

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica

IL CALCOLO DEI LIMITI

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\textit{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$$

OPERAZIONI SUI LIMITI

Nel capitolo precedente è stato definito e analizzato il concetto di limite. Adesso acquisiamo le tecniche per calcolarlo.

I teoremi che seguono valgono per:

$$x \rightarrow x_0 \quad x \rightarrow x_0^\pm \quad x \rightarrow \pm\infty$$

◆ Limite somma algebrica di due funzioni

TEOREMA

Se $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = m$, dove $l, m \in \mathbb{R}$, allora:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) + \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = l + m.$$

dimostrazione

Siccome $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l$, dalla definizione segue che in corrispondenza di ogni valore positivo $\frac{\varepsilon}{2}$, arbitrariamente piccolo, esiste un intorno I_1 di α tale che:

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < l + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in I_1 \text{ con } x \neq \alpha.$$

Analogamente, poiché $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = m$, in corrispondenza dello stesso $\frac{\varepsilon}{2}$ esiste un intorno I_2 di α tale che:

$$m - \frac{\varepsilon}{2} < g(x) < m + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in I_2 \text{ con } x \neq \alpha.$$

Per i punti x dell'intorno $I = I_1 \cap I_2$ diversi da α , valgono entrambe le disuguaglianze precedenti e quindi, sommando membro a membro, otteniamo

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(m - \frac{\varepsilon}{2}\right) < f(x) + g(x) < \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(m + \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

ossia:

$$(l + m) - \varepsilon < f(x) + g(x) < (l + m) + \varepsilon, \quad \forall x \in I \text{ con } x \neq \alpha.$$

Abbiamo pertanto verificato che in corrispondenza di ogni arbitrario $\varepsilon > 0$ esiste un intorno di α tale che per ogni suo punto $x \neq \alpha$ si ha $|f(x) + g(x) - (l + m)| < \varepsilon$, cioè:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) + g(x)] = l + m.$$

Osservazione

● In particolare, questo teorema dice che per ogni x_0 tale che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = f(x_0) + g(x_0)$.

Questo significa che *la somma algebrica di due funzioni continue è una funzione continua*.

ESEMPIO

Consideriamo le due funzioni $f(x) = 2x - 6$ e $g(x) = x + 3$ e i loro limiti per $x \rightarrow 4$:

$$\lim_{x \rightarrow 4} (2x - 6) = 2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 4} (x + 3) = 7.$$

La funzione somma $s(x) = f(x) + g(x)$ è:

$$s(x) = (2x - 6) + (x + 3) = 3x - 3.$$

Il limite di $s(x)$ per x che tende a 4 è:

$$\lim_{x \rightarrow 4} (3x - 3) = 9.$$

Osserviamo che $9 = 2 + 7$, ossia il limite della funzione $s(x)$ è uguale alla somma dei limiti di $f(x)$ e di $g(x)$.

Cosa succede quando una delle due funzioni o entrambe hanno limite infinito?

- ◆ Riassumiamo nella seguente tabella tutti i casi che si possono presentare nel calcolo dei limiti della somma di due funzioni:

$\begin{array}{c} g(x) \\ \oplus \\ f(x) \end{array}$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
m	$m + \ell$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Osservazione - I punti interrogativi (?) nella tabella si riferiscono alle somme:

$$+\infty - \infty \quad -\infty + \infty$$

e si chiamano **forme indeterminate**.

Attenzione – Guai a scrivere che:

$$+\infty - \infty = 0 \quad -\infty + \infty = 0$$

In seguito impareremo le tecniche per eliminare queste forme indeterminate.

◆ Limite prodotto di due funzioni

TEOREMA

Limite del prodotto di una costante (diversa da 0) per una funzione

Sia k un numero reale diverso da 0 e $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = k \cdot l.$$

dimostrazione

1. $k > 0$. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo; poiché $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l$, in corrispondenza di $\frac{\varepsilon}{k} > 0$ esiste un intorno I di α tale che:

$$l - \frac{\varepsilon}{k} < f(x) < l + \frac{\varepsilon}{k}, \quad \forall x \in I \text{ con } x \neq \alpha.$$

Allora, moltiplicando tutti i membri delle disequazioni per k , otteniamo

$$k \cdot l - \varepsilon < k \cdot f(x) < k \cdot l + \varepsilon, \quad \forall x \in I \text{ con } x \neq \alpha,$$

cioè:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} [k \cdot f(x)] = k \cdot l = k \cdot \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x).$$

2. $k < 0$. In questo caso si ha $-k > 0$ e quindi, per quanto è appena stato dimostrato:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} [-k \cdot f(x)] = -k \cdot l.$$

Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno I di α tale che:

$$-k \cdot l - \varepsilon < -k \cdot f(x) < -k \cdot l + \varepsilon, \quad \forall x \in I \text{ con } x \neq \alpha.$$

Moltiplicando tutti i membri delle disequazioni per -1 , si invertono i versi delle disuguaglianze e si cambia segno:

$$k \cdot l + \varepsilon > k \cdot f(x) > k \cdot l - \varepsilon, \quad \forall x \in I \text{ con } x \neq \alpha.$$

Riotteniamo quindi $\lim_{x \rightarrow \alpha} [k \cdot f(x)] = k \cdot l = k \cdot \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$.

ESEMPIO

Se $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5$, allora $\lim_{x \rightarrow 2} 4 \cdot (3x - 1) = 4 \cdot 5 = 20$

TEOREMA

Se $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = m$ con $l, m \in \mathbb{R}$, allora:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = l \cdot m.$$

dimostrazione

Dimostriamo inizialmente il caso in cui $l = m = 0$.

Applichiamo la definizione di limite: per le ipotesi fatte possiamo dire che, preso $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo (possiamo assumere che $\varepsilon < 1$), esistono due intorni I_1 e I_2 di α tali che:

$$|f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in I_1 \text{ con } x \neq \alpha$$

e

$$|g(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in I_2 \text{ con } x \neq \alpha.$$

Allora nell'intorno $I = I_1 \cap I_2$ sono verificate entrambe le disuguaglianze e quindi, moltiplicando tra loro entrambi i membri, abbiamo:

$$|f(x) \cdot g(x)| < \varepsilon^2 < \varepsilon, \quad \forall x \in I \text{ con } x \neq \alpha.$$

Ciò significa che:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

Sfruttiamo ora questo risultato per dimostrare il caso più generale. Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l \quad \rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) - l] = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = m \quad \rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} [g(x) - m] = 0;$$

allora:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) - l] [g(x) - m] = 0$$

Poiché

$$\begin{aligned} [f(x) - l] [g(x) - m] &= f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot m - l \cdot g(x) + l \cdot m \rightarrow \\ &\rightarrow f(x) \cdot g(x) = [f(x) - l] [g(x) - m] + f(x) \cdot m + l \cdot g(x) - l \cdot m, \end{aligned}$$

passando al limite in entrambi i membri, risulta:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) \cdot g(x)] = 0 + l \cdot m + l \cdot m - l \cdot m = l \cdot m.$$

ESEMPIO

Essendo $\lim_{x \rightarrow 1} 3x = 3$ e $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$, allora $\lim_{x \rightarrow 1} 3x(x + 1) = 3 \cdot 2 = 6$.

Infatti, la funzione prodotto è $p(x) = 3x(x + 1) = 3x^2 + 3x$, e il limite per x che tende a 1 di tale funzione è proprio uguale a 6.

Osservazione

● Analogamente a quanto visto per la somma di due funzioni, questi ultimi due teoremi permettono di affermare che **il prodotto di due funzioni continue** (in particolare **il prodotto di una costante per una funzione continua**) è una funzione continua.

□ Tabella per tutti i casi che si possono presentare nel calcolo dei limiti del prodotto di due funzioni:

$\begin{matrix} g(x) \\ \circ \\ f(x) \end{matrix}$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$m > 0$	$m \cdot \ell$	$m \cdot \ell$	0	$+\infty$	$-\infty$
$m < 0$	$m \cdot \ell$	$m \cdot \ell$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	?	?
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

Osservazione - I punti interrogativi (?) nella tabella si riferiscono al prodotto (nelle sue varie forme):

$$\infty \cdot 0$$

e si chiamano **forma indeterminata**.

Attenzione – Guai a scrivere che:

$$\infty \cdot 0 = 0 \quad oppure \quad \infty \cdot 0 = \infty$$

In seguito impareremo le tecniche per eliminare questa forma indeterminata.

◆ Limite della potenza

TEOREMA

Se $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l$, allora:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \right]^n = l^n.$$

dimostrazione

Il teorema può essere dimostrato pensando che la potenza n -esima di una funzione, ossia $[f(x)]^n$, è il prodotto di tale funzione per se stessa n volte, e quindi si possono applicare i teoremi sul prodotto delle funzioni.

La funzione ha limite $+\infty$

Abbiamo la tabella a fianco.

