

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo
MATERIA: Matematica

IL CALCOLO DELLE PROBABILITA'



“Il concetto di **probabilità** è il più importante della scienza moderna, perché nessuno ha la più pallida idea del suo significato”
(Bertrand Russell)

E' più probabile trovare vita superiore nello spazio o vita intelligente sulla Terra?
(mia)

Possiamo definire il **calcolo delle probabilità** come la teoria matematica dell'incertezza.

DEFINIZIONE

Un **evento** è un avvenimento, descritto da una proposizione, che può verificarsi oppure non verificarsi.

esempio

La proposizione: “Lancio un dado ed esce 9”.

E' un **evento impossibile**: non può mai verificarsi.

La proposizione: “Dopo lunedì viene martedì”.

E' un **evento certo**: si verifica con certezza.

La proposizione: “Se lancio un dado esce sei?”.

E' un **evento aleatorio**: il verificarsi dipende dal caso, ossia può accadere ma senza certezza.

Gli eventi aleatori possono essere considerati come possibili risultati di un esperimento dall'esito casuale, chiamato **esperimento aleatorio**. Ogni singolo risultato possibile si chiama **evento elementare** o **campione**. L'insieme di tutti gli eventi elementari si chiama **universo degli eventi** o **spazio campionario**.

esempio

Nel lancio di un dado, i seguenti eventi sono elementari:

$$E_1=\text{esce } 1 \quad E_2=\text{esce } 2 \quad \dots \quad E_6=\text{esce } 6$$

L'insieme universo degli eventi è: $U=\{1,2,3,4,5,6\}$

esempio

L'evento: E ="nel lancio di un dado esce un numero minore di 3", è l'insieme costituito dagli eventi E_1 e E_2 .

LA CONCEZIONE CLASSICA DELLA PROBABILITA'

Nel lancio di un dado consideriamo il seguente evento aleatorio:

$E = \text{“esce un numero dispari”}$

L'insieme universo $U=\{1,2,3,4,5,6\}$ rappresenta l'insieme dei **casi possibili**, mentre il sottoinsieme $E=\{1,3,5\}$ rappresenta l'insieme dei **casi favorevoli**.

Supponendo che tutti i casi siano equiprobabili, la probabilità che si verifichi l'evento E è pari a:

$$p(E) = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

DEFINIZIONE

La probabilità di un evento E è il rapporto fra il numero dei casi favorevoli f e quello dei casi possibili u , quando sono tutti equiprobabili.

The diagram illustrates the formula for probability, $p(E) = \frac{f}{u}$. A red line points from the text "probabilità di E" to the expression $p(E)$. A black line points from the text "numero dei casi favorevoli" to the numerator f . Another black line points from the text "numero dei casi possibili" to the denominator u . The words "favorevoli" and "possibili" are highlighted in red in the original image.

$$p(E) = \frac{f}{u}$$

Poiché $f \leq u$, la probabilità di un evento aleatorio è sempre:

$$0 \leq p(E) \leq 1$$

Per un evento impossibile $f=0$, per cui:

$$p(E) = 0$$

Per un evento certo $f=u$, per cui:

$$p(E) = 1$$

Dato un evento E , il suo **evento contrario** $\bar{E}$ è l'evento che si verifica se e solo se non si verifica E , ossia:

$$p(\bar{E}) = \frac{u-f}{u} = 1 - \frac{f}{u} = 1 - p(E)$$

$$p(\bar{E}) = 1 - p(E) \Rightarrow p(E) + p(\bar{E}) = 1$$

Dato un mazzo di 52 carte, calcolare la probabilità che si verifichino i seguenti eventi:

E_1 = “estrazione di una figura rossa”

E_2 = “estrazione di una carta di picche”

Per entrambi gli eventi i casi possibili sono $u=52$, cioè il numero del mazzo di carte.

Per E_1 i casi favorevoli sono $f=6$, cioè il numero delle figure rosse, mentre per E_2 i casi favorevoli sono $f=13$, cioè il numero delle carte di picche.

Pertanto, la probabilità che si verifichi E_1 ed E_2 è:

$$P(E_1) = \frac{6}{52} \cong 0,12 = 12\%$$

$$P(E_2) = \frac{13}{52} = 0,25 = 25\%$$

ESERCIZIO GUIDA

Un'urna contiene dieci palline numerate da 1 a 10. Calcoliamo la probabilità che, estraendo una pallina:

- a) essa abbia il numero 5;
- b) essa abbia un numero divisibile per 4;
- c) essa non abbia un numero divisibile per 4.

Poiché l'urna contiene 10 palline e ne viene estratta una sola, il numero dei casi possibili è 10.

- a) Nell'urna vi è una sola pallina con il numero 5. La probabilità è: $p = \frac{1}{10}$.
- b) Nell'urna vi sono due numeri divisibili per 4: $\{4, 8\}$. La probabilità è: $p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.
- c) L'evento è quello contrario del punto precedente: $p = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

esempio

Un'urna contiene dieci palline numerate da 1 a 10. Calcoliamo la probabilità che: a) estraendo consecutivamente 2 palline, rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna, si abbiano due numeri primi; b) estraendo consecutivamente 3 palline, non rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna, si abbiano due numeri primi e un numero non primo; c) estraendo contemporaneamente 3 palline, esse siano 2 palline con un numero inferiore a 5 e una con un numero maggiore o uguale a 5.

soluzione

- a) I casi possibili sono tutti i modi in cui possono presentarsi due dei dieci numeri, anche ripetuti in quanto dopo ogni estrazione la pallina viene rimessa nell'urna e quindi può essere estratta di nuovo.

Pertanto si ha: $D'_{10,2} = 10^2 = 100$.

I casi favorevoli sono tutti i modi in cui possono presentarsi, anche con ripetizione, due dei quattro numeri primi $\{2, 3, 5, 7\}$. Pertanto $D'_{4,2} = 4^2 = 16$.

La probabilità è: $p = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$.

- b) I casi possibili sono tutti i modi in cui possono presentarsi tre dei dieci numeri, ma ogni numero può presentarsi una sola volta in quanto non viene rimesso nell'urna. Pertanto $D_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

I casi favorevoli sono tutti i gruppi formati da due numeri primi e un numero non primo e occorre tenere conto di tutti i possibili modi in cui si possono presentare. Perciò $D_{4,2} \cdot D_{6,1} \cdot P_3^{(2)} = (4 \cdot 3) \cdot 6 \cdot 3 = 216$.

La probabilità è: $p = \frac{216}{720} = \frac{3}{10}$.

- c) I casi possibili sono tutti i modi in cui si possono estrarre tre palline, e, essendo l'estrazione contemporanea, non ha alcuna rilevanza l'ordine dell'estrazione.

Pertanto $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$.

I casi favorevoli sono tutti i gruppi formati da due delle quattro palline aventi un numero inferiore a 5 e da una con un valore maggiore.

Pertanto $\binom{4}{2} \cdot 6 = \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot 6 = 36$.

La probabilità è: $p = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$.

esempio

Lanciamo contemporaneamente tre monete. Consideriamo l'evento:

$E = \text{«le facce presentano una testa (T) e due croci (C)»}.$

I casi possibili sono tutti i modi in cui T e C possono presentarsi:

$TTT \ TTC \ TCT \ CTT \ TCC \ CTC \ CCT \ CCC,$

cioè $D'_{2,3} = 2^3 = 8.$

I casi favorevoli sono $TCC \ CTC \ CCT$, cioè tutti i possibili modi in cui si possono presentare una testa e due croci. Per calcolarli utilizziamo le permutazioni di 3 elementi, di cui 2 ripetuti:

$$P_3^{(2)} = \frac{3!}{2!} = 3.$$

● Le disposizioni con ripetizione si calcolano con la formula

$$D'_{n,k} = n^k$$

La probabilità è $p(E) = \frac{3}{8}.$

e le permutazioni con ripetizione si calcolano con la formula:

$$P_n^{(r,s,\dots)} = \frac{n!}{r!s!\dots}.$$

esempio

Da un'urna contenente 4 palline bianche e 6 nere estraiamo *consecutivamente* cinque palline, senza rimettere ogni volta la pallina estratta nell'urna. Consideriamo l'evento:

$E_1 =$ «escono consecutivamente, nell'ordine, 2 bianche e 3 nere».

Dobbiamo supporre di *distinguere per l'ordine* di uscita ogni possibile raggruppamento, anche se identico ad altri per composizione.

I casi possibili si possono quindi calcolare con le *disposizioni semplici*:

$$D_{10,5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240. \quad D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \quad \text{con } (n,k) \in \mathbb{N}$$

I casi favorevoli sono tutti i gruppi formati da 2 palline bianche delle quattro contenute nell'urna e dai gruppi formati da 3 palline nere delle sei contenute nell'urna:

$$D_{4,2} \cdot D_{6,3} = (4 \cdot 3) \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4) = 1440.$$

$$\text{Si ha che } p(E_1) = \frac{D_{4,2} \cdot D_{6,3}}{D_{10,5}} = \frac{1440}{30\,240} = \frac{1}{21}.$$

Consideriamo ora l'evento:

$E_2 = \text{«escono 2 bianche e 3 nere»}.$

● Indicando con b una pallina bianca e con n una nera, l'evento è verificato non solo quando la successione è

$b, b, n, n, n,$

ma anche quando è:

$b, n, b, n, n;$

$n, b, b, n, n;$

...

$n, n, n, b, b.$

Questa volta *non interessa l'ordine*.

I casi favorevoli sono quindi quelli precedenti moltiplicati per le permutazioni di 5 elementi, di cui 2 e 3 ripetuti:

$$(D_{4,2} \cdot D_{6,3}) \cdot P_5^{(2,3)} = 1440 \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 14\,400.$$

$$\text{Pertanto } p(E_2) = \frac{14\,400}{30\,240} = \frac{10}{21}.$$

● Le combinazioni semplici si calcolano con la formula:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{D_{n,k}}{k!}.$$

Osserviamo che la probabilità può essere scritta anche nel seguente modo:

$$p(E_2) = \frac{D_{4,2} \cdot D_{6,3} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!}}{D_{10,5}} = \frac{\frac{D_{4,2}}{2!} \cdot \frac{D_{6,3}}{3!}}{\frac{D_{10,5}}{5!}} = \frac{C_{4,2} \cdot C_{6,3}}{C_{10,5}}.$$

Confrontando i risultati ottenuti per E_1 ed E_2 , possiamo quindi concludere che nelle estrazioni consecutive senza reinserimento si utilizzano le disposizioni semplici se è essenziale l'ordine di uscita, le combinazioni semplici se l'ordine non interessa.

esempio

Estraiamo *contemporaneamente* 4 palline da un'urna che ne contiene 7, di cui 2 bianche e 5 rosse. Consideriamo gli eventi:

E_1 = «estrazione di 4 palline rosse»;

E_2 = «estrazione di 1 pallina bianca e 3 rosse».

Poiché le palline sono estratte contemporaneamente, anche in questo caso non interessa l'ordine e utilizziamo le combinazioni.

