

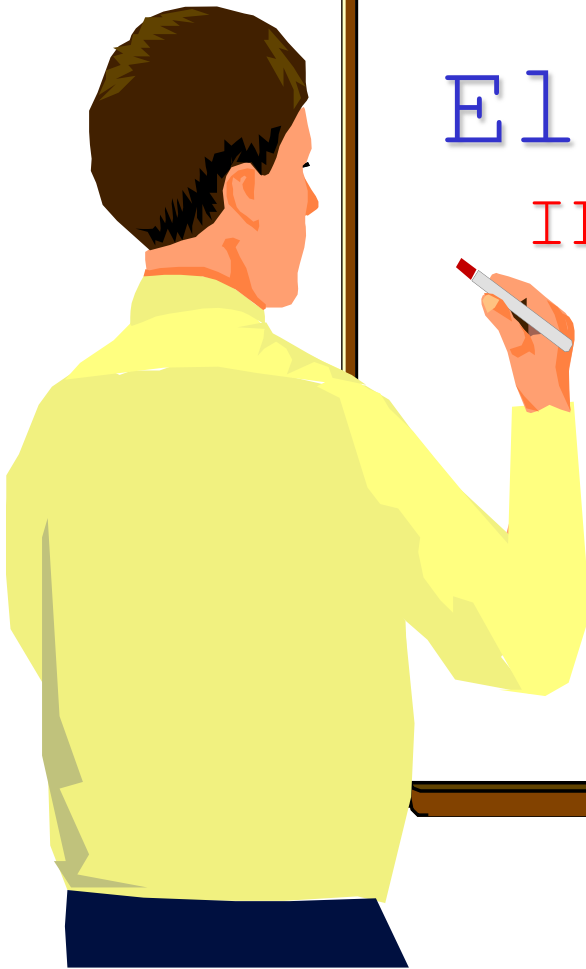
FISICA

ElettroMagnetismo

IL POTENZIALE ELETTRICO

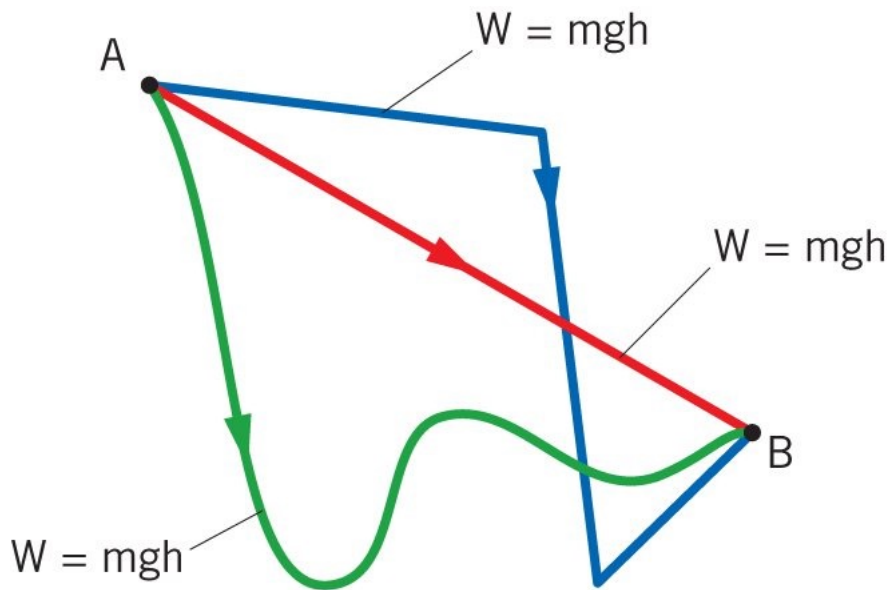
Autore: prof. *Pappalardo Vincenzo*

docente di **Matematica e Fisica**



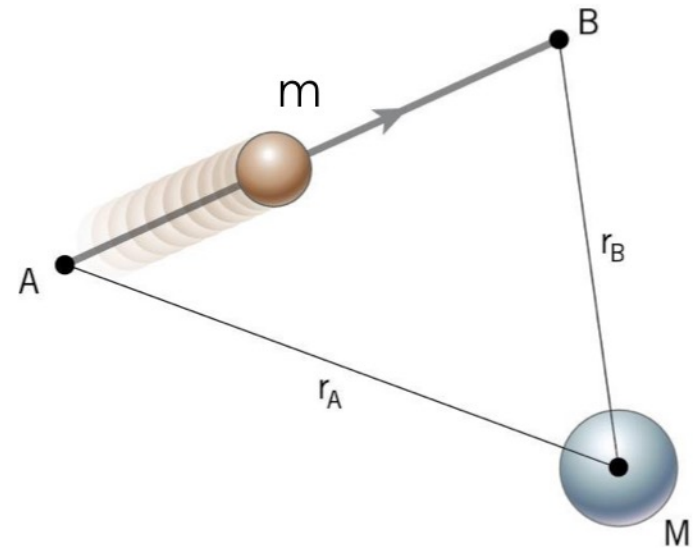
ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA

L'energia potenziale può essere introdotta per tutte le forze conservative.



Una forza si dice **conservativa** se il lavoro che essa fa su un corpo, nel spostarlo da un punto A a un punto B, dipende soltanto dagli estremi A e B, ma non dal particolare percorso seguito durante lo spostamento.

Consideriamo un sistema fisico, per esempio una massa m che si sposta da A a B mentre subisce la forza gravitazionale (conservativa) $\mathbf{F}$ dovuta alla massa M . La variazione di energia potenziale subita dalla massa m è definita come:



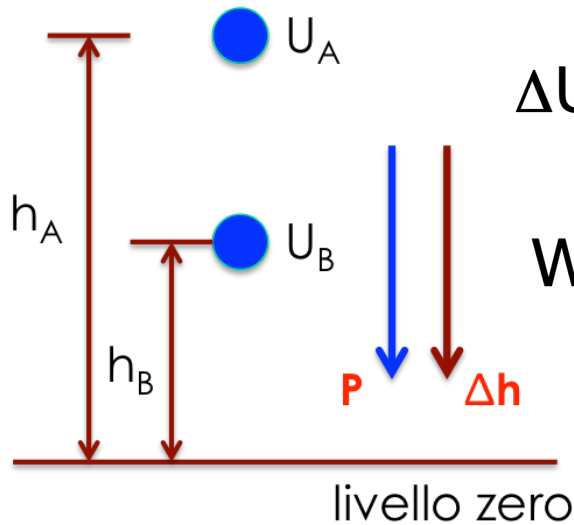
La **variazione di energia potenziale** $\Delta U = U_B - U_A$ è definita come l'opposto del lavoro fatto dalla forza $\mathbf{F}$ durante il passaggio dalla posizione A alla posizione B:

variazione di energia
potenziale (J)

$$\Delta U = -W_{A \rightarrow B}$$

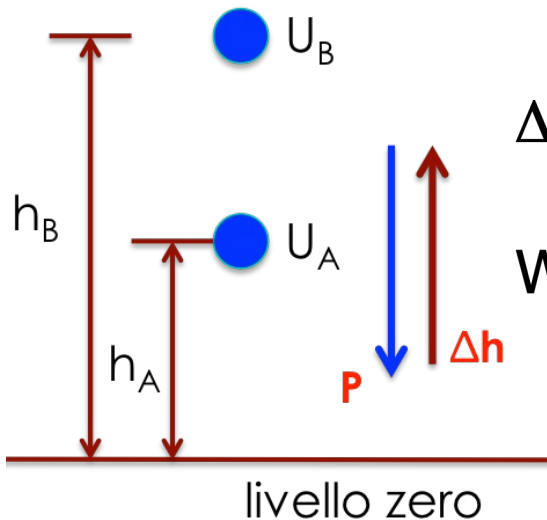
lavoro compiuto
dalla forza conservativa (J)

Infatti, consideriamo le seguenti situazioni:



$$\Delta U = U_B - U_A = mg(h_B - h_A) \xrightarrow{h_B < h_A} \Delta U < 0$$

$$W_{A \rightarrow B} = P \cdot \Delta h \cdot \cos 0^\circ \xrightarrow{\cos 0^\circ = 1} W_{A \rightarrow B} > 0$$



$$\Delta U = U_B - U_A = mg(h_B - h_A) \xrightarrow{h_B > h_A} \Delta U > 0$$

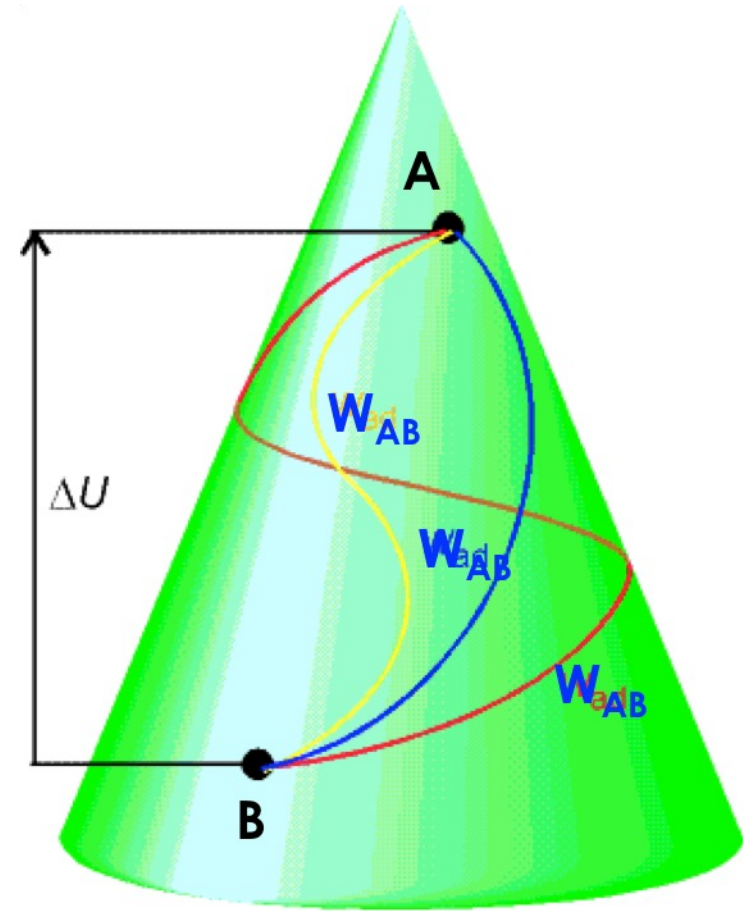
$$W_{A \rightarrow B} = P \cdot \Delta h \cdot \cos 180^\circ \xrightarrow{\cos 180^\circ = -1} W_{A \rightarrow B} < 0$$

In entrambi i casi:

$$\Delta U = - W_{A \rightarrow B}$$

Generalizzando, l'energia potenziale fa parte delle cosiddette **funzioni di stato**.

Una **FUNZIONE DI STATO** è una grandezza fisica dipendente soltanto dalle variabili (la posizione nel nostro caso) che servono per descrivere gli stati A e B del sistema fisico, e non dal processo (la traiettoria nel nostro caso) attraverso il quale il sistema passa da A a B.



$$\Delta U = U_B - U_A$$

Conclusione: il *campo gravitazionale* è un *campo conservativo*, ed è possibile introdurre l'energia potenziale gravitazionale:

The diagram shows the formula for gravitational potential energy, $U(r) = -G \frac{mM}{r}$, centered within a yellow rectangular box. Five lines extend from the box to labels: one from the $U(r)$ term to 'energia potenziale gravitazionale (J)' at the top left; one from the G constant to 'costante G (N·m²/kg²)' at the bottom left; one from the m mass to 'massa del primo corpo (kg)' at the top right; one from the M mass to 'massa del secondo corpo (kg)' at the middle right; and one from the r distance to 'distanza (m)' at the bottom right.

$$U(r) = -G \frac{mM}{r}$$

energia potenziale gravitazionale (J)

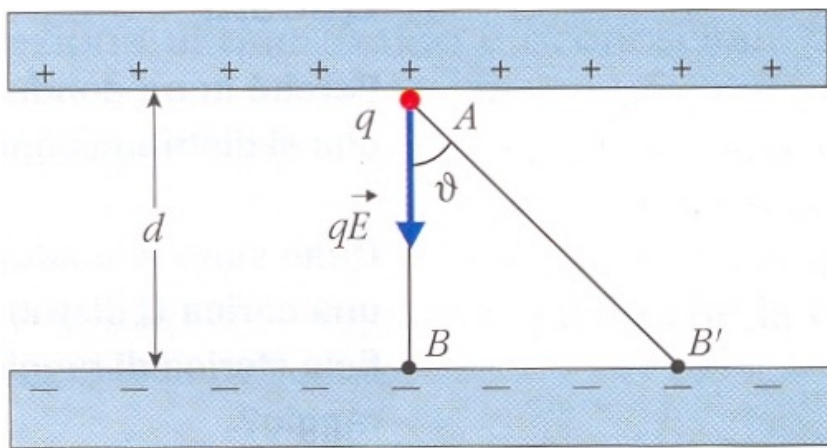
costante G (N·m²/kg²)

massa del primo corpo (kg)

massa del secondo corpo (kg)

distanza (m)

Per stabilire se il campo elettrico gode delle stesse proprietà, iniziamo con lo studio del lavoro elettrico.

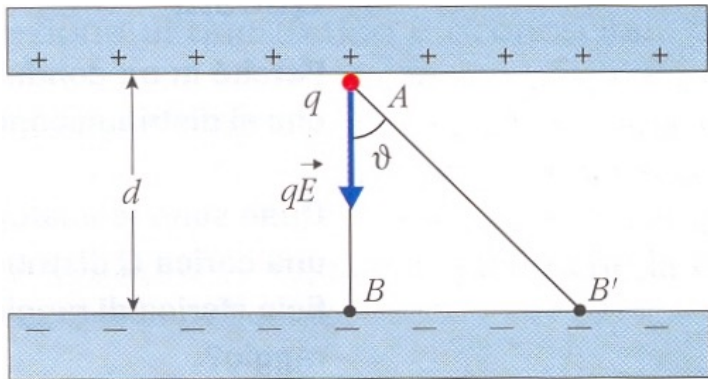


Consideriamo il campo elettrico uniforme di un condensatore piano e supponiamo che una carica q positiva si sposti dalla piastra positiva alla piastra negativa.

Se la carica viene abbandonata da ferma nel punto A , sotto l'azione della forza elettrica costante si sposta lungo la linea di forza AB . Se d è la distanza fra le piastre, il lavoro della forza elettrica è:

$$(1) \quad L = \vec{F} \cdot \vec{d} = qEd$$

formalmente identica a: $L = Fh = mgh$



E' facile verificare che il lavoro del campo elettrico del condensatore espresso dalla (1) è lo stesso qualunque sia il cammino AB che congiunge le due piastre.

Infatti, se la carica segue il percorso AB'B, il lavoro eseguito su di essa durante il tratto da A a B' è:

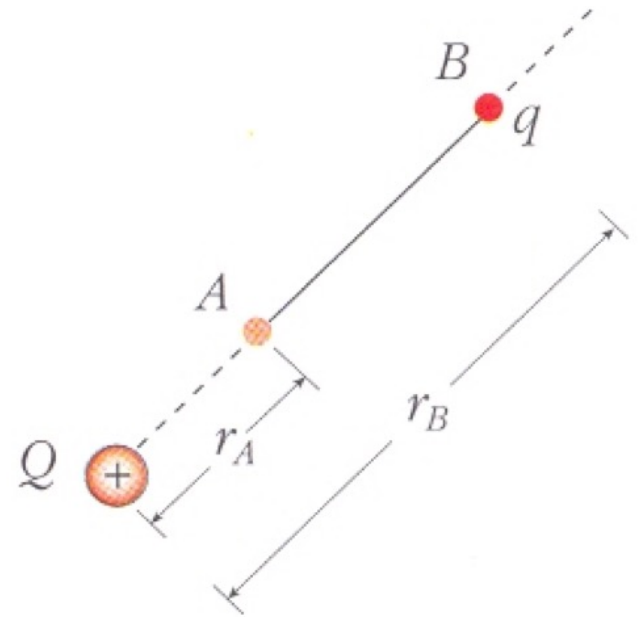
$$L = qE \overline{AB'} \cos \vartheta$$

Il lavoro da B' a B è invece nullo $L=0$, essendo forza e spostamento perpendicolari ($\cos 90^\circ = 0$).

Poiché: $AB' = d / \cos \vartheta \rightarrow L' = L$

Il lavoro è indipendente dalla traiettoria seguita e quindi il campo elettrico prodotto da un condensatore è un **campo conservativo**.

Il calcolo del lavoro si complica quando prendiamo in esame un campo elettrico non uniforme nello spazio, come quello generato da una carica puntiforme Q .



Si dimostra, comunque, che se una carica di prova q si sposta da A a B, il lavoro compiuto dalla forza (conservativa) del campo elettrico generato da Q sulla carica di prova q è dato da:

$$L = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Le cariche elettriche devono essere assunte con il loro segno.

Il lavoro compiuto dalla forza del campo elettrico sulla carica di prova è indipendente dalla traiettoria seguita per unire i punti A e B, quindi il campo elettrico prodotto da una carica puntiforme è un **campo conservativo**.

Ma questa proprietà è generale, poiché ogni distribuzione di carica è formata da un insieme di cariche elementari assimilabili a cariche puntiformi, ciascuna delle quali produce singolarmente un campo conservativo.

Grazie al principio di sovrapposizione possiamo affermare in generale che:

Il campo elettrico di una qualsiasi distribuzione di carica è un *campo conservativo*.