$f(x)$	a	$[f(x)]^a$
$+\infty$	$a > 0$	$(+\infty)^a = +\infty$
$+\infty$	$a < 0$	$(+\infty)^a = 0^+$

L'esponente è una funzione

Il teorema della potenza si può estendere al caso $[f(x)]^{g(x)}$

$\begin{matrix} g(x) \\ \swarrow \searrow \\ [f(x)]^{g(x)} \\ \swarrow \searrow \\ f(x) \end{matrix}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	0^+
0^+	?	0^+	$+\infty$
1	1	?	?
$0 < \ell < 1$	1	0^+	$+\infty$
$\ell > 1$	1	$+\infty$	0^+

Osservazione - I punti interrogativi (?) nella tabella si riferiscono alle **forme indeterminate**

$$\infty^0 \quad 0^0 \quad 1^\infty$$

Attenzione – Guai a scrivere per queste forme indeterminate risultati strani.

In seguito impareremo le tecniche per eliminare queste forme indeterminate.

◆ Limite radice n-esima funzione

TEOREMA

Se $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l, l \in \mathbb{R} \text{ e } l > 0$, allora:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)} = \sqrt[n]{l}.$$

Se n è dispari, questo risultato vale anche per $l \leq 0$.

ESEMPIO

Essendo $\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 1) = 4$, allora $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{5x - 1} = 2$.

◆ Limite funzione reciproca

TEOREMA

Consideriamo una funzione $f(x)$ e la sua reciproca $\frac{1}{f(x)}$:

- se $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l \in \mathbb{R}, l \neq 0$, allora $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)} = \frac{1}{l}$;
- se $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$, o $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = -\infty$, allora $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{f(x)} = 0$;

quando esiste un intorno di α in cui $f(x) \neq 0$:

- se $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = 0^+$, allora $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{f(x)} = +\infty$;
- se $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = 0^-$, allora $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

◆ Limite quoziente due funzioni

TEOREMA

Se $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = m$, e $m \neq 0$, allora:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)} = \frac{l}{m}.$$

DIMOSTRAZIONE

Siccome possiamo scrivere $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$, per il teorema del limite della funzione reciproca e del limite del prodotto di due funzioni, abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)} = \frac{l}{m}.$$

ESEMPIO

1. Essendo $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 1) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1) = 7$, allora $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 1}{2x + 1} = \frac{2}{7}.$

2. Essendo $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1) = 7$, allora $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{2x + 1} = \frac{0}{7} = 0$

Osservazione

● Questo teorema permette di affermare che *il quoziente $\frac{f(x)}{g(x)}$ di due funzioni continue in un punto x_0 è una funzione continua se $g(x_0) \neq 0$.*

In particolare, il quoziente di due polinomi $\frac{P(x)}{Q(x)}$, cioè *una funzione razionale fratta, è una funzione continua in tutti i punti che non annullano il denominatore $Q(x)$.*

Tutti i casi
nel calcolo
dei limiti del
quoziente di
due funzioni:

$\begin{matrix} g(x) \\ \frac{f(x)}{g(x)} \\ f(x) \end{matrix}$	$m \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell \neq 0$	$\frac{l}{m}$	∞	0	0
0	0	?	0	0
$+\infty$	∞	∞	?	?
$-\infty$	∞	∞	?	?

Osservazione - I punti interrogativi (?) nella tabella si riferiscono alle **forme indeterminate**

$$\begin{array}{cc} 0 & \infty \\ \hline 0 & \infty \end{array}$$

Attenzione – Guai a scrivere per queste forme indeterminate risultati strani.

In seguito impareremo le tecniche per eliminare queste forme indeterminate.

◆ Limite funzioni composte

Siano date due funzioni $y=f(z)$ e $z=g(x)$, per le quali possiamo fare la composizione $f(g(x))$, cioè tali che $g(x)$ appartiene al dominio di f per ogni x appartenente al dominio di g .

TEOREMA

Siano $y = f(z)$ e $z = g(x)$ tali che $f(z)$ è continua in z_0 e $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = z_0$. Allora:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)) = f(z_0).$$

In particolare, se $g(x)$ è continua in x_0 e $f(z)$ è continua in $z_0 = g(x_0)$, allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)) = f(g(x_0)),$$

cioè la funzione composta $f(g(x))$ è *continua* in x_0 .

ESEMPIO

La funzione $y = \sin 4x$ è la funzione composta da $z = g(x) = 4x$, continua in $\mathbb{R}$, e da $y = f(z) = \sin z$, continua in $\mathbb{R}$ e quindi in ogni punto dell'immagine di g .

La funzione composta $f \circ g$ è $f(g(x)) = \sin 4x$, continua in $\mathbb{R}$.

Per esempio, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin 4x = \sin\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \sin \pi = 0$.

◆ Continuità funzione inversa

Se $y = f(x)$ è una funzione biettiva in un intervallo D , allora esiste la funzione inversa f^{-1} definita nel codominio di f . Per essa si può dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA

Se $y = f(x)$ è una funzione biettiva e continua in D , allora la funzione inversa f^{-1} è continua nel codominio di f .

ESEMPIO

Calcoliamo $\lim_{x \rightarrow 0} (\arccos x + 4x)$.

La funzione $\cos x$ è continua in $\mathbb{R}$ e quindi la funzione $\arccos x$ è continua per tutti i valori di $[-1; 1]$, in particolare per $x = 0$. Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\arccos x + 4x) = \lim_{x \rightarrow 0} \arccos x + \lim_{x \rightarrow 0} 4x = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

IL CALCOLO DEI LIMITI

◆ Le forme indeterminate

Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, le forme indeterminate che possiamo incontrare nel calcolo dei limiti sono sette:

$$+\infty - \infty, \infty \cdot 0, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^\infty, 0^0, \infty^0.$$

Esaminiamo ora, attraverso alcuni esempi, come calcolare i limiti che si presentano in forma indeterminata.

◆ La forma indeterminata $+\infty - \infty$

ESEMPIO

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$ si presenta in forma indeterminata $+\infty - \infty$, perché:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\sqrt{x^2 + 1}) = -\infty.$$

Per calcolare questo limite possiamo riscrivere la funzione data in modo che nell'argomento del limite scompaia la differenza $x - \sqrt{x^2 + 1}$ e appaia invece la somma $x + \sqrt{x^2 + 1}$. Per far ciò, moltiplichiamo e dividiamo la funzione per $x + \sqrt{x^2 + 1}$:

$$\begin{aligned} x - \sqrt{x^2 + 1} &= (x - \sqrt{x^2 + 1}) \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 - (x^2 + 1)}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \\ &= \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Quando $x \rightarrow +\infty$, il denominatore della frazione $x + \sqrt{x^2 + 1}$ tende a $+\infty$, quindi, per il teorema del limite della funzione reciproca, la frazione tende a 0, ossia:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = 0.$$

esempio

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 3x^2 + 1)$ si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$

Raccogliendo il fattore x^4 , il limite diventa:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right).$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{x^2} \right) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = 0$, risulta $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) = 1$.

Inoltre, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$, quindi, per il teorema del limite del prodotto, trovandoci nel caso di un limite finito (diverso da 0) e uno infinito, risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) = +\infty.$$

◆ La forma indeterminata $0 \cdot \infty$

ESEMPIO

Calcoliamo il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (1 - \sin x) \cdot \operatorname{tg} x.$$

Con il calcolo diretto otteniamo la forma indeterminata $0 \cdot \infty$, perché:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (1 - \sin x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty.$$

Ricordiamo che $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e moltiplichiamo e dividiamo la funzione data per $(1 + \operatorname{sen} x)$:

$$\begin{aligned}(1 - \operatorname{sen} x) \cdot \operatorname{tg} x \cdot \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} &= \frac{(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x)}{1 + \operatorname{sen} x} \cdot \operatorname{tg} x = \\ &= \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{sen} x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\cancel{\cos^2} x}{1 + \operatorname{sen} x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cancel{\cos x}} = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{1 + \operatorname{sen} x}.\end{aligned}$$

Quando $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$, il numeratore $\operatorname{sen} x \cdot \cos x$ tende a 0, mentre il denominatore $1 + \operatorname{sen} x$ tende a 2, quindi, per il teorema del limite del quoziente di due funzioni, la frazione tende a $\frac{0}{2}$, ossia a 0:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (1 - \operatorname{sen} x) \cdot \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = 0.$$

◆ La forma indeterminata ∞/∞

Il limite di una funzione razionale fratta per $x \rightarrow \infty$

Dato il limite

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m},$$

quando almeno un coefficiente delle potenze di x è diverso da 0 sia a numeratore sia a denominatore, questo limite si presenta nella forma $\frac{\infty}{\infty}$, perché il numeratore e il denominatore tendono a ∞ quando x tende a ∞ .

Forniamo tre esempi di calcolo di limite con $n > m$, $n = m$, $n < m$

Il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore

ESEMPIO

Calcoliamo il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 1}{3x^2 - 2x + 6}$.