I casi possibili sono tutti i raggruppamenti di 4 palline che si possono effettuare con le 7 palline dell'urna, cioè le combinazioni di 7 elementi di classe 4:

$$C_{7,4} = \binom{7}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} = 35.$$

● Possiamo applicare la proprietà dei coefficienti binomiali:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

I casi favorevoli per E_1 sono tutti i raggruppamenti di 4 palline rosse:

$$C_{5,4} = \binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5. \text{ Quindi } p(E_1) = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}.$$

I casi favorevoli per E_2 sono tutti i raggruppamenti formati da 1 pallina bianca e 3 delle palline rosse prese fra le 5 dell'urna:

$$2 \cdot \binom{5}{3} = 2 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 5 \cdot 4 = 20. \text{ Quindi } p(E_2) = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}.$$

LA CONCEZIONE STATISTICA DELLA PROBABILITA'

Problema: un'urna, che non possiamo aprire, contiene palline colorate, ma non sappiamo né il loro colore, né quante sono.

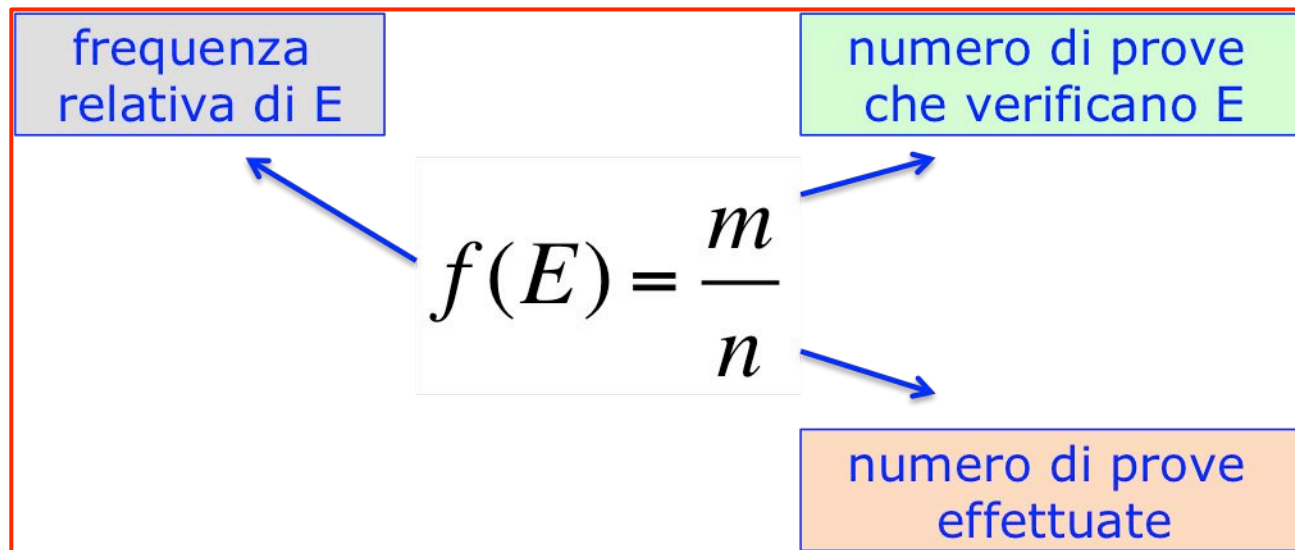
Soluzione: estrarre a sorte un gran numero di volte delle palline, rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna, in modo che ogni estrazione sia effettuata nelle stesse condizioni.

esempio

colore	numero palline	frequenza relativa
rosso	5	5/80
giallo	18	18/80
nero	22	22/80
verde	35	35/80
totale	80	1

DEFINIZIONE

La frequenza relativa $f(E)$ di un evento sottoposto a n esperimenti, effettuati tutti nelle stesse condizioni, è il rapporto fra il numero m delle volte che si è verificato e il numero n delle prove effettuate.



osservazioni

$$0 \leq f(E) \leq 1$$

f=0 non significa che l'evento è impossibile, ma soltanto che non si è mai verificato.

f=1 non significa evento certo, ma soltanto che in quella serie di esperimenti è stato sempre osservato.

Se si ripete l'esperimento, si otterranno valori diversi, così come colori che prima non sono usciti.

Se il numero delle prove n è elevato, il valore della frequenza tende a un numero costante (ossia lanciando numerose volte una moneta, la frequenza che esca testa o croce tende al valore della probabilità classica $\frac{1}{2}$).

In generale, vale la seguente proprietà:

PROPRIETA': legge empirica del caso

Dato un evento E , sottoposto a n prove tutte nelle stesse condizioni, il valore della frequenza $f(E)$ tende al valore della probabilità $p(E)$, all'aumentare del numero n di prove effettuate:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(E) = p(E)$$

DEFINIZIONE

La probabilità di un evento E è la frequenza relativa del suo verificarsi quando il numero di prove effettuate è "sufficientemente alto".

- Nell'impostazione classica il valore della probabilità $p(E)$ di un evento è calcolato a **priori**, ossia prima che l'esperimento avvenga.
- Nell'impostazione statistica il valore della frequenza $f(E)$ di un evento è calcolato a **posteriori**, ossia dopo ripetuti esperimenti.

Ci sono molti casi per i quali è impossibile calcolare $p(E)$ (impostazione classica), per cui dobbiamo ricorrere al calcolo di $f(E)$ (impostazione statistica).

Esempio: probabilità di incidenti automobilistici; probabilità di furti; probabilità che un farmaco sia efficace; probabilità di trovare un posto di lavoro; ecc.

Per tutti questi eventi il calcolo va fondato su quanto è avvenuto in passato e cercare le relative frequenze che costituiranno la probabilità degli eventi.

esempio

Si vuole sperimentare un nuovo vaccino antinfluenzale. Si sottopongono volontariamente al vaccino 10000 persone e, di queste, nell'inverso successivo, 6750 non contraggono l'influenza. Qual è la probabilità di non contrarre il virus con questo tipo di vaccino?

Applichiamo la definizione di probabilità statistica:

$$f = \frac{6750}{10000} = 0,675$$

La probabilità di non ammalarsi è del 67,5%

LA CONCEZIONE SOGGETTIVA DELLA PROBABILITA'

Problema: una persona sta valutando se partecipare o non partecipare a un gioco d'azzardo nel quale si vince se, lanciando contemporaneamente due dadi, escono due numeri pari.

La probabilità di vincita secondo l'impostazione classica è:

$$p(E) = \frac{9}{36} = 0,25 = 25\%$$

Poiché ha osservato che su 21 lanci i due numeri pari sono usciti 7 volte, allora la probabilità statistica è:

$$f(E) = \frac{7}{21} = 0,333 = 33,3\%$$

Allora il giocatore decide di fare la seguente proposta al banco: giocare una posta di 10 euro per ricevere, in caso di vincita, 34 euro.

La valutazione che ha fatto è del tutto personale, ed ha determinato il valore della probabilità secondo una **valutazione soggettiva**:

$$p(E) = \frac{10}{34} = 0,294 = 29,4\%$$

La **probabilità soggettiva** ha tenuto conto, anche se non in maniera esplicita, sia dell'impostazione classica sia di quella statica, essendo il suo valore compreso tra le due:

$$25\% < 29,4\% < 33,3\%$$

Il modo di procedere soggettivo è l'unico utilizzabile per quegli eventi per i quali non è possibile calcolare teoricamente il numero dei casi favorevoli e possibili e non si può sottoporre l'evento a prove sperimentali ripetute nelle stesse condizioni.

Esempio: stimare la probabilità di vittoria di una squadra di calcio in un torneo.

DEFINIZIONE

La **probabilità soggettiva** di un evento è la misura del grado di fiducia che una persona attribuisce al verificarsi dell'evento, secondo la sua opinione. Il valore si ottiene effettuando il rapporto fra la somma P che si è disposti a pagare, in una scommessa, e la somma V che si riceverà nel caso l'evento si verifichi:

Diagram illustrating the formula for subjective probability:

$$p(E) = \frac{P}{V}$$

The diagram shows the formula $p(E) = \frac{P}{V}$ in a white box. Three red arrows point from the formula to its components: one from $p(E)$ to the text "probabilità soggettiva di E" (in red), one from P to the text "prezzo da pagare" (in blue), and one from V to the text "somma ricevuta al verificarsi di E" (in blue).

Condizione di coerenza: la persona che accetta di pagare P per avere V deve anche essere disposta a ricevere P per pagare V nel caso l'evento si verifichi.

A una corsa di cavalli una persona è disposta a pagare 90 euro per ricevere 120 euro in caso di vittoria di un determinato cavallo.

La valutazione che ha fatto è del tutto personale, ed ha determinato il valore della probabilità secondo una **valutazione soggettiva**:

$$p(E) = \frac{90}{120} = \frac{3}{4}$$

Per la condizione di coerenza, deve essere disposto, scambiando i ruoli, a ricevere 90 euro e pagare 120 in caso di vittoria del cavallo. Si dice anche che la vittoria del cavallo è pagata 4 a 3.

IMPOSTAZIONE ASSIOMATICA DELLA PROBABILITA'

L'impostazione assiomatica della probabilità sistema in modo rigoroso le conoscenze che si sono sviluppate nel tempo.

Come? Partiamo da un esempio.

Lanciamo consecutivamente una moneta due volte. I possibili esiti dell'esperimento costituiscono un insieme chiamato **spazio dei campioni**:

$$U=\{TT,CC,TC,CT\}$$

Consideriamo i seguenti eventi e le proposizioni che li esprimono:

E_1 =croce esce una volta

E_2 =croce esce due volte

L'evento E_1 è verificato dagli elementi dell'insieme:

$$M=\{CT,TC\}$$

L'evento E_2 è verificato dagli elementi dell'insieme:

$$N=\{CC\}$$

Possiamo quindi associare a ogni evento un sottoinsieme di U . Allora, l'insieme di tutti i possibili eventi che si possono associare all'esperimento è l'insieme delle parti di U , chiamato **spazio degli eventi**, formato da 16 elementi:

$$P(U)=\{\{TT\},\{CC\},\{TC\},\{CT\},\{TT,CC\},\{TT,TC\},\dots,\phi\}$$

In generale, nell'impostazione assiomatica:

- Tutti i possibili risultati (campioni) di un esperimento aleatorio sono gli elementi di un insieme U chiamato **spazio dei campioni**.
- **Un evento E** si identifica con un **sottoinsieme di U** ed è verificato quando l'esito dell'esperimento coincide con uno dei suoi elementi.
- **L'evento impossibile** è l'insieme vuoto ϕ .
- **L'evento certo** coincide con l'insieme U .
- **Un evento elementare** è un **sottoinsieme di U** costituito da un **solo campione**.

➤ **Lo spazio degli eventi** è l'insieme di tutti i possibili eventi e **coincide con $P(U)$** l'insieme delle parti di U .