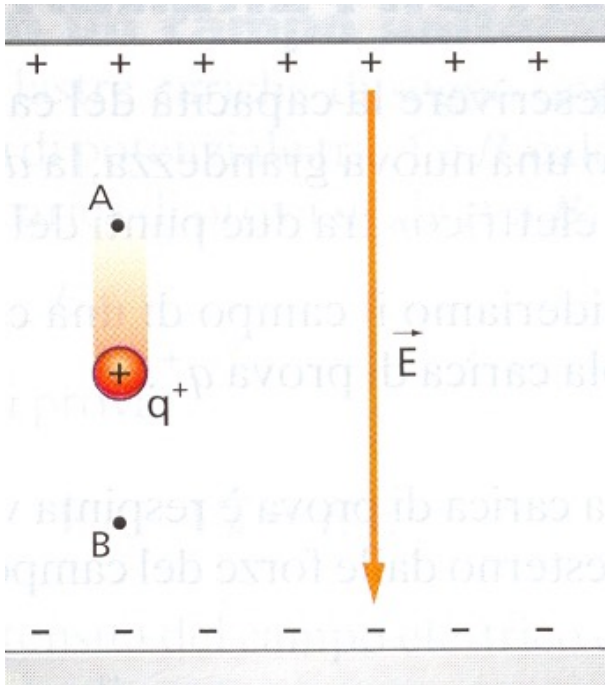
Essendo il campo elettrico conservativo, al pari di quello gravitazionale, è possibile introdurre una grandezza fisica U , chiamata **energia potenziale elettrica della carica q** :

ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA

E' una funzione delle coordinate posizionali, tale che la differenza $U_A - U_B$ dei valori che essa assume in due punti A e B dello spazio esprime il lavoro L compiuto dalla forza del campo elettrico quando una carica di prova q si sposta da A a B lungo un qualsiasi percorso:

$$\Delta U = U_A - U_B = -L$$

L'espressione analitica dell'energia potenziale dipende dalla particolare forma del campo elettrico.

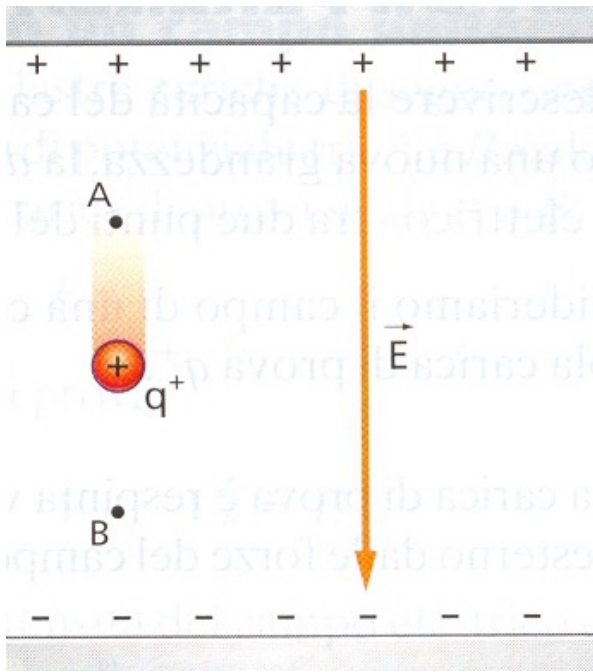


Energia potenziale nel campo elettrico generato da un condensatore

L'energia potenziale elettrica di una carica di prova q in un punto a distanza x dalla piastra negativa è:

$$U = qEx$$

Se una carica positiva q si sposta da A sulla piastra positiva a B sulla piastra negativa, il campo elettrico compie un lavoro positivo ($L=qEx$) e l'energia potenziale elettrica diminuisce della stessa quantità ($\Delta U=-L$).

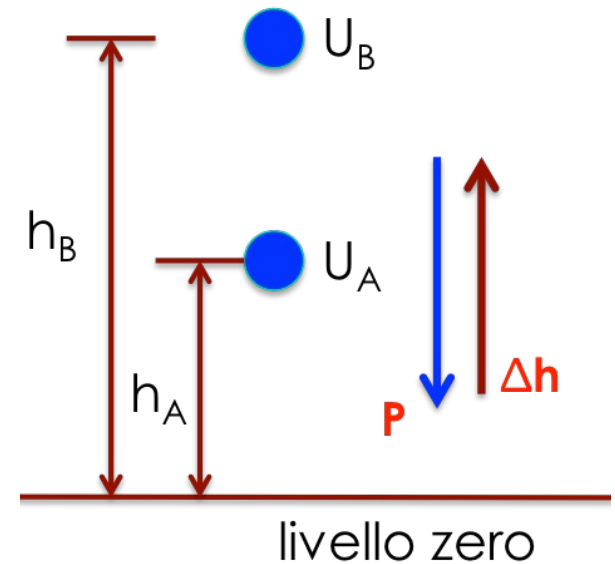
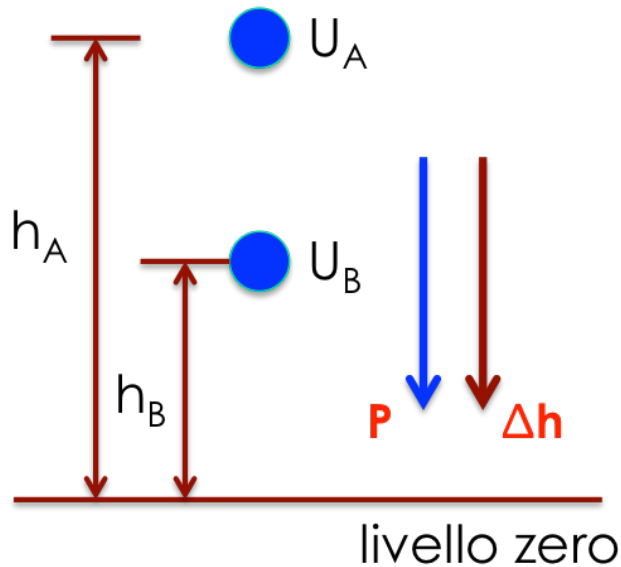


Viceversa, per portare una carica positiva dalla piastra negativa alla piastra positiva, è necessario compiere un lavoro (negativo) contro la forza del campo e l'energia potenziale elettrica aumenta di una quantità pari al lavoro speso.

La carica q^+ , quando è in A, ha un'energia potenziale elettrica maggiore che in B, per cui questa energia potenziale si può trasformare in cinetica.

Per una carica negativa avviene il contrario: è necessario compiere un lavoro dall'esterno per portarla dalla piastra positiva alla piastra negativa.

E' la stessa situazione di una massa m che cade liberamente nel campo gravitazionale terrestre da A a B (l'energia potenziale diminuisce), oppure viene portata da B ad A (l'energia potenziale aumenta), compiendo un lavoro contro la forza del campo.



$$\Delta U = - W_{A \rightarrow B}$$

L'energia potenziale nel campo elettrico non uniforme nello spazio, come quello generato da una carica puntiforme Q , è data da:

Energia potenziale nel campo elettrico generato da una carica puntiforme

L'energia potenziale elettrica di una carica di prova q in un punto a distanza r dalla carica Q che genera il campo è:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}$$

ed esprime il lavoro che la forza del campo compie quando la carica di prova si sposta dal punto considerato fino all'infinito lungo una qualsiasi traiettoria.

Come nel caso gravitazionale, anche per l'energia potenziale elettrica la convenzione più comune nella scelta del livello zero, consiste nel porre $U(r)=0$ quando le due cariche sono poste a distanza infinita.

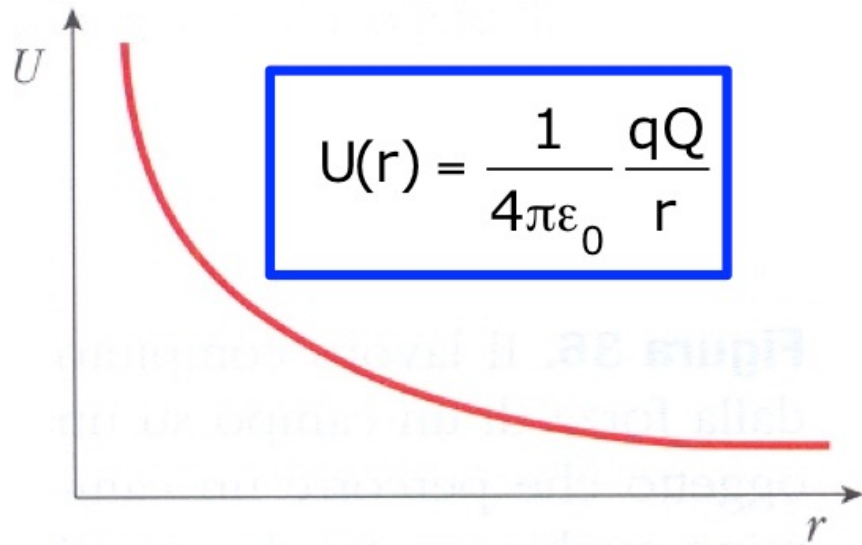


Grafico dell'energia potenziale elettrica in funzione di r nel caso in cui le due cariche q e Q siano di segno concorde.

Al diminuire della distanza, l'energia potenziale elettrica aumenta, perché per avvicinare le cariche occorre spendere lavoro contro le forze del campo.

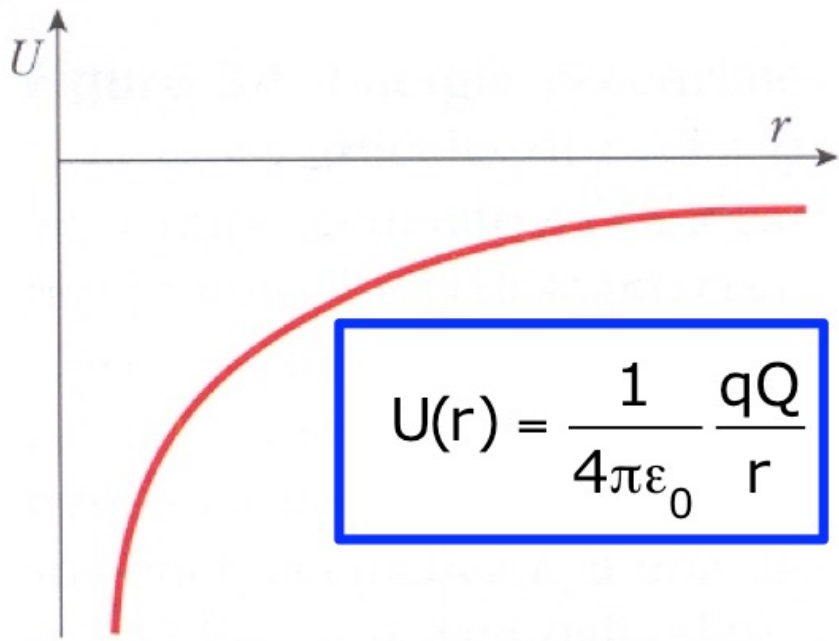
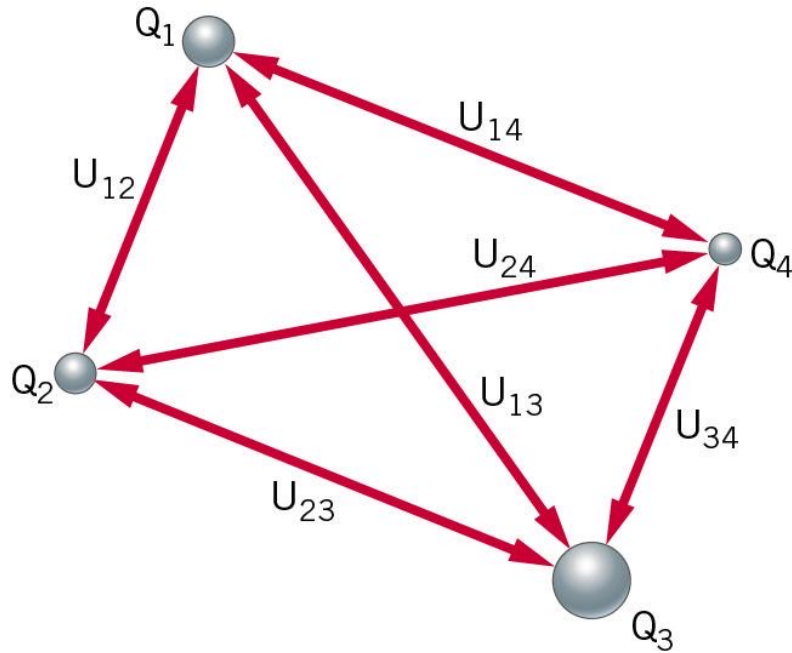


Grafico dell'energia
potenziale elettrica quando
le due cariche sono
discordi.

L'energia potenziale elettrica è negativa e aumenta, tendendo a zero, all'aumentare di r . Infatti la forza elettrica è attrattiva e, dall'esterno, si spende lavoro per allontanare le cariche.

Nel caso di più cariche puntiformi, si ha:



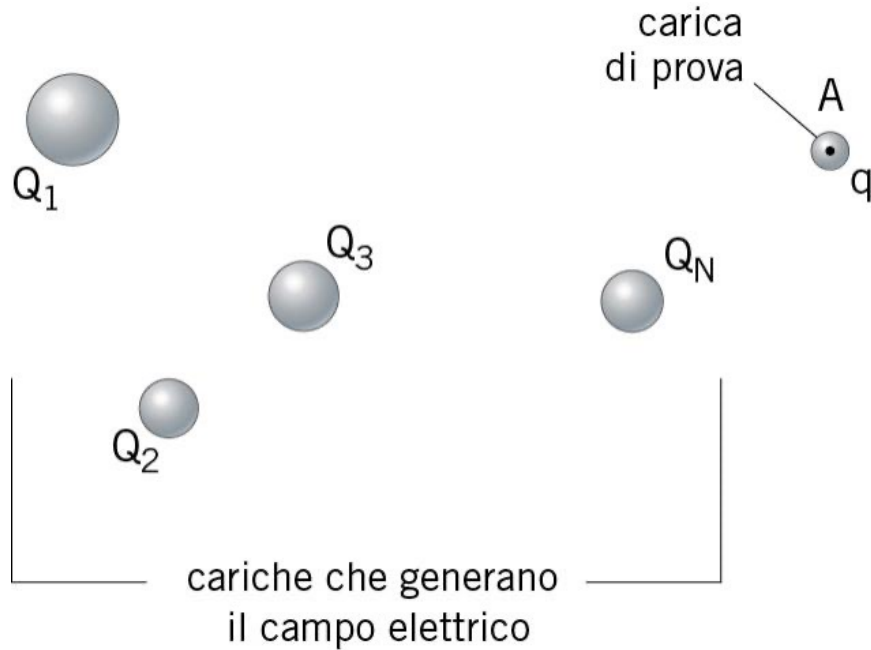
L'energia potenziale elettrica del sistema di cariche è data dalla somma algebrica delle energie potenziali elettriche che si ottengono scegliendo le cariche a coppie in tutti i modi possibili.

Nell'esempio illustrato, otteniamo:

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34}$$

I sei contributi sono alcuni positivi, altri negativi, a seconda dei segni delle cariche.

POTENZIALE ELETTRICO



L'energia potenziale elettrica in A del sistema di cariche è direttamente proporzionale alla carica di prova q in quel punto.

Così come abbiamo fatto per il campo elettrico (dove abbiamo definito il vettore **E** che dipende dalle cariche ma non dalla carica di prova), definiamo una nuova grandezza, in questo caso scalare, *il potenziale elettrico o tensione*, indipendente dalla carica di prova q .

potenziale elettrico

Il potenziale elettrico nel punto A è uguale al rapporto tra l'energia potenziale U_A , dovuta all'interazione delle cariche che generano il campo con la carica di prova q posta in A, e la stessa carica di prova q :

Diagram illustrating the formula for electric potential:

$$V_A = \frac{U_A}{q}$$

Labels:

- potenziale elettrico (J/C o V) points to V_A
- energia potenziale elettrica (J) points to U_A
- carica di prova (C) points to q

Come vedremo tra poco: il potenziale elettrico V_A è indipendente dalla presenza della carica di prova q in A e dipende solo dalle cariche che generano il campo elettrico e dal punto A.

