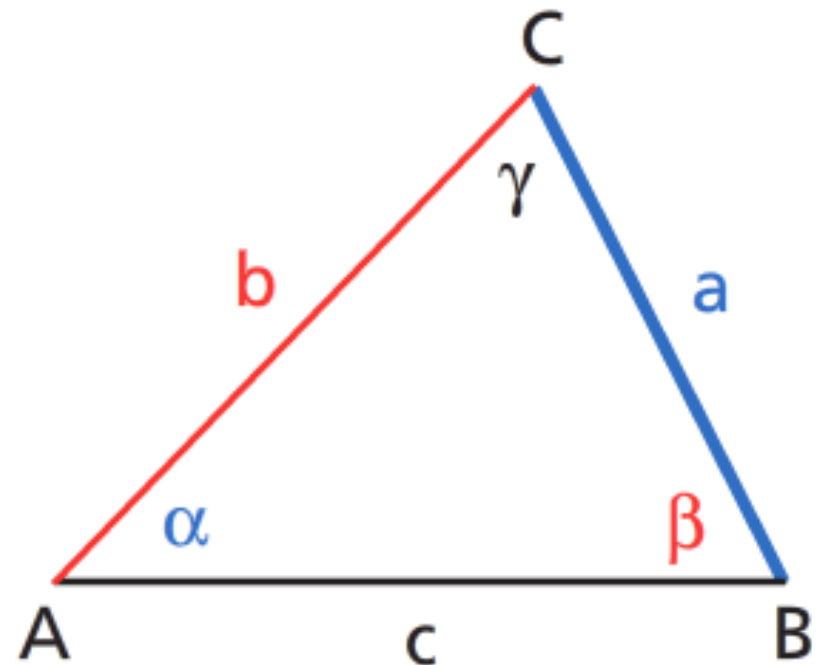
DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica

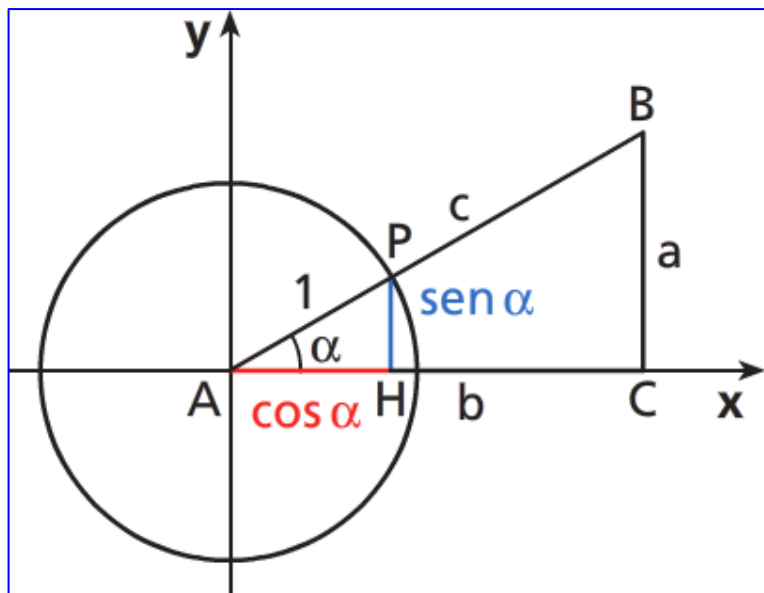
Finora ci siamo occupati di goniometria, ossia della misura di angoli e delle funzioni goniometriche associate ad essi.

Ora ci occuperemo di **trigonometria**, ossia delle relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo.

Utilizzeremo la seguente nomenclatura per gli elementi (angoli e lati) del triangolo.



TEOREMI SUL TRIANGOLO RETTANGOLO



I due triangoli APH e ABC sono simili:

$$\overline{BC} : \overline{AB} = \overline{PH} : \overline{AP} \quad \overline{AC} : \overline{AB} = \overline{AH} : \overline{AP}$$

$$\overline{AP} = 1 \quad \overline{PH} = \text{sen } \alpha \quad \overline{AH} = \cos \alpha$$

si ha il seguente teorema:

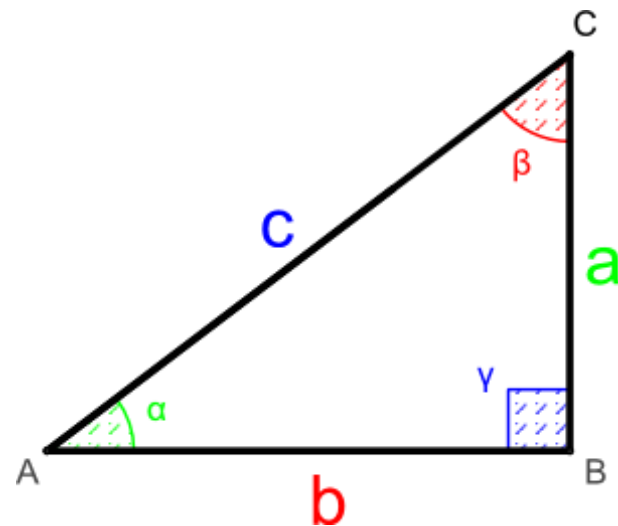
Primo teorema dei triangoli rettangoli

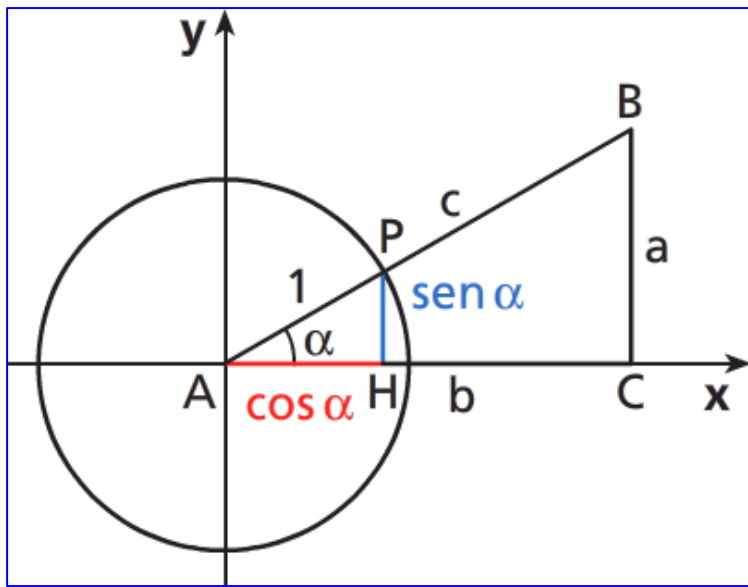
Cateto = ipotenusa x seno dell'angolo
opposto al cateto

$$a = c \cdot \text{sen } \alpha \quad b = c \cdot \text{sen } \beta$$

Cateto = ipotenusa x coseno dell'angolo
adiacente al cateto

$$a = c \cdot \cos \beta \quad b = c \cdot \cos \alpha$$





Per i due triangoli APH e ABC, essendo simili, possiamo anche scrivere:

$$\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{PH} : \overline{AH}$$

$$\overline{BC} = \text{sen} \alpha \quad \overline{AC} = \cos \alpha \quad \overline{PH} = \text{sen} \alpha \quad \overline{AH} = \cos \alpha$$

si ha il seguente teorema:

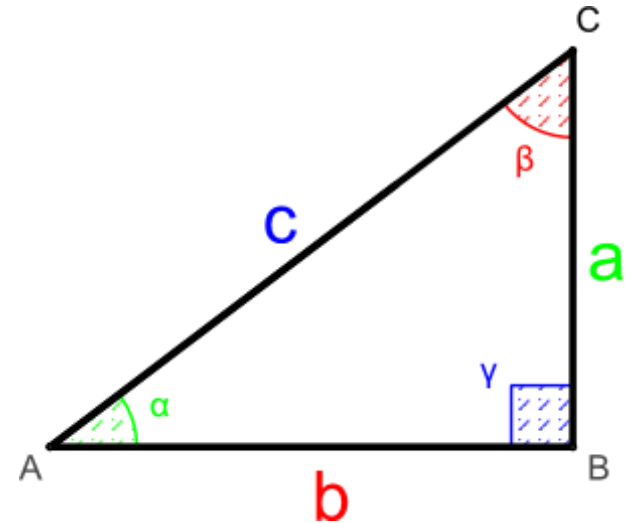
Secondo teorema dei triangoli rettangoli

Cateto=altro cateto x tangente dell'angolo opposto al cateto

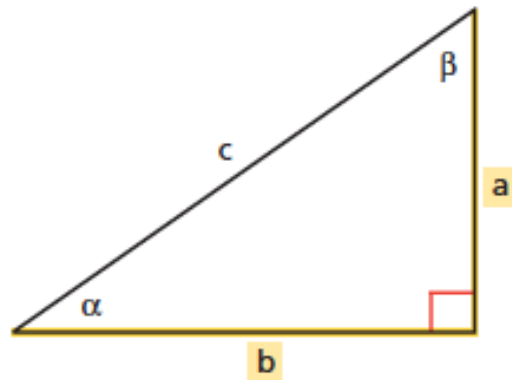
$$a = b \cdot \text{tg} \alpha \quad b = a \cdot \text{tg} \beta$$

Cateto=altro cateto x cotangente dell'angolo adiacente al cateto

$$a = b \cdot \cot g \beta \quad b = a \cdot \cot g \alpha$$



Sono noti due
cateti (a,b) ,
determinare
 (α, β, c)



$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$, da cui ricaviamo

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a}{b};$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha;$$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$, per il teorema di Pitagora.

ESEMPIO

Le misure dei due cateti del triangolo in figura sono $a = 40$ e $b = 110$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{40}{110} = 0,3\overline{6}, \quad \text{da cui}$$

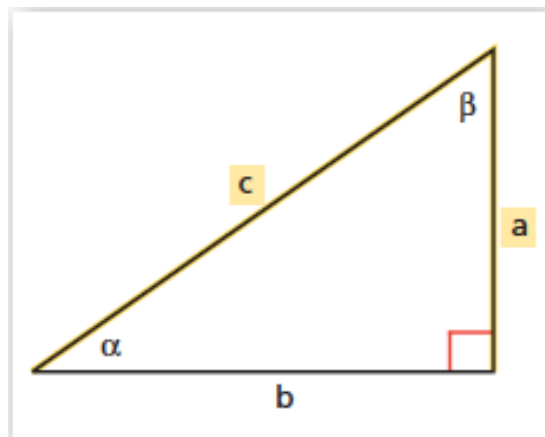
$\alpha \simeq 19^\circ 58' 59''$, che approssimiamo a 20° ,

$$\alpha \simeq 20^\circ \rightarrow \beta \simeq 90^\circ - 20^\circ \simeq 70^\circ.$$

$$c = \sqrt{40^2 + 110^2} = \sqrt{1600 + 12100} = \sqrt{13700} \simeq 117.$$

È possibile calcolare il valore di c anche senza applicare il teorema di Pitagora, ma ricavando c dalla formula: $a = c \sin \alpha$.

