

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo
MATERIA: Matematica

TRIGONOMETRIA verso l'Esame di Stato



ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione straordinaria

■ **PROBLEMA 2**

In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{1 + a \operatorname{sen} x}{\cos x},$$

dove a è un parametro reale.

- a) Dimostrare che si tratta di curve periodiche con periodo 2π , che hanno in comune infiniti punti dei quali si chiedono le coordinate.
- b) Tra le curve assegnate determinare quelle che hanno come tangente orizzontale la retta di equazione $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- c) Controllato che due curve soddisfano alla condizione precedente, dimostrare che sono l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse y e disegnarle nell'intervallo $-\pi \leq x \leq \pi$, dopo aver spiegato, in particolare, perché nessuna di esse presenta punti di flesso.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME

CORSO DI ORDINAMENTO • 2004

Sessione straordinaria

PROBLEMA 2

a) Posto $f_a(x) = \frac{1 + a \sin x}{\cos x}$, essa può essere scritta come $f_a(x) = \frac{1}{\cos x} + a \operatorname{tg} x$. La periodicità della funzione coseno è 2π , cosicché $\frac{1}{\cos x}$ è periodica di periodo $T_1 = 2\pi$; $\operatorname{tg} x$ ha periodicità π per cui il periodo di $a \operatorname{tg} x$ è $T_2 = \pi$. La funzione f_a è somma di funzioni periodiche: essa è allora periodica di periodo $T = \text{m.c.m.}(T_1, T_2)$ cioè $T = 2\pi$.

Presi due valori arbitrari di a , a_1 e a_2 con $a_1 \neq a_2$, e le corrispondenti funzioni f_{a_1} e f_{a_2} , i loro punti comuni soddisfano l'equazione $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x)$, cioè:

$$\frac{1}{\cos x} + a_1 \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} + a_2 \operatorname{tg} x \quad \rightarrow \quad (a_1 - a_2) \operatorname{tg} x = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{tg} x = 0 \quad \rightarrow \quad x = k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Le coordinate di tali punti sono: $(2k\pi; 1)$ e $((2k+1)\pi; -1)$.

Vista l'arbitrarietà di a_1 e a_2 si può concludere che le curve $f_a(x) = \frac{1 + a \sin x}{\cos x}$ hanno in comune infiniti punti di coordinate $(2k\pi; 1)$ e $((2k+1)\pi; -1)$.

b) La funzione $y = \frac{1 + a \sin x}{\cos x}$ ha campo di esistenza C.E.: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ e derivata prima:

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO • 2004

- 8** La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, i *radianti*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO • 2004

- 8** Il grado sessagesimale è la 360^{a} parte dell'angolo giro; il radiante è l'angolo al centro del cerchio goniometrico che insiste su un arco di lunghezza unitaria; il grado centesimale è la 400^{a} parte dell'angolo giro.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione suppletiva

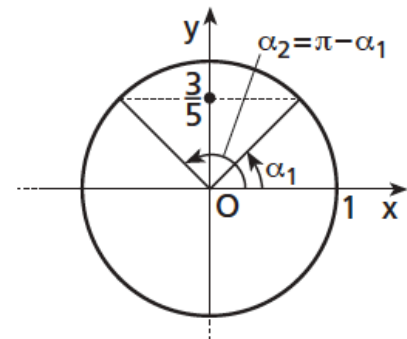
10 Di triangoli non congruenti, di cui un lato è lungo 10 cm e i due angoli interni adiacenti ad esso, α e β , sono tali che $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ e $\sin \beta = \frac{24}{25}$, ne esistono:

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione suppletiva

10 La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale ad un angolo piatto, quindi deve essere $0 < \alpha + \beta < \pi$. La conoscenza di $\sin \alpha$ e di $\sin \beta$ non determina univocamente gli angoli α e β . Dato un numero positivo x ci sono 2 angoli minori di π il cui seno vale x , che sono un angolo acuto ed il suo supplementare ottuso. Infatti come mostrato in figura 11, l'equazione $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ha due soluzioni: $\alpha_1 = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \approx 0,65$ e $\alpha_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \approx 2,5$; analogamente l'equazione $\sin \beta = \frac{24}{25}$ ha due soluzioni: $\beta_1 = \arcsin\left(\frac{24}{25}\right) \approx 1,29$ e $\beta_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{24}{25}\right) \approx 1,86$.