La grandezza veramente significativa, dal punto di vista fisico, è la **differenza di potenziale elettrico** fra due punti:

differenza di potenziale elettrico

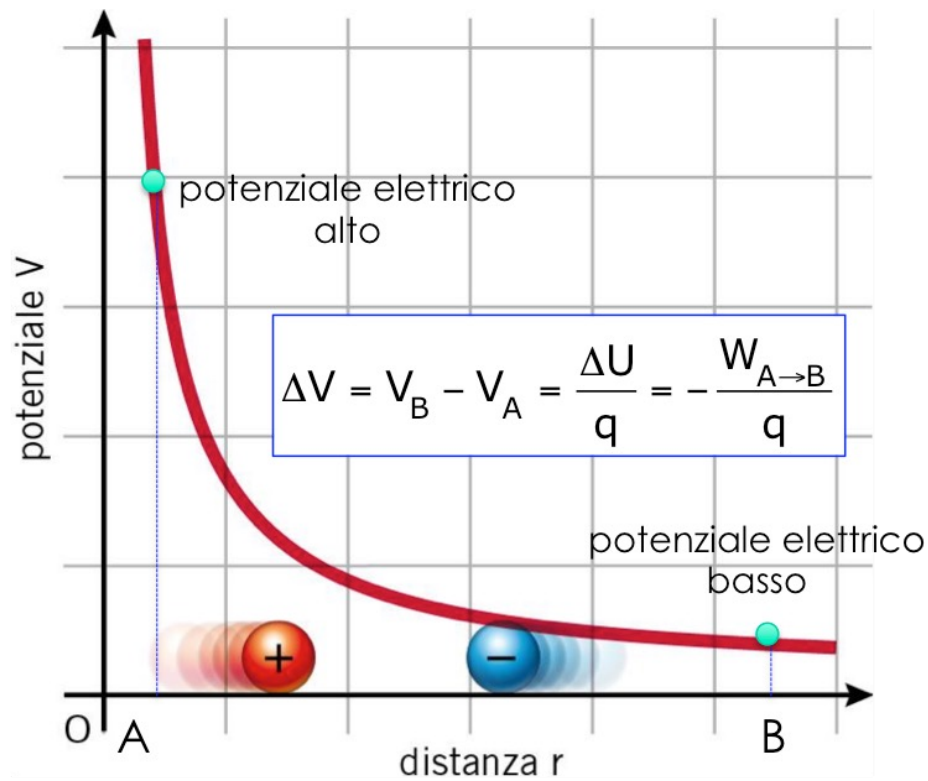
La differenza di potenziale $V_A - V_B$ fra due punti A e B in un campo elettrico è il rapporto fra il lavoro compiuto dalla forza del campo su una carica di prova q quando questa si sposta da A a B e la carica q stessa:

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q} = - \frac{W_{A \rightarrow B}}{q} \quad [\text{volt} = \text{V}]$$

definizione di volt: tra due punti c'è una differenza di potenziale di 1V quando, spostando una carica di 1C da un punto all'altro, l'energia potenziale cambia di 1J.

In funzione del volt possiamo definire una nuova unità di misura del lavoro, usata soprattutto nei problemi di fisica atomica, **l'elettronvolt** (eV): 1eV è, in valore assoluto, il lavoro compiuto dalla forza del campo elettrico su un elettrone che si sposta da un punto A a un punto B fra i quali esista una differenza di potenziale (d.d.p.) di 1 V:

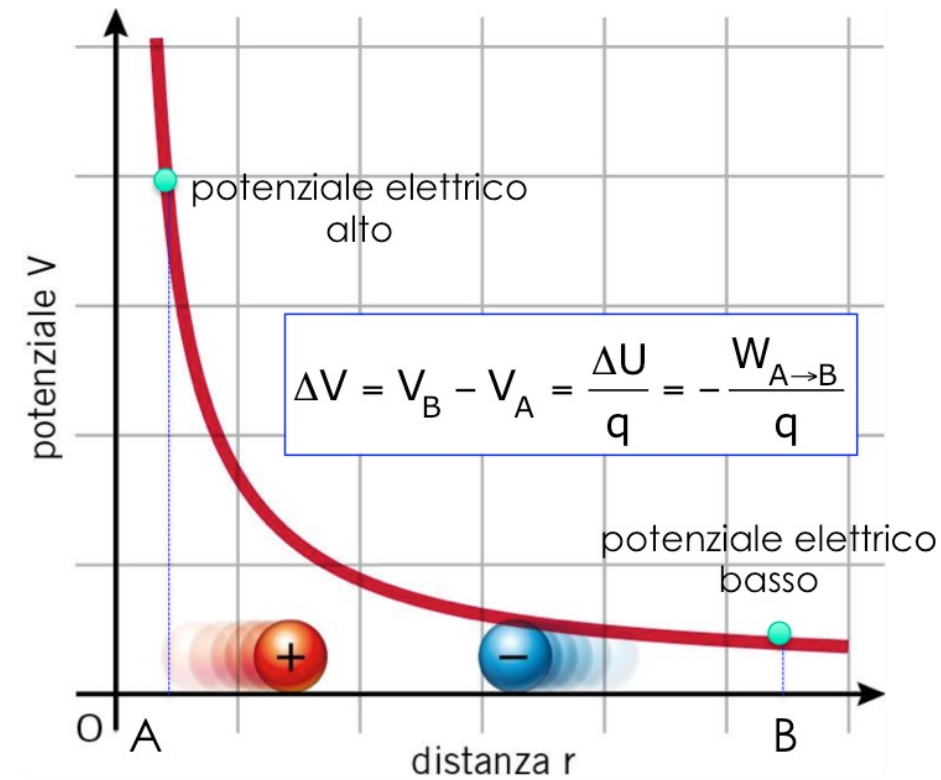
$$L = e\Delta V = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C} \cdot 1\text{V} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{eV}$$



Se la forza elettrica compie un lavoro positivo ($W_{A \rightarrow B} > 0$) mentre la carica positiva q si sposta da A verso B, questo spostamento può avvenire spontaneamente.

Infatti, la differenza di potenziale $\Delta V = V_B - V_A$ è negativa, ($V_A > V_B$) :

il moto naturale delle cariche positive è da punti a potenziale maggiore verso punti a potenziale minore.



Per le cariche negative vale la proprietà opposta: il lavoro $W_{A \rightarrow B}$ è positivo quando la differenza di potenziale è positiva.

il moto naturale delle cariche negative è da punti a potenziale minore verso punti a potenziale maggiore.

Potenziale elettrico carica puntiforme

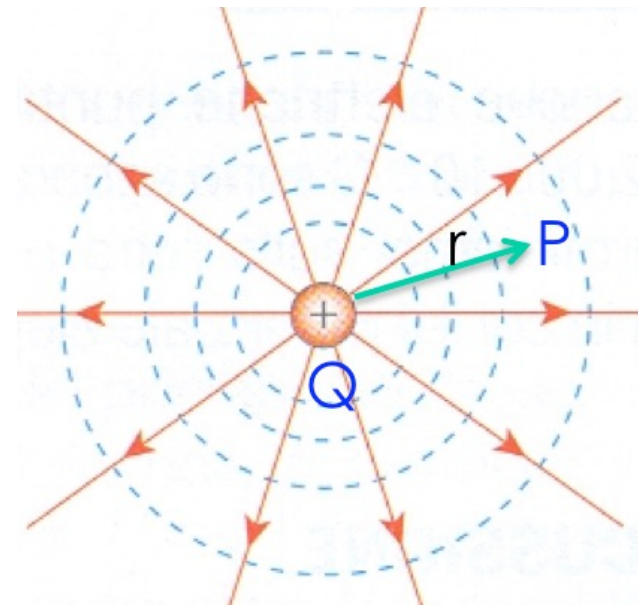
Tenendo presente
l'espressione dell'energia
potenziale:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{qQ}{r}$$

e la definizione di potenziale
elettrico:

$$V(r) = \frac{U(r)}{q}$$

si ottiene:



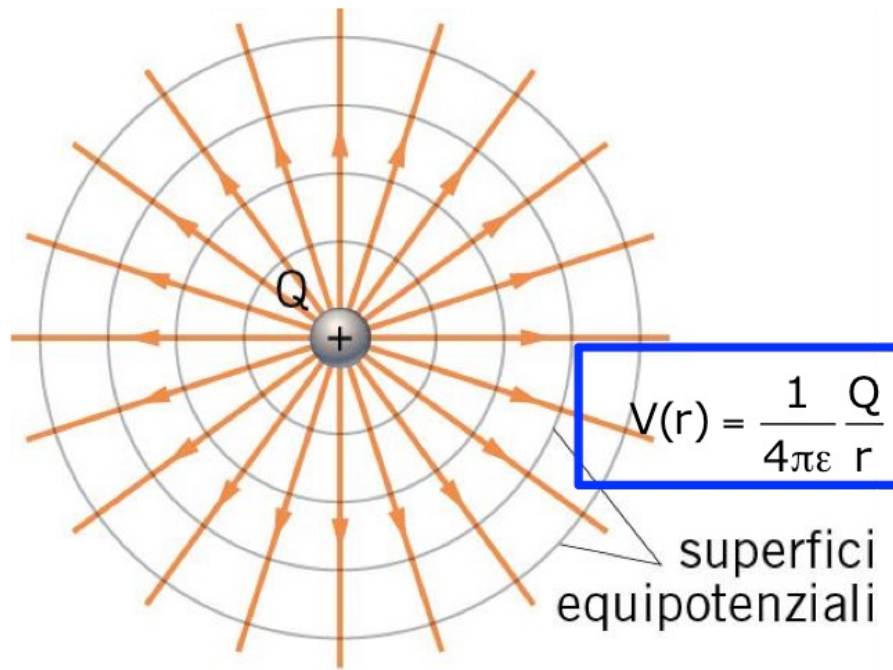
Il potenziale elettrico
generato da una carica
puntiforme Q in un punto
P a distanza r da essa:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r}$$

Il potenziale elettrico è positivo o negativo a seconda del segno della carica ed è nullo nei punti che sono infinitamente distanti da Q .

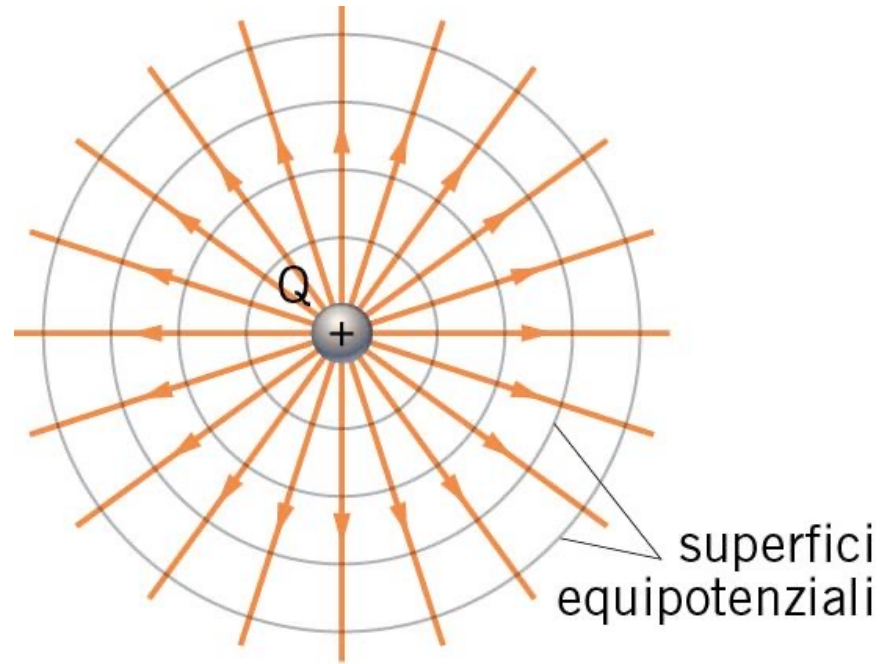
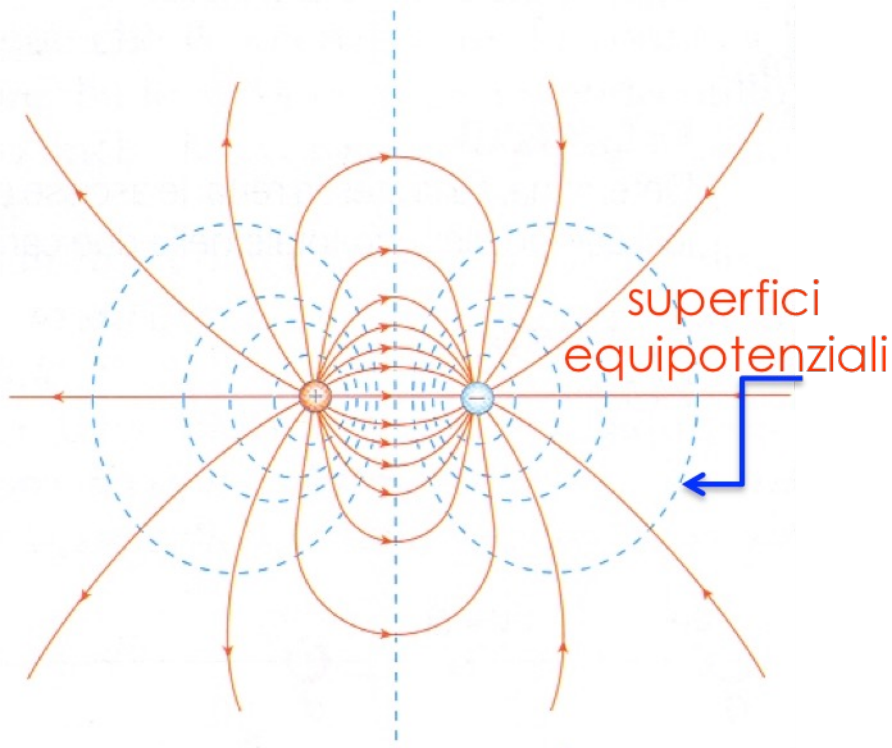
Principio di sovrapposizione - Se il campo elettrico è generato da più cariche, il potenziale elettrico nel punto P è la somma algebrica dei potenziali che si misurerebbero in P se ciascuna delle cariche che generano il campo fosse presente da sola.

SUPERFICI EQUIPOTENZIALI



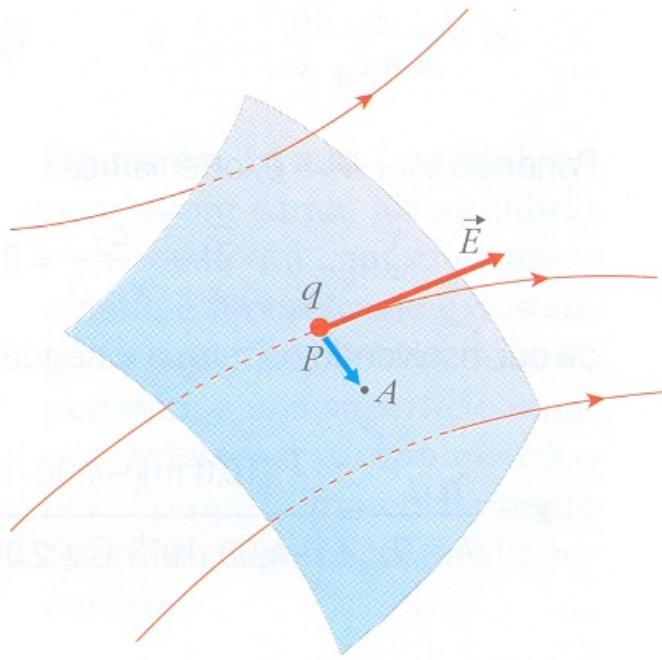
Il potenziale ha lo stesso valore in tutti i punti equidistanti dalla carica Q , cioè su tutte le superfici sferiche aventi il centro nel punto in cui è localizzata la carica.

Tali superfici (che possono avere forma qualsiasi) sono dette **superfici equipotenziali**, poiché su ciascuna di esse tutti i punti sono caratterizzati dallo stesso valore del potenziale elettrico.



In figura sono rappresentate le linee di forza e le superfici equipotenziali del campo elettrico generato da una e da due cariche. Dall'esame della figura si vede che:

le linee di forza sono perpendicolari in ogni punto alla superficie equipotenziale passante per quel punto. Tale proprietà è valida in generale.



Infatti, il lavoro compiuto dalla forza elettrica per spostare una carica q da un punto P a un altro punto A sulla superficie equipotenziale passante per P è:

$$L = q(V_P - V_A)$$

Essendo $V_P = V_A$, è anche $L=0$, cioè la forza elettrica, e quindi anche il campo elettrico E nel punto P , è perpendicolare allo spostamento ($\cos 90^\circ = 0$ e quindi $L=0$).

RELAZIONE TRA POTENZIALE E CAMPO ELETTRICO

Abbiamo visto che se conosciamo il campo elettrico $\mathbf{E}$ (e quindi la forza $\mathbf{F}=q\mathbf{E}$ che agisce su una carica di prova q) possiamo calcolare il potenziale elettrico in una certa zona di spazio.

Vogliamo adesso mostrare che:

è possibile calcolare il campo elettrico in un punto dello spazio se si conosce l'andamento del potenziale elettrico nei dintorni di quel punto (e viceversa).

$$\mathbf{E} = - \frac{\Delta V}{\Delta s} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$$

Il modulo E del vettore campo elettrico è positivo perché si è scelta una differenza di potenziale ΔV che è negativa.

In definitiva: conoscendo il campo elettrico è possibile calcolare il potenziale e, al contrario, conoscendo il potenziale è possibile calcolare il campo elettrico.

Le due descrizioni della realtà fisica, basate sull'uso di queste due quantità (una vettoriale e l'altra scalare), sono equivalenti tra loro.