Sono noti due
cateti (a, c) ,
determinare
 (α, β, b)



$\sin \alpha = \frac{a}{c}$, da cui ricaviamo

$$\alpha = \arcsin \frac{a}{c};$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha;$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}, \text{ per il teorema di Pitagora.}$$

Si può ricavare b anche senza applicare il teorema di Pitagora, ma con:

$$b = c \cos \alpha \text{ o } b = c \sin \beta.$$

ESEMPIO

In un triangolo rettangolo le misure di un cateto e dell'ipotenusa sono $a = 21,13$ e $c = 50$.

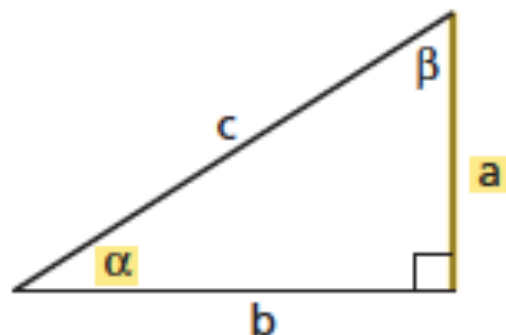
Ricaviamo:

$$\sin \alpha = \frac{21,13}{50} = 0,4226 \rightarrow \alpha \simeq 25^\circ;$$

$$\beta \simeq 90^\circ - 25^\circ \simeq 65^\circ;$$

$$b = \sqrt{50^2 - (21,13)^2} = \sqrt{2500 - 446,4769} = \sqrt{2053,5231} \simeq 45,3.$$

Sono noti un cateto
e un angolo acuto
(a, α), determinare
(β, b, c).



$$\beta = 90^\circ - \alpha;$$

$$b = a \operatorname{tg} \beta;$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

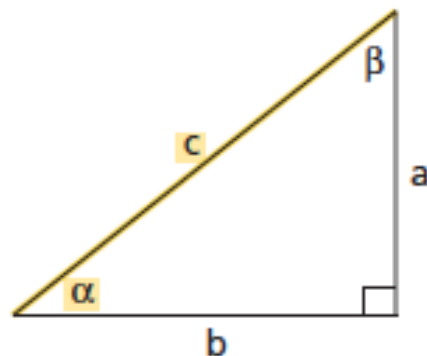
ESEMPIO

Consideriamo il triangolo rettangolo in cui sono noti $a = 8$ e $\alpha = 28^\circ$.
Si ricava:

$$\beta = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ; \quad b = 8 \operatorname{tg} 62^\circ \simeq 8 \cdot 1,88 \simeq 15;$$

$$c \simeq \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17.$$

Sono noti l'ipotenusa e un angolo acuto (c, α), determinare (β, a, b).



$$\beta = 90^\circ - \alpha;$$

$$a = c \sin \alpha;$$

$$b = c \sin \beta.$$

ESEMPIO

Consideriamo il triangolo rettangolo della figura a lato. Le misure dell'ipotenusa e dell'angolo sono rispettivamente $c = 28,3$ e $\alpha = 58^\circ$.

Si ricava:

$$\beta = 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ;$$

$$a = 28,3 \cdot \sin 58^\circ \simeq 28,3 \cdot 0,848 \simeq 24;$$

$$b = 28,3 \cdot \sin 32^\circ \simeq 28,3 \cdot 0,5299 \simeq 15.$$

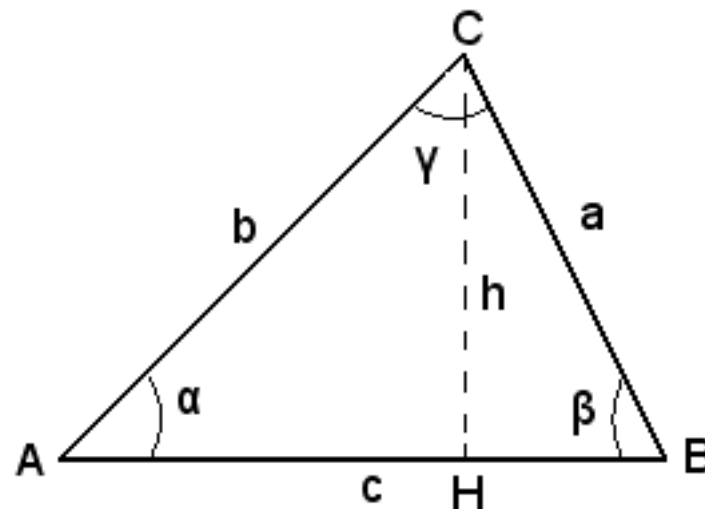
Area di un triangolo

➤ $\alpha < 90^\circ$ (angolo acuto)

$$A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} = \frac{cb \operatorname{sen} \alpha}{2}$$

dove: $\overline{CH} = b \operatorname{sen} \alpha$

(teorema triangolo rettangolo)

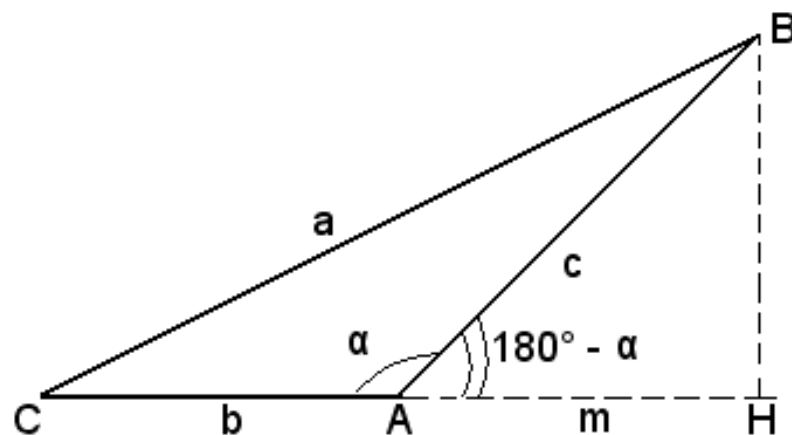


➤ $\alpha > 90^\circ$ (angolo ottuso)

$$A = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BH}}{2} = \frac{cb \operatorname{sen} \alpha}{2}$$

dove: $\overline{BH} = c \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = c \operatorname{sen} \alpha$

(teorema triangolo rettangolo)



teorema

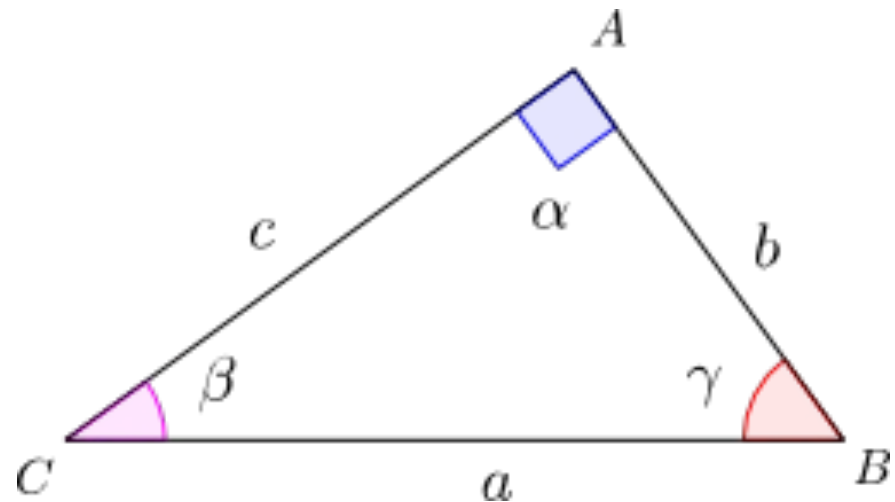
Area di un triangolo

La misura dell'area di un triangolo è uguale al semiprodotto delle misure di due lati e del seno dell'angolo tra di essi compreso:

$$A = \frac{bc \operatorname{sen} \alpha}{2}$$

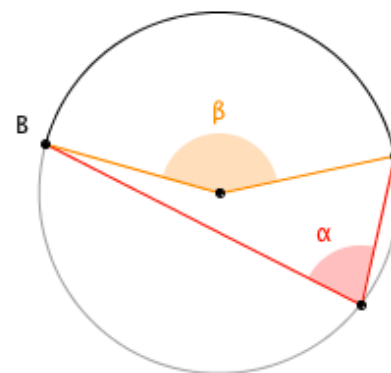
$$A = \frac{ab \operatorname{sen} \gamma}{2}$$

$$A = \frac{ac \operatorname{sen} \beta}{2}$$

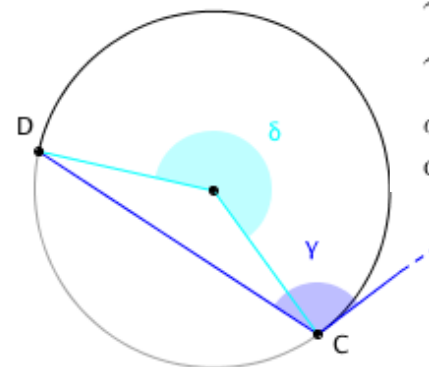


definizione

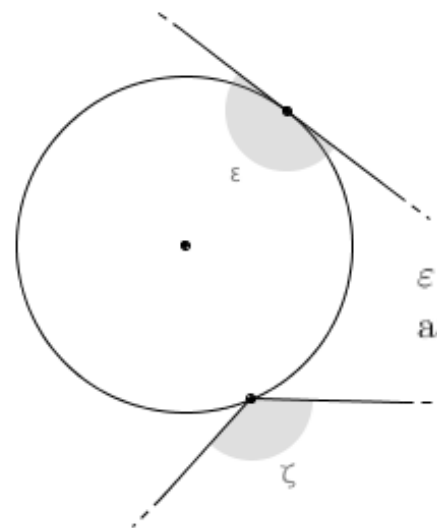
- Un angolo alla circonferenza è un angolo convesso che ha vertice sulla circonferenza considerata, e tale per cui i suoi lati sono entrambi secanti la circonferenza, oppure uno secante e l'altro tangente.
- Diremo che un angolo alla circonferenza insiste sull'arco che ha per estremi i punti di intersezione tra i lati dell'angolo e la circonferenza, ed è contenuto nell'angolo.
- Dato un angolo alla circonferenza, si dice angolo al centro corrispondente l'angolo che ha il vertice nel centro della circonferenza e che sottende l'arco su cui insiste l'angolo alla circonferenza.