Raccogliamo a fattor comune x^5 al numeratore e x^2 al denominatore:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 \cdot \left(1 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^5}\right)}{x^2 \cdot \left(3 - \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \boxed{x^3} \cdot \frac{\boxed{\left(1 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^5}\right)}}{\boxed{\left(3 - \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}}.$$

tende a 1

tende a $+\infty$

tende a 3

Si ha quindi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 1}{3x^2 - 2x + 6} = +\infty.$$

● Semplifichiamo x^5 con x^2 ; possiamo supporre $x \neq 0$ perché x tende a $+\infty$ (lo stesso accadrebbe se x tendesse a $-\infty$).

Il grado del numeratore è uguale al grado del denominatore

ESEMPIO

Calcoliamo il limite $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{1 - 2x^2}{3x^2 + 2x - 5}$.

● Semplifichiamo x^2 (certamente diverso da 0, visto che cerchiamo il limite per x tendente a ∞).

Raccogliamo a fattor comune x^2 sia al numeratore sia al denominatore:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{x^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2} - 2 \right)}{x^2 \cdot \left(3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} \right)} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{\boxed{\left(\frac{1}{x^2} - 2 \right)}}{\boxed{\left(3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} \right)}}.$$

tende a -2

tende a 3

Per il teorema del quoziente dei limiti, la frazione tende a $-\frac{2}{3}$, pertanto:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{1 - 2x^2}{3x^2 + 2x - 5} = -\frac{2}{3}.$$

Osserviamo che $-\frac{2}{3}$ è il rapporto fra i coefficienti dei termini di grado massimo, ossia dei termini con x^2 , del numeratore e del denominatore.

Il grado del numeratore è minore del grado del denominatore

ESEMPIO

Calcoliamo il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{x^3 + 2x}$.

Raccogliamo x al numeratore e x^3 al denominatore:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot \left(2 - \frac{1}{x}\right)}{x^3 \cdot \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\text{tende a 0}} \cdot \frac{\underbrace{\left(2 - \frac{1}{x}\right)}_{\text{tende a 2}}}{\underbrace{\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}_{\text{tende a 1}}}.$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{x^3 + 2x} = 0.$$

● Semplifichiamo x con x^3
($x \neq 0$ perché $x \rightarrow -\infty$).

◆ Forma indeterminata ∞/∞ : caso generale

In generale, data una funzione razionale fratta

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m},$$

con il numeratore di grado n e il denominatore di grado m , abbiamo:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m} = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } n > m \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}$$

Il segno da attribuire a ∞ nel caso $n > m$ è dato dal prodotto dei segni di:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} x^{n-m} \text{ e } \frac{a_0}{b_0}.$$

◆ Forma indeterminata 0/0

ESEMPIO

Calcoliamo il limite

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 9x + 9},$$

che si presenta in forma indeterminata $\frac{0}{0}$, perché:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x - 3) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 9x + 9) = 0.$$

Poiché il valore 3 annulla sia il numeratore sia il denominatore, scomponiamo in fattori entrambi:

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

$$2x^2 - 9x + 9 = (x - 3)(2x - 3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 9x + 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 3)(2x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1}{2x - 3} = \frac{4}{3}.$$

◆ Forme indeterminate 0^0 ∞^0 1^∞

Le forme indeterminate 0^0 , ∞^0 , 1^∞ si incontrano nei calcoli di limite del tipo

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)^{g(x)}, \quad \text{con } f(x) > 0.$$

Ricorrendo all'identità $a = e^{\ln a}$ possiamo scrivere:

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Allora se, per esempio, $g(x) \rightarrow 0$ e $f(x) \rightarrow 0^+$, nella funzione $e^{g(x) \ln f(x)}$ all'esponente compare la forma indeterminata $0 \cdot \infty$.

ESEMPIO

Calcoliamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\ln x}}$.

Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$, si ha la forma indeterminata ∞^0 .

Scriviamo: $x^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\ln x \frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{1}{\cancel{\ln x}} \cdot \cancel{\ln x}} = e$. Il limite vale allora e .

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo i limiti: a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[x + \frac{1}{(x-1)^2} \right]$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x)$.

a) La funzione $s(x) = x + \frac{1}{(x-1)^2}$ è la somma delle funzioni $g(x) = x$ e $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$.

$\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$ per la continuità di $y = x$.

Per la continuità della funzione polinomiale $y = x - 1$ e il teorema del limite della potenza,

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0,$$

quindi, per il teorema del limite della funzione reciproca:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

La somma di un limite finito con uno infinito è infinito, quindi $\lim_{x \rightarrow 1} \left[x + \frac{1}{(x-1)^2} \right] = +\infty$.

b) La funzione $s(x) = x^2 - 2x$ è la somma delle funzioni $g(x) = x^2$ e $f(x) = -2x$.

Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty,$$

quindi:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x) = +\infty.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo i limiti: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{e^x}{2}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \log x$.

a) Abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

Il segno dei due limiti è concorde, pertanto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

b) Abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty.$$

Il segno dei due limiti è discorde, quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \log x = -\infty.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo i limiti:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{6x + 1}{x + 2}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{6x + 1}{x + 2}.$$

a) $h(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$ è il quoziente delle funzioni $f(x) = x^2 + 3x - 1$ e $g(x) = x - 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x - 1) = 9; \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x - 1) = 1.$$

Il limite dato è uguale al quoziente dei limiti,

$$\text{perciò } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1} = \frac{9}{1} = 9.$$

b) $h(x) = \frac{6x + 1}{x + 2}$ è il quoziente delle funzioni $f(x) = 6x + 1$ e $g(x) = x + 2$:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} (6x + 1) = -11; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} (x + 2) = 0^+.$$

Il numeratore tende a un numero negativo, mentre il denominatore tende a 0^+ (cioè resta sempre positivo); i limiti hanno segno discorde, pertanto:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{6x + 1}{x + 2} = -\infty.$$

c) Calcoliamo ora i limiti di numeratore e denominatore per $x \rightarrow -2^-$:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} (6x + 1) = -11; \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} (x + 2) = 0^-.$$

I limiti hanno segno concorde, quindi:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{6x + 1}{x + 2} = +\infty.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \cos x}{x}$.

Il numeratore della funzione $\frac{3 + \cos x}{x}$, se $x \rightarrow +\infty$, non ammette limite, quindi non possiamo applicare i teoremi sul calcolo dei limiti.

Poiché $-1 \leq \cos x \leq 1$, allora $2 \leq 3 + \cos x \leq 4$ e quindi, per $x > 0$:

$$\frac{2}{x} \leq \frac{3 + \cos x}{x} \leq \frac{4}{x}.$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$, per il teorema del confronto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \cos x}{x} = 0.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+7} - \sqrt{x-5})$.

Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+7} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-5} = +\infty$, abbiamo la forma indeterminata $+\infty - \infty$.

Scriviamo la funzione $f(x) = \sqrt{x+7} - \sqrt{x-5}$ in modo che compaia la somma delle radici anziché la differenza, moltiplicando e dividendo $f(x)$ per $(\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5})$:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+7} - \sqrt{x-5} &= (\sqrt{x+7} - \sqrt{x-5}) \cdot \frac{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5}}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5}} = \frac{(x+7) - (x-5)}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5}} = \\ &= \frac{12}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5}}.\end{aligned}$$

Quando $x \rightarrow +\infty$, il denominatore $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5}$ della frazione tende a $+\infty$, mentre il numeratore tende a 12, e quindi: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+7} - \sqrt{x-5}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5}} = 0$.

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 - 3)$.

Poiché $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 3) = +\infty$, abbiamo la forma indeterminata $-\infty + \infty$.
Per calcolare il limite raccogliamo a fattor comune x elevato al massimo esponente, cioè x^3 :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \cdot \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^3} \right) \right].$$

Dal momento che $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^3} = 0$, allora $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^3} \right) = 1$.

Poiché $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$, otteniamo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \cdot \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^3} \right) \right] = -\infty.$$

Possiamo ottenere il risultato applicando anche la regola:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_0 x^n.$$

Nel nostro caso si ha:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin 2x \cdot \cotg x)$.

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin 2x = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cotg x = +\infty$, abbiamo la forma indeterminata $0 \cdot \infty$.