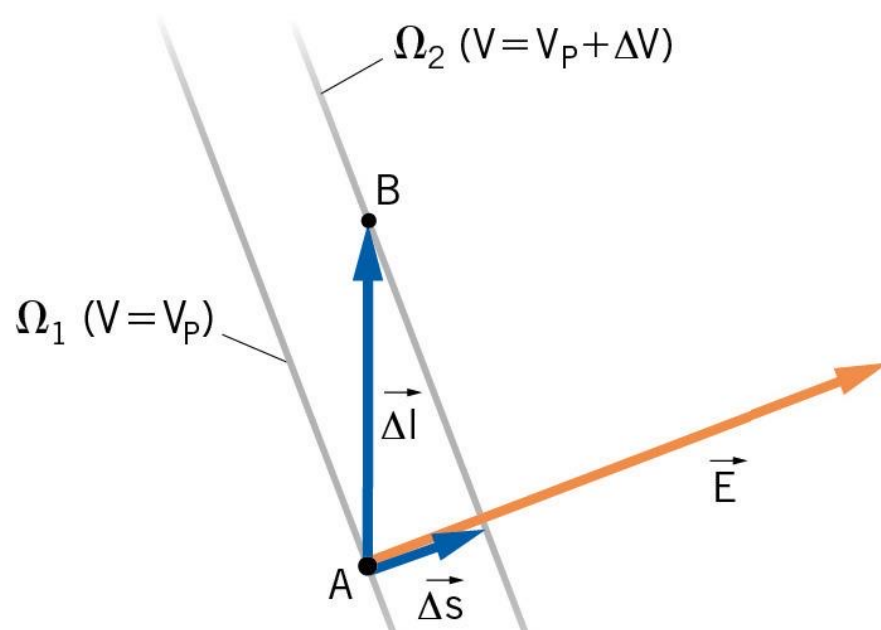
dimostrazione della relazione

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta s}$$

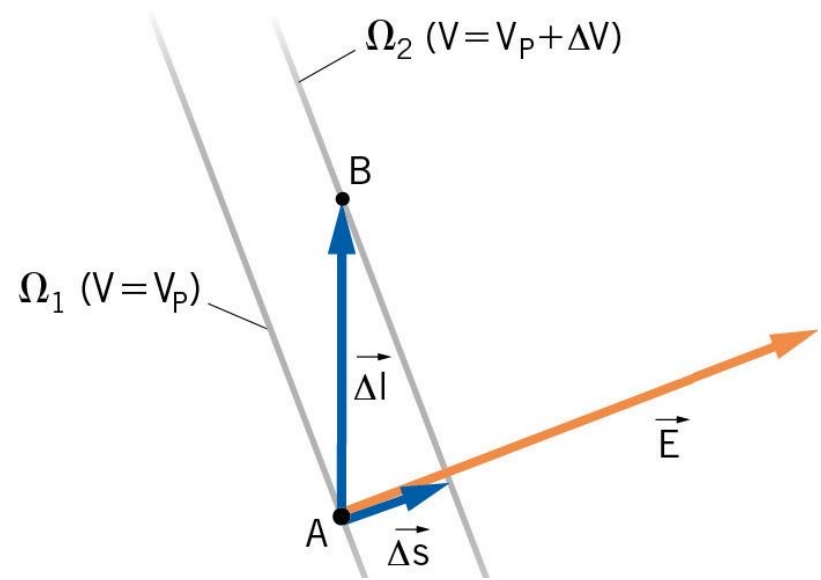
Consideriamo una zona di spazio abbastanza piccola da potere considerare uniforme il campo elettrico al suo interno.

In essa prendiamo un punto A, in cui il potenziale vale V_A , e la superficie equipotenziale Ω_1 che contiene A.

Poiché il campo elettrico è uniforme, le superfici equipotenziali appaiono piane e parallele tra loro.



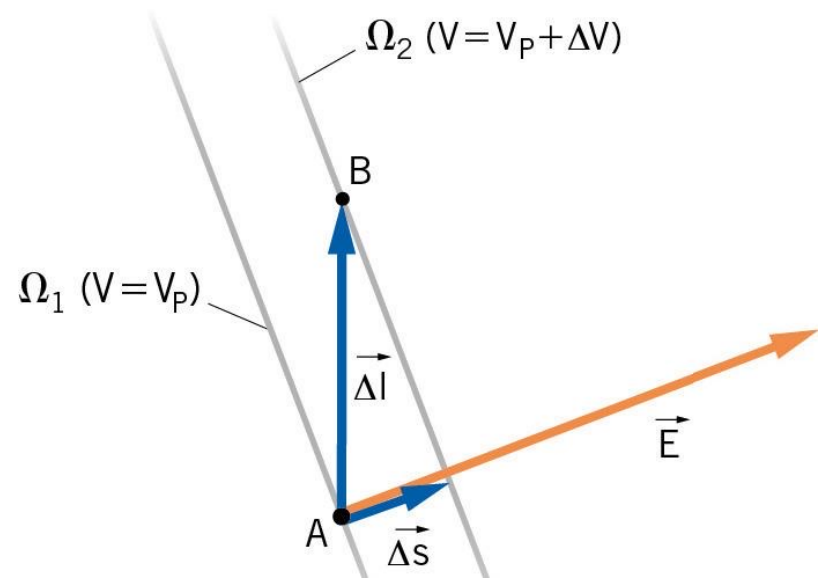
Ciò ci permette di determinare la direzione e il verso del vettore campo elettrico $\mathbf{E}$ nel punto A. Infatti, la direzione di $\mathbf{E}$ è quella perpendicolare alle superfici equipotenziali e il suo verso punta nel senso in cui il potenziale diminuisce.



Per determinare l'intensità di $\mathbf{E}$, consideriamo una seconda superficie equipotenziale su cui il potenziale elettrico vale $V_A + \Delta V$, dove ΔV è una differenza di potenziale infinitesima e negativa.

Così Ω_2 si trova, rispetto a Ω_1 , dalla parte in cui punta $\vec{E}$, a una distanza Δs da Ω_1 .

ΔV è una quantità nota, dal momento che abbiamo fatto l'ipotesi di conoscere l'andamento del potenziale elettrico nei dintorni di A.



Ora spostiamo una carica di prova positiva q dal punto A a un punto B di Ω_2 .

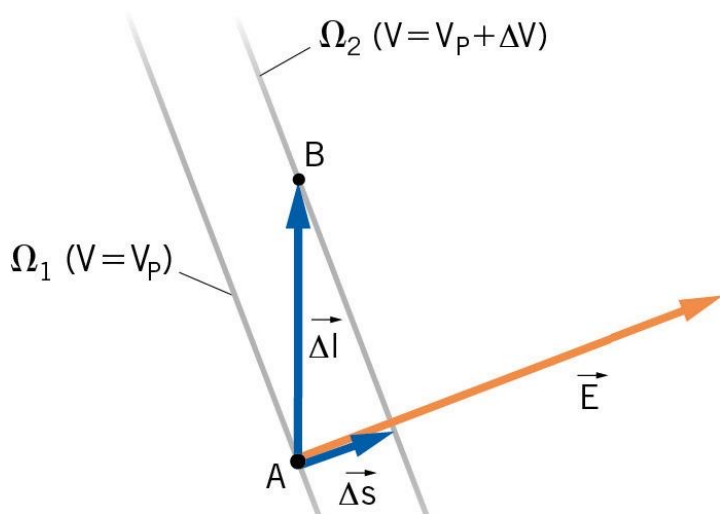
Il punto A appartiene alla superficie potenziale Ω_1 ; il punto B a Ω_2 , a cui corrisponde un potenziale leggermente minore rispetto a Ω_1 .

Il lavoro $W_{A \rightarrow B}$ fatto dalla forza elettrica $\mathbf{F}$ durante tale spostamento $\Delta \mathbf{l}$ è:

$$W_{A \rightarrow B} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\Delta \mathbf{l}} = q \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\Delta \mathbf{l}}$$

La definizione di differenza di potenziale, ci permette di scrivere:

$$\Delta V = - \frac{W_{A \rightarrow B}}{q} = - \frac{q \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\Delta \mathbf{l}}}{q} = - \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\Delta \mathbf{l}}$$



Dalla figura notiamo che la proiezione $\Delta \mathbf{l}_{//}$ del vettore $\Delta \mathbf{l}$ sul $\mathbf{E}$ non è altro che la distanza tra le due superfici equipotenziali:

$$\Delta \mathbf{l}_{//} = \Delta \mathbf{s}$$

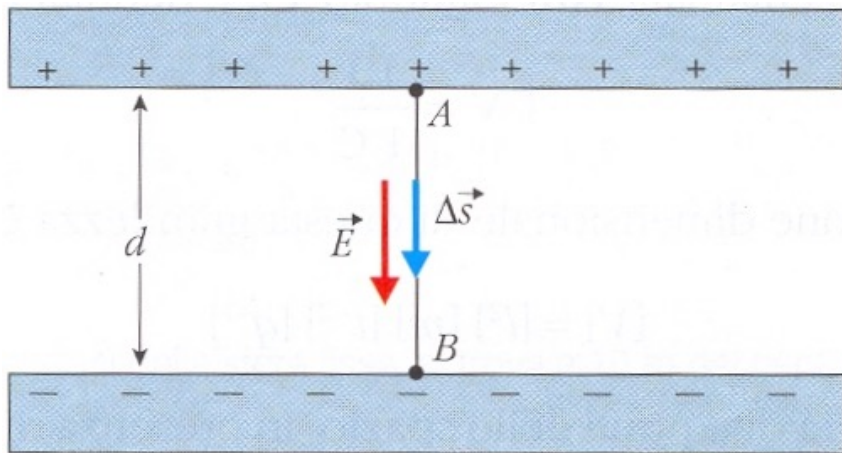
Possiamo quindi scrivere:

$$\vec{E} \cdot \vec{\Delta l} = E \Delta l_{//} = E \Delta s$$

Allora si ottiene:

$$\Delta V = -\vec{E} \cdot \vec{\Delta l} = -E \Delta s \xrightarrow[\text{dimostrare}]{\text{come volevasi}} E = -\frac{\Delta V}{\Delta s}$$

Esempio: condensatore piano



Se E è il modulo del campo elettrico e d la distanza fra le piastre del condensatore, indicando con A e con B due punti posti rispettivamente sulla piastra positiva e su quella negativa, otteniamo:

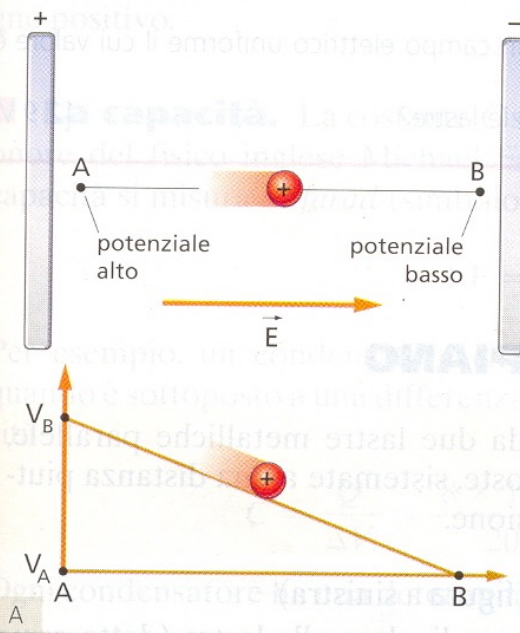
$$V_A - V_B = Ed$$

Tale formula la possiamo utilizzare per calcolare il campo elettrico all'interno di un condensatore:

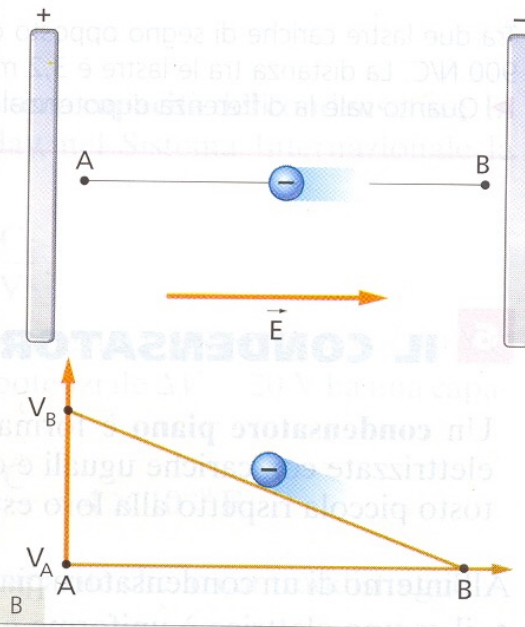
$$E = \frac{V_A - V_B}{d}$$

Tra i punti A e B c'è un dislivello elettrico misurato dalla differenza di potenziale: A si trova a un potenziale più alto, B a uno più basso.

► Le cariche *positive* sono spinte dalle forze del campo verso destra. Quindi *scendono* lungo il dislivello elettrico.



► Le cariche *negative* sono invece spinte verso sinistra. Quindi *salgono* lungo il dislivello elettrico.



In generale:

□ Le cariche positive scendono lungo una differenza di potenziale, cioè si spostano da dove il potenziale è alto verso punti in cui è più basso.

□ Le cariche negative salgono lungo una differenza di potenziale, cioè si spostano da dove il potenziale è basso verso punti in cui è più alto.

CIRCUITAZIONE DEL CAMPO ELETTROSTATICO

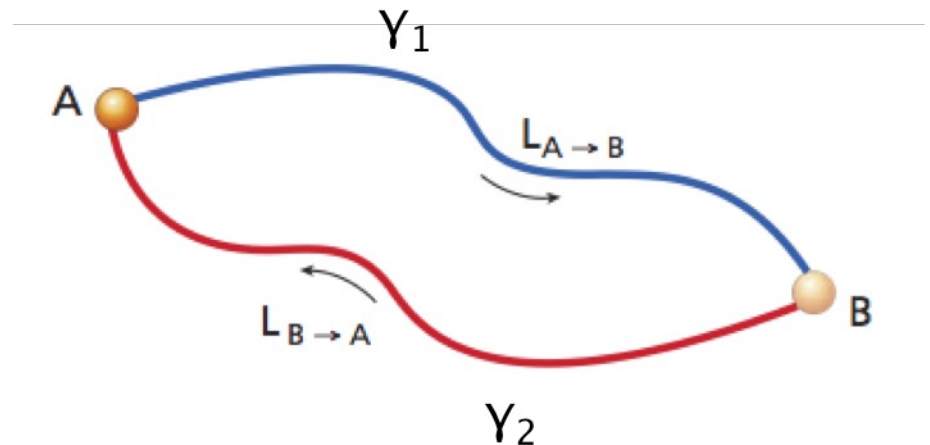
Un modo alternativo per dire che il **campo elettrico è conservativo** è il seguente:

Il lavoro compiuto dal campo elettrico sulla carica di prova q che si muove lungo una traiettoria chiusa è nullo.

In termini matematici:

$$L_{AB} = -L_{BA} \Rightarrow L_{AB} + L_{BA} = 0$$

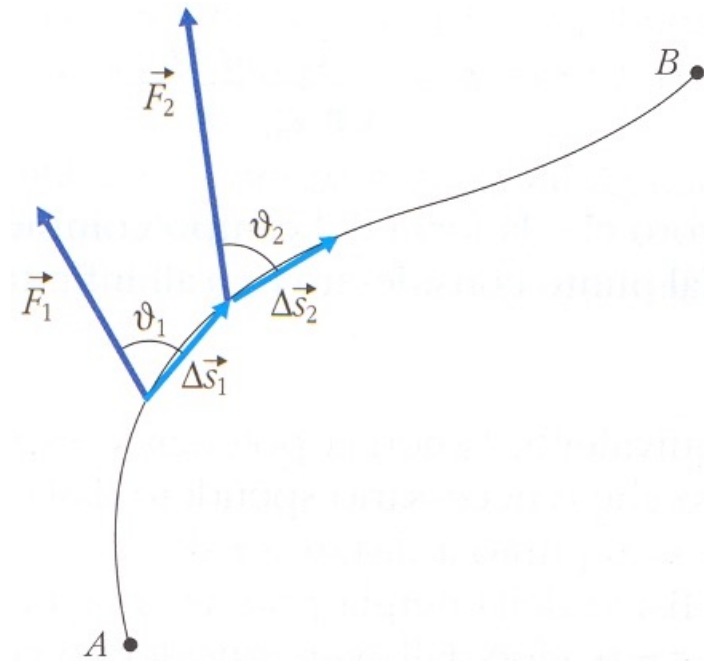
$$L = \oint_{\gamma_1 + \gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$



Formalizziamo questa proprietà.

Il lavoro compiuto da un campo elettrico su un oggetto che percorre un cammino qualunque fra due punti A e B è:

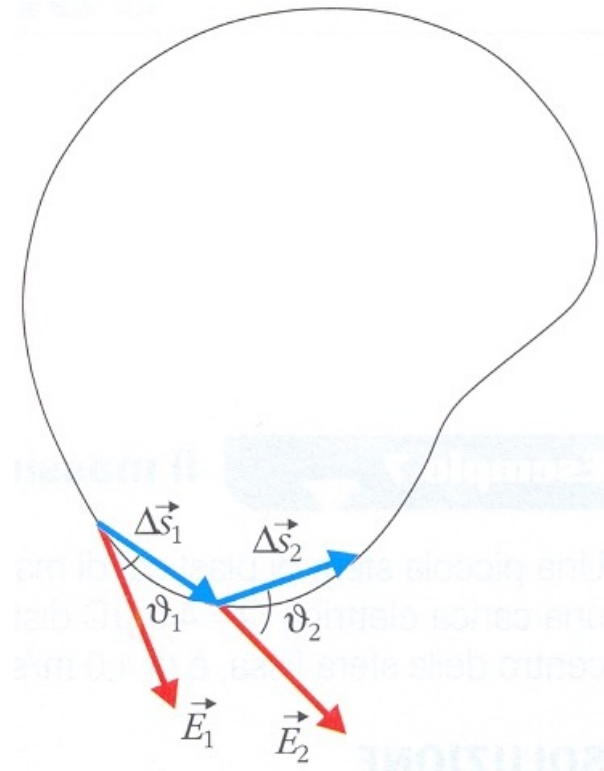
la somma dei lavori compiuti durante gli spostamenti infinitesimi $\Delta \mathbf{s}_1, \Delta \mathbf{s}_2, \dots$ in cui si può suddividere il cammino e con i quali i vettori forza $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots$ formano gli angoli $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$:



$$(1) \quad L = \vec{F}_1 \cdot \Delta \vec{s}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta \vec{s}_2 + \dots = \\ F_1 \Delta s_1 \cos \vartheta_1 + F_2 \Delta s_2 \cos \vartheta_2 + \dots = q \vec{E}_1 \cdot \Delta \vec{s}_1 + q \vec{E}_2 \cdot \Delta \vec{s}_2 + \dots$$

Se la somma dei termini al secondo membro della (1) è estesa ad un percorso chiuso otteniamo una quantità che prende il nome di **circuitazione del campo elettrico**:

$$C(\vec{E}) = \sum q \vec{E} \cdot \Delta \vec{S}$$



Ma il lavoro elettrico è nullo su un percorso chiuso, per cui:

La circuitazione del campo elettrico lungo qualsiasi cammino chiuso è nulla:

$$C(\vec{E}) = 0$$

Questa equazione caratterizza la conservatività del campo elettrico. La circuitazione può essere calcolata per qualsiasi campo vettoriale e su qualsiasi linea chiusa.