α è un angolo alla circonferenza
 α insiste su $\widehat{AB}$
 β è l'angolo al centro
corrispondente ad α



γ è un angolo alla circonferenza
 γ insiste su $\widehat{CD}$
 δ è l'angolo al centro
corrispondente a γ



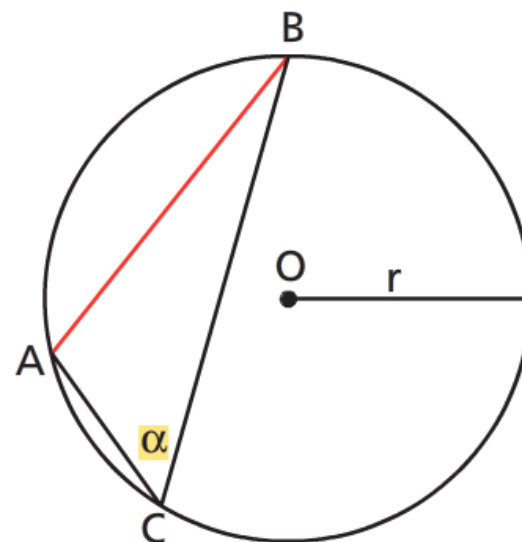
ϵ e ζ NON sono
angoli alla circonferenza

Teorema della corda

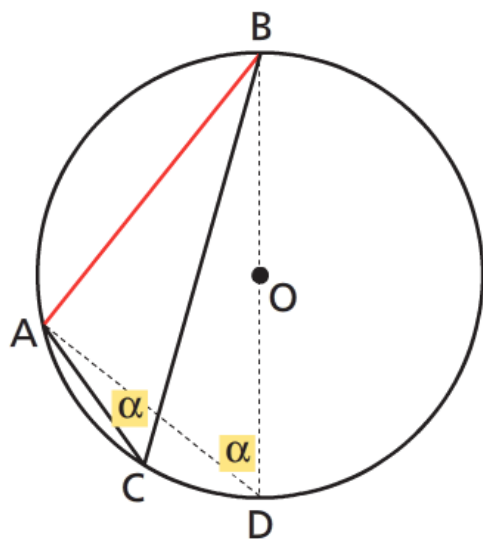
In una circonferenza la misura di una corda è uguale al prodotto della misura di diametro per il seno di uno degli angoli alla circonferenza che insistono sulla corda:

$$\overline{AB} = 2r \cdot \text{sen}\alpha$$

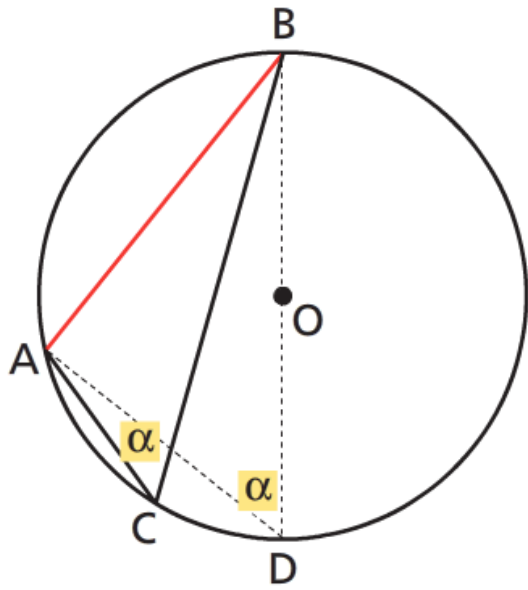
Teorema della corda



dimostrazione



Sia $\alpha = \angle ACB$ un qualsiasi angolo alla circonferenza che insista sulla corda AB e sull'arco minore AB. Dopo aver fatto la costruzione in figura, osserviamo che il triangolo ABD è rettangolo in A (perché inscritto in una semicirconferenza).



Inoltre, l'angolo α in D è uguale a quello α in C ($\triangle ADB \cong \triangle ACB$) perché sono due angoli che insistono sullo stesso arco AB.

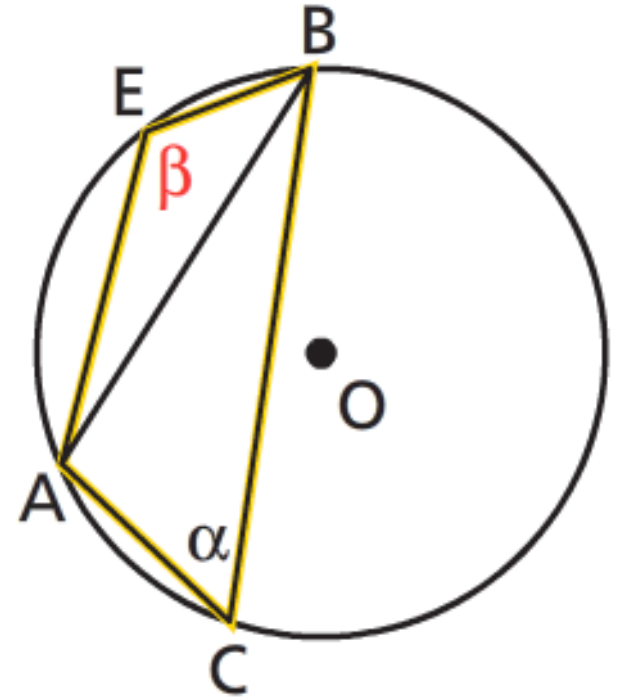
Applicando il teorema sul triangolo rettangolo, calcoliamo la misura della corda AB:

$$\overline{AB} = 2r \cdot \text{sen} \alpha$$

Come volevasi dimostrare.

Il teorema continua a valere anche se consideriamo l'angolo $AEB = \beta$ che insiste sull'arco maggiore AB.

Infatti, il quadrilatero AEBC, essendo inscritto in una circonferenza, ha gli angoli opposti supplementari. Quindi:



$$\alpha + \beta = \pi \Rightarrow \beta = \pi - \alpha \text{ e } \operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$$

ESERCIZIO GUIDA

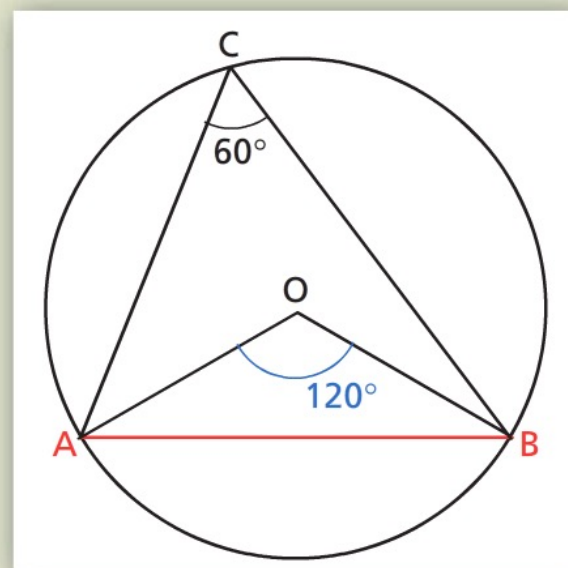
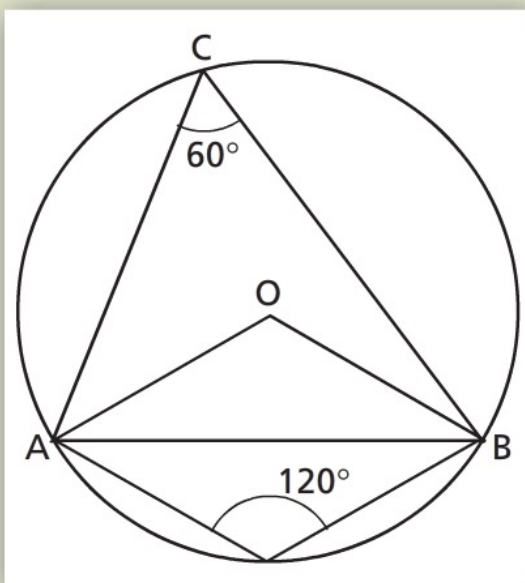
In una circonferenza il raggio è 20 cm. Calcoliamo la lunghezza di una sua corda, sapendo che l'angolo al centro che insiste su di essa ha ampiezza di 120° .

Se l'angolo al centro che insiste sulla corda è 120° , allora il corrispondente angolo alla circonferenza è $\alpha = 60^\circ$.

Per il teorema della corda è:

$$\overline{AB} = 2r \operatorname{sen} \alpha = 2 \cdot 20 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = \overset{20}{40} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\overset{2}{1}2} = 20\sqrt{3}.$$

La corda è lunga $20\sqrt{3}$ cm.



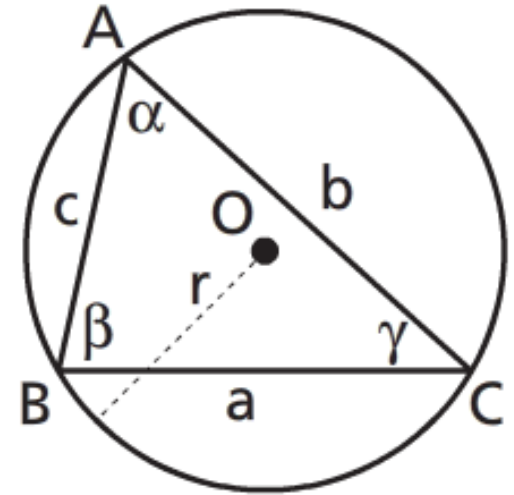
Osservazione. Sulla corda AB insistono angoli alla circonferenza di 60° e angoli alla circonferenza di 120° . La lunghezza della corda AB che calcoliamo non dipende dall'angolo scelto, perché

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \operatorname{sen} 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Raggio circonferenza circoscritta a un triangolo

Il triangolo ABC è inscritto in una circonferenza di raggio r .

Il teorema della corda permette di scrivere le seguenti relazioni:



$$a = 2r \cdot \text{sen}\alpha \quad b = 2r \cdot \text{sen}\beta \quad c = 2r \cdot \text{sen}\gamma$$

da cui possiamo ricavare il raggio r :

$$r = \frac{a}{2\text{sen}\alpha} \quad r = \frac{b}{2\text{sen}\beta} \quad r = \frac{c}{2\text{sen}\gamma}$$

Queste formule consentono di calcolare il raggio della circonferenza circoscritta a un triangolo conoscendo un lato del triangolo e l'angolo opposto ad esso.