▲ **Figura 11.**

Verifichiamo quali e quante coppie di angoli soddisfano la relazione $0 < \alpha + \beta < \pi$, escludendo subito la combinazione $\alpha_2 + \beta_2$ perché un triangolo non può avere 2 angoli ottusi.

Essendo
$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 0,65 + 1,29 = 1,94 < \pi \\ \alpha_1 + \beta_2 = 0,65 + 1,86 = 2,51 < \pi \\ \alpha_2 + \beta_1 = 2,5 + 1,29 = 3,79 > \pi \end{cases}$$
, si ottengono le combinazioni possibili, che sono due. Quindi

esiste un solo triangolo con un lato di 10 cm ed angoli adiacenti $\alpha = \alpha_1$ e $\beta = \beta_1$ entrambi acuti, ed un solo triangolo ottusangolo con lato di 10 cm e angoli adiacenti $\alpha = \alpha_1$ e $\beta = \beta_2$. La risposta è quindi la C) perché esistono due triangoli non congruenti che soddisfano le ipotesi del quesito.

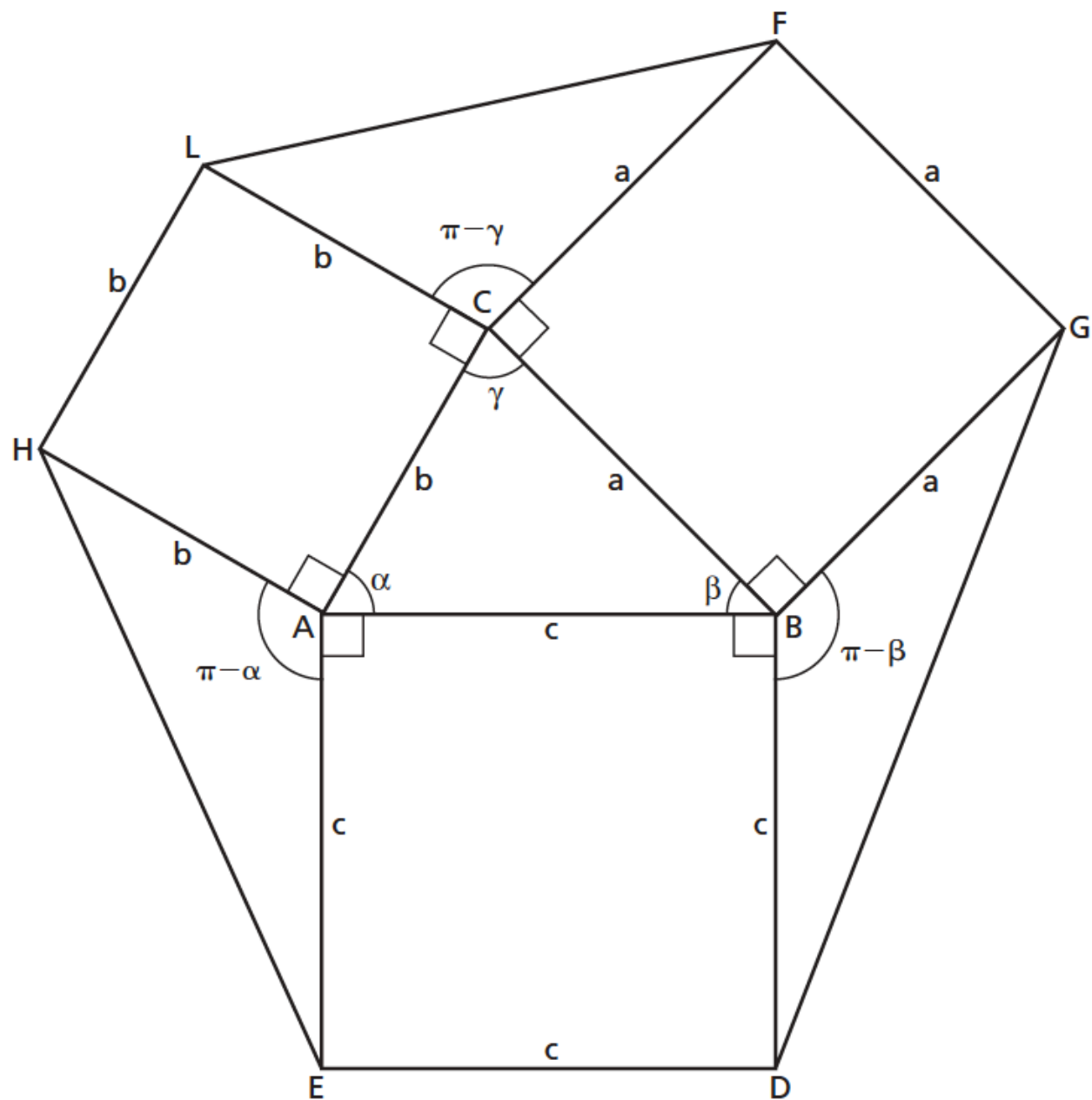
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione straordinaria