Avere introdotto questa grandezza ci permette di definire in termini generali un campo conservativo:

Un campo vettoriale è conservativo se e solo se la sua circuitazione è nulla su ogni linea chiusa.

$$C(\vec{E}) = 0$$

PROPRIETA' MATEMATICHE DEL CAMPO CONSERVATIVO

Un campo vettoriale, e quindi il campo elettrico, è completamente determinato quando se ne conoscono il flusso e la circuitazione:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon}$$

$$C(\vec{E}) = 0$$

Attenzione: tutto ciò che abbiamo detto è valido nel caso in cui tutte le cariche presenti siano in equilibrio elettrostatico (campo elettrostatico).

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA NEL CAMPO ELETTRICO

Poiché la forza elettrica è conservativa, una particella di massa m e carica q in moto in un campo elettrico mantiene costante la sua energia totale. Se essa è soggetta solo alla forza elettrica, la somma della sua energia cinetica e della sua energia potenziale elettrica si conserva:

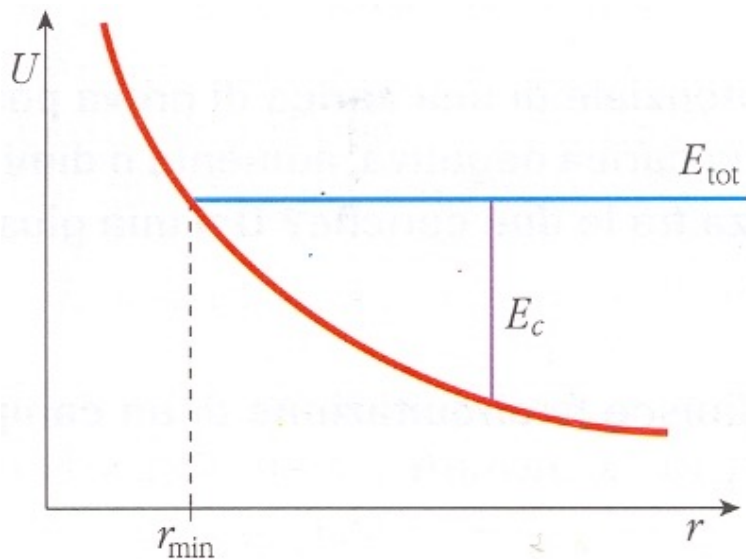
$$E_{\text{tot}} = E_c + U = \text{costante}$$

Nel caso in cui risenta contemporaneamente di altre forze conservative, nella somma delle energie devono essere incluse anche le forme di energia potenziale associate a queste forze.

Supponiamo che la particella carica sia in moto nel campo elettrico generato da una carica puntiforme Q . Il principio di conservazione dell'energia si esprime allora con la relazione:

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r} = \text{costante}$$



Nel caso in cui Q e q siano di segno concorde, è indicato un certo valore E_{tot} dell'energia totale.

Alla particella carica sono accessibili tutti i punti dello spazio nei quali l'energia totale superi l'energia potenziale elettrica, infatti: $E_{\text{tot}} - U = E_c$, dove $E_c \geq 0$.

Se la particella si avvicina alla carica Q partendo dall'infinito, U aumenta e E_c diminuisce. Di conseguenza la particella rallenta progressivamente fino alla distanza r_{min} , dove $U = E_{\text{tot}}$ e la velocità si annulla. Raggiunta tale posizione, inverte il suo moto e si allontana con velocità crescente.

FISICA

ElettroMagnetismo

Fenomeni di
elettrostatica

Autore: prof. *Pappalardo Vincenzo*

docente di **Matematica e Fisica**

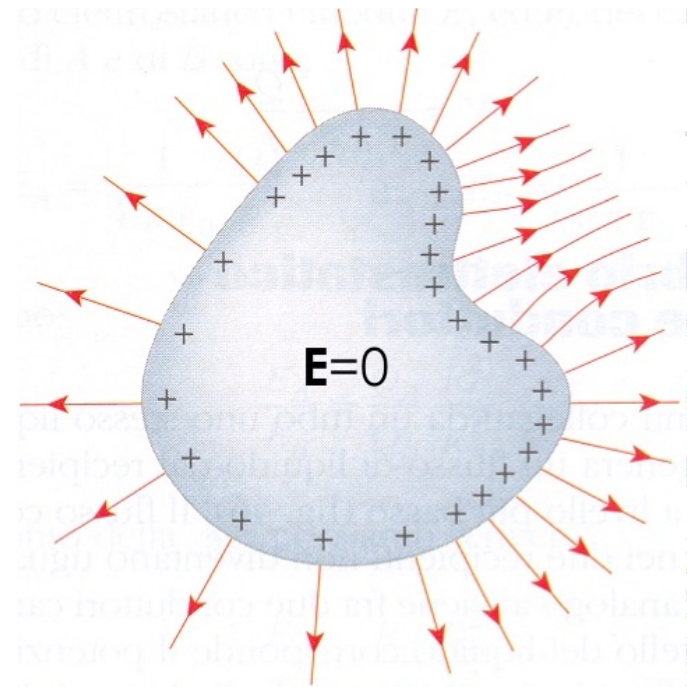


L'equilibrio elettrostatico è la condizione fisica in cui, tutte le cariche presenti sui conduttori che costituiscono il sistema fisico, sono ferme.

Analizziamo alcune proprietà dell'equilibrio elettrostatico.

1) Abbiamo già osservato che:

➤ il campo elettrico all'interno di un conduttore carico in equilibrio elettrostatico è nullo e che la carica si distribuisce sulla superficie esterna.

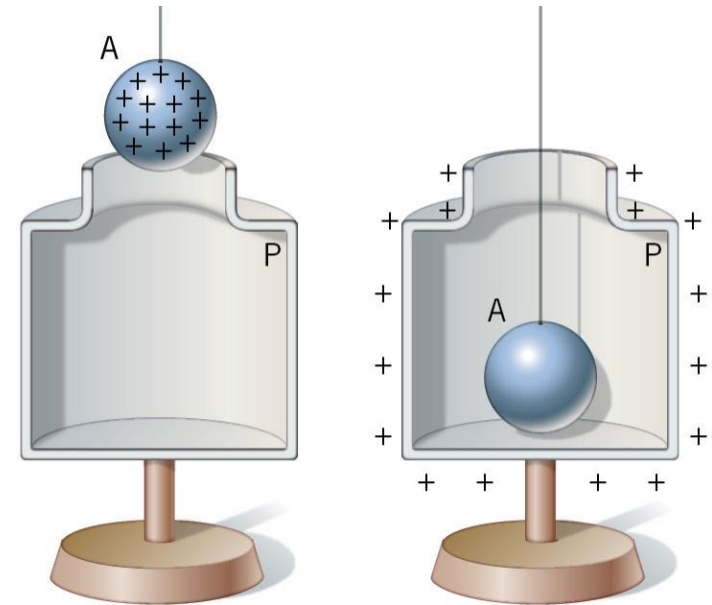


dimostrazione

Se fosse $\mathbf{E} \neq 0$, le cariche libere all'interno del conduttore si muoverebbero, per cui il conduttore non sarebbe in equilibrio elettrostatico come si è ipotizzato. Quindi:

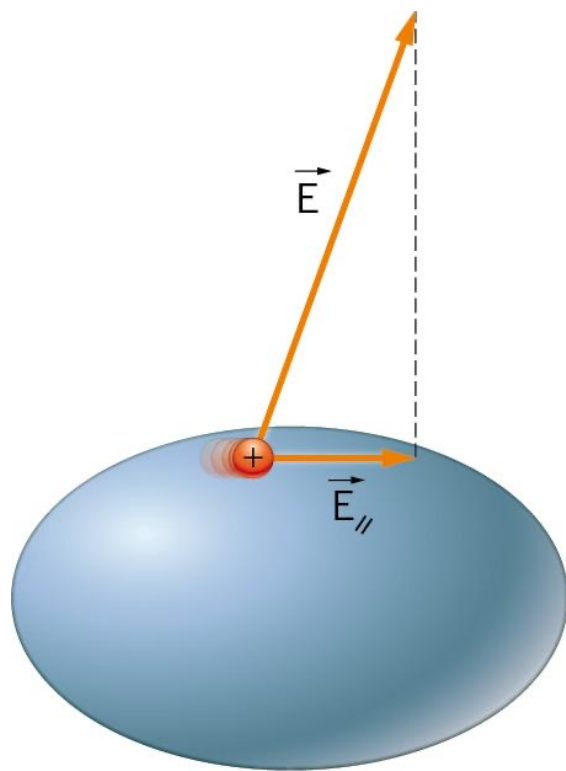
equilibrio elettrostatico $\Rightarrow \vec{E} = 0$ all'interno del conduttore

- **pozzo di Faraday:** quando un conduttore carico A viene inserito in un recipiente metallico P, la sfera A si scarica e la sua carica si porta sulla superficie esterna di P.



- Sulla superficie di un conduttore carico in equilibrio elettrostatico il campo elettrico ha direzione perpendicolare alla superficie stessa.

dimostrazione

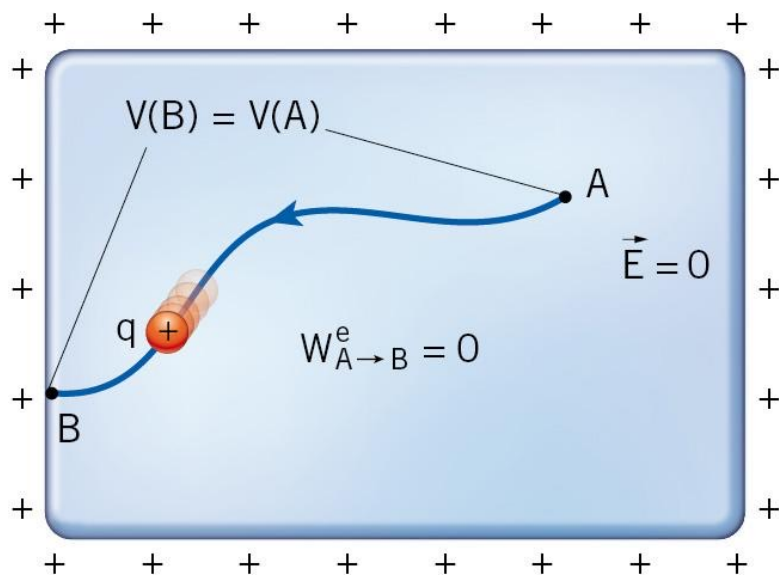


Se $\mathbf{E}$ non fosse perpendicolare alla superficie, allora la sua componente $\mathbf{E}_{//}$ darebbe origine a una forza elettrica capace di mettere in movimento le cariche presenti sulla superficie esterna del conduttore.

Ma ciò sarebbe in contraddizione con l'ipotesi di equilibrio elettrostatico del conduttore.

- **superfici equipotenziali:** il potenziale elettrico ha lo stesso valore in tutti i punti all'interno e sulla superficie di un conduttore carico in equilibrio elettrostatico.

dimostrazione



Essendo nullo il campo elettrico, è nullo anche il lavoro compiuto su una carica di prova che si sposta da A a B:

$$W_{A \rightarrow B} = 0$$

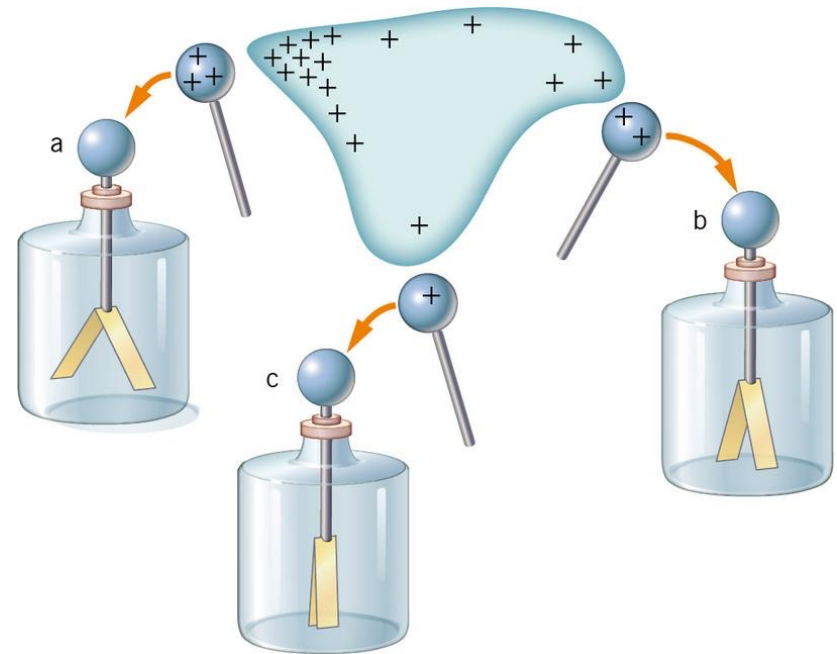
Da questo segue che il potenziale in due punti A e B qualsiasi, ha lo stesso valore:

$$\Delta V = V(B) - V(A) = -\frac{W_{A \rightarrow B}}{q} = 0$$

2) Se il conduttore ha forma regolare (una sfera), per simmetria la carica elettrica si dispone in modo uniforme:

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \text{costante}$$

3) Se il conduttore ha forma irregolare: la carica si concentra maggiormente nelle parti del conduttore in equilibrio elettrostatico dove hanno una curvatura più accentuata (più “appuntite”).



Poiché $\sigma=Q/S$ può raggiungere valori molto elevati, il campo elettrico in prossimità della punta può diventare molto intenso.

IL PROBLEMA GENERALE DELL'ELETTROSTATICA

Se abbiamo n conduttori, di cui conosciamo forma, posizione nello spazio e la carica elettrica distribuita su ciascuno di essi, allora, con questi dati, possiamo rispondere al seguente:

problema generale dell'elettrostatica

Determinare il potenziale elettrico V , oppure il campo elettrico $\mathbf{E}$, in tutti i punti dello spazio.

La risoluzione di questo problema richiede conoscenze matematiche avanzate.

Comunque, utilizzando il teorema di Gauss e che il campo elettrico nei punti immediatamente esterni alla superficie di un conduttore, all'equilibrio elettrostatico, è sempre perpendicolare alla superficie, si dimostra che:

TEOREMA DI COULOMB

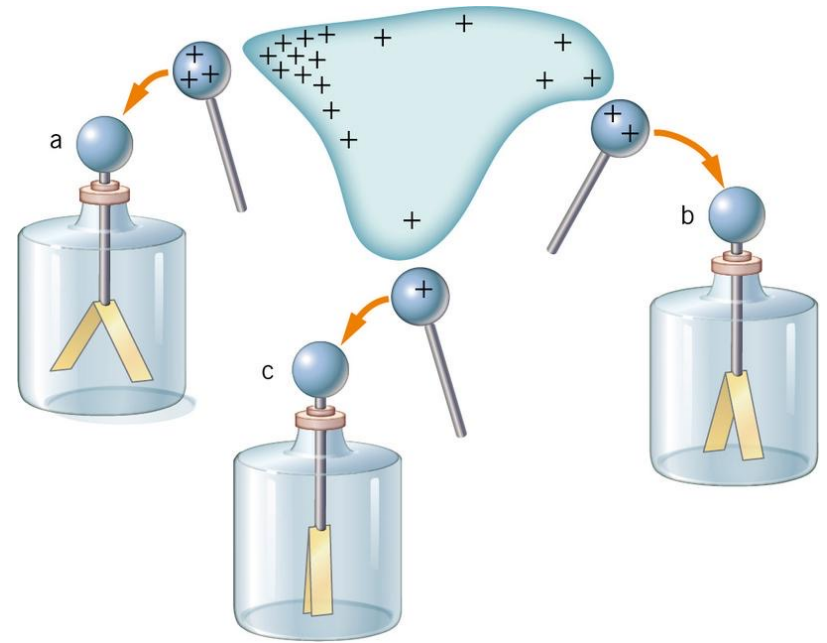
Il modulo E del campo elettrico in prossimità della superficie di un conduttore è proporzionale alla densità superficiale di carica:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

Quindi, se conosciamo il campo elettrico, è possibile conoscere la densità superficiale presente sui conduttori: abbiamo una descrizione completa del sistema che volevamo studiare.