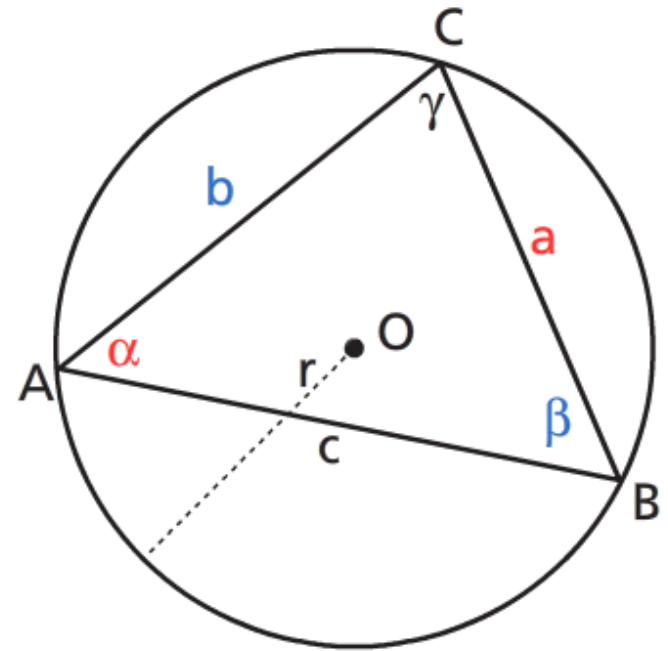
Esaminiamo le relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo qualunque.

Teorema dei seni

Teorema dei seni

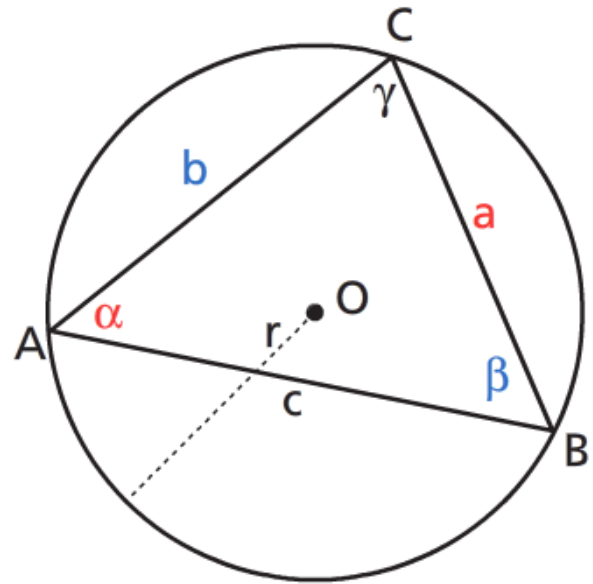
In un triangolo le misure dei lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti:

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma}$$



dimostrazione

Applichiamo il teorema della corda ai lati del triangolo ABC inscritto in una circonferenza di diametro $2r$:



$$a = 2r \cdot \text{sen}\alpha \Rightarrow 2r = \frac{a}{\text{sen}\alpha}$$

$$b = 2r \cdot \text{sen}\beta \Rightarrow 2r = \frac{b}{\text{sen}\beta}$$

$$c = 2r \cdot \text{sen}\gamma \Rightarrow 2r = \frac{c}{\text{sen}\gamma}$$

$$\xrightarrow{\text{DA CUI}} \frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma} = 2r$$

ESERCIZIO GUIDA

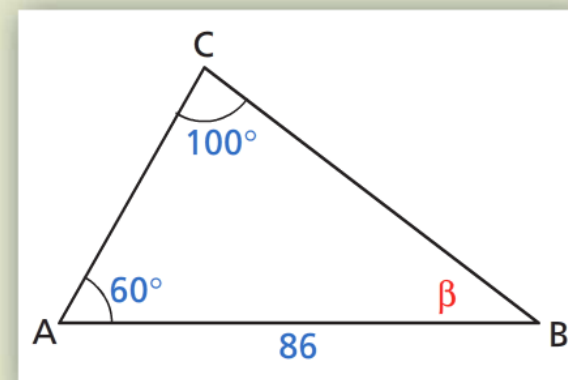
Utilizziamo gli elementi indicati nella figura per trovare l'angolo β e i lati CB e AC del triangolo.

$$\beta = 180^\circ - (100^\circ + 60^\circ) = 20^\circ.$$

Applichiamo il teorema dei seni per determinare CB e AC :

$$\frac{\overline{CB}}{\sin 60^\circ} = \frac{86}{\sin 100^\circ} \rightarrow \overline{CB} = \frac{86}{\sin 100^\circ} \cdot \sin 60^\circ \simeq 75,6.$$

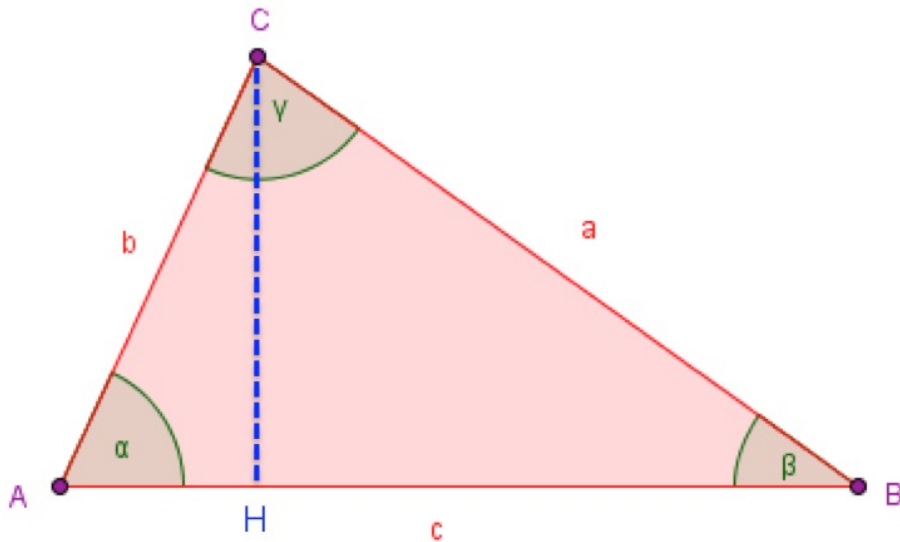
$$\frac{\overline{AC}}{\sin 20^\circ} = \frac{86}{\sin 100^\circ} \rightarrow \overline{AC} = \frac{86}{\sin 100^\circ} \cdot \sin 20^\circ \simeq 29,8.$$



Teorema del coseno

Teorema dei coseno

In un triangolo, il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati diminuita del doppio prodotto di questi due lati per il coseno dell'angolo fra essi compreso:



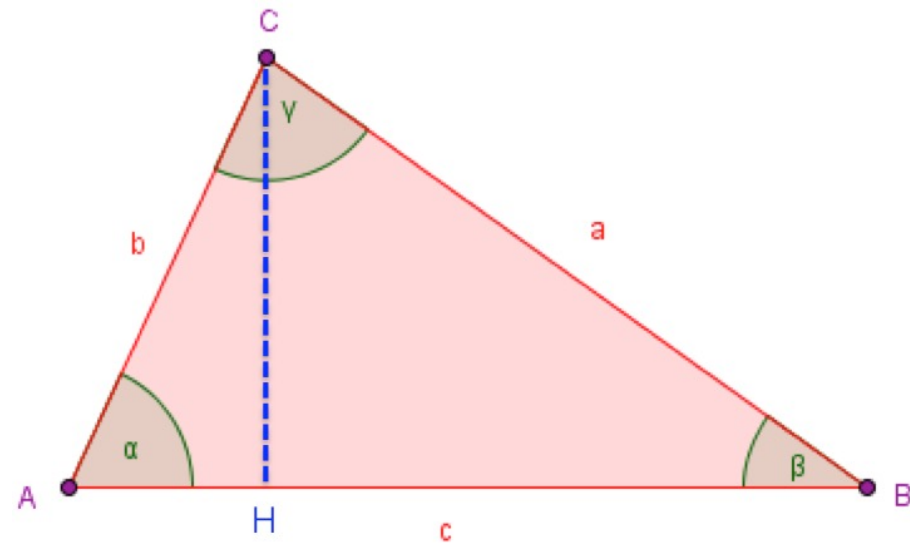
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

dimostrazione

Applichiamo al triangolo ACH il primo teorema dei triangoli rettangoli:



$$CH = b \operatorname{sen} \alpha \quad AH = b \cos \alpha \xrightarrow{\text{DA CUI}} HB = AB - AH = c - b \cos \alpha$$

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo CHB per determinare CB:

$$CB^2 = CH^2 + HB^2 = b^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + (c - b \cos \alpha)^2 \xrightarrow[\text{con } CB=a]{\text{calcoli}} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Analogamente per gli altri due lati:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

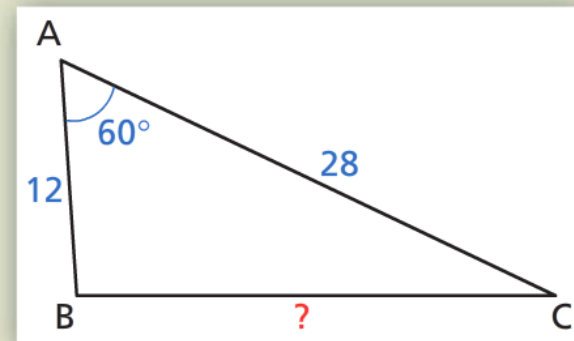
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo la misura del lato BC utilizzando gli elementi indicati nella figura.

Applichiamo il teorema del coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$. Si ha:

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cos \widehat{BAC} = \\ &= 12^2 + 28^2 - 2 \cdot 12 \cdot 28 \cos 60^\circ = \\ &= 144 + 784 - \cancel{2} \cdot 12 \cdot 28 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 592 \rightarrow \overline{BC} = \sqrt{592} \simeq 24,3.\end{aligned}$$



Risoluzione di un triangolo qualunque

Risolvere un triangolo qualunque significa determinare le misure dei suoi lati e dei suoi angoli. È sempre possibile risolvere un triangolo se sono noti *tre* suoi elementi, di cui *almeno uno sia un lato*.

Possiamo utilizzare il teorema dei seni e il teorema del coseno.

Esaminiamo i quattro possibili casi.

Sono noti un lato e due angoli

Conoscendo c , α e β , vogliamo determinare γ , a e b .