Utilizzando le formule goniometriche, trasformiamo $\sin 2x$ e $\cotg x$ in modo da semplificare l'argomento del limite:

$$\sin 2x \cdot \cotg x = 2 \sin x \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 2 \cos^2 x.$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin 2x \cdot \cotg x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 \cos^2 x) = 2 \cdot 1 = 2.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3x^4 + x^2}{2x^2 - 2}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 5x^2 + 6x^3}{x^3 - 2x^2 - 1}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - x^2}{x^3 + x^2 - 2}$

a) Riscriviamo l'argomento del limite ordinando il numeratore e il denominatore secondo il grado:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^4 + x^2 + 2x}{2x^2 - 2}.$$

Raccogliamo a fattor comune i monomi di grado massimo al numeratore e al denominatore:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(-3 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right)}{x^2 \cdot \left(2 - \frac{2}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \boxed{x^2} \cdot \boxed{\frac{-3 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{2 - \frac{2}{x^2}}} = -\infty.$$

tende a $+\infty$ tende a $-\frac{3}{2}$

b) Riscriviamo il limite ordinando il numeratore e il denominatore secondo il grado decrescente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3 - 5x^2 + x}{x^3 - 2x^2 - 1}.$$

Raccogliamo a fattor comune i monomi di grado massimo al numeratore e al denominatore:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \cdot \left(6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^3 \cdot \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{6}{1} = 6.$$

c) Riscriviamo il limite ordinando il numeratore e il denominatore secondo il grado decrescente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 2x}{x^3 + x^2 - 2}.$$

Raccogliamo a fattor comune i monomi di grado massimo al numeratore e al denominatore:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot \left(-1 + \frac{2}{x}\right)}{x^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \boxed{\frac{1}{x}} \cdot \boxed{\frac{-1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}}} = 0 \cdot (-1) = 0.$$

tende a 0

tende a -1

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x - 1}$.

Osserviamo che per x che tende a $-\infty$ il numeratore tende a $+\infty$, mentre il denominatore tende a $-\infty$ e quindi il limite è nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

Raccogliamo a fattor comune i termini di grado massimo all'interno della radice e al denominatore:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x \left(2 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(2 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(2 - \frac{1}{x}\right)}.$$

Poiché x tende a $-\infty$, possiamo supporre $x < 0$, quindi abbiamo $|x| = -x$. Il limite perciò diventa:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(2 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo: a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - x^2 - 5x - 2}{2x^2 - 5x + 2}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x^2 - x}$

a) Calcolando il limite del numeratore e del denominatore, otteniamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Poiché 2 è radice sia per il numeratore sia per il denominatore, possiamo scomporre in fattori numeratore e denominatore. Per il numeratore usiamo la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -1 & -5 & -2 \\ & & 4 & 6 & 2 \\ \hline & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad 2x^3 - x^2 - 5x - 2 = (x - 2)(2x^2 + 3x + 1).$$

Scomponendo il denominatore si ha:

$$2x^2 - 5x + 2 = (x - 2)(2x - 1).$$

Calcoliamo il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - x^2 - 5x - 2}{2x^2 - 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(2x^2 + 3x + 1)}{(x - 2)(2x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 3x + 1}{2x - 1} = 5.$$

b) Calcolando il limite, si ha la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Razionalizziamo il numeratore e scomponiamo il denominatore in fattori. Si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x(x-1)} \cdot \frac{1 + \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} - x - \cancel{1}}{\cancel{x}(x-1)(1 + \sqrt{x+1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x-1)(1 + \sqrt{x+1})} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$.

Per $x \rightarrow 0^+$ si ha $\ln x \rightarrow -\infty$, quindi $\frac{1}{\ln x} \rightarrow 0^-$, perciò abbiamo la forma indeterminata 0^0 .

Poiché $e^{\ln a} = a$ (con $a > 0$), scriviamo il limite nella forma

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^{\frac{1}{\ln x}}},$$

e, applicando la proprietà dei logaritmi $\ln a^b = b \ln a$, otteniamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{\cancel{\ln x}} \cdot \cancel{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^1 = e.$$

Osservazione. Anche forme indeterminate dei tipi ∞^0 e 1^∞ possono essere risolte utilizzando la proprietà $e^{\ln a} = a$, con $a > 0$.

LIMITI NOTEVOLI

Analizziamo alcuni **limiti notevoli** (limiti dei quali conosciamo il risultato), utili nella risoluzione di limiti non immediati o comunque particolarmente complessi.

◆ Primo limite notevole

Consideriamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}, \text{ con } x \text{ espresso in radianti}$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen } x = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ siamo in presenza della forma indeterminata $0/0$.

Si dimostra che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Da questo limite notevole si deducono i seguenti limiti, che si presentano anch'essi nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

DIMOSTRAZIONE

Moltiplicando numeratore e denominatore di $\frac{1 - \cos x}{x}$ per $1 + \cos x$, otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} &= \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} = \\ &= \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{1 + \cos x}, \end{aligned}$$

e quindi, per il teorema del prodotto dei limiti, risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

DIMOSTRAZIONE

Applicando il ragionamento precedente, possiamo scrivere:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

◆ Secondo limite notevole

Consideriamo:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, siamo in presenza della forma indeterminata 1^∞ .

Si dimostra che:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Anche da questo limite notevole possiamo dedurne altri, che sono nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

● Più in generale, si dimostra che, se $a > 0$ e $a \neq 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

DIMOSTRAZIONE

Applicando le proprietà dei logaritmi, possiamo scrivere

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x} \ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

e quindi, per il teorema di continuità della funzione composta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right].$$

Poniamo ora $y = \frac{1}{x}$, allora $x = \frac{1}{y}$ e per $x \rightarrow 0$ abbiamo $y \rightarrow \pm\infty$.

Effettuando la sostituzione di variabile nel limite precedente, otteniamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln \left[\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \right] = \ln e = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

● Più in generale, si dimostra che, se $a > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

DIMOSTRAZIONE

Poniamo $y = e^x - 1$, allora $e^x = 1 + y$ e $x = \ln(1 + y)$. Inoltre, per $x \rightarrow 0$ risulta $y \rightarrow 0$; quindi, sostituendo la variabile x , otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1 + y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1 + y)}{y}} = \frac{1}{1} = 1,$$

per il teorema del limite della funzione reciproca.

● Poiché e^x è continua,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} y &= \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = \\ &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k$$

DIMOSTRAZIONE

Scriviamo $(1+x)^k = e^{\ln(1+x)^k} = e^{k \ln(1+x)}$.

Sostituiamo e moltiplichiamo numeratore e denominatore per $k \ln(1+x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{k \ln(1+x)} - 1}{x} \cdot \frac{k \ln(1+x)}{k \ln(1+x)}.$$

Applichiamo i due limiti notevoli precedenti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{k \ln(1+x)} - 1}{k \ln(1+x)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot k = 1 \cdot 1 \cdot k = k.$$

Importante

● I limiti notevoli si applicano anche quando al posto della variabile x compare una funzione $y = f(x)$ il cui limite è uguale al valore a cui tende x nel limite notevole. Per esempio:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 1.$$

Infatti, se poniamo $y = 3x$, per $x \rightarrow 0$ anche $y \rightarrow 0$ e il limite risulta nella sua forma standard:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

◆ Tabella limiti notevoli

I LIMITI NOTEVOLI	
FORMA CLASSICA	FORMA GENERALIZZATA
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1 \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	
$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1 \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1 \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$	

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + 3x}{x + \operatorname{sen} x}$.

Il limite presenta la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Sostituiamo $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + 3x}{x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + 3x}{x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x + 3x \cos x}{\cos x}}{x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x + 3x \cos x}{\cos x (x + \operatorname{sen} x)}.$$

Raccogliamo x al numeratore e al denominatore, semplifichiamo e calcoliamo il limite tenendo conto che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + 3 \cos x \right)}{x \cos x \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x} + 3 \cos x}{\cos x \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)} = \frac{1 + 3 \cdot 1}{1(1 + 1)} = 2.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$.

Il limite presenta la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Ci riconduciamo al limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ con un cambiamento di variabile, ossia ponendo

$$y = x - \frac{\pi}{2}, \text{ da cui } x = y + \frac{\pi}{2}.$$

Osserviamo che per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $y \rightarrow 0$ e quindi il limite dato, utilizzando le formule degli archi associati, diventa:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin y}{y} = -1.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5+x}{x} \right)^x$.

Per $x \rightarrow +\infty$ si ha la forma indeterminata 1^∞ .

«Spezziamo» la frazione tra parentesi dividendo ciascun addendo del numeratore per x e semplificando:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5+x}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{x} + 1 \right)^x.$$

Per ricondurci al limite fondamentale poniamo $y = \frac{x}{5}$, cioè $x = 5y$. Osserviamo che, per $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow +\infty$.