Con questa impostazione assiomatica, gli eventi si considerano come insiemi, per cui su di essi si possono fare le usuali operazioni fra insiemi, alle quali corrispondono operazioni logiche tra le proposizioni che descrivono gli eventi.



esempio

All'evento: $E_1 \vee E_2$ = "croce esce una o due volte" (disgiunzione delle due proposizioni), è associata l'unione: $M \cup N = \{CC, CT, TC\}$ dei due sottoinsiemi corrispondenti. Indichiamo l'evento con:

$$E_1 \cup E_2$$

Consideriamo l'evento: $E_3 = \text{"testa esce la prima volta"}$ al quale corrisponde il sottoinsieme $P = \{TT, TC\}$. All'evento $E_1 \wedge E_3 = \text{"croce esce una volta e testa esce la prima volta"}$, congiunzione delle due proposizioni, viene associata l'intersezione $M \cap P = \{TC\}$ dei due sottoinsiemi corrispondenti. Indichiamo l'evento con:

$$E_1 \cap E_2$$

In generale, possiamo dare le seguenti definizioni:

- Dato un evento E , l'evento complementare $\bar{E}$ di E rispetto a U è detto **evento contrario** di E . Tale evento si verifica se e solo se non si verifica E .

➤ Dati due eventi E_1 ed E_2 , entrambi sottoinsiemi di U , l'evento $E_1 \cup E_2$ è detto **evento unione o somma logica** di E_1 ed E_2 . Esso si verifica al verificarsi di almeno uno degli eventi dati.

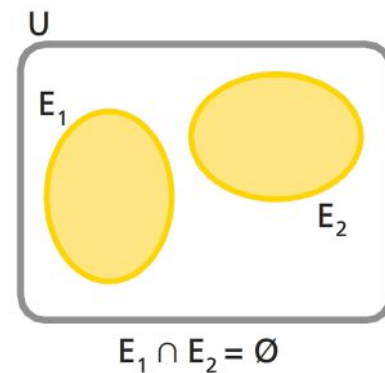
➤ Dati due eventi E_1 ed E_2 , entrambi sottoinsiemi di U , l'evento $E_1 \cap E_2$ è detto **evento intersezione o prodotto logico** di E_1 ed E_2 . Esso si verifica al verificarsi di entrambi gli eventi dati.

Avendo fissato tutti questi elementi, possiamo dare la seguente **definizione assiomatica di probabilità**:

DEFINIZIONE

La **probabilità** è una funzione p che associa a ogni evento E dello spazio degli eventi un numero reale, in modo da soddisfare i seguenti assiomi:

1. $p(E) \geq 0$
2. $p(U) = 1$
3. Se due eventi E_1 ed E_2 sono tali che $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, allora: $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$



Dalla definizione assiomatica si deducono le seguenti proprietà

a) $p(\emptyset) = 0$

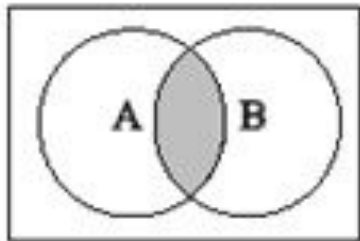
b) $0 \leq p(E) \leq 1$

c) $p(\bar{E}) = 1 - p(E)$ con $\bar{E} = U - E$

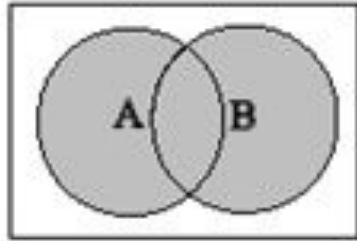
d) se $E_1 \subseteq E_2$ allora $p(E_2 - E_1) = p(E_2) - p(E_1)$

e) se $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ e $E_1 \not\subseteq E_2$ allora $p(E_2 - E_1) = p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$

L'impostazione assiomatica consente di calcolare la probabilità di un evento utilizzando le operazioni tra insiemi.



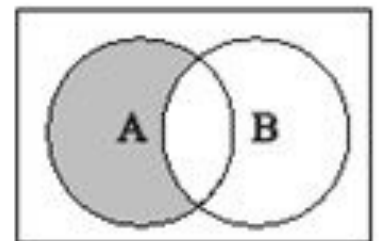
$A \cap B$



$A \cup B$



$\bar{A}$



$A - B$

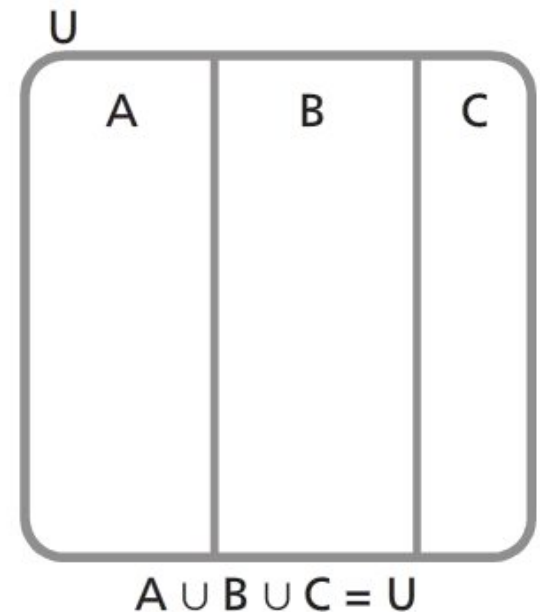
L'insieme U è costituito da tre eventi elementari A, B, C i quali hanno le seguenti probabilità:

$$p(A)=3/8 \quad p(B)=2/5 \quad p(C)=9/40$$

Tali valori soddisfano gli assiomi della probabilità:

$$A \cup B \cup C = U \quad \text{e} \quad A \cap B = A \cap C = B \cap C = \phi$$

$$p(A)+p(B)+p(C)=3/8+2/5+9/40=1=p(U)$$



ESERCIZIO GUIDA

Un'urna contiene 5 palline numerate da 1 a 5.

- a) Determiniamo la funzione di probabilità degli eventi elementari, sapendo che la probabilità di estrazione di ogni pallina è proporzionale al numero riportato.
- b) Calcoliamo la probabilità dell'evento $A = \text{«estrarre una pallina con un numero primo»}$.
- c) Calcoliamo la probabilità dell'evento $B = \text{«estrarre un multiplo di 2»}$.
- d) Calcoliamo la probabilità dell'evento $A - B = \text{«estrarre un numero primo diverso da 2»}$.

- a) Indicando con x la probabilità di estrazione della pallina con il numero 1 avremo:

$$x + 2x + 3x + 4x + 5x = 1, \quad \text{da cui} \quad x = \frac{1}{15}.$$

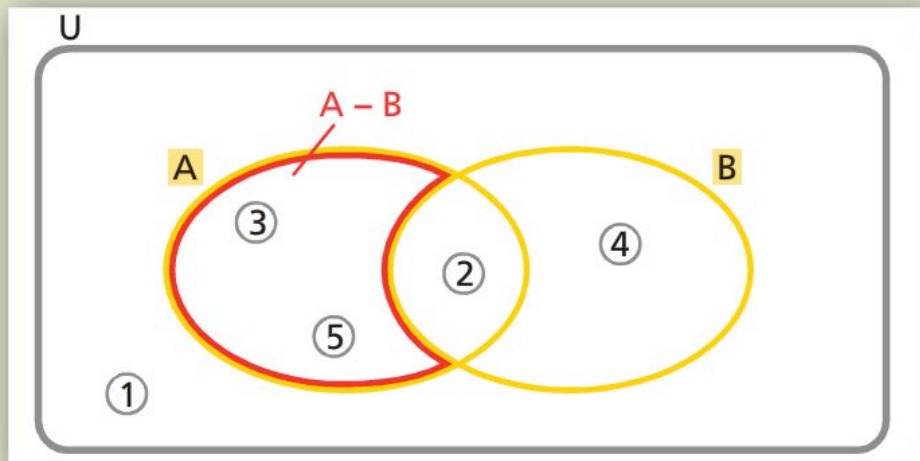
$$\text{Quindi } p(1) = \frac{1}{15}, \quad p(2) = \frac{2}{15}, \quad p(3) = \frac{3}{15}, \quad p(4) = \frac{4}{15}, \quad p(5) = \frac{5}{15}.$$

$$\text{b) } p(A) = \frac{2}{15} + \frac{3}{15} + \frac{5}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{c) } p(B) = \frac{2}{15} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

- d) Essendo $A \cap B = \{2\}$, e quindi $p(A \cap B) = \frac{2}{15}$,
abbiamo:

$$p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = \frac{10}{15} - \frac{2}{15} = \frac{8}{15}.$$



LA PROBABILITA' DELLA SOMMA LOGICA DI EVENTI

Consideriamo 12 dischetti numerati da 1 a 12 e gli eventi:

E_1 =esce un numero pari

E_2 =esce un numero maggiore di 7

Osserviamo che gli eventi E_1 ed E_2 possono verificarsi **contemporaneamente**: estrazione dischetto 10 (numero pari e maggiore di 7). **Gli eventi E_1 ed E_2 sono compatibili.**

Consideriamo gli eventi:

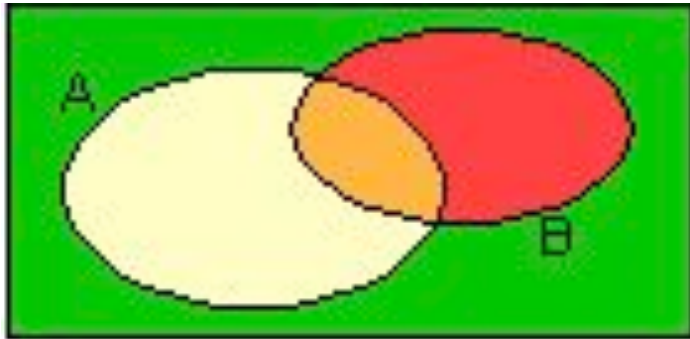
E_3 =esce un multiplo di 5

E_4 =esce un multiplo di 3

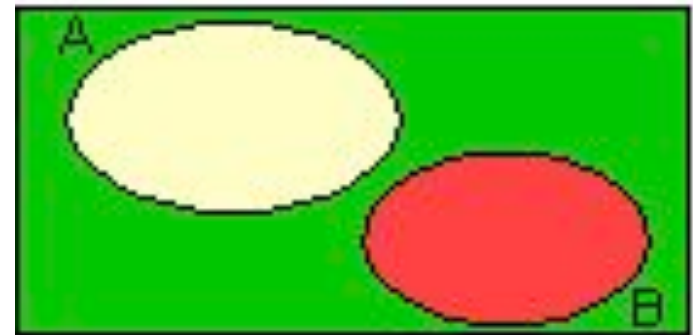
I due eventi non possono verificarsi contemporaneamente: **E_3 ed E_4 sono incompatibili.**

In generale:

Due eventi E_1 ed E_2 , relativi allo stesso spazio di campioni, si dicono **incompatibili** se il verificarsi di uno esclude il verificarsi contemporaneo dell'altro: $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. In caso contrario si dicono **compatibili**.