- 2** Sia ABC un qualsiasi triangolo. Sui suoi lati ed esternamente a esso si costruiscano i tre quadrati $ABDE$, $BCFG$ e $CAHL$. Dimostrare, con il metodo preferito, che i triangoli AHE , BDG e CFL sono equivalenti al triangolo ABC .

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione straordinaria

2

Il triangolo ABC e la costruzione richiesta dal testo del quesito sono riportati nella figura 7.



◀ Figura 7.

2

Il triangolo ABC e la costruzione richiesta dal testo del quesito sono riportati nella figura

Gli angoli $\widehat{LCF}$ e $\widehat{ACB}$ sono supplementari. Posto $\widehat{ACB} = \gamma$, risulta quindi $\widehat{LCF} = \pi - \gamma$. Analogamente $\widehat{HAE} = \pi - \widehat{CAE} = \pi - \alpha$ e $\widehat{DBG} = \pi - \widehat{ABC} = \pi - \beta$. Calcoliamo le aree dei triangoli mediante la relativa formula trigonometrica:

$$S_{LCF} = \frac{1}{2} ab \sin(\pi - \gamma) = \frac{1}{2} ab \sin \gamma;$$

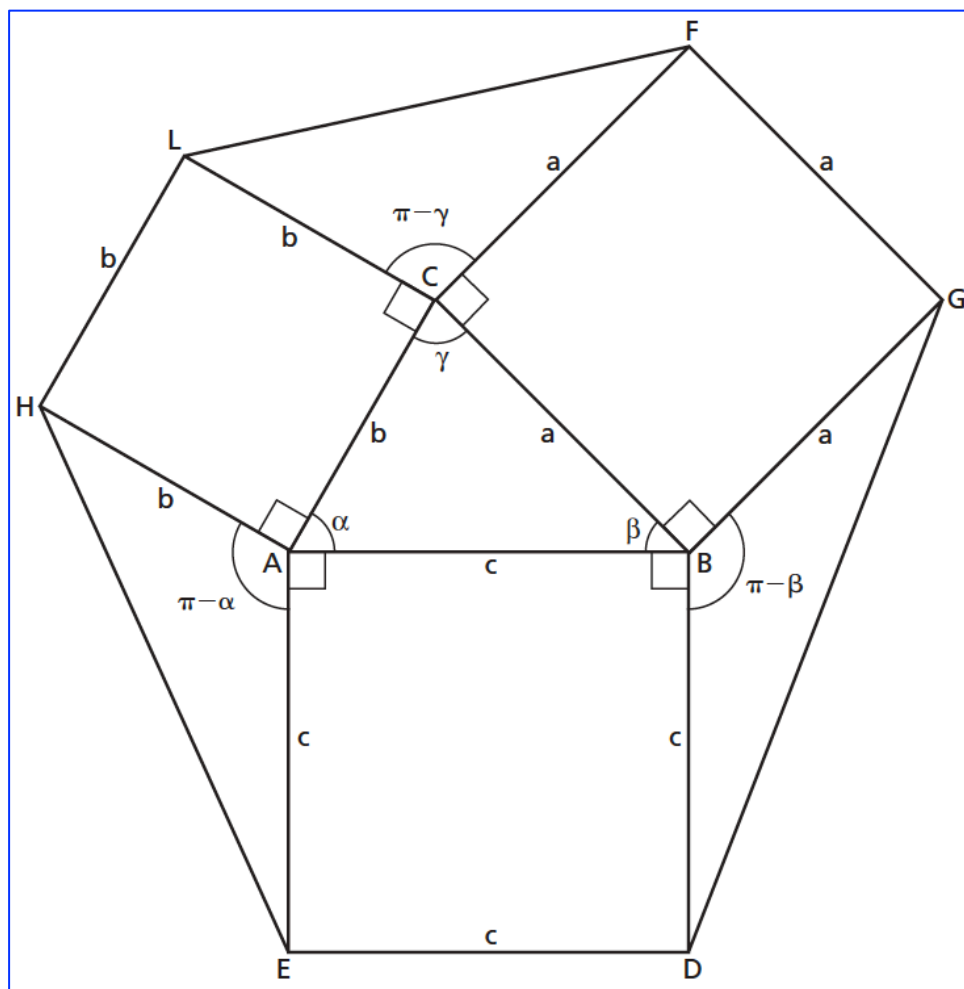
$$S_{HAE} = \frac{1}{2} bc \sin(\pi - \alpha) = \frac{1}{2} bc \sin \alpha;$$

$$S_{BDG} = \frac{1}{2} ac \sin(\pi - \beta) = \frac{1}{2} ac \sin \beta;$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{1}{2} ab \sin \gamma.$$

Quindi, confrontando, otteniamo:

$$S_{ABC} = S_{LCF} = S_{HAE} = S_{BDG}.$$



ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO • 2005

9 Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di:

$$\operatorname{sen}^2(35^\circ) + \operatorname{sen}^2(55^\circ)$$

ove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO 2005

9 Tenendo conto delle relazioni