Il limite dato diventa:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{x} + 1 \right)^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{5y} + 1 \right)^{5y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} + 1 \right)^{5y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \right]^5 = e^5.$$

Esercizio 1. *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} .$$

Soluzione. Moltiplichiamo e dividiamo per 2:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{2} \cdot \frac{\sin(2x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} \end{aligned}$$

a questo punto, ponendo $y = 2x$, dato che

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} &= \lim_{y \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin y}{y} = \\ &= 2 \cdot 1 = 2 . \end{aligned}$$

Esercizio 2. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} .$$

Soluzione. Moltiplichiamo e dividiamo per $(1 + \cos x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \end{aligned}$$

poiché risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$$

abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} .$$

Esercizio 3. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin(4x)} .$$

Soluzione. Riscriviamo il limite in questo modo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin(4x)} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cdot \frac{1}{\sin(4x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} \cdot (1 - \cos x) \cdot \frac{4x}{4x} \cdot \frac{1}{\sin(4x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{4x} \cdot \frac{4x}{\sin(4x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{4x}{\sin(4x)}$$

dal momento che risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin(4x)} = 1$$

abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{4x}{\sin(4x)} = 0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 0 .$$

Esercizio 4. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{3x^2}.$$

Soluzione. Il numeratore è una differenza di cubi, per cui abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{3x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \cdot (1 + \cos x + \cos^2 x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot (1 + \cos x + \cos^2 x) \end{aligned}$$

poiché risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x + \cos^2 x) = 1 + 1 + 1^2 = 3$$

abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot (1 + \cos x + \cos^2 x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 6. *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos(5x)}}{x}.$$

Soluzione. Portiamo la x dentro la radice, facendo molta attenzione al fatto che, trattandosi di un limite per $x \rightarrow 0^-$, la x è negativa:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos(5x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{\frac{1 - \cos(5x)}{x^2}}$$

moltiplichiamo e dividiamo dentro la radice per 25:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{\frac{25}{25} \cdot \frac{1 - \cos(5x)}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{25 \cdot \frac{1 - \cos(5x)}{25 x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{25 \cdot \frac{1 - \cos(5x)}{(5x)^2}} = -\sqrt{25 \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{5}{\sqrt{2}} = -\frac{5\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 7. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{(1-x)^2}}{3(x-1)^2}.$$

Soluzione. Mettendo un “meno” in evidenza e, osservando che $(1-x)^2 = (x-1)^2$, possiamo riscrivere il limite nel seguente modo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{(1-x)^2}}{3(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{e^{(x-1)^2} - 1}{3(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{1}{3} \cdot \frac{e^{(x-1)^2} - 1}{(x-1)^2}$$

ponendo ora $y = x - 1$ abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 1} -\frac{1}{3} \cdot \frac{e^{(x-1)^2} - 1}{(x-1)^2} = \lim_{y \rightarrow 0} -\frac{1}{3} \cdot \frac{e^{y^2} - 1}{y^2}$$

ponendo ora $z = y^2$ abbiamo

$$\lim_{y \rightarrow 0} -\frac{1}{3} \cdot \frac{e^{y^2} - 1}{y^2} = \lim_{z \rightarrow 0} -\frac{1}{3} \cdot \frac{e^z - 1}{z} = -\frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{1}{3}.$$

Esercizio 8. *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln(1 + 2x)}{(2 \cos(3x) - 2) \sin x}.$$

Soluzione. Riscriviamo il limite nel modo seguente:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1 - \cos(3x)} \cdot \ln(1 + 2x) \cdot \frac{1}{\sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{2} \cdot \frac{9x^2}{9x^2} \cdot \frac{1}{1 - \cos(3x)} \cdot \frac{2x}{2x} \cdot \ln(1 + 2x) \cdot \frac{x}{x} \cdot \frac{1}{\sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{9x^2} \cdot \frac{9x^2}{1 - \cos(3x)} \cdot 2x \cdot \frac{\ln(1 + 2x)}{2x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{9x^2} \cdot 2x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{9x^2}{1 - \cos(3x)} \cdot \frac{\ln(1 + 2x)}{2x} \cdot \frac{x}{\sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{9} \cdot \frac{9x^2}{1 - \cos(3x)} \cdot \frac{\ln(1 + 2x)}{2x} \cdot \frac{x}{\sin x} = \\ & \quad -\frac{1}{9} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{2}{9}. \end{aligned}$$

GLI INFINITESIMI, GLI INFINITI E IL LORO CONFRONTO

◆ Gli infinitesimi

DEFINIZIONE

Infinitesimo per $x \rightarrow \alpha$

Si dice che una funzione $f(x)$ è un infinitesimo per $x \rightarrow \alpha$ quando il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow \alpha$ è uguale a 0.

● α può essere finito o $+\infty$ o $-\infty$.

ESEMPIO

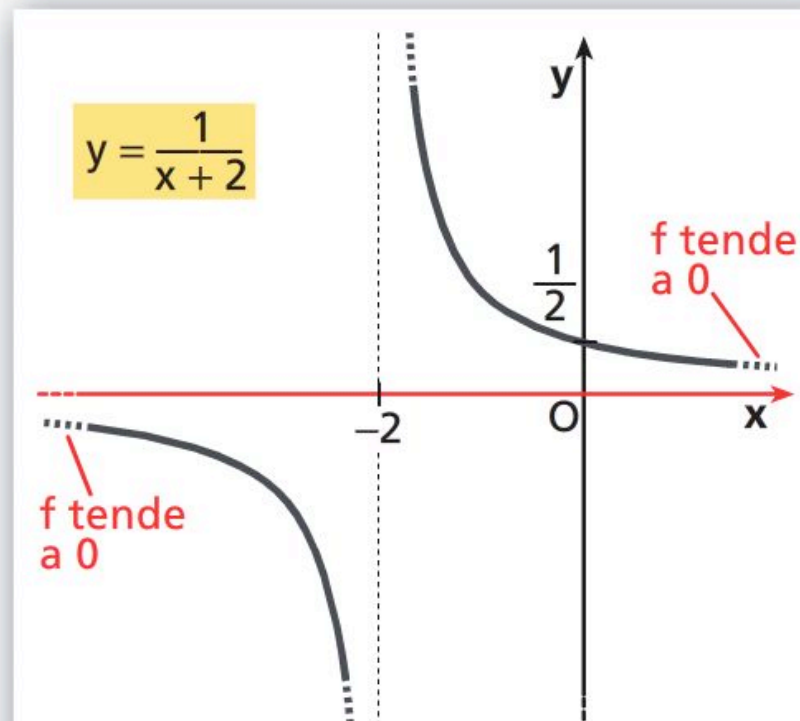
1. La funzione $f(x) = x - 1$ è un infinitesimo per $x \rightarrow 1$ perché $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$.

2. La funzione $f(x) = \frac{1}{x+2}$ è un infinitesimo per $x \rightarrow +\infty$, perché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0,$$

e per $x \rightarrow -\infty$, perché

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = 0.$$



Importante

● Funzioni del tipo $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \dots$ e $\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \dots$ sono tutte infinitesimi per $x \rightarrow +\infty$ e per $x \rightarrow -\infty$ (da quest'ultimo caso sono esclusi i reciproci delle radici di indice pari).

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambi degli infinitesimi per $x \rightarrow \alpha$, si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infinitesimi simultanei**.

Siano dunque $f(x)$ e $g(x)$ due infinitesimi simultanei per $x \rightarrow \alpha$ e supponiamo che esista un intorno I di α tale che $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$, con $x \neq \alpha$.

In questo caso è interessante vedere quale dei due infinitesimi tende a 0 «più rapidamente»; possiamo stabilire ciò determinando il limite (se esiste) del loro rapporto per $x \rightarrow \alpha$.

In sintesi si ha:

- Se $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$ (l finito), si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infinitesimi dello stesso ordine** (essenzialmente questo vuol dire che tendono a 0 con la stessa rapidità).
- Se $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, si dice che $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine superiore** a $g(x)$ (cioè f tende a 0 più rapidamente di g).
- Se $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \infty$, si dice che $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine inferiore** a $g(x)$ (cioè f tende a 0 meno rapidamente di g).
- Se *non esiste* il $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$, si dice che **gli infinitesimi $f(x)$ e $g(x)$ non sono confrontabili**.

ESEMPIO

1. Gli infinitesimi $f(x) = \ln(1+x)$ e $g(x) = x$, per $x \rightarrow 0$, sono dello stesso ordine perché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \neq 0$.

2. $f(x) = (x-3)^2$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x) = x-3$, per $x \rightarrow 3$, perché:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0.$$

3. $f(x) = e^x - 1$ è un infinitesimo di ordine inferiore a $g(x) = x^3$, per $x \rightarrow 0$, perché:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty.$$

4. Gli infinitesimi $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ e $g(x) = x$, per $x \rightarrow 0$, non sono confrontabili, perché

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \sin y$$

non esiste.

● Puoi dimostrare che $x \sin \frac{1}{x}$ è un infinitesimo per $x \rightarrow 0$ con il teorema del confronto.

● Abbiamo eseguito il cambiamento di variabile

$$y = \frac{1}{x}.$$

DEFINIZIONE

Ordine di un infinitesimo

Dati due infinitesimi $f(x)$ e $g(x)$, per $x \rightarrow \alpha$, si dice che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine γ ($\gamma > 0$) rispetto a $g(x)$, quando $f(x)$ è dello stesso ordine di $[g(x)]^\gamma$, cioè se:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{[g(x)]^\gamma} = l \neq 0.$$

Diciamo inoltre che $g(x)$ è preso come **infinitesimo campione**. In generale, come infinitesimo campione, si prende:

$$g(x) = x - x_0, \quad \text{se } x \rightarrow x_0;$$

$$g(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{se } x \rightarrow \pm\infty.$$

● Quando non è specificato, l'ordine di infinitesimo è riferito a questi campioni standard.