Eventi compatibili



Eventi incompatibili

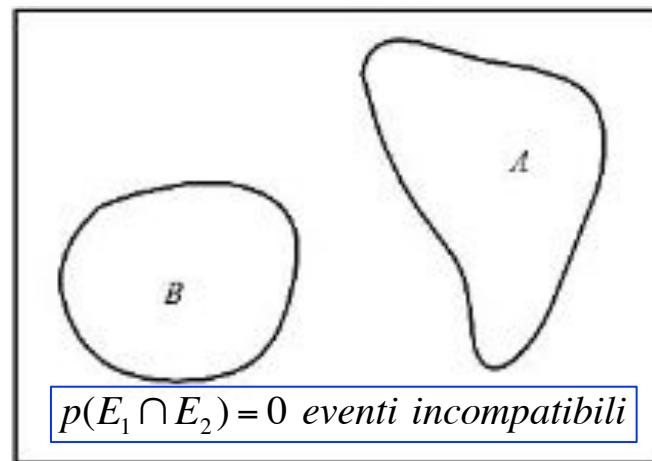
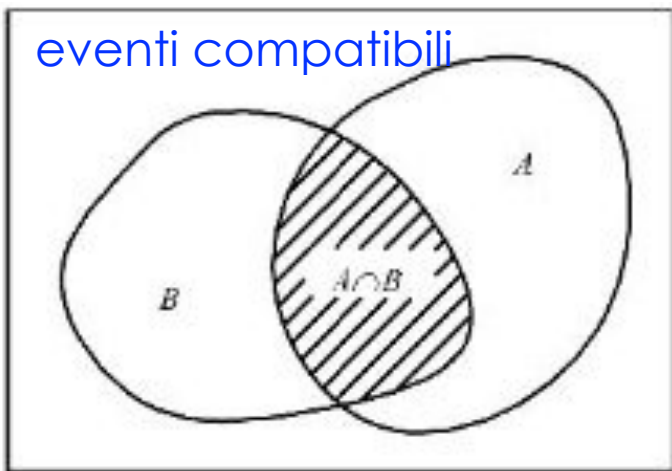
teorema

La probabilità della somma logica di due eventi E_1 ed E_2 è uguale alla somma delle loro probabilità diminuita della probabilità del loro evento intersezione:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$$

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) \Rightarrow \text{eventi incompatibili}$$

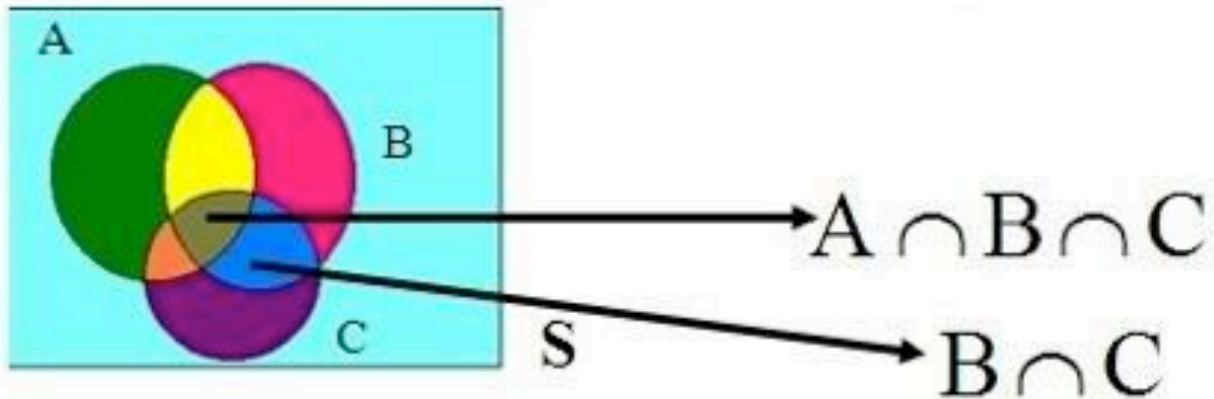
eventi compatibili



$$p(E_1 \cap E_2) = 0 \text{ eventi incompatibili}$$

Nel caso di tre eventi, il teorema diventa:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - \\ &- P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$



Analogamente, si può generalizzare il teorema precedente al caso di n eventi; esso si riduce al seguente teorema quando gli eventi sono tutti *incompatibili*.

TEOREMA

Teorema della probabilità totale

Dati n eventi a due a due incompatibili $E_1, E_2, \dots, E_n$, la probabilità della loro unione è uguale alla somma delle loro singole probabilità:

$$p(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = p(E_1) + p(E_2) + \dots + p(E_n).$$

ESERCIZIO GUIDA

In un sacchetto ci sono 16 gettoni: 7 di forma quadrata (3 rossi e 4 verdi) e 9 di forma circolare (4 rossi e 5 verdi). Qual è la probabilità di estrarre a caso un gettone rosso oppure tondo?

Gli eventi $E_1 = \text{«estrazione di un gettone rosso»}$ ed $E_2 = \text{«estrazione di un gettone tondo»}$ sono compatibili; infatti, un gettone può essere contemporaneamente rosso e tondo. Calcoliamo $p(E_1)$ e $p(E_2)$, tenendo presente che i casi possibili sono 16:

$$p(E_1) = \frac{7}{16}; \quad p(E_2) = \frac{9}{16}.$$

Inoltre, per calcolare $p(E_1 \cap E_2)$, teniamo presente che i casi favorevoli sono i gettoni rossi e tondi:

$$p(E_1 \cap E_2) = \frac{4}{16}.$$

La probabilità che si estragga un gettone rosso oppure tondo è:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) = \frac{7}{16} + \frac{9}{16} - \frac{4}{16} = \frac{3}{4}.$$

ESEMPIO

Un'urna contiene 15 palline numerate da 1 a 15. Calcoliamo la probabilità che, estraendo una pallina, essa rechi:

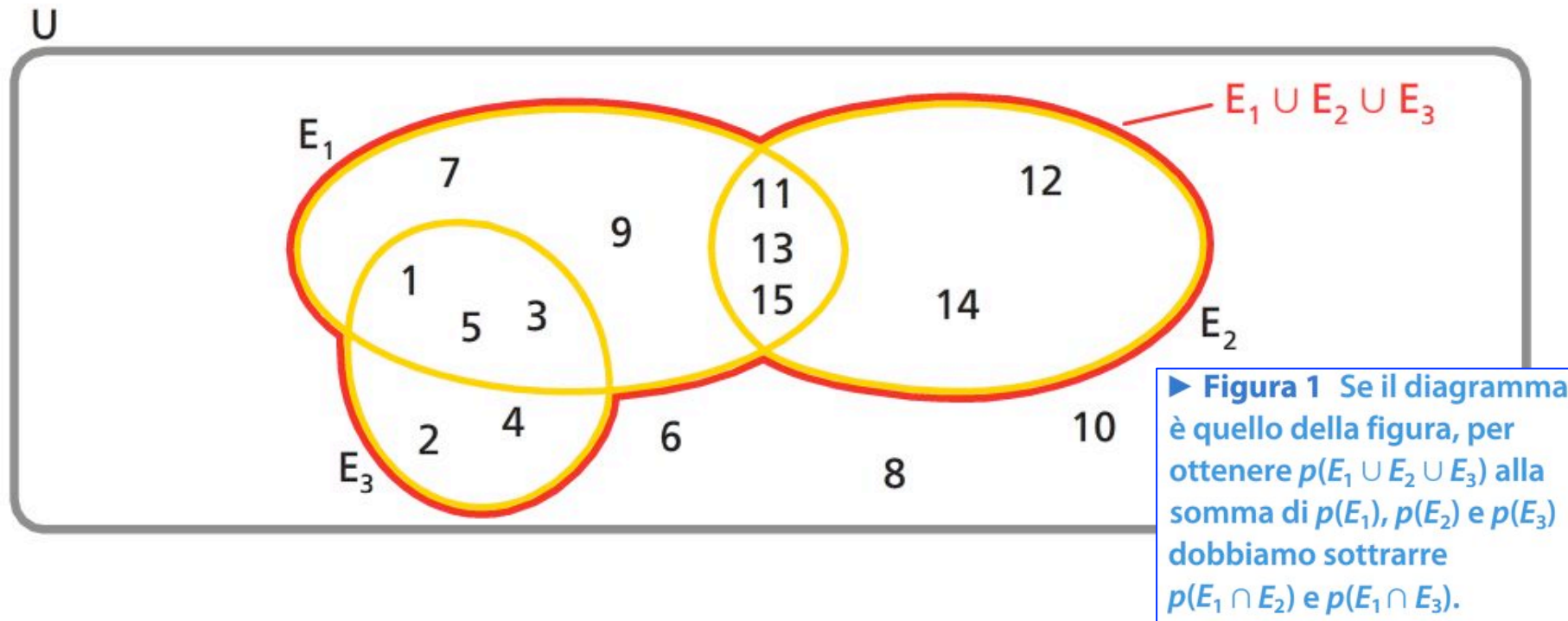
- a) un numero dispari o maggiore di 10;
- b) un numero minore di 6 o maggiore di 10;
- c) un numero minore di 6 o dispari o maggiore di 10.

Gli eventi sono:

$$E_1 = \text{«esce un numero dispari»};$$

$$E_2 = \text{«esce un numero maggiore di 10»};$$

$$E_3 = \text{«esce un numero minore di 6»}.$$



Utilizzando il diagramma di Eulero-Venn possiamo calcolare la probabilità dell'evento somma:

$$\text{a) } p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) = \frac{8}{15} + \frac{5}{15} - \frac{3}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3};$$

$$\text{b) } p(E_3 \cup E_2) = p(E_3) + p(E_2) = \frac{5}{15} + \frac{5}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3};$$

$$\text{c) } p(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \frac{8}{15} + \frac{5}{15} + \frac{5}{15} - \frac{3}{15} - \frac{3}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}.$$

ESERCIZIO GUIDA

Un'urna contiene 4 palline rosse numerate da 1 a 4 e 6 palline nere numerate da 1 a 6. Si estraggono consecutivamente due palline, senza rimettere la pallina estratta nell'urna. Calcoliamo la probabilità:

- a) che le palline estratte siano di colore uguale;
- b) che le palline estratte siano rosse o rechino due numeri pari;
- c) che almeno una pallina estratta sia rossa.

a) Le palline estratte possono essere o due rosse o due nere. I due eventi sono incompatibili:

$$p = \frac{D_{4,2}}{D_{10,2}} + \frac{D_{6,2}}{D_{10,2}} = \frac{12}{90} + \frac{30}{90} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}.$$

b) Gli eventi «due palline rosse» e «due numeri pari» sono compatibili in quanto fra i 5 numeri pari 2 sono rossi e quindi vi sono due esiti $\{(2; 4), (4; 2)\}$ che verificano entrambi gli eventi:

$$p = \frac{D_{4,2}}{D_{10,2}} + \frac{D_{5,2}}{D_{10,2}} - \frac{D_{2,2}}{D_{10,2}} = \frac{12}{90} + \frac{20}{90} - \frac{2}{90} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}.$$

c) L'evento è verificato quando le palline che escono sono o una rossa e una nera (e viceversa), o due rosse:

$$p = \frac{4 \cdot 6 \cdot 2}{D_{10,2}} + \frac{D_{4,2}}{D_{10,2}} = \frac{48}{90} + \frac{12}{90} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}.$$

Possiamo applicare anche il metodo dell'evento contrario. L'evento contrario è «nessuna pallina rossa»:

$$p = 1 - \frac{D_{6,2}}{D_{10,2}} = 1 - \frac{30}{90} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

oppure, analizzando i vari casi:

insolvente A e non B o solvente A e insolvente B o insolventi entrambi:

$$p = \frac{5}{100} \cdot \frac{98}{100} + \frac{95}{100} \cdot \frac{2}{100} + \frac{5}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{690}{10\,000} = 6,9\%;$$

oppure, infine, applicando il teorema della somma logica $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$:

$$p = \frac{5}{100} + \frac{2}{100} - \frac{5}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{690}{10\,000} = 6,9\%.$$

LA PROBABILITA' CONDIZIONATA

Problema: calcolare la probabilità che si verifichi un evento E quando sappiamo che si è verificato l'evento E_1 .