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos (90^\circ - \alpha) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\text{risulta } \operatorname{sen}^2 35^\circ + \operatorname{sen}^2 55^\circ = \operatorname{sen}^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ = 1.$$

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione straordinaria

- 4** Dimostrare che ogni funzione del tipo $y = a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c\cos^2 x$, dove a, b, c sono numeri reali non contemporaneamente nulli, ha di regola per grafico una sinusoide. C'è qualche eccezione?

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione straordinaria

- 4** Una funzione sinusoidale ha espressione $y = A\sin(\omega x + \varphi)$, con A e $\omega \neq 0$, dove $|A|$ è detta ampiezza, ω pulsazione e φ fase iniziale. Utilizzando le formule goniometriche del seno della somma di due angoli, essa può essere scritta come:

$$y = A\sin(\omega x + \varphi) \rightarrow y = A\cos \varphi \cdot \sin \omega x + A\sin \varphi \cdot \cos \omega x.$$

Si consideri ora la funzione $y = a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos^2 x$. Si compiano le seguenti sostituzioni, che derivano dalle formule di duplicazione:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \operatorname{sen} x \cos x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}.$$

La funzione diventa:

$$y = a \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{b}{2} \operatorname{sen} 2x + c \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{b}{2} \operatorname{sen} 2x + \left(\frac{c}{2} - \frac{a}{2} \right) \cdot \cos 2x + \frac{a}{2} + \frac{c}{2}.$$

Se $a = c \neq 0$ e $b = 0$ la funzione è:

$$y = \frac{a + c}{2} = a,$$

quindi il suo grafico è una retta parallela all'asse x e non una sinusoide.