ESEMPIO

L'infinitesimo $f(x) = \frac{x-4}{x^5+1}$, per $x \rightarrow +\infty$, è di ordine 4 (rispetto al campione $\frac{1}{x}$), infatti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x-4}{x^5+1}}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5-4x^4}{x^5+1} = 1 \neq 0.$$

DEFINIZIONE

Infinitesimi equivalenti

Dati due infinitesimi $f(x)$ e $g(x)$, per $x \rightarrow \alpha$, essi si dicono equivalenti se:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

e si scrive $f \sim g$.

Per la definizione, due infinitesimi equivalenti hanno lo stesso ordine.

Inoltre uno dei due si dice **parte principale** dell'altro.

Esempi di infinitesimi equivalenti, per $x \rightarrow 0$, sono:

$$\sin x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x,$$

che abbiamo visto come limiti notevoli.

● Infatti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

TEOREMA

Principio di sostituzione degli infinitesimi

Se esiste il limite del rapporto di due infinitesimi simultanei $f(x)$ e $g(x)$, allora esso resta invariato se si sostituisce ciascun infinitesimo con la sua parte principale (cioè con un infinitesimo a esso equivalente):

$$f \sim f_1, g \sim g_1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f_1(x)}{f(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(x)}{g_1(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Per la definizione di infinitesimi equivalenti:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

ESEMPIO

Calcoliamo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x)}{\sin 2x}$.

Poiché $\ln(1 + 5x) \sim 5x$ e $\sin 2x \sim 2x$, abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x)}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}.$$

◆ Gli infiniti

DEFINIZIONE

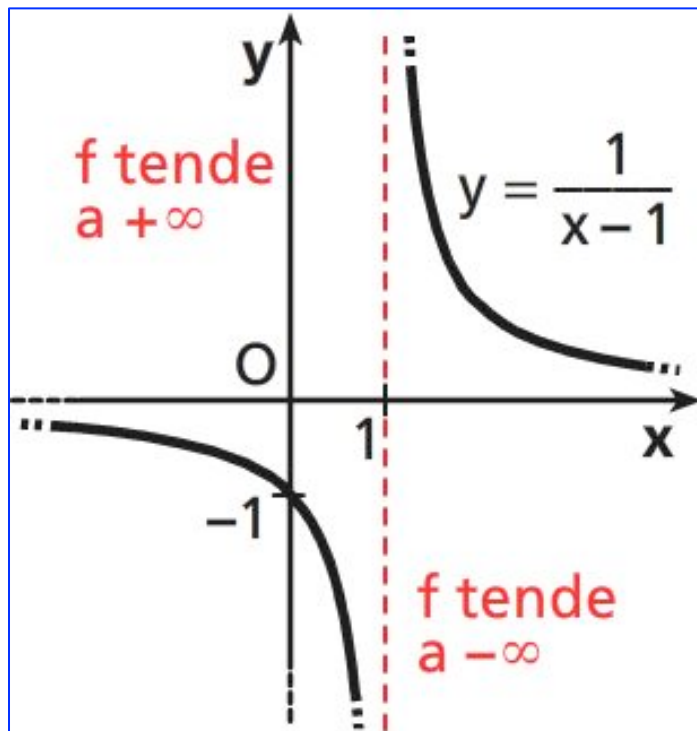
Infinito per $x \rightarrow \alpha$

Una funzione $f(x)$ si dice un infinito per $x \rightarrow \alpha$ quando il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow \alpha$ vale $+\infty$, $-\infty$ o ∞ .

● α può essere finito o $+\infty$ o $-\infty$.

ESEMPIO

La funzione $f(x) = \frac{1}{x-1}$ è un infinito per $x \rightarrow 1$ perché $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$



$y = \frac{1}{x-1}$ è un infinito
per $x \rightarrow 1^+$ e per $x \rightarrow 1^-$

Importante

- Le funzioni del tipo $x, x^2, x^3, \dots$ e anche $\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \dots$ sono infiniti per $x \rightarrow +\infty$ e per $x \rightarrow -\infty$ (da quest'ultimo caso sono escluse le radici di indice pari).

Per gli infiniti possiamo introdurre dei concetti analoghi a quelli visti per gli infinitesimi.

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambi infiniti per $x \rightarrow \alpha$, si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infiniti simultanei**.

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due infiniti simultanei per $x \rightarrow \alpha$.

- Se $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$ (l finito), si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infiniti dello stesso ordine** (essenzialmente questo vuol dire che tendono a ∞ con la stessa rapidità).

ESEMPIO

Gli infiniti $f(x) = x^5$ e $g(x) = 3x^5 + 2$, per $x \rightarrow +\infty$, sono dello stesso ordine perché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{3x^5 + 2} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

- Se $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$, si dice che $f(x)$ è un **infinito di ordine superiore** a $g(x)$ (cioè f tende a ∞ più rapidamente di g).

ESEMPIO

$f(x) = (x - 1)^2$ è un infinito di ordine superiore a $g(x) = x + 1$, per $x \rightarrow +\infty$, perché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - 1)^2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1} = +\infty.$$

- Se $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, si dice che $f(x)$ è un **infinito di ordine inferiore** a $g(x)$ (cioè f tende a ∞ meno rapidamente di g).

ESEMPIO

$f(x) = \frac{1}{x}$ è un infinito di ordine inferiore a $g(x) = \frac{1}{x^4}$, per $x \rightarrow 0$, perché

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0.$$

- Se non esiste il $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$, si dice che **gli infiniti** $f(x)$ e $g(x)$ **non sono confrontabili**.

ESEMPIO

Gli infiniti $f(x) = x^3(\cos x + 2)$ e $g(x) = x^3$, per $x \rightarrow +\infty$, non sono confrontabili perché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3(\cos x + 2)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos x + 2)$$

non esiste.

DEFINIZIONE

Ordine di un infinito

Dati due infiniti $f(x)$ e $g(x)$, per $x \rightarrow \alpha$, si dice che $f(x)$ è un infinito di ordine γ ($\gamma > 0$) rispetto a $g(x)$, quando $f(x)$ è dello stesso ordine di $[g(x)]^\gamma$, cioè se:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{[g(x)]^\gamma} = l \neq 0.$$

Scegliendo **$g(x)$** come **infinito campione**, si considerano infiniti campione le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x - x_0}, & \text{se } x \rightarrow x_0; \\ g(x) &= x, & \text{se } x \rightarrow \pm\infty. \end{aligned}$$

ESEMPIO

L'infinito $f(x) = \frac{x+2}{2x^3-5x^2}$, per $x \rightarrow 0$, è di ordine 2 (rispetto al campione $\frac{1}{x}$), infatti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x+2}{2x^3-5x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+2x^2}{2x^3-5x^2} = -\frac{2}{5} \neq 0.$$

DEFINIZIONE

Infiniti equivalenti

Dati due infiniti $f(x)$ e $g(x)$, per $x \rightarrow \alpha$, essi si dicono equivalenti se:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

e si scrive $f \sim g$.

Uno dei due infiniti si dice **parte principale** dell'altro.

ESEMPIO

La funzione $f(x) = 3x^6 + 4x^3 + 2x - 1$ è un infinito, per $x \rightarrow +\infty$, equivalente a $g(x) = 3x^6$, allora $3x^6$ è la parte principale di $f(x)$.

TEOREMA

Principio di sostituzione degli infiniti

Se esiste il limite del rapporto di due infiniti simultanei $f(x)$ e $g(x)$, allora esso resta invariato se si sostituisce ciascun infinito con la sua parte principale (cioè con un infinito a esso equivalente):

$$f \sim f_1, g \sim g_1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

gerarchia degli infiniti

Se si deve calcolare il limite del rapporto di due infiniti, spesso non è facile valutare l'ordine di infinito delle due funzioni. Per esempio, anche con l'aiuto di limiti notevoli, non possiamo calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$.

Il seguente teorema dice che, per $x \rightarrow +\infty$, le funzioni logaritmiche (con base $a > 1$) tendono a infinito meno rapidamente delle potenze, le quali a loro volta tendono a infinito meno rapidamente delle funzioni esponenziali (con base $b > 1$).