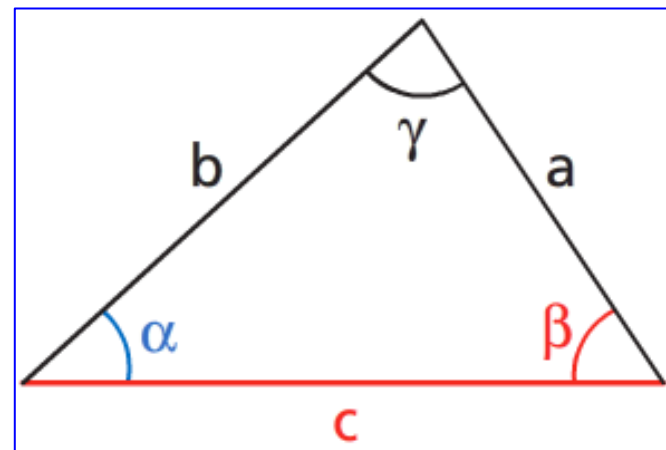
Determiniamo $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$.

Per il teorema dei seni:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \rightarrow a = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma}.$$

Ancora per il teorema dei seni:

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \rightarrow b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}.$$



ESEMPIO

Nel triangolo in figura a lato sono noti $c = 12$, $\alpha = 40^\circ$ e $\beta = 60^\circ$.
Ricaviamo γ :

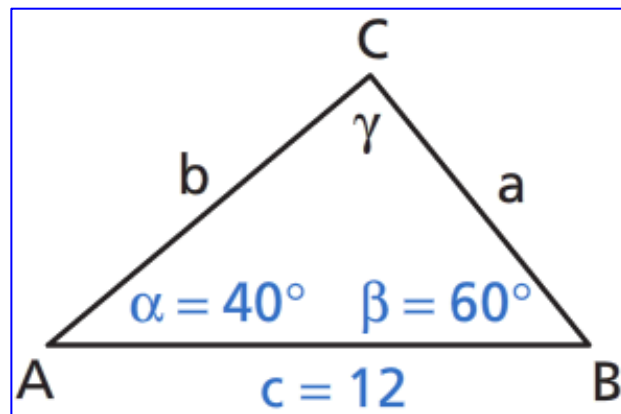
$$\gamma = 180^\circ - (40^\circ + 60^\circ) = 80^\circ.$$

Per il teorema dei seni, $\frac{a}{\sin 40^\circ} = \frac{12}{\sin 80^\circ}$, da cui:

$$a = \frac{12 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \simeq \frac{12 \cdot 0,64279}{0,9848} \simeq 7,83.$$

Ancora per il teorema dei seni, $\frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{12}{\sin 80^\circ}$, da cui:

$$b = \frac{12 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \simeq \frac{12 \cdot 0,866}{0,9848} \simeq 10,55.$$



ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo il triangolo ABC , sapendo che:

$$b = 4\sqrt{6}, \beta = 45^\circ, \gamma = 120^\circ.$$

Ricaviamo α per differenza:

$$\alpha = 180^\circ - (45^\circ + 120^\circ) = 15^\circ.$$

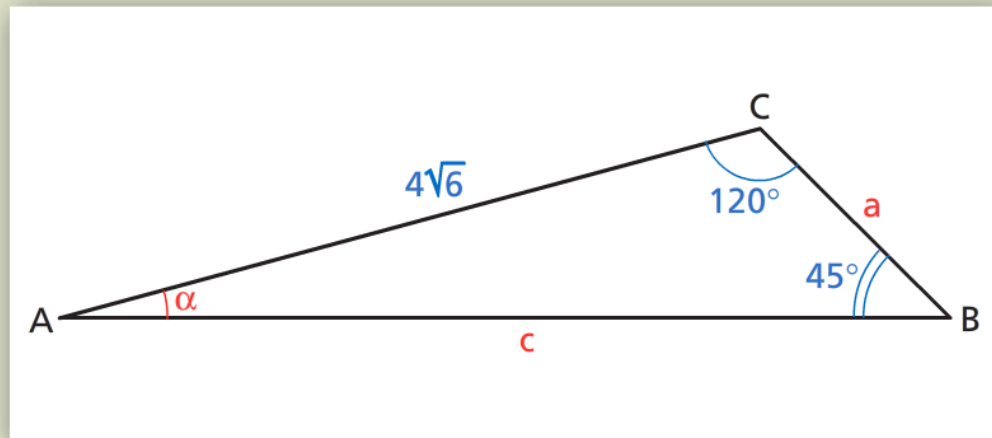
Applichiamo il teorema dei seni per calcolare c e a :

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta} \rightarrow c = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta};$$

$$c = \frac{4\sqrt{6} \sin 120^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{4\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 12;$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \rightarrow a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta};$$

$$a = \frac{4\sqrt{6} \sin 15^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\cancel{4}\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\cancel{4}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3} \cancel{\sqrt{6}} (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot 2}{\cancel{\sqrt{2}}_1} = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}.$$



Sono noti due lati e l'angolo fra essi compreso

Nel triangolo in figura a lato conosciamo b , c e α ; determiniamo β , γ e a .

Determiniamo a mediante il teorema del coseno:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}.$$

Applichiamo nuovamente il teorema del coseno per calcolare β :

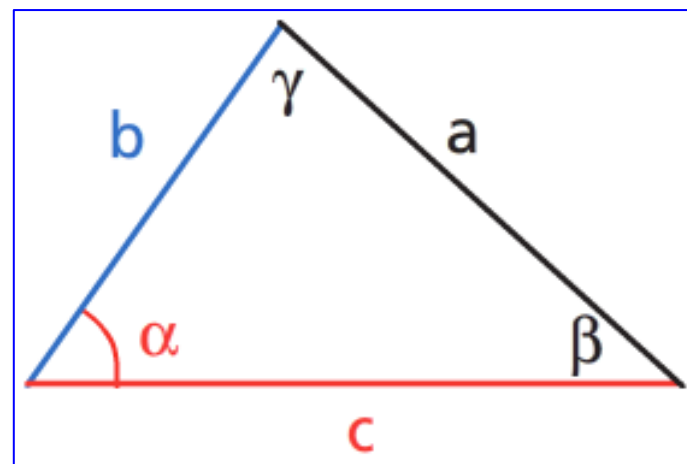
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \rightarrow 2ac \cos \beta = a^2 + c^2 - b^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Troviamo β con la funzione arcocoseno.

Infine determiniamo γ :

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta).$$



ESEMPIO

Del triangolo in figura a lato sono noti $b = 46$, $c = 62$ e $\alpha = 20^\circ$.

Applichiamo il teorema del coseno per calcolare a :

$$a = \sqrt{46^2 + 62^2 - 2 \cdot 46 \cdot 62 \cdot \cos 20^\circ}$$

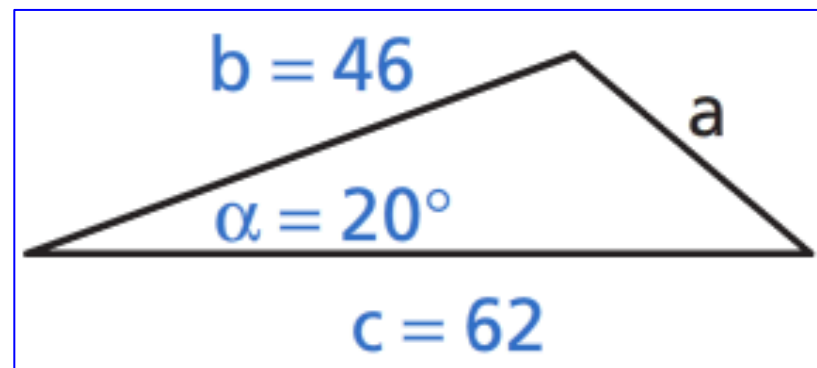
$$a \simeq \sqrt{2116 + 3844 - 5704 \cdot 0,93969} \simeq \sqrt{600,0082} \rightarrow a \simeq 24,50.$$

Applichiamo il teorema del coseno per calcolare β :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \rightarrow 46^2 = 24,5^2 + 62^2 - 2 \cdot 24,5 \cdot 62 \cdot \cos \beta,$$

$$\cos \beta \simeq 0,77 \rightarrow \beta \simeq 40^\circ.$$

$$\gamma \simeq 180^\circ - (20^\circ + 40^\circ) = 120^\circ.$$



ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo il triangolo ABC , sapendo che:

$$b = 12, c = 18, \alpha = 21^\circ.$$

Applicando il teorema del coseno, ricaviamo a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha;$$

$$a^2 = 12^2 + 18^2 - 2 \cdot 12 \cdot 18 \cos 21^\circ \simeq 64,69;$$

$$a \simeq 8,04.$$

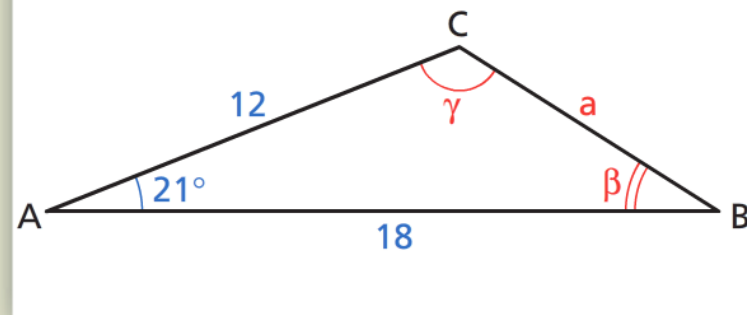
Ricaviamo β , applicando ancora il teorema del coseno:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \rightarrow \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$\cos \beta \simeq \frac{8,04^2 + 18^2 - 12^2}{2 \cdot 8,04 \cdot 18} \simeq 0,85 \rightarrow \beta \simeq 32^\circ.$$

Ricaviamo γ per differenza:

$$\gamma \simeq 180^\circ - (21^\circ + 32^\circ) = 127^\circ.$$



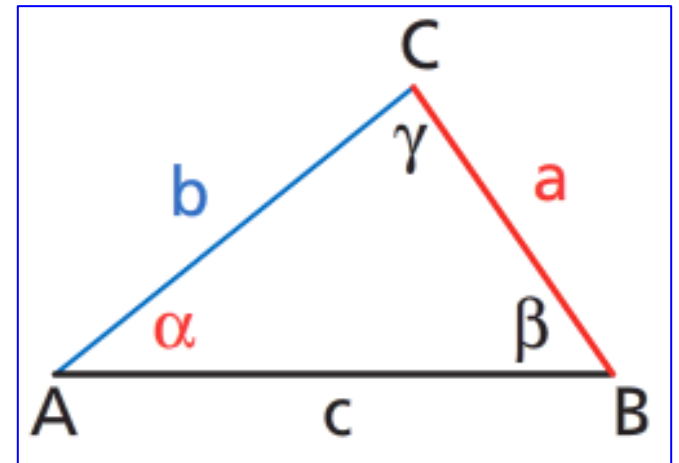
Sono noti due lati e un angolo opposto a uno di essi

Consideriamo il triangolo ABC e supponiamo noti a , b e α . Vogliamo conoscere β , γ e c .