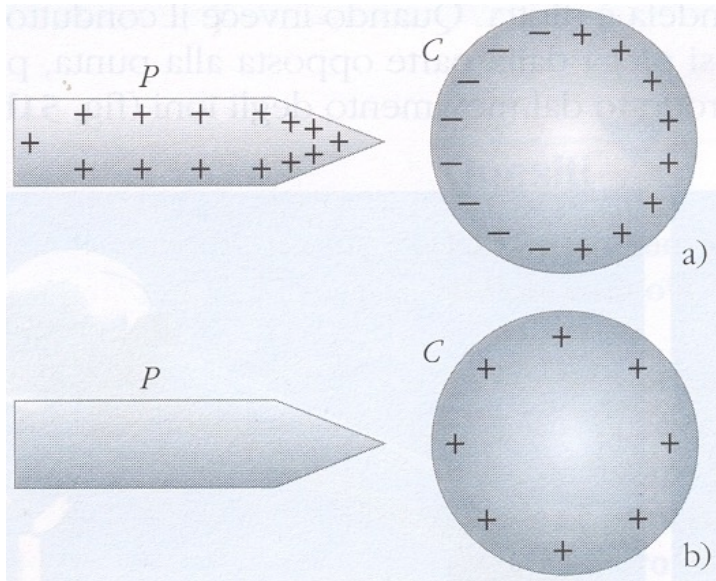
applicazioni

Abbiamo visto che in un conduttore carico le cariche elettriche si concentrano nelle vicinanze delle punte, dove la densità superficiale di carica $\sigma = Q/S$ può raggiungere valori molto elevati.



Di conseguenza, per il teorema di Coulomb:

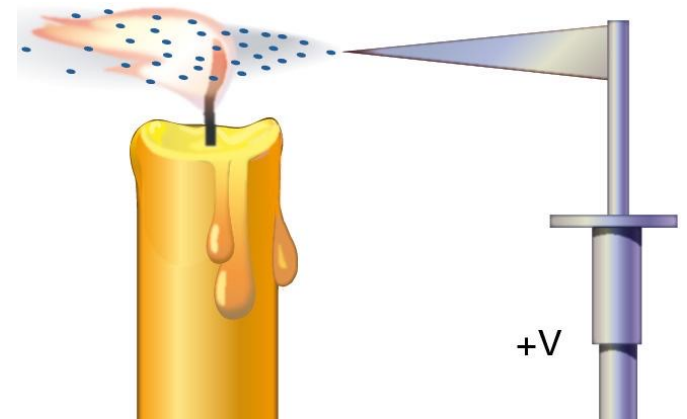
il campo elettrico in prossimità della punta può diventare molto intenso.



Per induzione elettrostatica, C si carica negativamente nella parte più vicina a P e positivamente nella parte più lontana. Tra P e C nasce così un campo elettrico che mette in movimento gli ioni presenti nell'aria tra P e C .

Gli ioni negativi saranno attratti dal conduttore P , mentre quelli positivi si dirigeranno verso il conduttore C .

Gli ioni respinti da una punta carica creano una corrente d'aria che piega la fiamma.

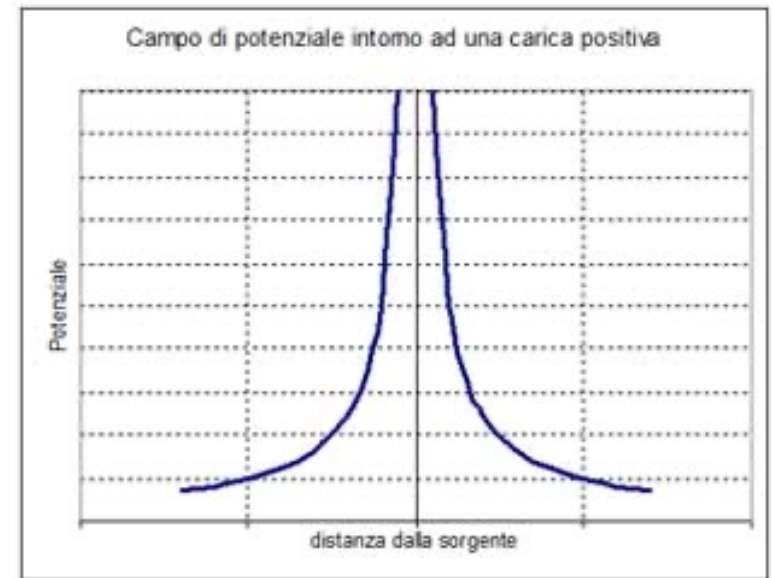


CONVENZIONI PER LO ZERO DEL POTENZIALE

Per conoscere il potenziale elettrico in tutti i punti dello spazio (problema generale dell'elettrostatica), bisogna decidere dove si pone **lo zero del potenziale**.

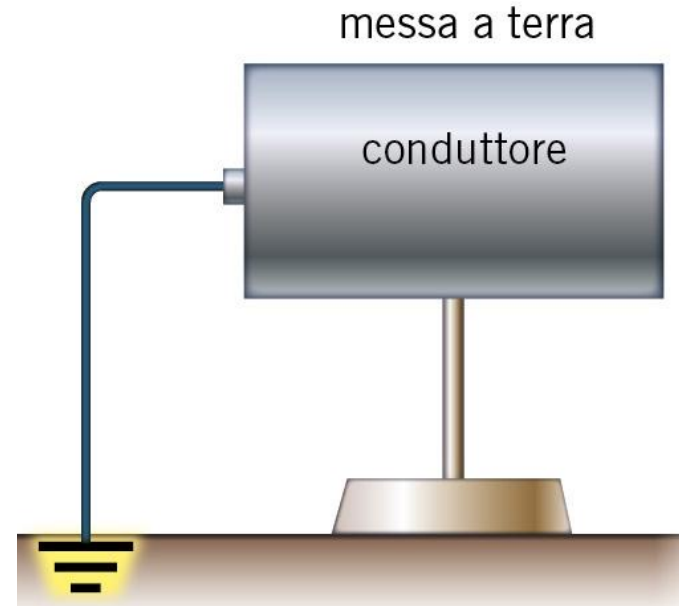
Ci sono tre possibili scelte:

1. **All'infinito:** Porre lo zero del potenziale nei punti che si trovano a distanza infinita rispetto alla carica Q che genera il campo elettrico. Scelta vantaggiosa quando il campo è creato da un numero finito di cariche puntiformi.



$$V(r) = k \frac{Q}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} V(\infty) = 0$$

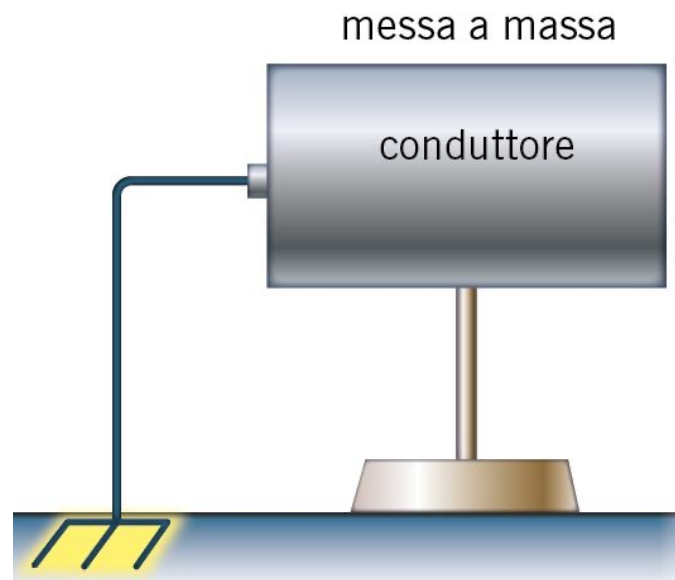
2. **Al potenziale di terra:** Porre lo zero del potenziale pari a quello cui si trova la Terra. Un conduttore che si trova a un potenziale di 20.000 V significa che tale è la differenza di potenziale tra il conduttore e la Terra.



Un conduttore collegato elettricamente con il terreno (messo allo stesso potenziale della Terra) si dice “messo a terra”.

3. **Al potenziale di massa:** Porre lo zero del potenziale pari a quello cui si trova il conduttore. E' la situazione in cui si vuole isolare un ambiente metallico (aereo o auto) dal terreno.

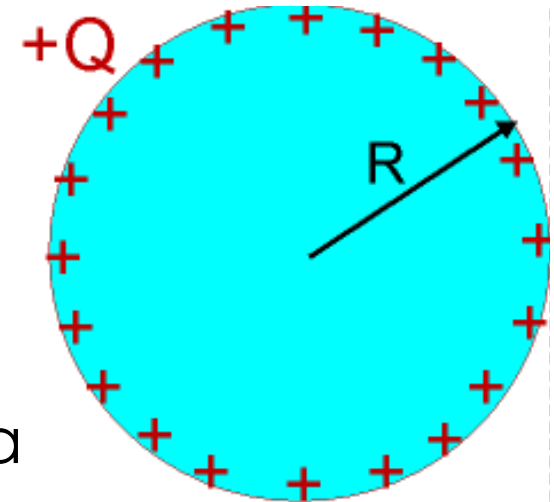
Un conduttore collegato elettricamente a un involucro metallico (cioè che ha lo stesso suo potenziale) si dice "messo a massa".



CAPACITA' DI UN CONDUTTORE

Consideriamo un conduttore isolato (lontano da ogni altro corpo elettrizzato) inizialmente scarico (potenziale elettrico pari a zero).

Se elettrizziamo il conduttore con una carica Q , esso assumerà un certo potenziale elettrico V (positivo o negativo dipende dal segno della carica).



Gli esperimenti dimostrano che esiste una relazione di proporzionalità diretta fra il potenziale V di un conduttore e la sua carica elettrica Q . Questa è una proprietà generale, indipendente dalla forma del conduttore.

Pertanto, possiamo dare la seguente definizione:

CAPACITA' ELETTRICA

Per un qualsiasi conduttore, il rapporto fra la carica elettrica Q e il potenziale V è costante e prende il nome di *capacità elettrica*:

The diagram illustrates the definition of capacitance. It features a central yellow box containing the equation $C = \frac{Q}{V}$. To the left of the box, the text "capacità del conduttore (C/V o F)" is connected to the variable C by a line. To the right of the box, the text "carica su conduttore (C)" is connected to the variable Q by a line. Below the box, the text "potenziale del conduttore (V)" is connected to the variable V by a line. To the right of the equation, the unit "[F (farad)]" is displayed.

Un conduttore ha la capacità di 1F se, elettrizzato con una carica di 1C, si porta al potenziale di 1V:

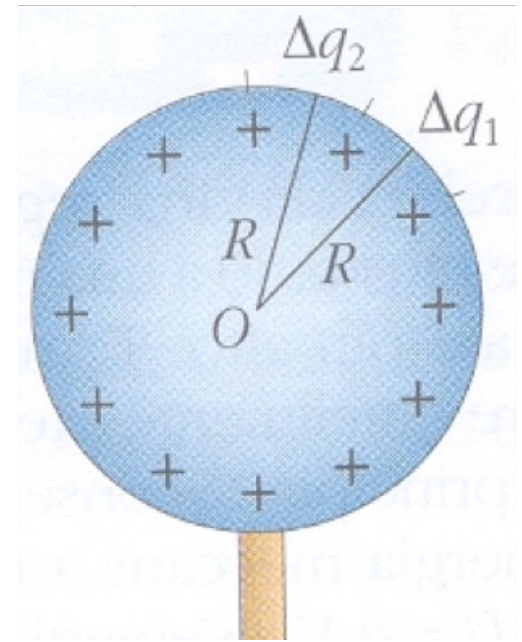
$$1\text{F} = \frac{1\text{C}}{1\text{V}}$$

Il termine "capacità" si usa per qualificare i conduttori, così come i recipienti. Possiamo pensare a un conduttore come a un recipiente di carica elettrica: a parità di potenziale V , esso può immagazzinare una carica Q tanto più grande quanto maggiore è la sua capacità.

La capacità di un conduttore dipende solo dalla sua forma geometrica (quindi dalle sue dimensioni) e dal materiale isolante in cui è immerso (aria, acqua, ecc.).

Capacità di una sfera isolata

Consideriamo una sferica carica e isolata. Il potenziale è costante in tutti i punti del conduttore (superficie equipotenziale), per cui possiamo riferirci a un punto particolare che ne semplifichi il calcolo: il centro della sfera.



Per il principio di sovrapposizione, il potenziale V del conduttore è la somma dei potenziali dovuti a tutte le cariche distribuite sui vari elementi della sua superficie, tanto piccoli da potersi considerare puntiformi.

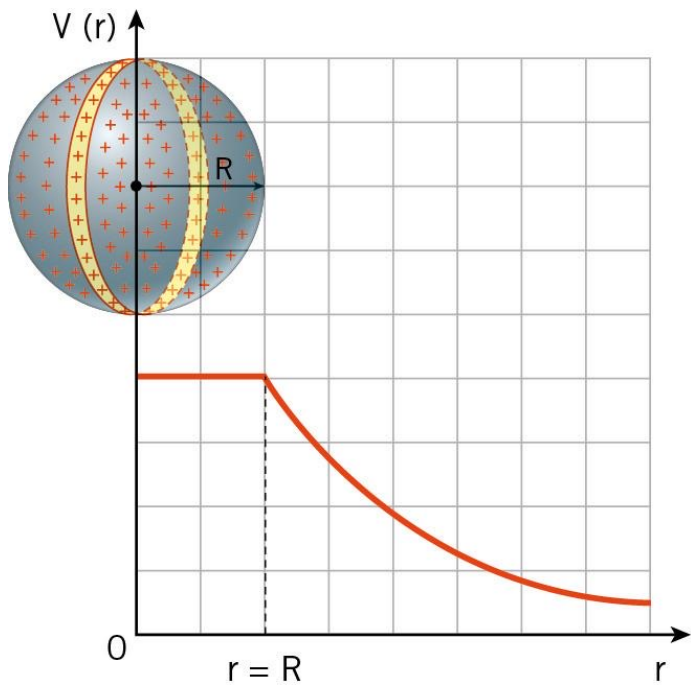
Eseguendo la somma dei vari potenziali si ottiene:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{R}$$

il potenziale su un conduttore sferico è direttamente proporzionale alla carica e inversamente proporzionale al raggio.

All'esterno il conduttore sferico si comporta come una carica Q puntiforme posta nel centro, per cui il potenziale in un punto a distanza r dal centro è:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r}$$



Il potenziale $V(r)=\text{costante}$ fino a $r=R$ (retta orizzontale), e poi decresce in modo inversamente proporzionale a r (iperbole).

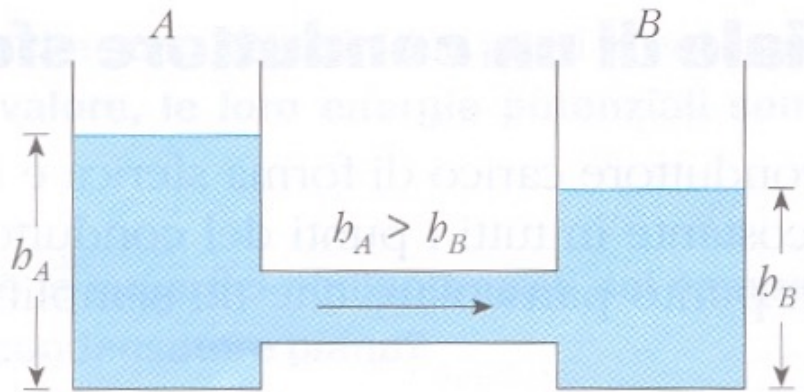
A questo punto siamo in grado di calcolare la capacità della sfera carica isolata:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{R}} = 4\pi\epsilon R$$

La capacità di una sfera conduttrice isolata è direttamente proporzionale al raggio della sfera stessa.

$$C = 4\pi\epsilon R$$

Equilibrio elettrostatico fra due conduttori

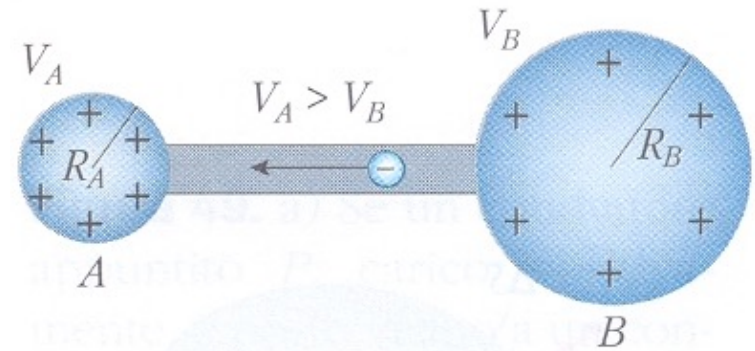


Se in due recipienti collegati da un tubo uno stesso liquido raggiunge livelli diversi, si genera un flusso di liquido dal recipiente a livello più alto verso quello a livello più basso.

Il flusso continua finché i livelli del liquido nei due recipienti diventano uguali.

Un fenomeno analogo avviene fra due conduttori carichi con potenziali diversi: al livello del liquido corrisponde il potenziale del conduttore, al flusso del liquido il movimento degli elettroni di conduzione.

Si abbiano due conduttori sferici A e B, rispettivamente di raggi R_A e R_B , e che posseggano la stessa carica elettrica Q , allora:



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \Rightarrow \text{se } R_A < R_B \Rightarrow V_A > V_B$$

Se colleghiamo con un filo metallico (capacità trascurabile) i due conduttori, si stabilisce un flusso di elettroni da B ad A. La carica del conduttore B, a causa della perdita di elettroni, aumenta di una certa quantità; la carica di A, invece, diminuisce della stessa quantità. Di conseguenza V_B aumenta e V_A diminuisce.