Questa probabilità (simbolo $p(E | E_1)$) si chiama **probabilità di E condizionata a E_1** .

Un'urna contiene 12 palline identiche numerate da 1 a 12.
Lo spazio dei campioni è:

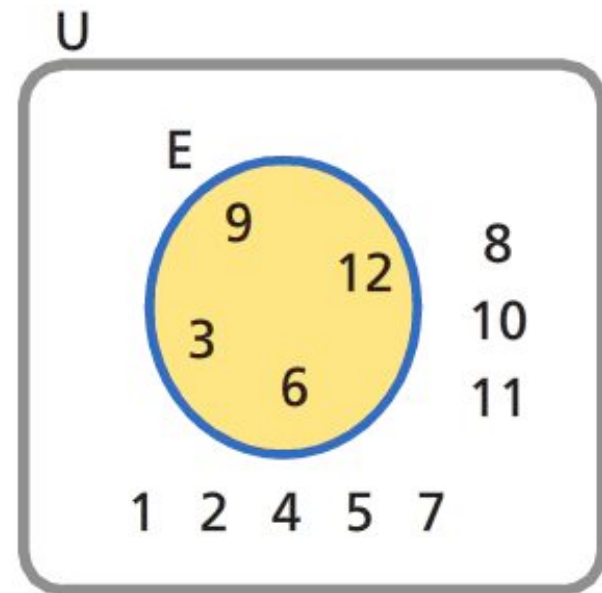
$$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

L'evento:

E ="estrazione di una pallina con un numero divisibile per 3"

ha probabilità:

$$p(E) = 4/12 = 1/3$$



1. Consideriamo l'evento:

E_1 =estrazione di una pallina con un numero maggiore di 7
per il quale $p(E_1) = 5/12$

In questa situazione gli esiti possibili non sono più 12, ma 5,
in quanto l'insieme universo si è ridotto a:

$$U' = E_1 = \{8, 9, 10, 11, 12\}$$

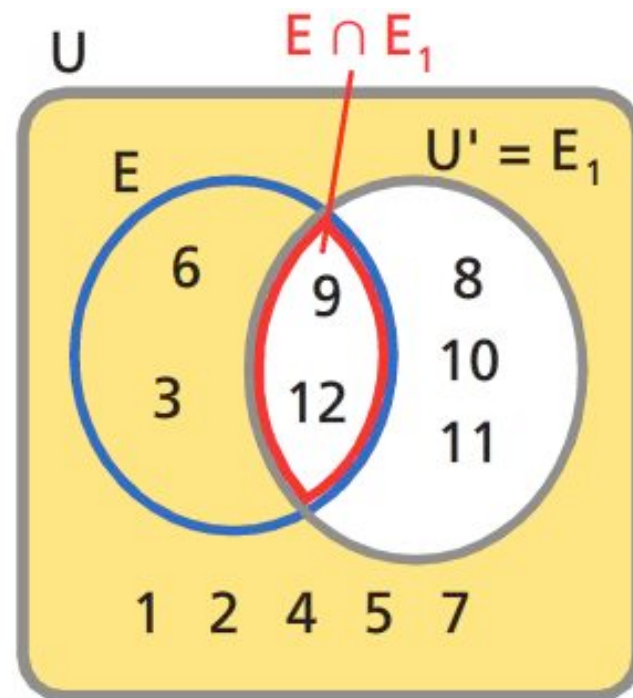
I casi favorevoli sono i 2 elementi dell'insieme:

$$E \cap E_1 = \{9, 12\}$$

La probabilità è: $P(E | E_1) = 2/5$

Questa probabilità è maggiore di $p(E) = 1/3$.

L'informazione supplementare ha aumentato la probabilità dell'evento E . I due eventi E ed E_1 si dicono correlati positivamente.



2. Consideriamo l'evento:

E_2 ="estrazione di una pallina con un pari"
per il quale $p(E_2)=6/12=1/2$

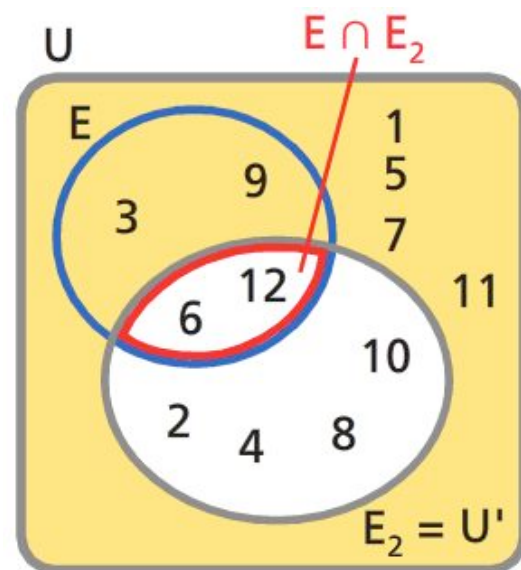
Calcoliamo $p(E)$, supponendo che si verifichi l'evento E_2 .
Indichiamo tale probabilità con $p(E | E_2)$. Anche in questa
situazione abbiamo un'informazione in più.

Gli esiti possibili sono 6, in quanto l'insieme universo si è
ridotto a:

$$U' = E_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

I casi favorevoli sono i 2
elementi dell'insieme:

$$E \cap E_2 = \{6, 12\}$$



La probabilità è: $P(E | E_2) = 2/6 = 1/3$

Questa probabilità è uguale a $p(E) = 1/3$.

L'informazione supplementare non ha mutato il valore della probabilità dell'evento E . I due eventi E ed E_2 si dicono stocasticamente indipendenti.

3. Consideriamo l'evento:

E_3 = "estrazione di una pallina con un numero minore di 8"
per il quale $p(E_3) = 7/12$

Calcoliamo $p(E)$, supponendo che si verifichi l'evento E_3 .
Indichiamo tale probabilità con $p(E | E_3)$.

Gli esiti possibili non sono più 12 ma 7, in quanto l'insieme universo si è ridotto a:

$$U' = E_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

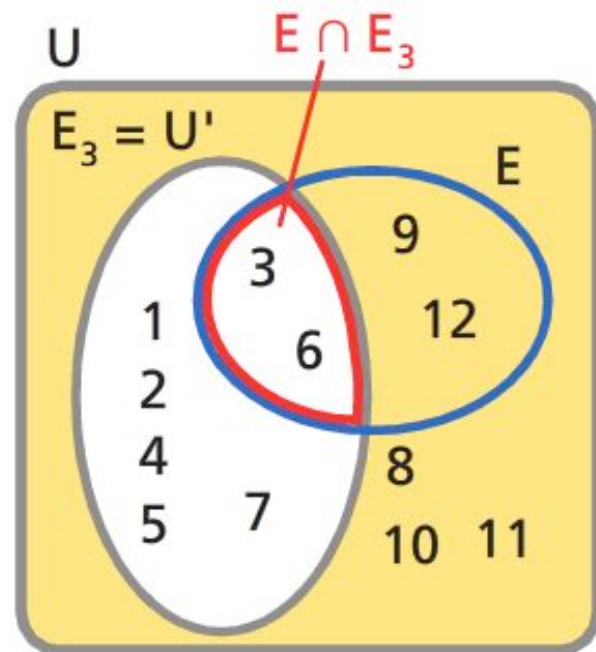
I casi favorevoli sono i 2 elementi dell'insieme:

$$E \cap E_3 = \{3, 6\}$$

La probabilità è: $P(E | E_3) = 2/7$

Questa probabilità è minore di $p(E) = 1/3$.

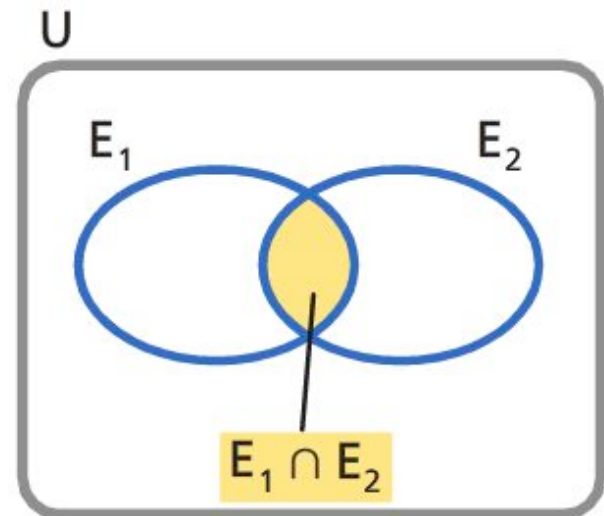
L'informazione supplementare ha diminuito la probabilità dell'evento E . I due eventi E ed E_3 si dicono **correlati negativamente**.



In generale, vale la seguente definizione:

DEFINIZIONE

Dati due eventi E_1 ed E_2 tali che $E_1 \subset U$, $E_2 \subset U$ ed $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, si dice **probabilità condizionata** di E_1 rispetto a E_2 , e si indica con $p(E_1 | E_2)$, la probabilità che si verifichi E_1 nell'ipotesi che E_2 sia verificato.



Se $p(E_1 | E_2) = p(E_1)$, cioè le conoscenze ulteriori sul verificarsi di E_2 non modificano la probabilità di E_1 , si dice che gli eventi sono **stocasticamente indipendenti**.

Se $p(E_1 | E_2) \neq p(E_1)$, cioè le conoscenze ulteriori sul verificarsi di E_2 modificano la probabilità di E_1 , si dice che gli eventi sono **stocasticamente dipendenti**. In particolare:

- se $p(E_1 | E_2) > p(E_1)$ i due eventi sono **correlati positivamente**
- se $p(E_1 | E_2) < p(E_1)$ i due eventi sono **correlati negativamente**

Nel valutare $p(E_1)$ si considera l'insieme U , mentre nel valutare $p(E_1 | E_2)$ lo spazio dei campioni si riduce al sottoinsieme E_2 .

teorema

La probabilità condizionata di un evento E_1 rispetto a un evento E_2 , non impossibile, è determinata dalla formula:

$$p(E_1 | E_2) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)} \quad \text{con } p(E_2) \neq 0$$
$$p(E_2 | E_1) = \frac{p(E_2 \cap E_1)}{p(E_1)} \quad \text{con } p(E_1) \neq 0$$

ESEMPIO

In un istituto ci sono 650 alunni, di cui 425 femmine e 225 maschi. Nella classe 5^a B ci sono 24 alunni, di cui 11 femmine e 13 maschi. Si estraggono a sorte due alunni che partecipino a un sondaggio nazionale sulle conoscenze relative alla lingua inglese. Calcoliamo la probabilità che i due alunni estratti siano entrambi maschi, sapendo che sono stati estratti due alunni della 5^a B.