Se $a \neq c$, confrontiamo l'espressione della funzione ottenuta con l'espressione della funzione sinusoidale. Otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + \frac{c}{2} = 0 \\ \frac{b}{2} = A \cos \varphi \\ \frac{c}{2} - \frac{a}{2} = A \sin \varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -c \\ A \cos \varphi = \frac{b}{2} \\ A \sin \varphi = c \end{cases}$$

Eleviamo al quadrato ambo i membri della seconda e della terza equazione:

$$A^2 \cos^2 \varphi = \frac{b^2}{4}$$

$$A^2 \sin^2 \varphi = c^2$$

Sommiamo membro a membro e raccogliamo A^2 :

$$A^2(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = c^2 + \frac{b^2}{4} \quad \rightarrow \quad A = \pm \sqrt{c^2 + \frac{b^2}{4}}.$$

Consideriamo ancora la seconda e terza equazione e dividiamo membro a membro:

$$\frac{A \sin \varphi}{A \cos \varphi} = \frac{2c}{b} \quad \text{con } b \neq 0.$$

Pertanto la funzione di partenza, $y = a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos^2 x$, è sinusoidale se $a = -c$, con $a, c \neq 0, b \neq 0$ e ha forma $y = A \operatorname{sen}(\omega x + \varphi)$, con ampiezza $|A| = \sqrt{c^2 + \frac{b^2}{4}}$, pulsazione $\omega = 2$ e fase iniziale $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2c}{b}$.

Se $a = -c \neq 0, b = 0$, la funzione si riduce alla forma: $y = c \cos 2x \rightarrow y = c \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$, con $|A| = |c|$, $\omega = 2$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$ quindi essa è ancora sinusoidale.

Si può allora concludere che per a e c diversi da zero e $a \neq -c$, la funzione non è sinusoidale. Ugualmente,

- per $b = c = 0$ l'equazione si riduce a $y = \operatorname{sen}^2 x$ non sinusoidale;
- per $a = b = 0$ l'equazione si riduce a $y = \cos^2 x$ non sinusoidale.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione suppletiva

- 3** Alberto e Gianna sono chiamati a risolvere la seguente equazione: $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$. Alberto ottiene come soluzione gli angoli x tali che: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ oppure $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$ (k intero qualsiasi); Gianna trova la seguente soluzione: $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$ (k intero qualsiasi).
- È vero o è falso che Alberto ha risolto correttamente e Gianna no? Fornire una risposta esauriente.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione suppletiva

3 Utilizzando la formula di duplicazione, l'equazione $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ è equivalente all'equazione $\sin 2x = \frac{1}{2}$ che ha soluzioni:

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5}{12}\pi + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

La risposta di Alberto è quindi esatta.

Le soluzioni fornite da Gianna, $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k \frac{\pi}{2}$, possono essere scritte diversamente distinguendo se k è pari o dispari, nel seguente modo:

- per k pari, cioè $k = 2k'$ ($k' \in \mathbb{Z}$), $x = \frac{\pi}{12} + 2k' \frac{\pi}{2}$ ovvero $x = \frac{\pi}{12} + k'\pi$;
- per k dispari, cioè $k = 2k' + 1$ ($k' \in \mathbb{Z}$), $x = -\frac{\pi}{12} + (2k' + 1) \frac{\pi}{2}$ ovvero $x = \frac{5}{12}\pi + k'\pi$.

Pertanto la soluzione data da Gianna è esatta ed è equivalente a quella fornita da Alberto.

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2006**

- 6** L'equazione risolvente un dato problema è: $k\cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15^\circ < x < 45^\circ$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione suppletiva

3 Utilizzando la formula di duplicazione, l'equazione $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ è equivalente all'equazione $\sin 2x = \frac{1}{2}$ che ha soluzioni:

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5}{12}\pi + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

La risposta di Alberto è quindi esatta.