Quando i potenziali diventano uguali, cessa il movimento degli elettroni e i conduttori A e B raggiungono uno stato di equilibrio elettrostatico, nel quale le rispettive cariche Q_A e Q_B sono diverse.

Se la distanza tra i conduttori è sufficientemente grande, è possibile trascurare l'effetto dell'induzione elettrostatica, per cui la carica sulla superficie di ciascun conduttore è distribuita in maniera uniforme.

Pertanto i potenziali risultano:

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A}{R_A} \quad V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_B}{R_B}$$

essendo $V_A = V_B \Rightarrow \frac{Q_A}{Q_B} = \frac{R_A}{R_B}$

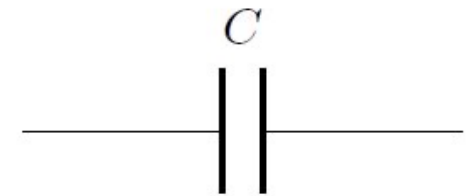
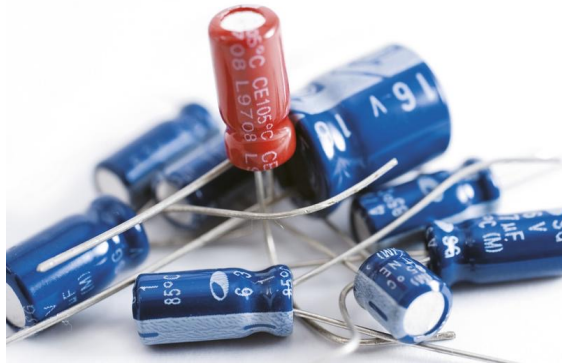
Le cariche sono
direttamente proporzionali
ai raggi delle sfere.

CONDENSATORI

Per avere capacità elettriche maggiori è opportuno ricorrere a sistemi di conduttori anziché a un singolo conduttore.

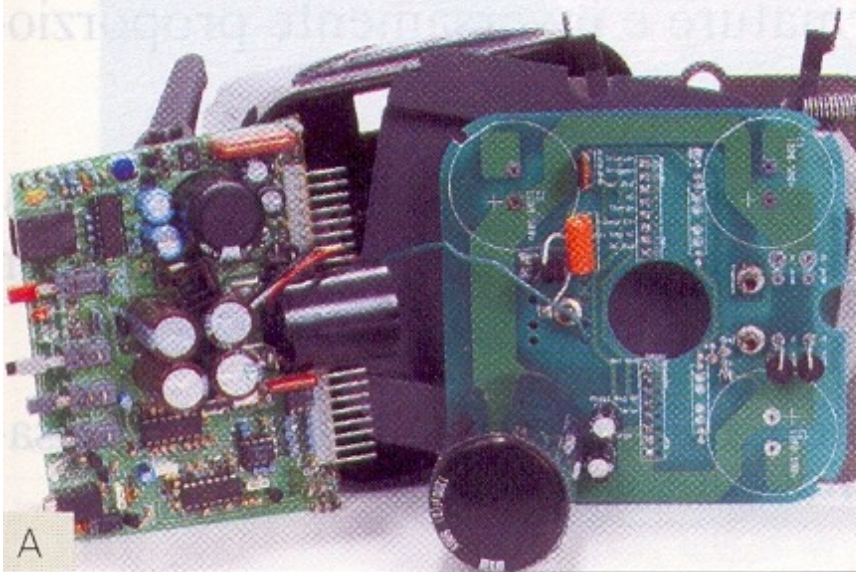
Il sistema più semplice è costituito da due conduttori e viene chiamato **condensatore**.

I condensatori sono componenti essenziali dei circuiti elettrici.



Simbolo del
condensatore

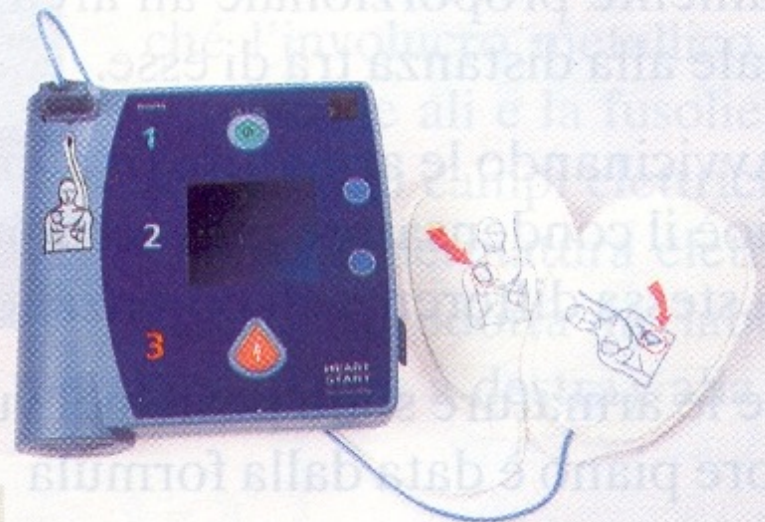
► In una macchina fotografica, un condensatore accumula l'energia che poi, mediante una scarica veloce, fa funzionare il flash.



A

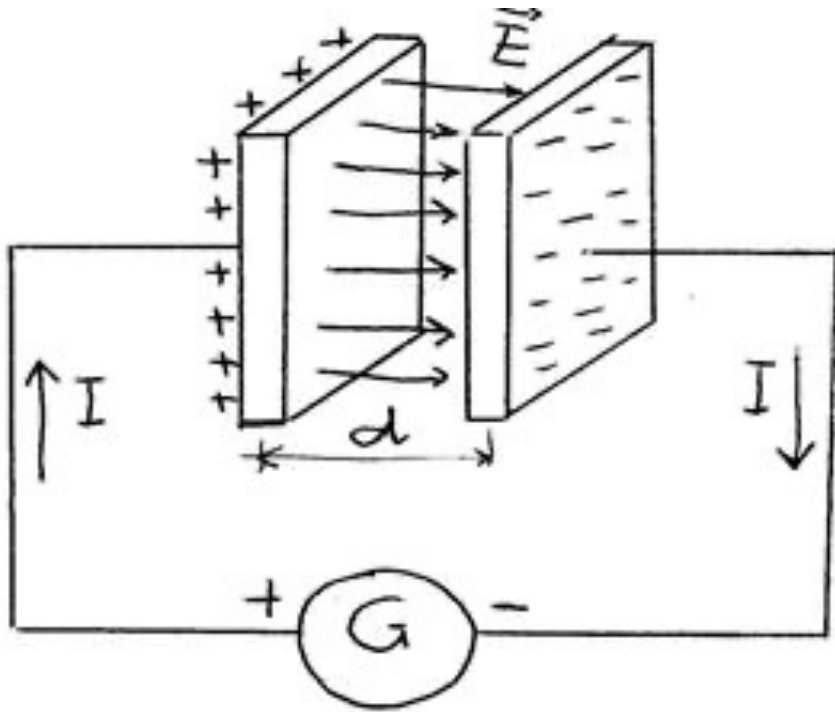
D. Weikel

► In un defibrillatore, un condensatore molto più grande accumula l'energia che poi sarà scaricata per regolarizzare il battito cardiaco.



B

Per avere capacità elevate occorre che le cariche sui due conduttori (le *armature del condensatore*) siano opposte. Tale risultato si ottiene collegando le due armature ai poli di una batteria.



Ogni condensatore è caratterizzato dalla sua capacità e dalla tensione massima che può essere applicata alle sue armature senza danneggiarlo.

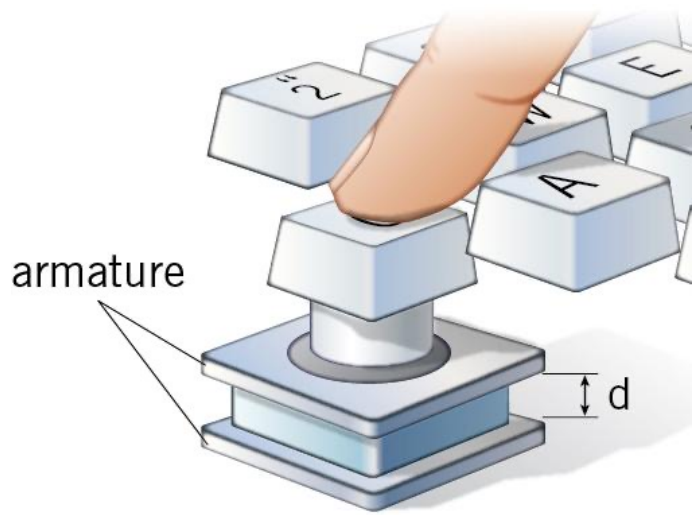
CAPACITÀ DI UN CONDENSATORE

Se le armature di un condensatore sono mantenute a una differenza di potenziale $\Delta V = V_A - V_B$ e Q è il valore assoluto della carica posseduta da ciascuna di esse, si definisce *capacità del condensatore* il rapporto:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad (1)$$

La capacità dipende dai parametri geometrici (superficie delle armature S e distanza tra le armature d) che caratterizzano il condensatore e dalla costante dielettrica ϵ_R del materiale isolante che può essere interposto fra le armature, attraverso la seguente relazione:

$$C = \epsilon_0 \epsilon_R \frac{S}{d} \quad (2)$$



Premendo il tasto, diminuisce d e la capacità C aumenta. I circuiti elettronici delle tastiere segnalano al computer che il tasto è stato premuto.

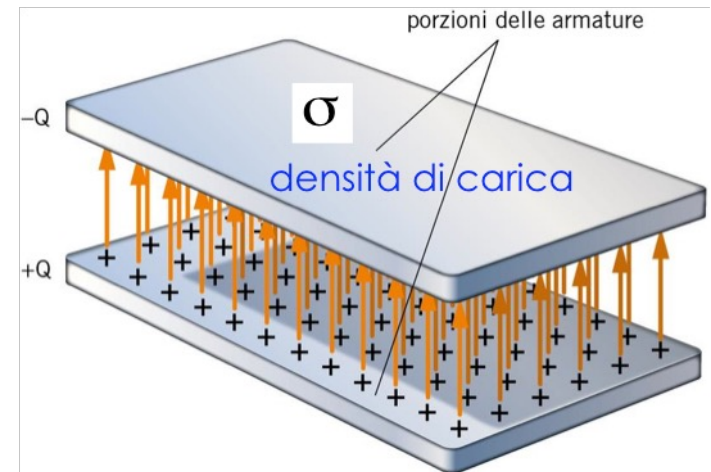
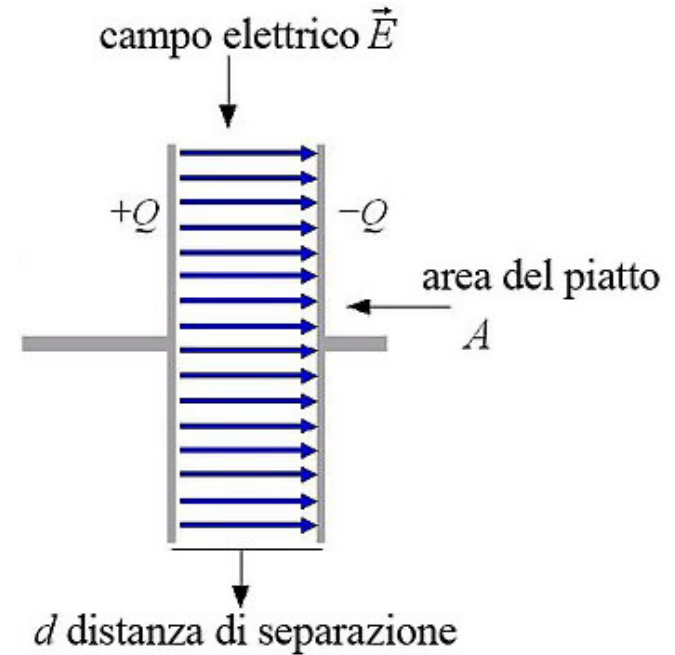
I sistemi touch-screen capacitivi funzionano rilevando una variazione della capacità elettrica nel punto dello schermo premuto.



Come è diretto il campo elettrico all'interno di un condensatore? Nel capitolo sul campo elettrico abbiamo ottenuto il seguente risultato:

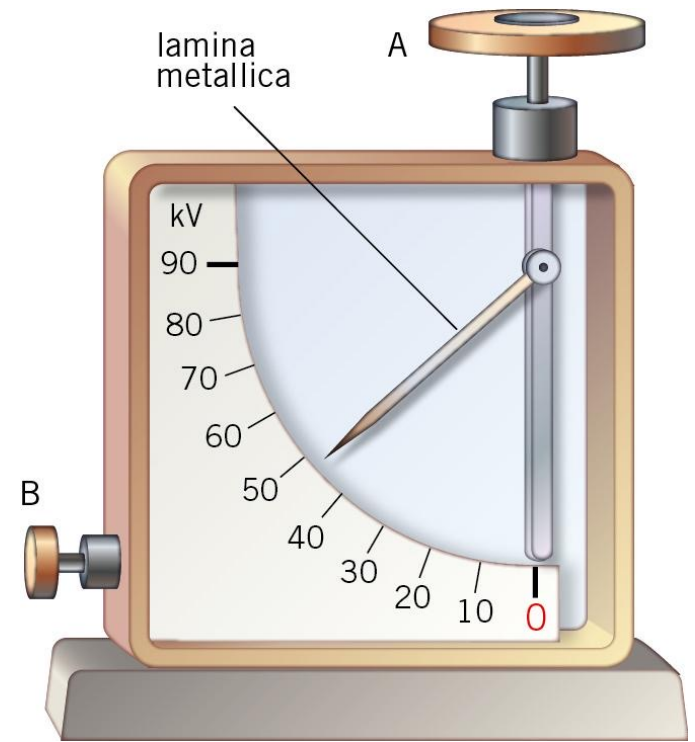
Il campo elettrico è
uniforme, ortogonale alle
armature, diretto da quella
positiva a quella negativa e
di intensità pari a:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$



elettrometro

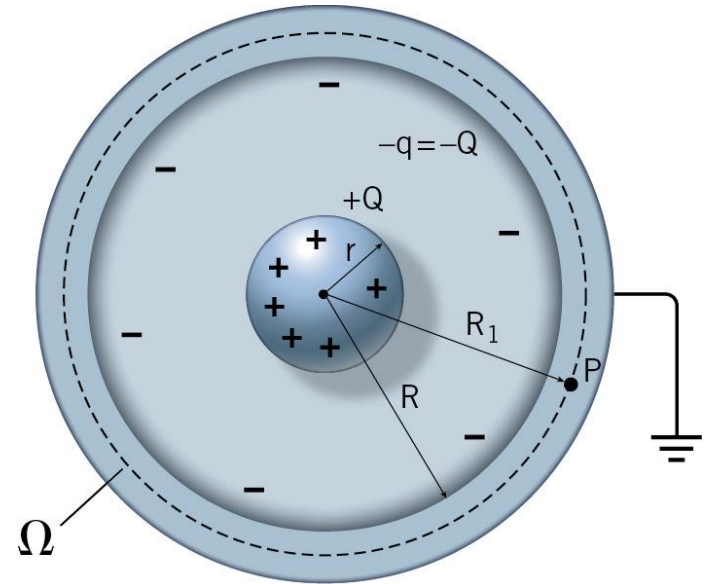
Un **elettrometro** è uno strumento che misura le differenze di potenziale in maniera statica, cioè senza essere attraversato dalla corrente elettrica.



Comportandosi come un condensatore, se vogliamo misurare la ddp tra due punti, basta collegarli ai morsetti A e B. In questo modo, essendo la ddp proporzionale alla carica Q accumulata sulle armature dell'elettrometro, ($\Delta V = Q/C$), l'indice mobile si sposterà su una scala graduata che misurerà la ΔV .

capacità condensatore sferico

Un condensatore sferico è formato da due armature sferiche concentriche di raggi r e R (con $r < R$).