Chiamiamo:

E_1 = «sono stati estratti due maschi»;

E_2 = «sono stati estratti due alunni della 5^a B».

Applichiamo il teorema della probabilità condizionata:

$$p(E_1 | E_2) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)}.$$

I casi possibili sono $C_{650,2} = \frac{650 \cdot 649}{2!} = 210\,925$.

I maschi della 5^a B sono 13, perciò:

$$p(E_1 \cap E_2) = \frac{C_{13,2}}{C_{650,2}} = \frac{\frac{13 \cdot 12}{2}}{210925} = \frac{6}{16225}.$$

La probabilità di estrarre due alunni della 5^a B è:

$$p(E_2) = \frac{C_{24,2}}{C_{650,2}} = \frac{\frac{24 \cdot 23}{2}}{210925} = \frac{276}{210925}.$$

La probabilità di estrarre due alunni maschi, sapendo che sono stati estratti due alunni della 5^a B è:

$$p(E_1 | E_2) = \frac{6}{16225} \cdot \frac{210925}{276} = \frac{13}{46}.$$

ESERCIZIO GUIDA

Tre persone A , B e C sono candidate a una carica. A ha la probabilità del 40% di essere eletto, B quella del 35% e infine C quella del 25%. C ritira la propria candidatura.

Calcoliamo le nuove probabilità di vittoria di A e B (chiamando con A , B , C anche gli eventi relativi all'elezione delle persone).

L'evento che si è verificato è la mancata elezione di C per il ritiro della candidatura. Esso ha probabilità $p(\overline{C}) = 1 - 0,25 = 0,75$. L'evento $A \cap \overline{C}$ è ancora l'evento A , come l'evento $B \cap \overline{C}$ è sempre l'evento B .

Le due probabilità condizionate, ossia quelle cercate, sono:

$$p(A|\overline{C}) = \frac{p(A \cap \overline{C})}{p(\overline{C})} = \frac{0,40}{0,75} = 0,5\overline{3} > p(A), \quad p(B|\overline{C}) = \frac{p(B \cap \overline{C})}{p(\overline{C})} = \frac{0,35}{0,75} = 0,4\overline{6} > p(B).$$

Gli eventi sono stocasticamente dipendenti e sono correlati positivamente.

ESERCIZIO GUIDA

Un'urna contiene 4 palline nere e 6 verdi. Si estraggono contemporaneamente due palline. Consideriamo i seguenti eventi:

A = «almeno una pallina è nera»;

B = «almeno una pallina è verde».

Calcoliamo la probabilità dell'evento A condizionato a B .

L'evento A si verifica quando l'esito è una delle seguenti combinazioni di colore: (nera, nera) o (nera, verde).

L'evento B si verifica quando l'esito è una delle seguenti combinazioni di colore: (nera, verde) o (verde, verde).

L'evento $A \cap B$ si verifica quando l'esito è (verde, nera). I valori delle probabilità sono:

$$p(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{4 \cdot 6}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{45} + \frac{24}{45} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}, \quad p(B) = \frac{4 \cdot 6}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{24}{45} + \frac{15}{45} = \frac{39}{45} = \frac{13}{15},$$

$$p(A \cap B) = \frac{4 \cdot 6}{\binom{10}{2}} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}.$$

La probabilità condizionata risulta: $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{13}{15}} = \frac{8}{13} < p(A).$

Gli eventi A e B sono stocasticamente dipendenti e sono correlati negativamente.

LA PROBABILITA' DEL PRODOTTO LOGICO DI EVENTI

Problema: calcolare la probabilità che si verifichi l'evento E ="esce un re nero" da un mazzo di 52 carte.

L'evento E è formato dagli eventi E_1 ="esce una carta con seme nero" ed E_2 ="esce un re".

Essendo $E=\{\text{re picche, re fiori}\}$, la probabilità del prodotto logico di E_1 ed E_2 è:

$$p(E) = p(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26} = 3,8\%$$

Questo risultato si può ottenere anche in un altro modo, attraverso il seguente teorema:

teorema

La probabilità dell'evento composto o prodotto logico degli eventi E_1 ed E_2 , è uguale al prodotto della probabilità dell'evento E_1 per la probabilità dell'evento E_2 nell'ipotesi che E_1 si sia verificato:

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2 | E_1)$$

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2) \text{ eventi stocasticamente indipendenti}$$

Il teorema si può estendere a più eventi che si devono verificare uno dopo l'altro, considerando sempre quello precedente come verificato:

$$p(E) = p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = p(E_1) \cdot p(E_2 | E_1) \cdot p(E_3 | (E_1 \cap E_2))$$

$$p(E) = p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = p(E_1) \cdot p(E_2) \cdot p(E_3) \text{ eventi indipendenti}$$

Ritornando al nostro problema si ha:

$$p(E_1) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

Per l'evento E_2 condizionato a E_1 , essendo uscita una carta nera, i casi possibili sono 26, mentre i casi favorevoli sono 2:

$$p(E_2 | E_1) = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$$

Pertanto:

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2 | E_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{26} = 3,8\%$$

Da una rilevazione statistica è risultato che, al primo controllo dopo 2000 km, su 100 automobili 8 hanno mostrato difetti solo all'alimentazione e 3 solo ai freni. Calcolare la probabilità che una macchina presenti questi due difetti.

➤ Caso in cui i due eventi sono indipendenti

$$E_1 = \text{«avere difettosa l'alimentazione»}, \quad p(E_1) = \frac{8}{100} = 8\%;$$

$$E_2 = \text{«avere difettosi i freni»}, \quad p(E_2) = \frac{3}{100} = 3\%;$$

$$p(E_1 \cap E_2) = \frac{8}{100} \cdot \frac{3}{100} = \frac{24}{10000} = \frac{0,24}{100} = 0,24\%.$$

➤ Caso in cui i due eventi non sono indipendenti

Se invece fra le 8 macchine che hanno difetti all'alimentazione 2 presentano anche difetti ai freni, non potremo più considerare i due eventi come indipendenti. In questo caso, la probabilità di avere difetti all'alimentazione e ai freni è:

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2 | E_1) = \frac{8}{100} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{100} = 2\%$$

d) Applichiamo l'evento contrario (nessuno risulti insolvente) e sfruttando il risultato precedente abbiamo:

$$p = 1 - \frac{9310}{10\,000} = \frac{690}{10\,000} = 6,9\%;$$

oppure, analizzando i vari casi:

insolvente A e non B o solvente A e insolvente B o insolventi entrambi:

$$p = \frac{5}{100} \cdot \frac{98}{100} + \frac{95}{100} \cdot \frac{2}{100} + \frac{5}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{690}{10\,000} = 6,9\%;$$

oppure, infine, applicando il teorema della somma logica $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$:

$$p = \frac{5}{100} + \frac{2}{100} - \frac{5}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{690}{10\,000} = 6,9\%.$$

ESERCIZIO GUIDA

Sono stati fatti due investimenti *A* e *B* della stessa durata. La probabilità di insolvenza di *A* è del 5%, mentre la probabilità di insolvenza per *B* è del 2%.

I due investimenti sono indipendenti. Calcoliamo la probabilità che alla scadenza:

- a) entrambi gli investimenti risultino insolventi;
- b) entrambi gli investimenti risultino esigibili;
- c) uno solo dei due investimenti risulti insolvente;
- d) almeno un investimento risulti insolvente.

$$\text{a) } p = \frac{5}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{1}{1000} = 0,1\%.$$

$$\text{b) } p = \left(1 - \frac{5}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{100}\right) = \frac{95}{100} \cdot \frac{98}{100} = \frac{9310}{10\,000} = 93,1\%.$$

$$\text{c) } p = \frac{5}{100} \cdot \left(1 - \frac{2}{100}\right) + \left(1 - \frac{5}{100}\right) \cdot \frac{2}{100} = \frac{5}{100} \cdot \frac{98}{100} + \frac{95}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{680}{10\,000} = 6,8\%.$$

(Notiamo che questi primi tre eventi esauriscono tutte le possibilità; la loro somma è 100%.)

d) Applichiamo l'evento contrario (nessuno risulti insolvente) e sfruttando il risultato precedente abbiamo:

$$p = 1 - \frac{9310}{10\,000} = \frac{690}{10\,000} = 6,9\%;$$

ESERCIZIO GUIDA

Un'urna contiene 5 palline bianche e 4 nere. Si effettuano estrazioni consecutive nelle due situazioni: (i) reimmissione ogni volta della pallina estratta, (ii) non reimmissione della pallina estratta.

Calcoliamo la probabilità che, estraendo consecutivamente tre palline:

- a) esse siano prima due bianche e poi una nera;
- b) esse siano due bianche e una nera;
- c) almeno una sia bianca.

Nel caso (i) siamo in presenza di eventi indipendenti, in quanto la composizione dell'urna non cambia, mentre nel caso (ii) gli eventi sono dipendenti, in quanto la non reimmissione della pallina estratta fa cambiare la composizione dell'urna e pertanto la probabilità di ogni evento è condizionata ed è calcolata nell'ipotesi che l'evento precedente si sia verificato.

- a) Abbiamo un evento composto da una sequenza ordinata di eventi, quindi moltiplichiamo fra loro le probabilità dei singoli eventi:

$$(i) \quad p = \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{100}{729}; \quad (ii) \quad p = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{80}{504} = \frac{10}{63}.$$

- b) L'evento può verificarsi con tre modalità diverse incompatibili fra loro:

$b b n$ o $b n b$ o $n b b$.

$$(i) \quad p = \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{100}{729} \cdot 3 = \frac{100}{243};$$

$$(ii) \quad p = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{21}.$$

Nel caso in cui l'ordine non è stabilito si può moltiplicare la probabilità di una sequenza «base» per il numero di volte col quale gli eventi componenti l'evento si possono presentare.

c) Abbiamo varie possibilità nel numero di volte con cui la pallina bianca può uscire.

L'evento si verifica quando la pallina bianca:

esce una volta: $b n n$ $n b n$ $n n b$

o due volte: $b b n$ $n b b$ $b n b$

o tre volte: $b b b$

Non essendo stato fissato l'ordine di uscita, occorre tenere conto di tutti i modi in cui ogni possibilità può presentarsi:

$$(i) \quad p = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot 3 + \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot 3 + \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{80}{729} \cdot 3 + \frac{100}{729} \cdot 3 + \frac{125}{729} = \frac{665}{729};$$

$$(ii) \quad p = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot 3 + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot 3 + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{60}{504} \cdot 3 + \frac{80}{504} \cdot 3 + \frac{60}{504} = \frac{480}{504} = \frac{20}{21}.$$

Possiamo calcolare tale probabilità anche usando l'evento contrario «esce sempre la pallina nera»:

$$(i) \quad p = 1 - \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = 1 - \frac{64}{729} = \frac{665}{729};$$

$$(ii) \quad p = 1 - \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = 1 - \frac{24}{504} = \frac{480}{504} = \frac{20}{21}.$$

IL PROBLEMA DELLE PROVE RIPETUTE

Problema: calcolare la probabilità che in 5 lanci consecutivi di un dado la faccia 1 si presenti soltanto la prima volta e poi non si presenti più nei lanci successivi.