Applichiamo il teorema dei seni al triangolo dato per calcolare β :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \quad \rightarrow \quad \sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha.$$

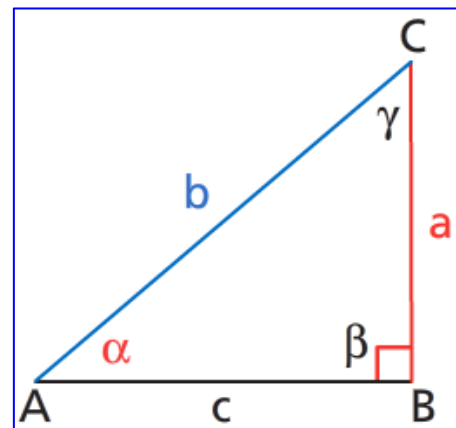
Esaminiamo i casi che si possono presentare a seconda del valore di $\sin \beta$, ricordando che deve risultare $0 < \sin \beta \leq 1$, altrimenti β non esiste.



1. $\sin \beta = 1 \rightarrow \beta = 90^\circ$.

Distinguiamo due casi:

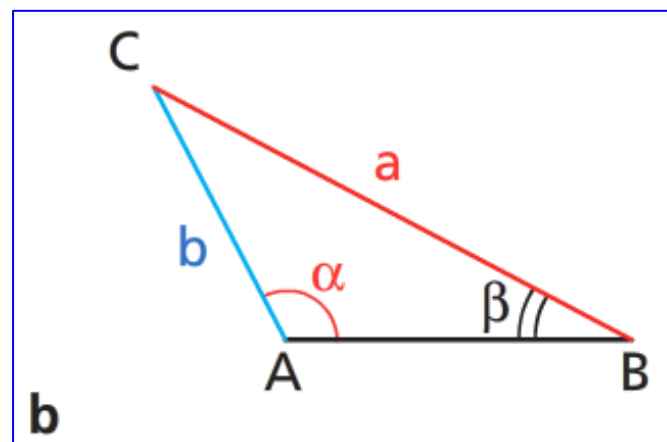
- se $\alpha \geq 90^\circ$, il problema non ha soluzioni;
- se $\alpha < 90^\circ$, il problema ammette una sola soluzione



2. $0 < \sin \beta < 1$: in questo caso si hanno due soluzioni, β_1 e β_2 , tra loro supplementari, per esempio β_1 acuto e β_2 ottuso.

Per sapere se questi valori sono accettabili, dobbiamo considerare α , a e b .

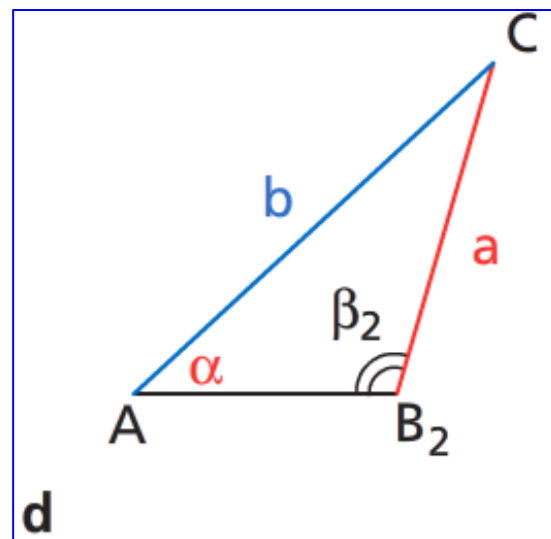
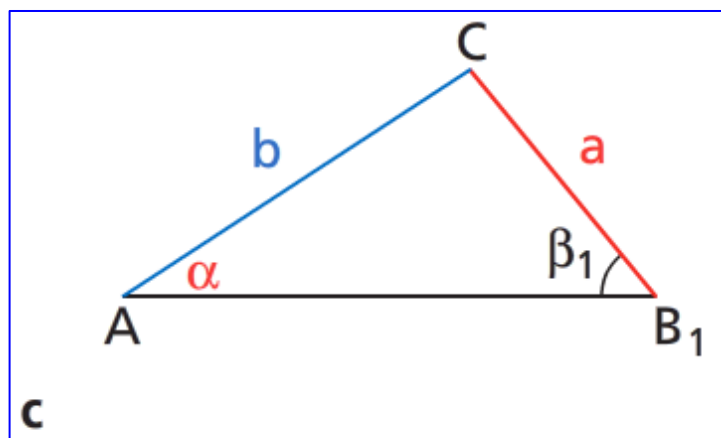
- Se $\alpha \geq 90^\circ$, la soluzione β_2 non è accettabile perché un triangolo non può avere due angoli ottusi. Accettiamo solo β_1 acuto; il problema ammette una sola soluzione (figura b).



- Se $\alpha < 90^\circ$ e $b > a$, allora, poiché a lato maggiore sta opposto angolo maggiore, è $\beta_1 > \alpha$ oppure $\beta_2 > \alpha$; entrambe le situazioni sono accettabili: il problema ammette due soluzioni (figure *c* e *d*).
- Se $\alpha < 90^\circ$ e $b < a$, allora $\beta < \alpha$, per cui β_2 , che è ottuso, non è accettabile e abbiamo per soluzione solo β_1 .

Per finire, dopo aver calcolato β , determiniamo $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ e poi calcoliamo la misura del terzo lato, applicando il teorema dei seni:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \rightarrow c = a \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}.$$



ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo un triangolo ABC , sapendo che:

- a) $b = 6\sqrt{2}$, $c = 12$, $\gamma = 45^\circ$;
- b) $b = 4\sqrt{2}$, $c = 4\sqrt{6}$, $\beta = 30^\circ$.

a) Ricaviamo β con il teorema dei seni:

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta},$$

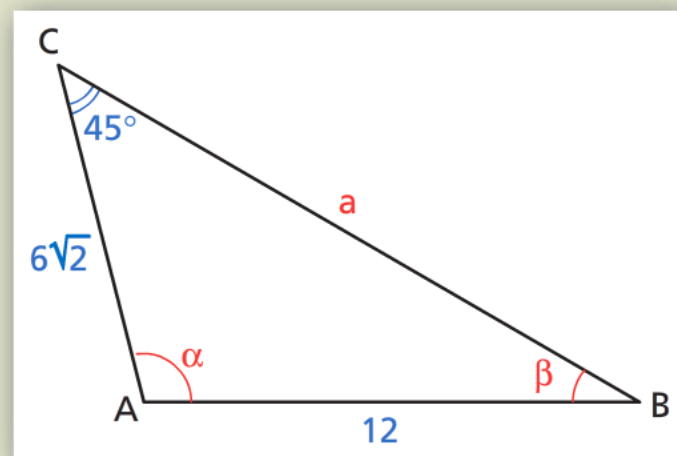
$$\frac{\cancel{12}^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\cancel{1}^1 \cancel{6} \sqrt{2}}{\sin \beta} \rightarrow \sin \beta = \frac{1}{2} \begin{cases} \beta_1 = 30^\circ \\ \beta_2 = 150^\circ \end{cases}$$

È accettabile solo il valore $\beta_1 = 30^\circ$, in quanto per $\beta_2 = 150^\circ$ si avrebbe $\beta + \gamma = 150^\circ + 45^\circ = 195^\circ > 180^\circ$.

Inoltre non sarebbe vero che ad angolo maggiore sta opposto lato maggiore: $6\sqrt{2}$, che è minore di 12, sarebbe opposto a 150° , che è maggiore di 45° .

Determiniamo α per differenza:

$$\alpha = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ.$$



Troviamo a con il teorema dei seni:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} \rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} 105^\circ} = \frac{6\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \rightarrow a \simeq 16,4.$$

b) Appliciamo il teorema dei seni:

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta},$$

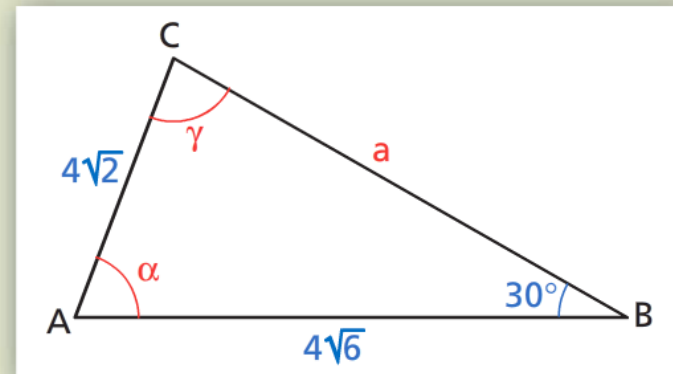
$$\frac{4\sqrt{6}}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{4\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \rightarrow \operatorname{sen} \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{cases} \gamma_1 = 60^\circ \\ \gamma_2 = 120^\circ \end{cases}$$

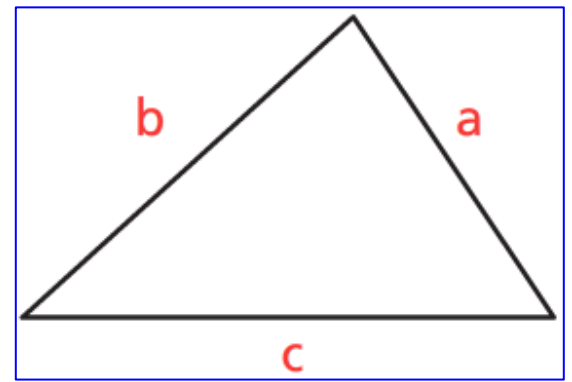
Entrambe le soluzioni sono accettabili.

- Se $\gamma = 60^\circ \rightarrow \alpha = 90^\circ$,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 90^\circ} = \frac{4\sqrt{2}}{\operatorname{sen} 30^\circ} \rightarrow a = 8\sqrt{2}.$$

- Se $\gamma = 120^\circ \rightarrow \alpha = 30^\circ$, il triangolo è isoscele, quindi $a = 4\sqrt{2}$.





Sono noti i tre lati

Conoscendo a , b e c (figura a lato), determiniamo α , β e γ .