Le soluzioni fornite da Gianna, $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k \frac{\pi}{2}$, possono essere scritte diversamente distinguendo se k è pari o dispari, nel seguente modo:

- per k pari, cioè $k = 2k'$ ($k' \in \mathbb{Z}$), $x = \frac{\pi}{12} + 2k' \frac{\pi}{2}$ ovvero $x = \frac{\pi}{12} + k'\pi$;
- per k dispari, cioè $k = 2k' + 1$ ($k' \in \mathbb{Z}$), $x = -\frac{\pi}{12} + (2k' + 1) \frac{\pi}{2}$ ovvero $x = \frac{5}{12}\pi + k'\pi$.

Pertanto la soluzione data da Gianna è esatta ed è equivalente a quella fornita da Alberto.

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2003**

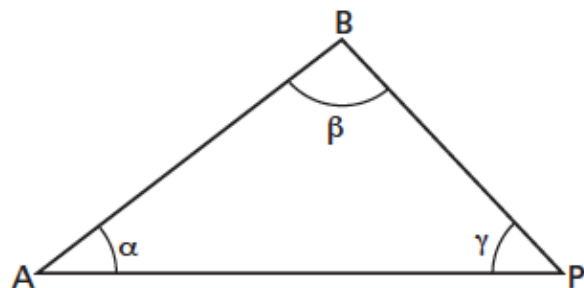
3

Dal punto A , al quale è possibile accedere, è visibile il punto B , al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire una misura diretta della distanza AB . Dal punto A si può però accedere al punto P , dal quale, oltre ad A , è visibile B in modo che, pur rimanendo impossibile misurare direttamente la distanza PB , è tuttavia possibile misurare la distanza AP . Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che P non è allineato con A e B , spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza AB .

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO • 2003

- 3** Con riferimento alla figura 9 si misura direttamente la distanza AP , quindi si misurano con un goniometro gli angoli α e γ , posti nei vertici A e P ai quali è possibile accedere e dai quali è visibile anche B . Si ricava indirettamente l'angolo β posto nel vertice B : $\beta = \pi - \alpha - \gamma$.

Per il teorema dei seni: $\frac{\overline{AB}}{\text{sen } \gamma} = \frac{\overline{AP}}{\text{sen } \beta} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{\overline{AP} \cdot \text{sen } \gamma}{\text{sen } \beta}$.



◀ Figura 9.

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004**

- 7** Un triangolo ha due lati e l'angolo da essi compreso che misurano rispettivamente a , b e γ . Quale è il valore di γ che massimizza l'area del triangolo?

**SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004**

- 7** L'area di un triangolo qualunque è uguale alla metà del prodotto di due lati per il seno dell'angolo tra essi compreso, ovvero $A = \frac{1}{2} ab \sin \delta$; tale area sarà massima quando $\sin \delta = 1$ e cioè quando $\delta = \frac{\pi}{2}$.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione suppletiva

■ **PROBLEMA 2**

Una piramide ha per base il quadrato $ABCD$ di lato lungo 7 cm. Anche l'altezza VH della piramide è lunga 7 cm e il suo piede H è il punto medio del lato AB . Condurre per la retta AB il piano α che formi con il piano della base della piramide un angolo φ tale che $\cos \varphi = \frac{3}{5}$ e indicare con EF la corda che il piano α intercetta sulla faccia VCD della piramide.

- a) Spiegare perché il quadrilatero convesso $ABEF$ è inscritto in una circonferenza γ .
- b) Tale quadrilatero è anche circoscrittibile a una circonferenza?
- c) Calcolare i volumi delle due parti in cui la piramide data è divisa dal piano α .
- d) Dopo aver riferito il piano α a un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), determinare l'equazione della circonferenza γ .