Si tratta di un evento prodotto logico di una sequenza di 5 eventi indipendenti.

L'evento: E ="esce la faccia 1" ha probabilità:

$$p(E)=1/6$$

L'evento: $\bar{E}$ ="non esce la faccia 1" ha probabilità:

$$1-p(E)=1-1/6=5/6$$

La probabilità dell'**evento prodotto logico** richiesta dal problema è:

$$p = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5^4}{6^5}$$

Problema: calcolare la probabilità che in 5 lanci consecutivi di un dado la faccia 1 si presenti una sola volta, non importa in quale posizione della sequenza dei 5 lanci.

Le possibilità sono 5, tutte incompatibili fra loro, ognuna con uguale probabilità p . Si tratta di un **evento somma logica**.

La probabilità dell'**evento somma logica** richiesta dal problema è:

$$p_{(1,5)} = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5^5}{6^5}$$

Il numero delle volte con il quale può presentarsi la sequenza non è altro che il numero di permutazioni di 5 elementi di cui uno ripetuto una volta e l'altro quattro volte: $P_5^{(1,4)}$.

Può anche essere visto come il numero dei modi con cui un elemento può occupare 5 posti a disposizione: $\binom{5}{1}$

Se l'evento "esce la faccia 1" si deve presentare due volte, la probabilità è:

$$p_{(2,5)} = \binom{5}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{10 \cdot 5^3}{6^5}$$

Se l'evento "esce la faccia 1" si deve presentare tre volte, la probabilità è:

$$p_{(3,5)} = \binom{5}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{10 \cdot 5^2}{6^5}$$

E così via...

Generalizziamo il problema.

Teorema delle prove ripetute (o di Bernoulli)

Dato un evento E, sottoposto a n esperimenti ognuno con probabilità costante p di verificarsi, essendo $q=(1-p)$ la probabilità che ha l'evento di non verificarsi, la probabilità di ottenere k successi su n prove è:

$$p_{(k,n)} = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

esempio

Una macchina produce pezzi difettosi con una probabilità del 3%. Prendiamo 8 pezzi e calcoliamo la probabilità che:
a) nessuno sia difettoso; b) 3 siano difettosi; c) tutti siano difettosi; d) almeno 2 siano difettosi.

Essendo $p=3\%=0,03$ e $q=1-p=1-0,03=0,97$, si ha:

$$a) p_{(0,8)} = \binom{8}{0} (0,03)^0 \cdot (0,97)^{8-0} \cong 78,37\%$$

$$b) p_{(3,8)} = \binom{8}{3} (0,03)^3 \cdot (0,97)^{8-3} \cong 0,13\%$$

$$c) p_{(8,8)} = \binom{8}{0} (0,03)^8 \cdot (0,97)^{8-8} \cong 6,56 \cdot 10^{-11}\%$$

d) Utilizziamo l'evento contrario di "almeno 2 pezzi difettosi", ossia "nessun pezzo difettoso o 1 solo difettoso:

$$d) p = 1 - p_{(0,8)} - p_{(1,8)} \cong 1 - 0,7837 - \binom{8}{1} \cdot (0,03)^1 \cdot (0,97)^7 \cong 2,24\%$$

ESERCIZIO GUIDA

Un'urna contiene 15 palline numerate. Si estrae per 8 volte consecutive una pallina, rimettendo ogni volta la pallina nell'urna. Calcoliamo la probabilità che:

- a) per 5 volte esca un numero minore di 6;
- b) per 3 o 4 volte esca un numero pari;
- c) almeno una volta esca un numero pari.

a) L'evento «esce un numero minore di 6» ha probabilità $p = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, mentre l'evento contrario ha

probabilità $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Appliciamo la relazione $p_{(k,n)} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Abbiamo:

$$p_{(5,8)} = \binom{8}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{56 \cdot 2^3}{3^8}.$$

b) L'evento «esce un numero pari» ha probabilità $p = \frac{7}{15}$, mentre l'evento contrario ha probabilità

$$q = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}.$$

Dobbiamo applicare la relazione sia per il caso in cui l'evento si verifichi 3 volte, sia per il caso in cui si verifichi 4 volte e quindi applicare il teorema della somma logica:

$$\begin{aligned} p &= p_{(3,8)} + p_{(4,8)} = \binom{8}{3} \left(\frac{7}{15}\right)^3 \left(\frac{8}{15}\right)^5 + \binom{8}{4} \left(\frac{7}{15}\right)^4 \left(\frac{8}{15}\right)^4 = \\ &= \frac{56 \cdot 7^3 \cdot 8^5}{15^8} + \frac{70 \cdot 7^4 \cdot 8^4}{15^8} = \frac{938 \cdot 7^3 \cdot 8^4}{15^8}. \end{aligned}$$

c) Calcoliamo la probabilità dell'evento «il numero pari non esca mai» (o «esca sempre il numero dispari»), evento contrario di quello di cui si chiede la probabilità. Essendo la probabilità di uscita di un numero non pari $\frac{8}{15}$, la probabilità che in 8 estrazioni nelle stesse condizioni il numero pari esca almeno una volta è:

$$p = 1 - \binom{8}{8} \left(\frac{8}{15}\right)^8 = 1 - \frac{8^8}{15^8} = \frac{15^8 - 8^8}{15^8}.$$

TEOREMA DI BAYES

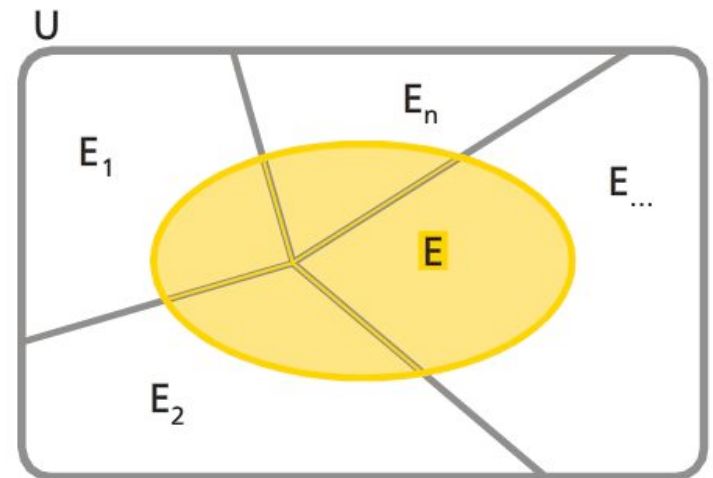
Problema

Abbiamo due urne: urna 1 (3 palline bianche e 2 nere); urna 2 (4 palline bianche e 5 nere). Calcolare la probabilità che, scegliendo a caso un'urna ed effettuando l'estrazione di una pallina, questa sia bianca.

Si ipotizza che gli n eventi siano una partizione dell'intero spazio U degli eventi. Ciò significa che essi devono essere disgiunti a due a due (mutuamente disgiunti) e che la loro unione deve coincidere con U :

$$E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall \text{ coppia } (i,j)$$

$$E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = U$$



Teorema della probabilità totale

Se E è un evento che si verifica insieme agli eventi che formano una partizione di U , la sua probabilità è data da:

$$p(E) = p(E_1) \cdot p(E | E_1) + p(E_2) \cdot p(E | E_2) + \dots + p(E_n) \cdot p(E | E_n)$$

Vediamo se al nostro problema possiamo applicare questo teorema.

Per la scelta dell'urna utilizziamo un dado: se esce un numero minore di tre, effettueremo l'estrazione dalla prima urna, altrimenti dalla seconda.

Gli eventi relativi alla scelta dell'urna sono:

E_1 = "faccia del dado con numero < 3 "

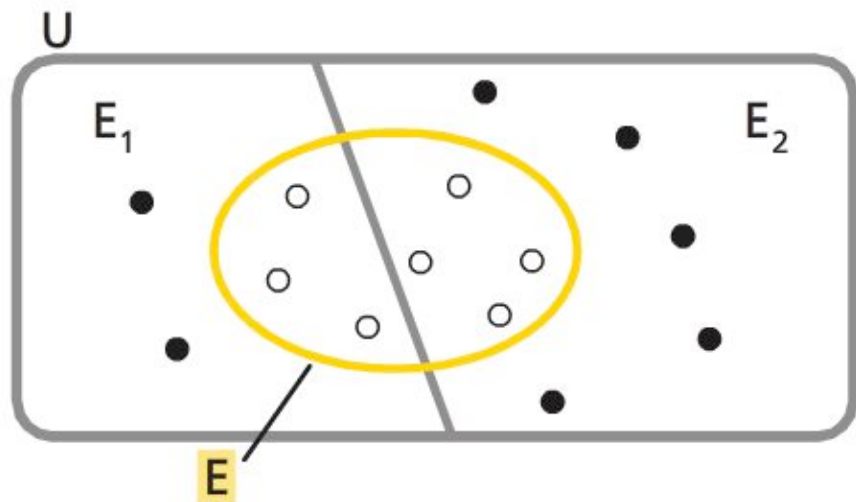
E_2 = "faccia del dado con numero ≥ 3 "

Gli eventi E_1 e E_2 sono incompatibili (disgiunti) e costituiscono tutte le possibilità del lancio del dado. Le loro probabilità sono:

$$p(E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad p(E_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

La prima condizione del teorema è soddisfatta.

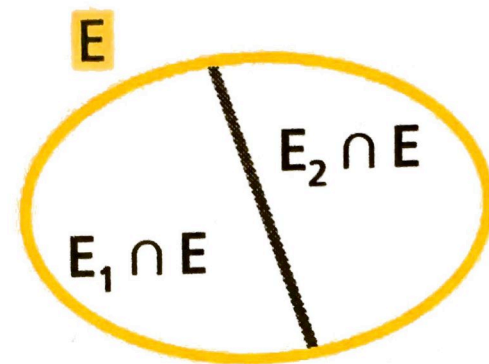
Colleghiamo gli eventi E_1 ed E_2 alle due urne. Otteniamo la seguente rappresentazione:



L'evento:

E = "estrazione pallina bianca"
 è un sottoinsieme di $U = E_1 \cup E_2$,
 unione di due eventi
 disgiunti:

- $E_1 \cap E$ = "uscita della faccia del dado con un numero < 3 ed estrazione di una pallina bianca dalla prima urna"
- $E_2 \cap E$ = "uscita della faccia del dado con un numero ≥ 3 ed estrazione di una pallina bianca dalla seconda urna"



La seconda condizione del teorema è soddisfatta.