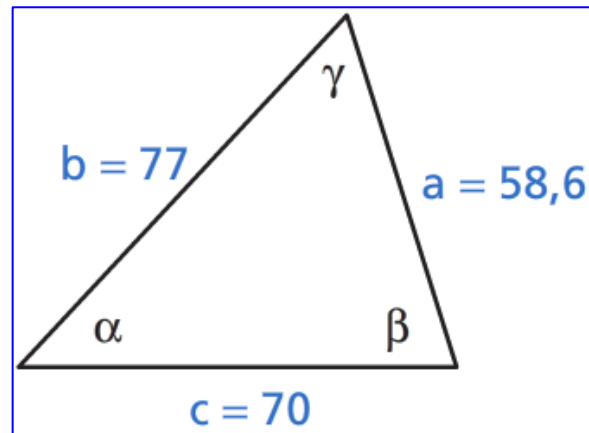
Ricaviamo α applicando il teorema del coseno:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \rightarrow 2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2 \rightarrow \\ \rightarrow \cos \alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \rightarrow \alpha = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \end{aligned}$$

Ricaviamo β allo stesso modo:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \rightarrow \beta = \arccos \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Ricaviamo γ per differenza: $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$.



ESEMPIO

Consideriamo il triangolo con $a = 58,6$, $b = 77$ e $c = 70$.

Ricaviamo α utilizzando il teorema del coseno:

$$\cos \alpha = \frac{(77)^2 + (70)^2 - (58,6)^2}{2 \cdot 70 \cdot 77} = \frac{5929 + 4900 - 3433,96}{10780}$$

$$\cos \alpha = \frac{7395,04}{10780} \rightarrow \cos \alpha \simeq 0,686 \rightarrow \alpha \simeq \arccos 0,686 \simeq 47^\circ.$$

Allo stesso modo:

$$\cos \beta = \frac{70^2 + 58,6^2 - 77^2}{2 \cdot 70 \cdot 58,6} \simeq 0,29 \rightarrow \beta \simeq \arccos 0,29 \simeq 73^\circ.$$

Ricaviamo, infine, γ per differenza: $\gamma \simeq 180^\circ - (47^\circ + 73^\circ) = 60^\circ$.

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo un triangolo ABC , sapendo che:

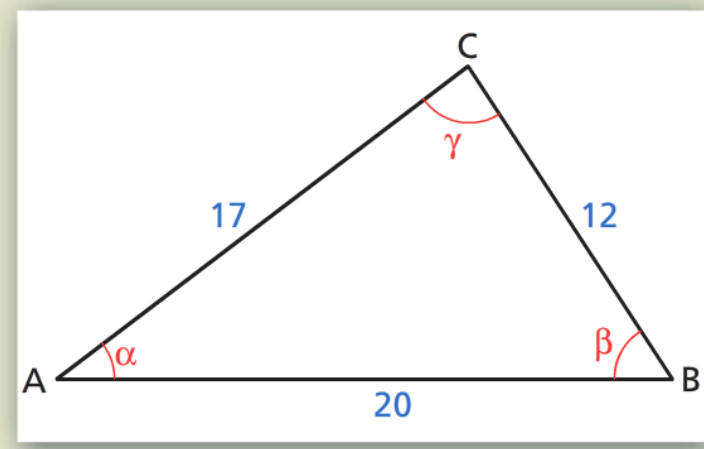
$$a = 12, b = 17, c = 20.$$

Applichiamo più volte il teorema del coseno:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{17^2 + 20^2 - 12^2}{2 \cdot 17 \cdot 20} \simeq 0,80 \rightarrow \alpha \simeq 36,72^\circ;$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{12^2 + 20^2 - 17^2}{2 \cdot 12 \cdot 20} \simeq 0,53 \rightarrow \beta \simeq 57,91^\circ;$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{12^2 + 17^2 - 20^2}{2 \cdot 12 \cdot 17} \simeq 0,08 \rightarrow \gamma \simeq 85,36^\circ.$$



PROBLEMI

E' dato il triangolo rettangolo ABC di cui si conosce il cateto $AB=2a$. Sia T il punto dell'ipotenusa BC tale che $BT \cong AB$. Determinare l'angolo ACB in modo che sia verificata la relazione:

$$(AC)^2 + 2(CT)^2 = 5(AB)^2$$

Indichiamo con x l'angolo $\widehat{ACB}$ (fig. 6), con $0^\circ < x < 90^\circ$; dai teoremi sul triangolo rettangolo si deduce che è

$$\overline{AC} = 2a \cotg x; \quad \overline{BC} = \frac{2a}{\sen x};$$

$$\overline{CT} = \frac{2a}{\sen x} - 2a = 2a \frac{1 - \sen x}{\sen x}.$$

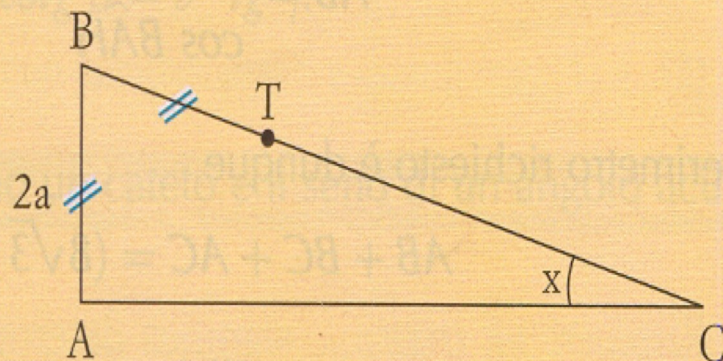


Figura 6

Sostituendo nella relazione data dal problema, si ottiene l'equazione

$$4a^2 \cotg^2 x + 2 \cdot 4a^2 \frac{(1 - \sen x)^2}{\sen^2 x} = 5 \cdot 4a^2 \rightarrow \frac{\cos^2 x}{\sen^2 x} + \frac{2(1 + \sen^2 x - 2 \sen x)}{\sen^2 x} = 5.$$

Risolvendo si ha

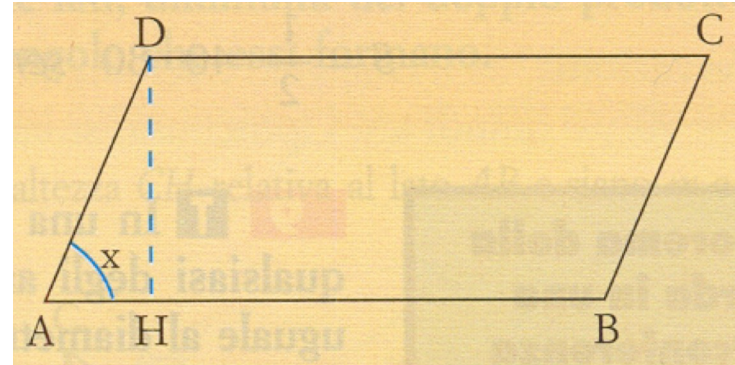
$$\begin{aligned} \cos^2 x + 2 \sin^2 x - 4 \sin x + 2 &= 5 \sin^2 x \rightarrow 4 \sin^2 x + 4 \sin x - 3 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \vee \sin x = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Solo la soluzione $\sin x = \frac{1}{2}$ è accettabile e, dovendo l'angolo $\widehat{ACB}$ essere acuto, dalla soluzione $\sin x = \frac{1}{2}$ si ricava $x = 30^\circ$.

Determinare l'angolo acuto di un parallelogramma ABCD di cui si conosce la base $AB=a$, l'altezza $DH=a/2$ e il perimetro $p=2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})a/2$.

Consideriamo il triangolo AHD di cui si conosce il cateto DH.

Si indichi l'angolo $BAD=x$ ($0^\circ < x < 90^\circ$) e si determini AD, ipotenusa del triangolo rettangolo AHD:



$$\overline{AD} = \frac{DH}{\sin x} = \frac{a}{2 \sin x}.$$

Dai dati del problema si ha

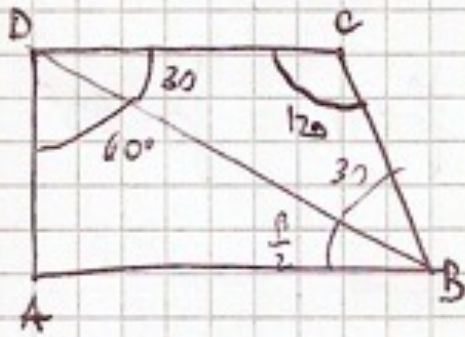
$$2(\overline{AB} + \overline{AD}) = 2 \frac{\sqrt{3}}{3} (1 + \sqrt{3})a \rightarrow \overline{AB} + \overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3} (1 + \sqrt{3})a \rightarrow$$

$$\rightarrow a + \frac{a}{2 \sin x} = \frac{\sqrt{3}}{3} (1 + \sqrt{3})a.$$

Risolvi l'equazione $1 + \frac{1}{2 \sin x} = \frac{\sqrt{3}}{3} (1 + \sqrt{3}) \rightarrow \frac{1}{2 \sin x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Si ricava così che, dovendo essere $0^\circ < x < 90^\circ$, è $x = 60^\circ$, cioè $\widehat{BAD} = 60^\circ$.

La base maggiore del trapezio rettangolo ABCD è $AB = 48$ cm ; la diagonale maggiore BD è lunga $32\sqrt{3}$ cm ed è bisettrice dell'angolo ABC. Determina gli angoli, il perimetro e l'area del trapezio.



$$AB = 48$$

$$BD = 32\sqrt{3} \text{ bis } \angle ABC$$

$$\hat{B}, \hat{C} = ?$$

$$\angle = ?$$

$$A = ?$$

$$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{(32\sqrt{3})^2 - 48^2} = 16\sqrt{3}$$

$$AB = BD \cos \beta \quad \cos \beta = \frac{AB}{BD} = \frac{48}{32\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\beta}{2} = 30^\circ, \quad \beta = 60^\circ$$

$$\hat{C} = 360 - 90 - 90 - 60 = 120^\circ$$

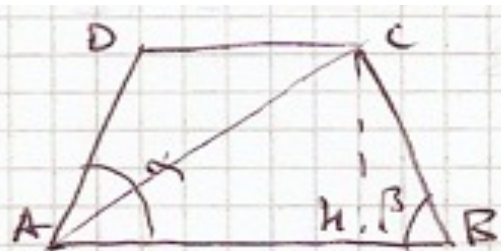
$$\frac{BD}{\sin 60^\circ} = \frac{DC}{\sin 30^\circ} \quad \frac{32\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x}{\frac{1}{2}}$$

$$32\sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2DC \quad DC = 32$$

$$2 \cdot 32 + 16\sqrt{3} + 48 = 112 + 16\sqrt{3} \quad Z_p = 16(7 + \sqrt{3})$$

$$A = \frac{(b+B)h}{2} = \frac{(48 + 32)16\sqrt{3}}{2} = 640\sqrt{3}$$

Determina gli angoli di un trapezio isoscele sapendo che la base maggiore è $AB = 14$, la base minore è $CD = 8$ e il rapporto fra il quadrato della diagonale e quadrato del lato obliquo è $37/9$.