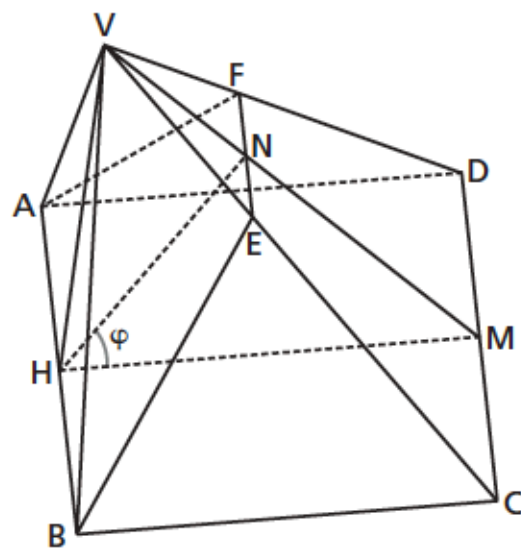
SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione suppletiva

PROBLEMA 2

a) Costruiamo la piramide e conduciamo per la retta AB il piano α . La retta CD non interseca il piano α e quindi nemmeno la retta EF (intersezione di α col piano della faccia CDV), perciò $CD \parallel EF$. Per ipotesi $CD \parallel AB$, quindi la corda EF è parallela anche ad AB : pertanto il quadrangolo convesso $ABEF$ è un trapezio.

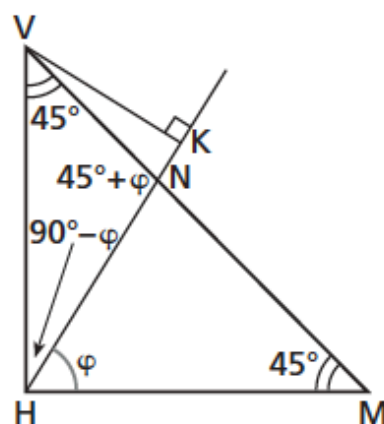
Per ipotesi la faccia AVB è un triangolo isoscele (l'altezza VH è mediana della base AB), quindi $VA \equiv VB$. Per il primo criterio di congruenza le facce ADV e BCV sono triangoli rettangoli congruenti ($AD \equiv BC$ per ipotesi, $VA \equiv VB$, $DA \perp VA$, $BC \perp VB$ per il teorema delle tre perpendicolari) e anche la faccia CDV è un triangolo isoscele. Poiché EF è parallela a CD allora $VE \equiv VF$, quindi,

per il primo criterio di congruenza, il triangolo AFV è congruente al triangolo BEV , da cui $AF \equiv BE$. Il trapezio $ABEF$ è dunque isoscele e quindi inscrittibile in una circonferenza (un quadrangolo convesso con angoli opposti supplementari è inscrittibile in una circonferenza).



▲ **Figura 5.**

b) Condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia circoscrivibile a una circonferenza è che siano uguali le somme delle coppie di lati opposti. Nel nostro caso dobbiamo verificare se $\overline{AB} + \overline{EF} = \overline{AF} + \overline{BE}$. Per determinare $\overline{EF}$ si osserva che i triangoli $\triangle VEF$ e $\triangle VDC$ sono simili; una volta determinato il rapporto di similitudine $\frac{\overline{VN}}{\overline{VM}}$ si può calcolare anche $\overline{EF}$. Studiamo quindi il triangolo $\triangle VHM$, riportato per comodità in figura 6: è un triangolo rettangolo isoscele, quindi $\widehat{HVM} = \widehat{HNM} = 45^\circ$. Si ha poi $\widehat{VHN} = 90^\circ - \varphi$ e $\widehat{VNH} = 45^\circ + \varphi$.



▲ **Figura 6.**

Applichiamo il teorema dei seni al triangolo $\triangle VHN$:

$$\frac{\overline{VN}}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{\overline{VH}}{\sin(45^\circ - \varphi)}$$

da cui si ricava:

$$\overline{VN} = \frac{7 \cos \varphi}{\sin 45^\circ \cos \varphi + \cos 45^\circ \sin \varphi}.$$

Poiché per ipotesi $\cos \varphi = \frac{3}{5}$, si ha $\sin \varphi = \frac{4}{5}$, quindi:

$$\overline{VN} = \frac{7 \cdot \frac{3}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{21}{7 \frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{2}.$$

Essendo $\overline{VM} = 7\sqrt{2}$, il rapporto di similitudine $\frac{\overline{VN}}{\overline{VM}}$ è allora $\frac{3}{7}$, pertanto $\overline{EF} = \frac{3}{7} \overline{CD} = 3 \text{ cm}$.