Applichiamo il teorema della probabilità totale:

$$p(E) = p(E_1) \cdot p(E | E_1) + p(E_2) \cdot p(E | E_2)$$

Gli eventi condizionati relativi all'estrazione della pallina bianca, avendo scelto l'urna, sono:

$E | E_1$ = "estrazione pallina bianca avendo scelto la prima urna"

$E | E_2$ = "estrazione pallina bianca avendo scelto la seconda urna"

Le probabilità condizionate sono:

$$p(E | E_1) = \frac{3}{5} \quad p(E | E_2) = \frac{4}{9}$$

In definitiva:

$$p(E) = p(E_1) \cdot p(E | E_1) + p(E_2) \cdot p(E | E_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{67}{135} \cong 49,6\%$$

Problema

Abbiamo due urne: urna 1 (3 palline bianche e 2 nere); urna 2 (4 palline bianche e 5 nere). Supponendo che si sia verificato l'evento E ="estrazione di una pallina bianca", calcolare qual è la probabilità che la pallina estratta provenga dalla prima urna.

Il teorema della probabilità totale consente di calcolare la probabilità che si verifichi l'evento E (l'effetto) conoscendo le cause $E_1 \dots E_n$ che stanno alla base del suo verificarsi.

Nel nuovo problema ci troviamo di fronte a un evento E (l'effetto) che si è verificato e vogliamo calcolare la probabilità che sia stata una certa causa E_i a farlo accadere.

La risposta al nuovo problema è data dal seguente teorema:

Teorema di Bayes

La probabilità (condizionata) che, essendosi verificato un evento E (effetto), la causa che sta alla sua origine sia l'evento E_i ($i=1,2,\dots,n$), è

$$p(E_i | E) = \frac{p(E_i) \cdot p(E | E_i)}{p(E)}$$

dove $p(E)$ è la probabilità dell'evento totale:

$$p(E) = p(E_1) \cdot p(E | E_1) + p(E_2) \cdot p(E | E_2) + \dots + p(E_n) \cdot p(E | E_n)$$

Applichiamo il teorema di Bayes al nostro problema.

Nel problema precedente abbiamo calcolato:

$$p(E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$p(E | E_1) = \frac{3}{5}$$

$$p(E) = \frac{67}{135}$$

Quindi, verificatosi l'evento E ="estrazione di una pallina bianca", la probabilità che la pallina estratta provenga dalla prima urna, è data da:

$$p(E_1 | E) = \frac{p(E_1) \cdot p(E | E_1)}{p(E)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{67}{135}} = \frac{27}{67} = 0,403 = 40,3\%$$

Il teorema di Bayes si rende necessario ogni qualvolta è necessario valutare il “peso” di una causa di fronte al verificarsi di un evento (effetto)

Il teorema di Bayes trova applicazioni nel campo del controllo della qualità in: medicina, farmacia, industria ecc.

Un'industria utilizza tre macchinari che producono rispettivamente il 50%, il 30% e il 20% dei pezzi prodotti. I pezzi difettosi prodotti dai tre macchinari sono rispettivamente 3%, 4% e 5%. Avendo prelevato a caso un pezzo, calcolare la probabilità che: a) sia difettoso; b) provenga dalla primo macchinario.

Indichiamo con:

A_1 =pezzo prodotto primo macchinario; A_2 =pezzo prodotto secondo macchinario; A_3 =pezzo prodotto terzo macchinario; B =pezzo difettoso

Gli eventi A_1 , A_2 , A_3 costituiscono una partizione dell'intero spazio Ω e sono mutuamente disgiunti:

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \emptyset \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$$

Le probabilità che i pezzi siano prodotti da un certo macchinario sono:

$$p(A_1) = 50\% = 0,5 \quad p(A_2) = 30\% = 0,3 \quad p(A_3) = 20\% = 0,2$$

Le probabilità condizionate dal fatto che un pezzo difettoso sia estratto da un certo macchinario sono:

$$p(B | A_1) = 3\% = 0,03 \quad p(B | A_2) = 4\% = 0,04 \quad p(B | A_3) = 5\% = 0,05$$

a) Dal teorema della probabilità totale calcoliamo la probabilità che, estraendo a caso 1 pezzo della produzione, sia difettoso:

$$\begin{aligned} p(B) &= p(A_1) \cdot p(B | A_1) + p(A_2) \cdot p(B | A_2) + p(A_3) \cdot p(B | A_3) = \\ &= 0,5 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,2 \cdot 0,05 = 0,037 = 3,7\% \end{aligned}$$

b) Applichiamo il teorema di Bayes per calcolare la probabilità che, avendo estratto un pezzo difettoso, provenga dal primo macchinario:

$$p(A_1 | B) = \frac{p(A_1) \cdot p(B | A_1)}{p(B)} = \frac{0,5 \cdot 0,03}{0,037} = 0,4054 = 40,54\%$$

Abbiamo applicato il teorema di Bayes dato che si cerca la probabilità di una “causa” (A_1) dato l’effetto (B).

Se l'evento deve accadere: teorema probabilità totale

ESERCIZIO GUIDA

Un'urna contiene 6 palline bianche e 10 nere e una seconda urna 8 bianche e 2 nere. Si sceglie a caso un'urna e si estrae una pallina. Calcoliamo la probabilità che essa sia bianca.

Le probabilità relative alla scelta dell'urna sono:

$$p(E_1) = p(E_2) = \frac{1}{2}.$$

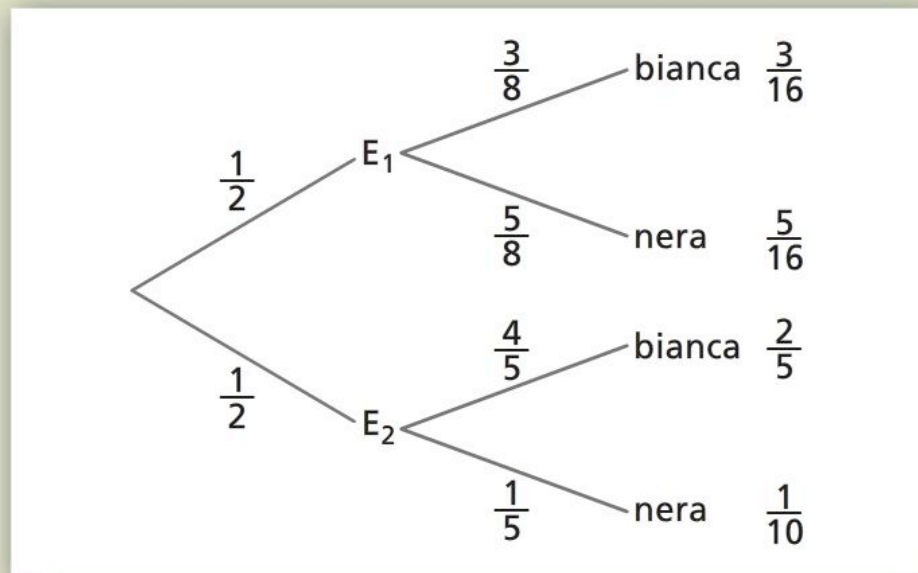
Indichiamo con B l'evento «estrazione pallina bianca». Le probabilità di estrarre una pallina bianca avendo fissato l'urna sono:

$$p(B|E_1) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}, \quad p(B|E_2) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

La probabilità di estrarre una pallina bianca scegliendo a caso un'urna è:

$$p(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{16} + \frac{2}{5} = \frac{47}{80}.$$

Possiamo rappresentare la situazione con il diagramma ad albero della figura sopra.



Se l'evento è accaduto: Teorema di Bayes

ESERCIZIO GUIDA

Abbiamo due urne. La prima contiene 4 palline bianche e 6 nere e la seconda 5 bianche e 4 nere. Si sceglie a caso un'urna estraendo una carta da un mazzo di 40. Se la carta è una figura viene scelta la prima urna, altrimenti la seconda. Sapendo che la pallina estratta è nera, calcola la probabilità che essa provenga dalla seconda urna.

Le probabilità relative alla scelta dell'urna sono:

$$p(E_1) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}, \quad p(E_2) = \frac{7}{10}.$$

Le probabilità di estrarre una pallina nera avendo fissato l'urna sono:

$$p(E | E_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \quad p(E | E_2) = \frac{4}{9}.$$

Essendo

$$p(E) = p(E_1) \cdot p(E | E_1) + p(E_2) \cdot p(E | E_2), \quad p(E) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{5} + \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{9}{50} + \frac{14}{45} = \frac{221}{450},$$

la probabilità che, avendo estratto una pallina nera, essa provenga dalla seconda urna è:

$$p(E_2 | E) = \frac{p(E_2) \cdot p(E | E_2)}{p(E)} =$$
$$= \frac{\frac{7}{10} \cdot \frac{4}{9}}{\frac{221}{450}} = \frac{14}{45} \cdot \frac{450}{221} = \frac{140}{221}.$$

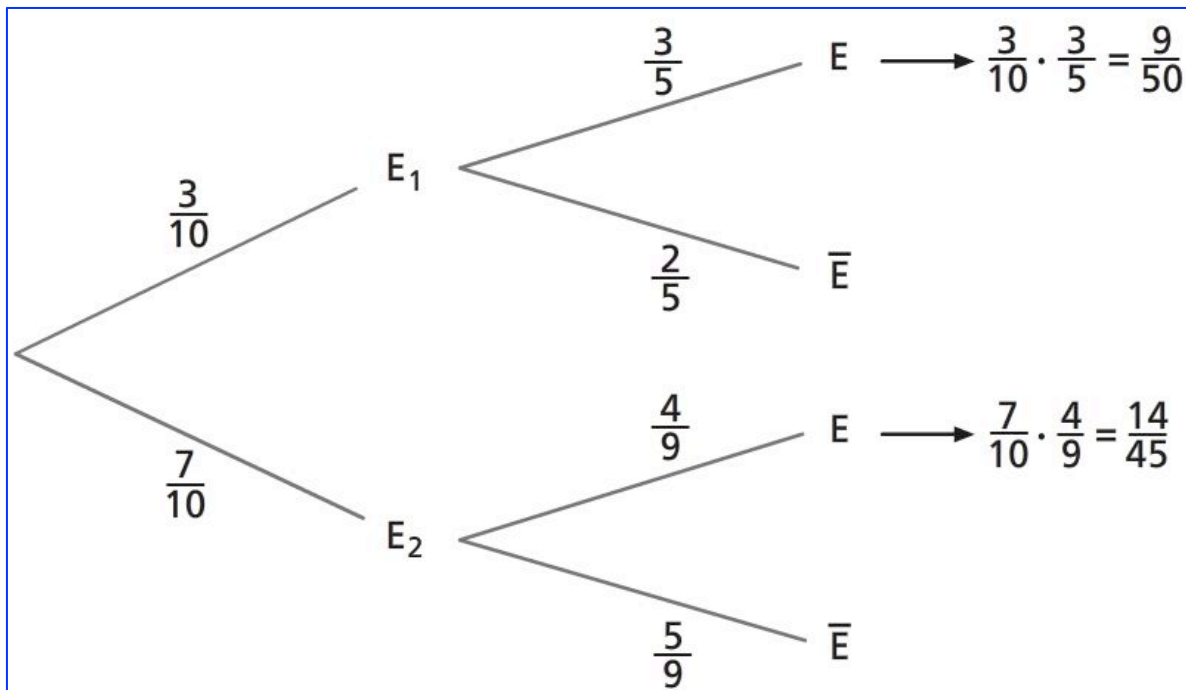


diagramma
ad albero