$$AB = 14$$

$$CD = 8$$

$$\frac{AC^2}{AD^2} = \frac{37}{9}$$

$$HB = \frac{AB - CD}{2} = \frac{14 - 8}{2} = 3$$

$$AH = AB - HB$$

$$AH = 14 - 3 = 11$$

$$BC^2 = HB^2 + CH^2$$

$$CH = HB \operatorname{tg} \beta$$

$$CH = 3 \operatorname{tg} \beta$$

$$BC^2 = 3^2 + 3^2 \operatorname{tg}^2 \beta = 9(1 + \operatorname{tg}^2 \beta)$$

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 = 11^2 + 9 \operatorname{tg}^2 \beta = 121 + 9 \operatorname{tg}^2 \beta$$

$$\frac{121 + 9t_g^2\beta}{9(1+t_g^2\beta)} = \frac{37}{9}$$

$$121 + 9t_g^2\beta = 37(1+t_g^2\beta)$$

$$28t_g^2\beta = 84 \quad t_g^2\beta = 3, \quad t_g\beta = \sqrt{3} \quad \beta = \frac{2}{3}\pi$$

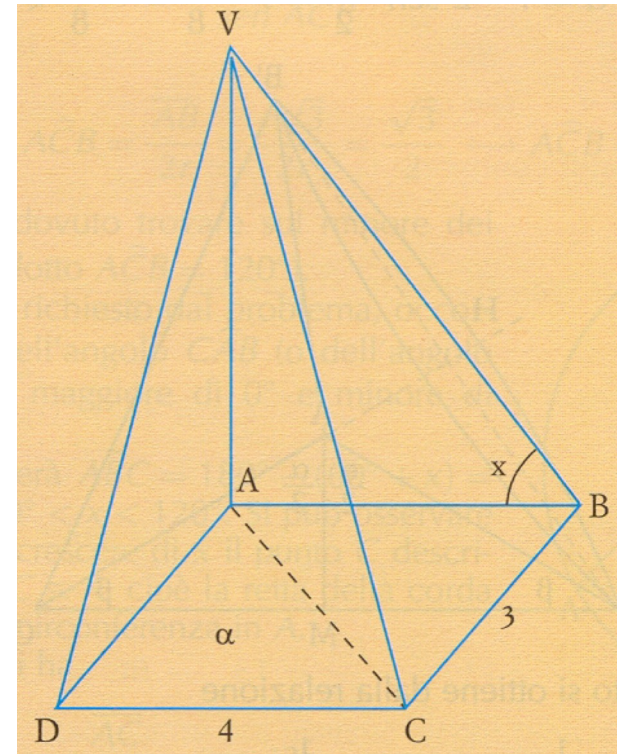
$$\alpha = \pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$$

Su un piano α è dato il rettangolo ABCD di lati $AB=4\text{cm}$ e $AD=3\text{cm}$. Dal punto A si innalzi la perpendicolare VA al piano α e si consideri la piramide VABCD. Determinare l'angolo x , che lo spigolo VB forma con il piano α , in modo che sia 242cm^2 la somma dei quadrati dei quattro spigoli VA, VB, VC, VD. In questo caso determinare la superficie totale e il volume della piramide.

Osserviamo la figura e ricordiamo che per angolo di una retta con un piano s'intende l'angolo che la retta forma con la sua proiezione sul piano.

Poiché la proiezione di VB sul piano α è AB, poniamo:

$$x = \angle VBA \quad \text{con } 0^\circ < x < 90^\circ$$

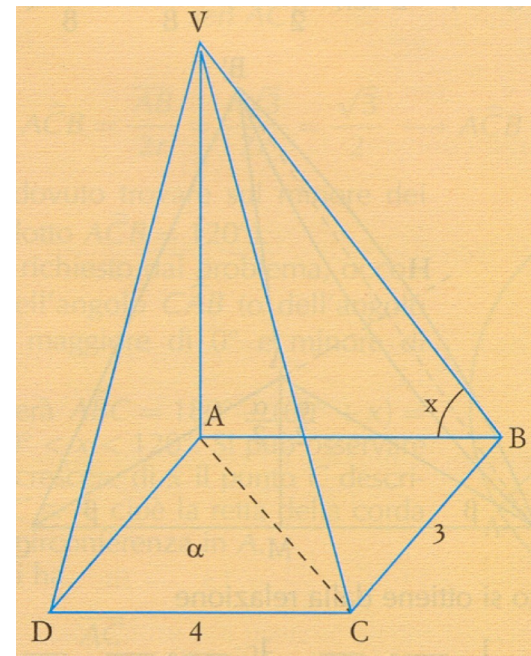


Dal triangolo VAB si ha:

$$VA = 4 \operatorname{tg} x \quad VB = \frac{4}{\cos x}$$

risulta poi:

$$AC = 5 \quad VC^2 = 16 \operatorname{tg}^2 x + 25 \quad VD^2 = 16 \operatorname{tg}^2 x + 9$$



e, quindi, la relazione del problema si traduce nell'equazione

$$16 \operatorname{tg}^2 x + \frac{16}{\cos^2 x} + 16 \operatorname{tg}^2 x + 25 + 16 \operatorname{tg}^2 x + 9 = 242;$$

quest'ultima equazione, dopo le opportune riduzioni, diviene

$$\operatorname{tg}^2 x = 3$$

da cui, dovendo essere $0^\circ < x < 90^\circ$, si ottiene la sola soluzione $\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \rightarrow x = 60^\circ$.

Sarà quindi $VA = 4\sqrt{3}$ cm e il volume della piramide risulterà

$$\frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 4\sqrt{3} \text{ cm}^3 = 16\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

Per calcolare poi la superficie totale della piamide occorrerà determinare la superficie delle singole facce laterali: per il *teorema delle tre perpendicolari* risulta $VB \perp BC$ e $VD \perp DC$ e quindi sarà

$$S_{VAB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{VA}; \quad S_{VAD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{VA}; \quad S_{VBC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{VB}; \quad S_{VCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{VD}.$$

La superficie totale della piramide è quindi, essendo $VB = \frac{4}{\cos 60^\circ} \text{ cm} = 8 \text{ cm}$ e

$$VD = \sqrt{16 \operatorname{tg}^2 60^\circ + 9} \text{ cm} = \sqrt{57} \text{ cm},$$

$$\begin{aligned} & \left(12 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{57} \right) \text{ cm}^2 = \\ & = (14\sqrt{3} + 2\sqrt{57} + 24) \text{ cm}^2 = 2 \cdot (7\sqrt{3} + \sqrt{57} + 12) \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Le applicazioni alla fisica

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo il lavoro che compie una forza costante di intensità pari a 25 N, inclinata di 60° rispetto a un piano orizzontale, agente su un corpo che viene spostato dalla forza su tale piano di 15 m.

Dati la forza $\vec{F}$ e lo spostamento $\vec{s}$, il lavoro L compiuto dalla forza è dato da

$$L = F' \cdot s,$$

dove F' è l'intensità della proiezione della forza lungo la direzione dello spostamento. F' è la misura di un cateto del triangolo rettangolo OAB , quindi

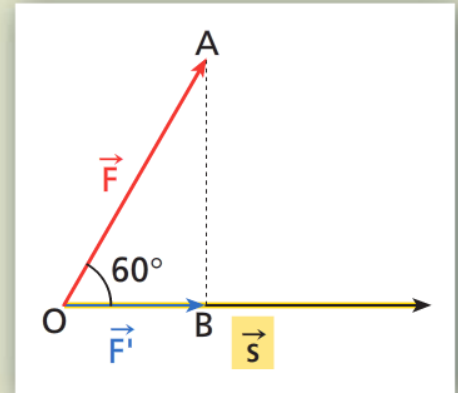
$$F' = \overline{OB} = \overline{OA} \cdot \cos \alpha = F \cdot \cos \alpha, \text{ da cui:}$$

$$L = F \cdot s \cdot \cos \alpha.$$

Applichiamo la formula precedente:

$$L = F \cdot s \cdot \cos \alpha = 25 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2} = 187,5.$$

Il lavoro è di 187,5 J.

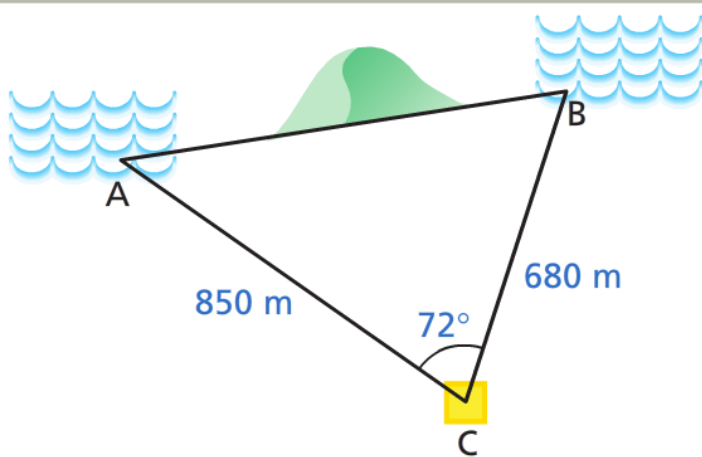


Altre applicazioni alla realtà

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo la distanza fra due laghi separati da una collina. Scegliamo come punto di riferimento un monastero che dista dai due laghi rispettivamente 850 m e 680 m. Inoltre, le direzioni in cui dal monastero si vedono i due laghi formano un angolo di 72° .

Indichiamo i due laghi con A e B e il monastero con C .



Applichiamo il teorema del coseno al triangolo ABC e otteniamo:

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma} = \\ &= \sqrt{850^2 + 680^2 - 2 \cdot 850 \cdot 680 \cdot \cos 72^\circ} \simeq \\ &\simeq \sqrt{827\,676} \simeq 909,77.\end{aligned}$$

La distanza fra i laghi è di circa 909,77 m.

ESERCIZIO GUIDA

Scriviamo l'equazione cartesiana della curva definita dalle seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \\ y = 2 \operatorname{cotg} t \end{cases}$$

Per eliminare il parametro t , cerchiamo di utilizzare la relazione $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$.
Nella prima equazione ricaviamo $\operatorname{sen} t$:

$$x = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \rightarrow \operatorname{sen} t = \frac{1}{x}.$$

Per ricavare $\cos t$, dividiamo membro a membro le due equazioni:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \cdot \frac{1}{2 \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{2 \cos t} \rightarrow \cos t = \frac{y}{2x}.$$

Sostituiamo le espressioni di $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$ in $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4x^2} = 1 \rightarrow 4 + y^2 = 4x^2 \rightarrow 4x^2 - y^2 = 4 \rightarrow x^2 - \frac{y^2}{4} = 1.$$

L'equazione ottenuta è quella di un'iperbole.