TEOREMA

Gerarchia degli infiniti

Date le tre famiglie di funzioni

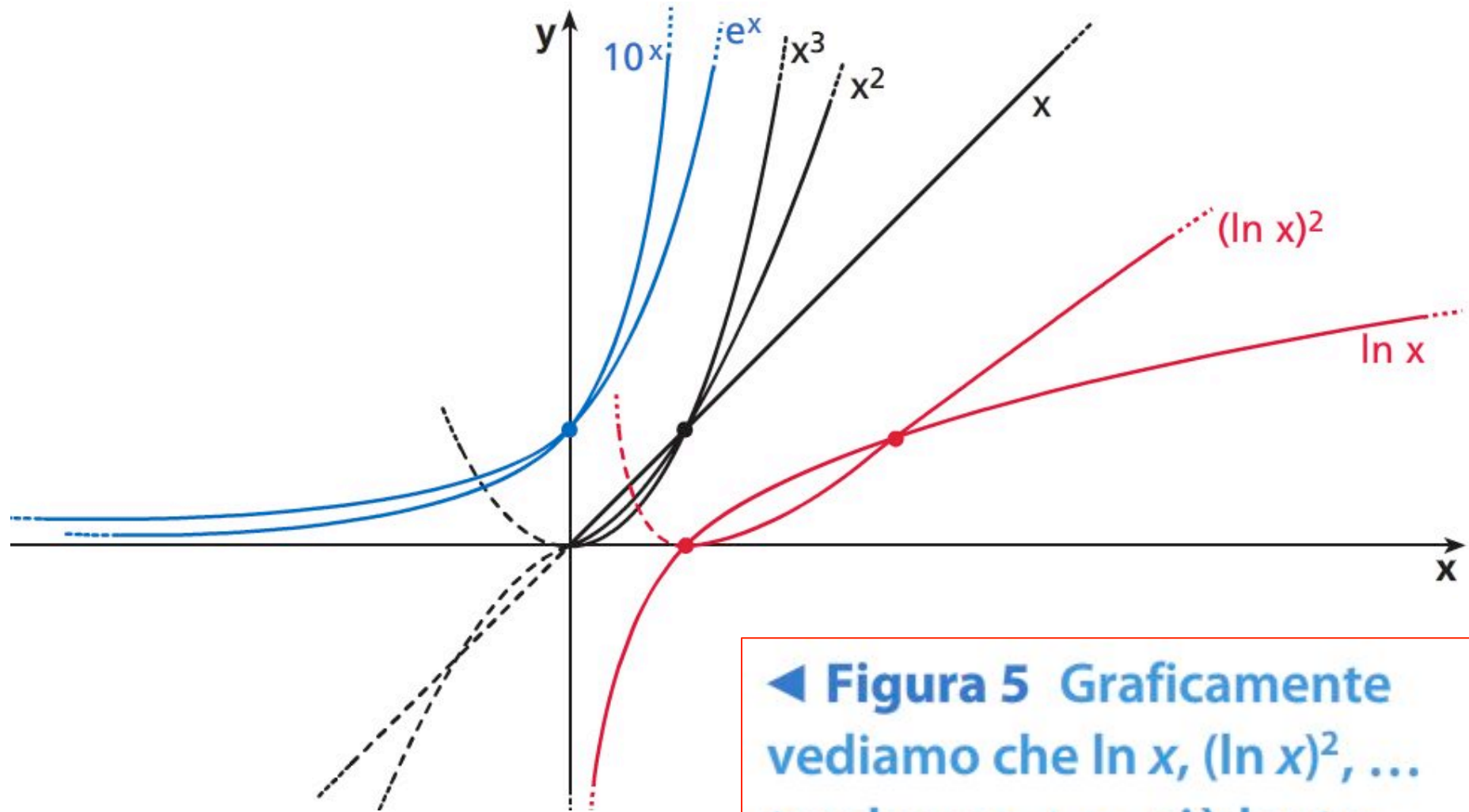
$$(\log_a x)^\alpha, \quad x^\beta, \quad b^x, \quad \text{con } \alpha, \beta > 0 \text{ e } a, b > 1,$$

allora, per $x \rightarrow +\infty$, ognuna è un infinito di ordine inferiore rispetto a quella che si trova a destra nell'elenco, cioè:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x^\beta} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{b^x} = 0.$$

Sinteticamente, possiamo scrivere, riferendoci agli ordini di infinito:

$$(\log_a x)^\alpha < x^\beta < b^x.$$



◀ **Figura 5** Graficamente vediamo che $\ln x$, $(\ln x)^2$, ... tendono a $+\infty$ più lentamente di x , x^2 , x^3 , ..., che a loro volta tendono a $+\infty$ più lentamente di e^x , 10^x , ...

Come casi particolari si hanno i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\beta} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\beta} = +\infty.$$

ESEMPIO

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2^x} = 0.$$

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

Confrontiamo fra loro gli infinitesimi:

$$f(x) = \ln(2x^2 + 1), \quad g(x) = e^{-x} - 1, \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Le due funzioni sono infinitesimi perché:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(2x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{-x} - 1) = 0.$$

Consideriamo il rapporto fra i due infinitesimi e calcoliamo il limite per $x \rightarrow 0$. Tenendo conto che $x \neq 0$, moltiplichiamo e dividiamo sia per $2x^2$, sia per $-x$, in modo da poter utilizzare i limiti notevoli:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x^2 + 1)}{e^{-x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x^2 + 1)}{2x^2} \cdot \frac{2x^2}{-x} \cdot \frac{-x}{e^{-x} - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x^2 + 1)}{2x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (-2x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{e^{-x} - 1} = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, $f(x)$ è infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$.

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'ordine dell'infinitesimo $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$, per $x \rightarrow \infty$.

Confrontiamo $f(x)$ con l'infinitesimo $\left(\frac{1}{x}\right)^k$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 2x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 2x} \cdot x^k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)}.$$

Il limite è finito e diverso da 0 (vale 1) per $k = 2$, quindi l'infinitesimo è di ordine 2.

ESERCIZIO GUIDA

Con il principio di sostituzione degli infinitesimi calcoliamo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin 4x}{\ln(1 + 8x)}$.

Poiché, per $x \rightarrow 0$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $\sin 4x \sim 4x$ e $\ln(1 + 8x) \sim 8x$, abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin 4x}{\ln(1 + 8x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} \cdot 4\cancel{x}}{8\cancel{x}} = 0.$$

ESERCIZIO GUIDA

Confrontiamo fra loro gli infiniti:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{(x^3 + x)(x^2 - 2x)}, \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Le due funzioni sono infiniti, in quanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x^3 + x)(x^2 - 2x)} = \infty.$$

Calcoliamo il limite del rapporto tra i due infiniti, tenendo conto che $x \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{(x^3 + x)(x^2 - 2x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cancel{x^2}} \cdot \frac{\cancel{x^2}(x^2 + 1)(x - 2)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1)(x - 2) = -2.$$

Poiché il limite è finito e diverso da 0, i due infiniti sono dello stesso ordine.

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo il seguente limite utilizzando la gerarchia degli infiniti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3x^3}}.$$

Utilizziamo la definizione di logaritmo, da cui $a = e^{\ln a}$ ($a > 0$):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{3x^3}}}.$$

Sfruttiamo una proprietà dei logaritmi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{3x^3} \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{3} \cdot \frac{\ln x}{x^3}}.$$

Per la gerarchia degli infiniti $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3} = 0$, quindi il limite cercato vale $e^0 = 1$. In conclusione:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3x^3}} = 1.$$

FUNZIONI CONTINUE

◆ FUNZIONI CONTINUE

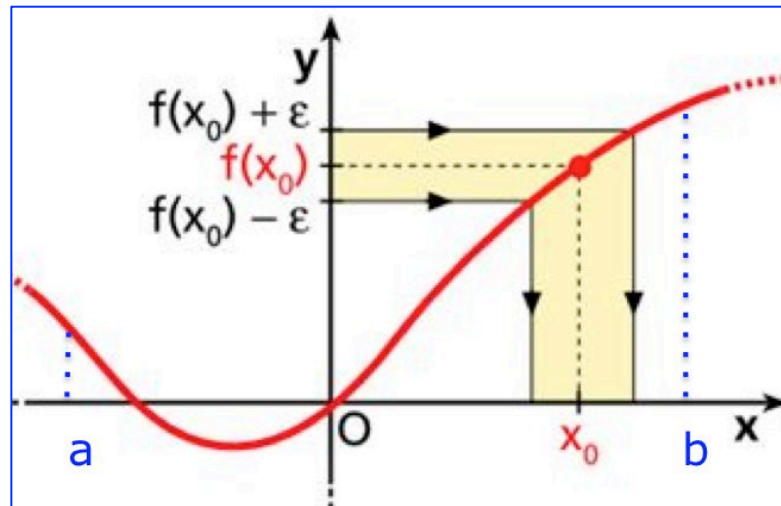
Il calcolo del limite è rapido e semplice nel caso di funzioni continue.

definizione – Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a;b]$ e x_0 un punto interno all'intervallo. La funzione $f(x)$ si dice continua nel punto x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Applicando la definizione di limite, $f(x)$ è continua in x_0 se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(x_0) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$$



In sostanza:

➤ la funzione è definita in x_0 , ossia esiste $f(x_0)$;

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

definizione – Una funzione $y=f(x)$ è continua nel suo dominio D , se è continua in ogni punto di D .