Calcoliamo infine $\overline{NH}$ mediante il teorema di Carnot:

$$NH = \sqrt{VN^2 + VH^2 - 2VN \cdot VH \cdot \cos \hat{V}} = 5 \text{ cm.}$$

Affinché la relazione $\overline{AB} + \overline{EF} = \overline{AF} + \overline{BE}$ sia vera, dovrebbe essere $\overline{AF} = \frac{\overline{AB} + \overline{EF}}{2} = 5 \text{ cm}$. Ma, ricordando che $\overline{AF}$ è un lato obliquo del trapezio isoscele $ABEF$ e che l'altezza del trapezio è $\overline{NH} = 5 \text{ cm}$, deve essere $\overline{AF} > 5 \text{ cm}$, quindi la relazione $\overline{AB} + \overline{EF} = \overline{AF} + \overline{BE}$ è falsa e il trapezio $ABEF$ non è circoscrivibile a una circonferenza.

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005**

- 1** Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare $\sin 18^\circ$, $\sin 36^\circ$.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME

CORSO DI ORDINAMENTO 2005

1 Consideriamo il triangolo OAB , in cui O è il centro della circonferenza circoscritta al decagono e AB un suo lato. $\widehat{AOB} = 36^\circ$ perché è un decimo dell'angolo giro. Essendo poi il triangolo isoscele si ha che $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 72^\circ$. Tracciamo ora la bisettrice di $\widehat{OAB}$, che interseca il lato OB in M . Si ha che sia il triangolo OMA che il triangolo AMB sono isosceli, quindi $OM = AB$. Indicato con r il raggio della circonferenza e con x il lato del decagono, per il teorema della bisettrice si ha che,

$$\frac{x}{r} = \frac{(r-x)}{x}$$

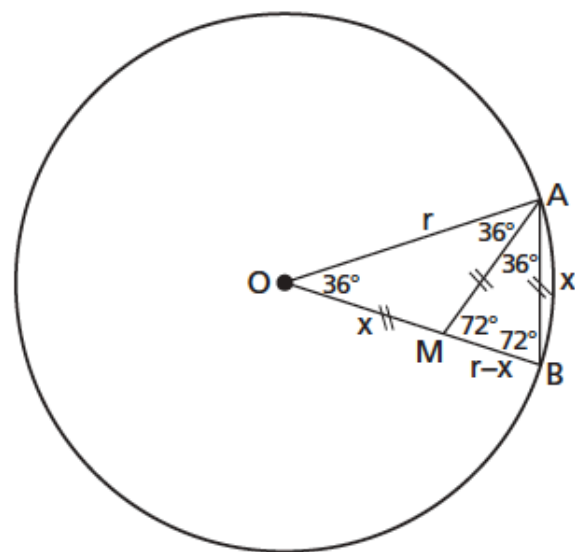
L'uguaglianza scritta è equivalente a $r:x = x:(r-x)$, quindi x è la misura della sezione aurea del segmento di misura r .

Risolvendo rispetto a x e scartando la soluzione negativa si ottiene $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r$.

Tracciamo l'asse di AB . Detto P il punto medio di AB si ha che $OA \cdot \sin 18^\circ = AP$, quindi $\sin 18^\circ = AP/OA = \frac{x/2}{r} = \frac{(-1 + \sqrt{5})}{4}$. Per calcolare $\sin 36^\circ$ si può ricorrere alla formula $\sin 2a = 2 \sin a \cos a =$

$= 2 \sin a \sqrt{1 - \sin^2 a}$ perché in questo caso $0^\circ < a < 90^\circ$. Sostituendo si ha

$$\sin 36^\circ = 2 \frac{(\sqrt{5}-1)}{4} \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{1}{8}(\sqrt{5}-1) \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{1}{4} \sqrt{10 - 4\sqrt{5}}.$$



▲ **Figura 4.**