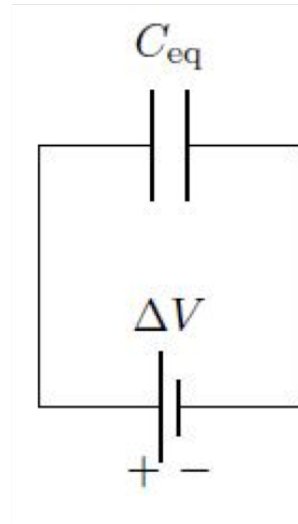
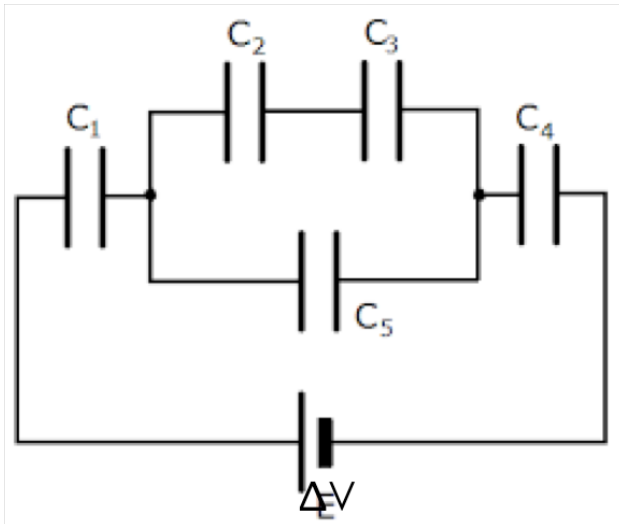
Si dimostra che la capacità di questo condensatore è:

$$C = 4\pi\epsilon \frac{rR}{R - r}$$

sistemi di condensatori

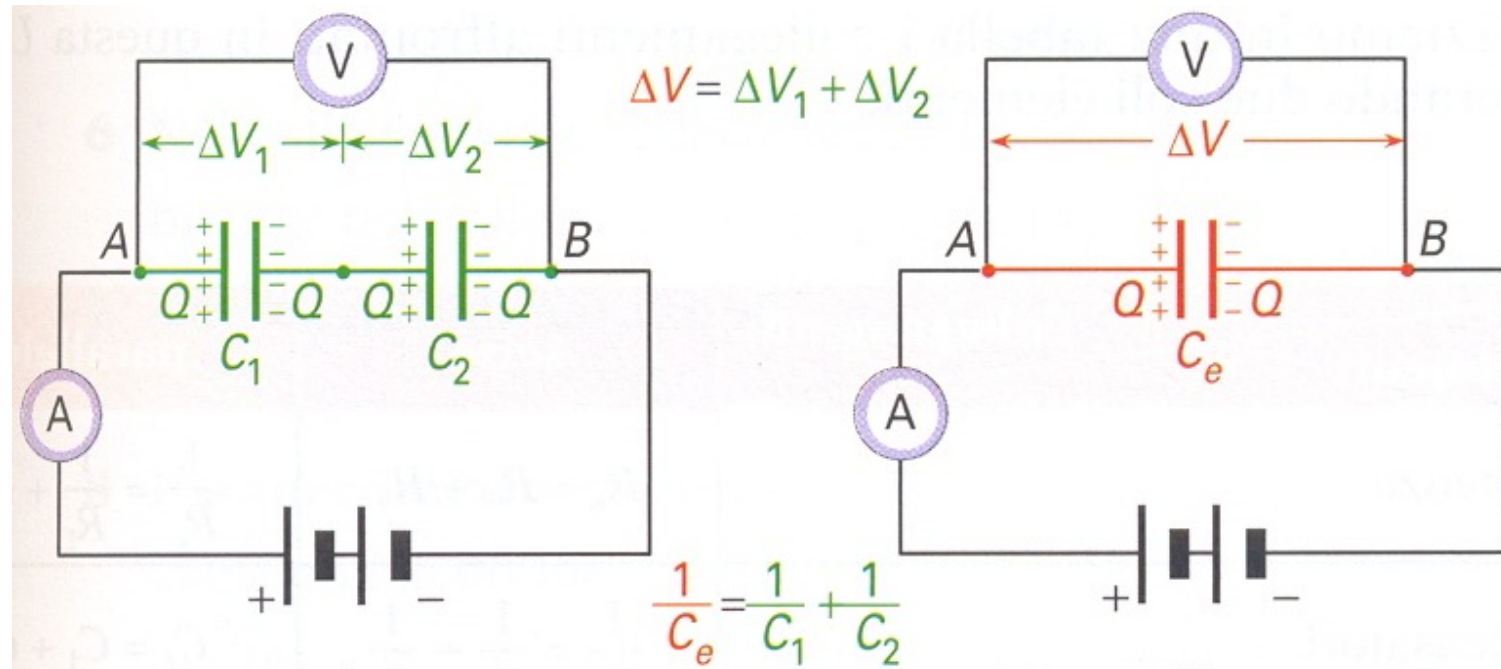
Nei circuiti elettrici, per ragioni tecniche, possono esserci più condensatori. L'effetto complessivo di questa rete di condensatori è descritto dalla capacità equivalente:

Si chiama **capacità equivalente C_{eq}** di una rete di condensatori quella di un singolo condensatore che, sottoposto alla stessa ddp ΔV a cui è soggetta l'intera rete, assorbe la stessa carica elettrica Q .



In sintesi: C_{eq} svolge la stessa funzione dell'intera rete di condensatori.

➤ condensatori in serie



La *capacità equivalente* C_{eq} dei condensatori in serie, è definita come la capacità del condensatore che, collegato da solo agli stessi terminali A e B, accumula sulle sue armature una carica uguale a quella esistente sulle armature di ciascun condensatore.

Pertanto:
$$\Delta V_{AB} = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) Q \Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{C_{eq}}$$

CONDENSATORI IN SERIE

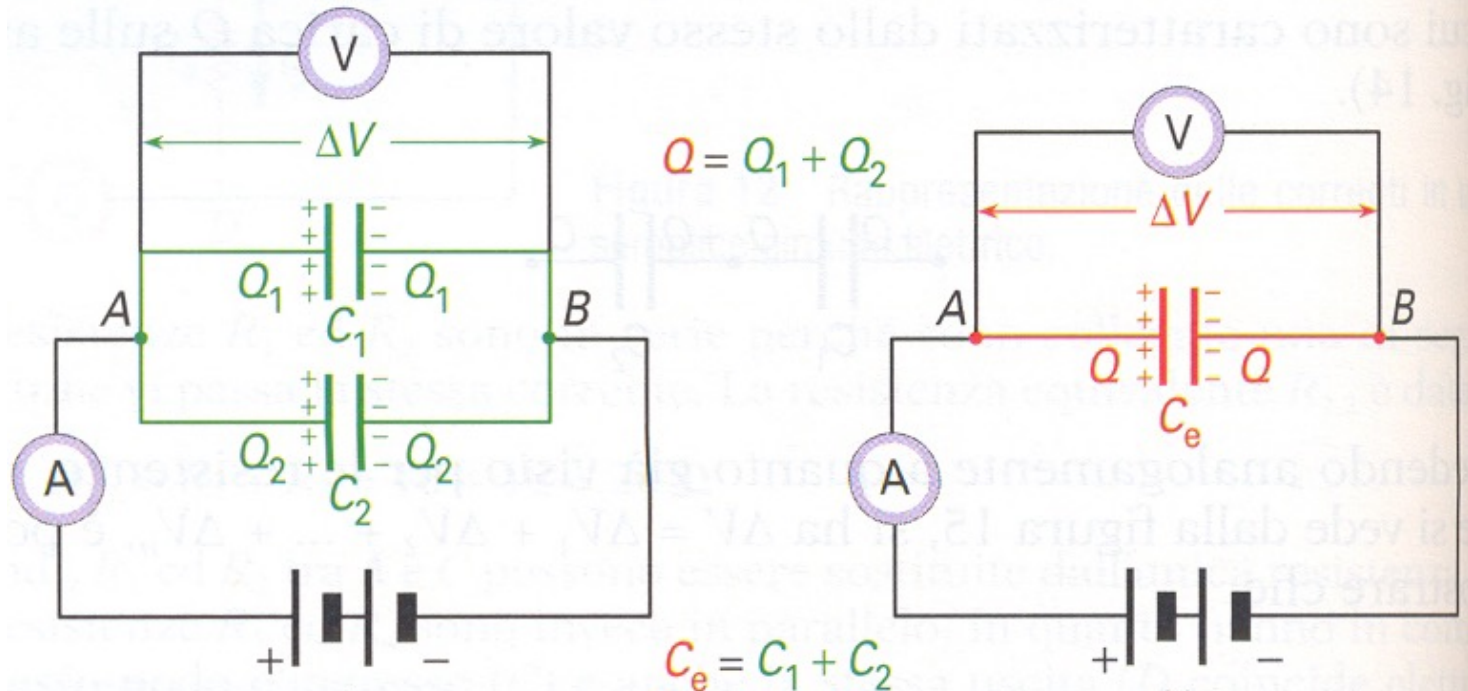
Due o più condensatori collegati in serie sono equivalenti a un unico condensatore avente una capacità C_{eq} pari a:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

La carica Q di C_{eq} è uguale a quella posseduta da ciascun condensatore e la ddp fra le sue armature è pari alla somma delle ddp ai capi dei singoli condensatori.

$$Q = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n \quad \Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_n = \sum_{i=1}^n \Delta V_i$$

➤ condensatori in parallelo



La capacità equivalente C_{eq} dei condensatori in parallelo è definita come la capacità di un condensatore che è sottoposto alla stessa ddp dei singoli condensatori (oppure, su C_{eq} si accumula una carica uguale alla somma delle cariche dei singoli condensatori).

Pertanto: $Q = Q_1 + Q_2 = C_1\Delta V + C_2\Delta V = (C_1 + C_2)\Delta V \Rightarrow Q = C_{eq}\Delta V$

CONDENSATORI IN PARALLELO

Due o più condensatori collegati in parallelo sono equivalenti a un unico condensatore avente una capacità C_{eq} pari a:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i$$

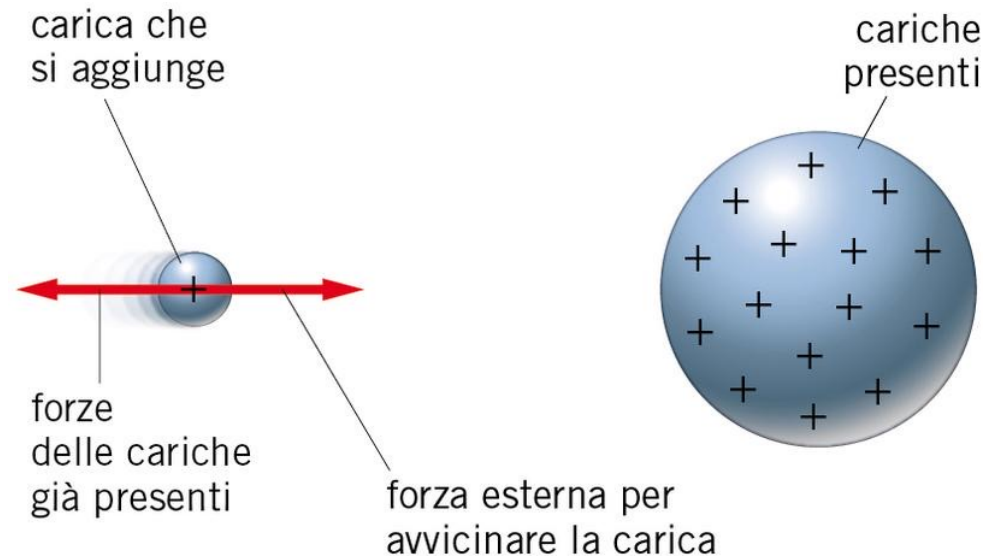
La ddp ΔV ai capi di tale condensatore è uguale a quella esistente fra le armature di ciascun condensatore e la sua carica Q è uguale alla somma delle cariche di tutti i condensatori:

$$\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2 = \dots = \Delta V_n \quad Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = \sum_{i=1}^n Q_i$$

ENERGIA IMMAGAZZINATA IN UN CONDENSATORI

Per caricare un conduttore inizialmente scarico occorre compiere sempre un lavoro.

Infatti, in tutte le fasi della sua elettrizzazione le cariche che si trovano già sul conduttore respingono le altre cariche dello stesso segno che vi aggiungiamo.

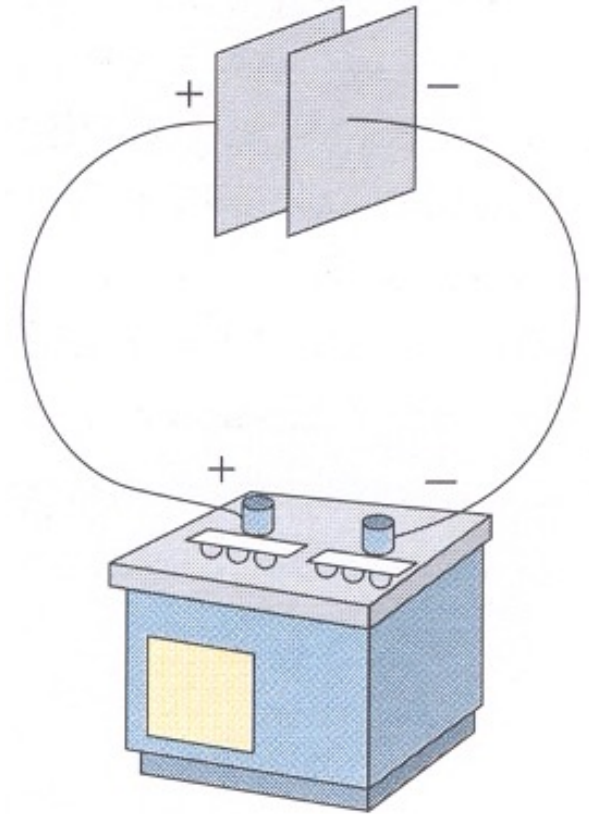


Per vincere questa repulsione è necessario esercitare una forza nello stesso verso di spostamento delle cariche (lavoro positivo).

Questo discorso vale anche per il condensatore, e il lavoro di cui abbiamo bisogno per caricarlo lo fa il generatore al quale il condensatore viene collegato. Infatti:

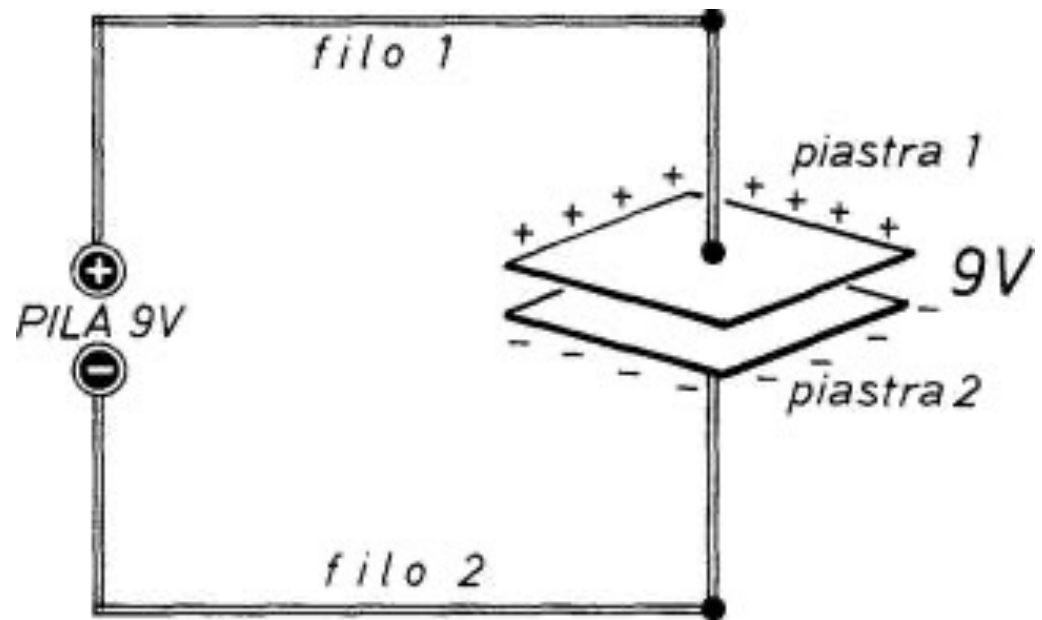
Per caricare un condensatore è necessario portare elettroni dall'armatura positiva a quella negativa.

L'armatura collegata con il polo positivo perde elettroni e assume così una carica positiva, mentre quella collegata con il polo negativo acquista elettroni assumendo una carica opposta.



Appena inizia il trasferimento di elettroni, fra le armature si produce un campo elettrico e il generatore deve compiere un lavoro contro la forza del campo per continuare a portare elettroni da un'armatura all'altra. Tale lavoro è compiuto a spese dell'energia chimica immagazzinata nel generatore.

*Il processo termina
quando tra le armature
si stabilisce la stessa
ddp del generatore.*



Si dimostra che:

Il lavoro necessario per stabilire una ddp fra le armature di un condensatore di capacità C è pari a:

$$L = \frac{1}{2} Q \Delta V \Leftrightarrow L = \frac{1}{2} C \Delta V^2 \Leftrightarrow L = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Per il principio di conservazione dell'energia, il lavoro compiuto per caricare il condensatore rimane immagazzinato al suo interno, sotto forma di energia potenziale elettrica, fino a quando non si scarica. Motivo per cui i condensatori sono dei serbatoi di energia.



Macchina fotografica: Il condensatore accumula energia e mediante una scarica veloce fa funzionare il flash.

Defibrillatore: Il condensatore accumula energia che viene poi scaricata per regolarizzare il battito cardiaco



Poiché fra le armature esiste un campo elettrico, il quale si annulla quando il condensatore si scarica, possiamo anche pensare che:

L'energia è immagazzinata nel campo elettrico

Secondo questo punto di vista, si dimostra che:

Densità di energia del campo elettrico

La densità di energia del campo elettrico, definita come energia immagazzinata dal campo per unità di volume, è espressa in funzione del modulo E del campo da:

$$u = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

L'espressione della densità di energia è valida in generale per qualsiasi campo elettrico, anche per un campo non uniforme.

Il fatto che alla presenza di un campo elettrico è associata una ben definita quantità di energia conferma il fatto che il vettore campo elettrico $\mathbf{E}$ non è uno strumento matematico utile per descrivere una situazione fisica, ma una realtà fisica osservabile e quindi misurabile.

CONCLUSIONE: VERSO LE EQUAZIONI DI MAXWELL

Le proprietà matematiche del campo elettrico sono descritte dalle seguenti due equazioni:

Teorema di Gauss

$$\Phi_{\Omega}(\vec{E}) = \frac{Q_{\text{tot}}}{\varepsilon}$$

Teorema della circuitazione

$$C(\vec{E}) = 0$$

Si tratta di due delle quattro equazioni di Maxwell (caso elettrostatico).