Quindi, il limite:

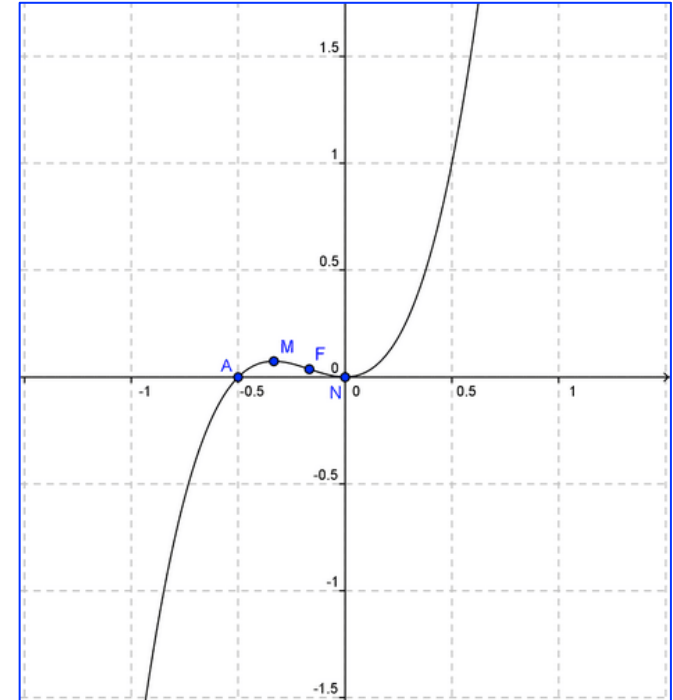
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

esiste per ogni x_0 appartenente a D .

◆ ESEMPI FUNZIONI CONTINUE IN $D=\mathbb{R}$

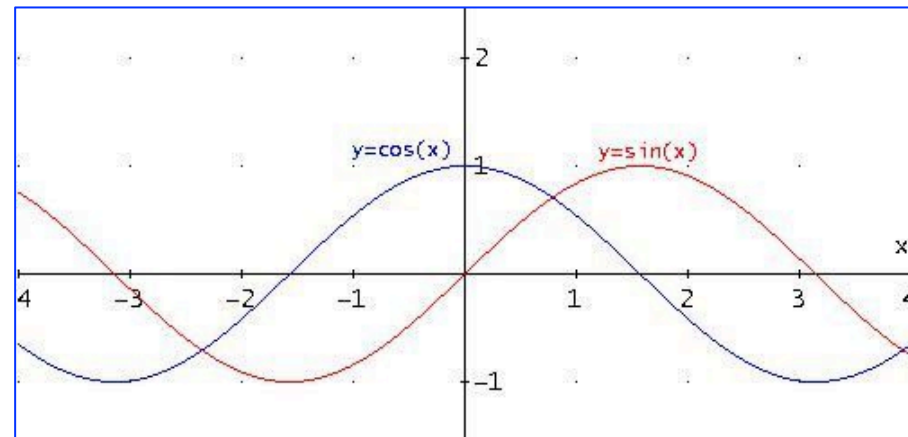
funzioni polinomiali (interi)

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2$$



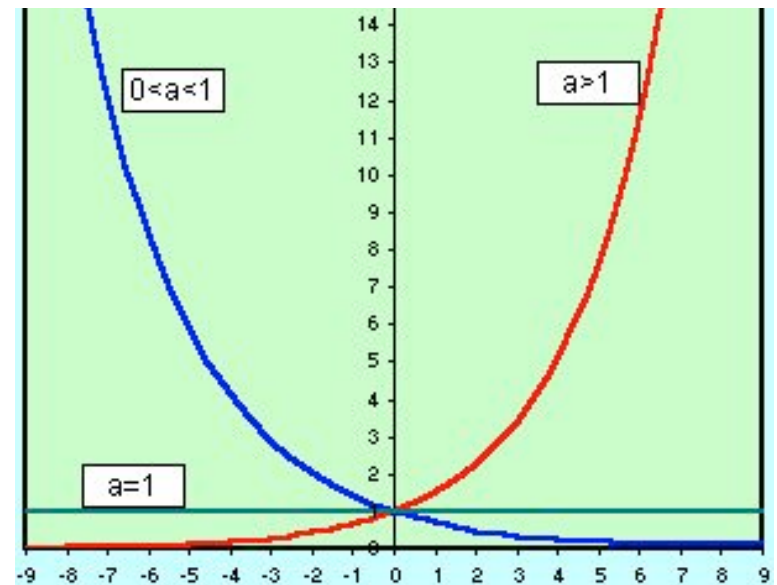
funzioni goniometriche

$$f(x) = \operatorname{sen} x \quad f(x) = \cos x$$



funzione esponenziale

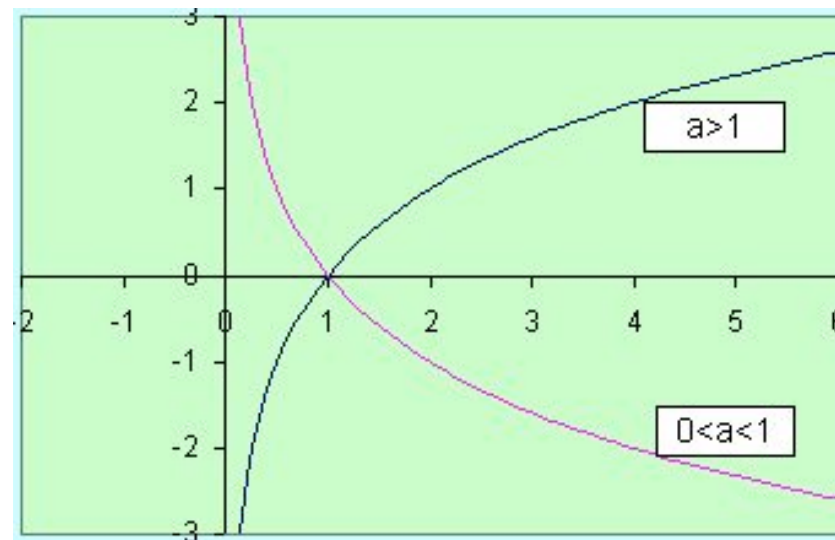
$$f(x) = a^x$$



Le funzioni, ovviamente, possono essere continue solo in una parte di $\mathbb{R}$.

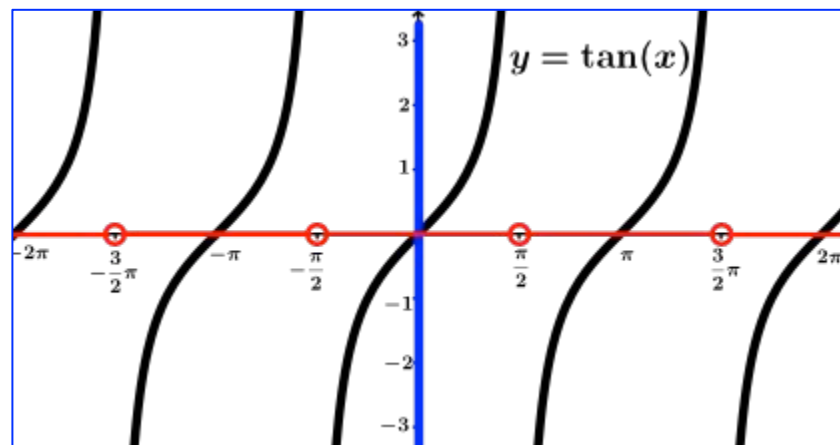
funzioni logaritmo

$$f(x) = \log x \quad D =]0; +\infty[$$



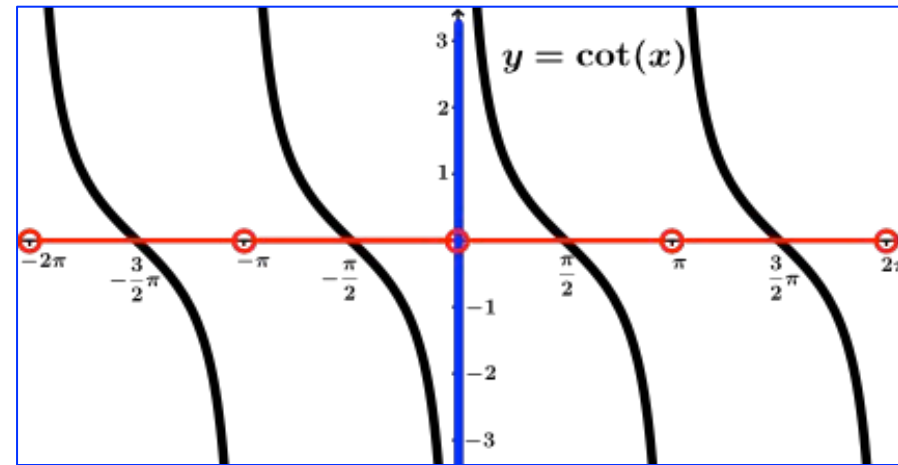
funzioni tan gente

$$f(x) = \operatorname{tg} x \quad D = \mathbb{R} -]\frac{\pi}{2} + k\pi[$$

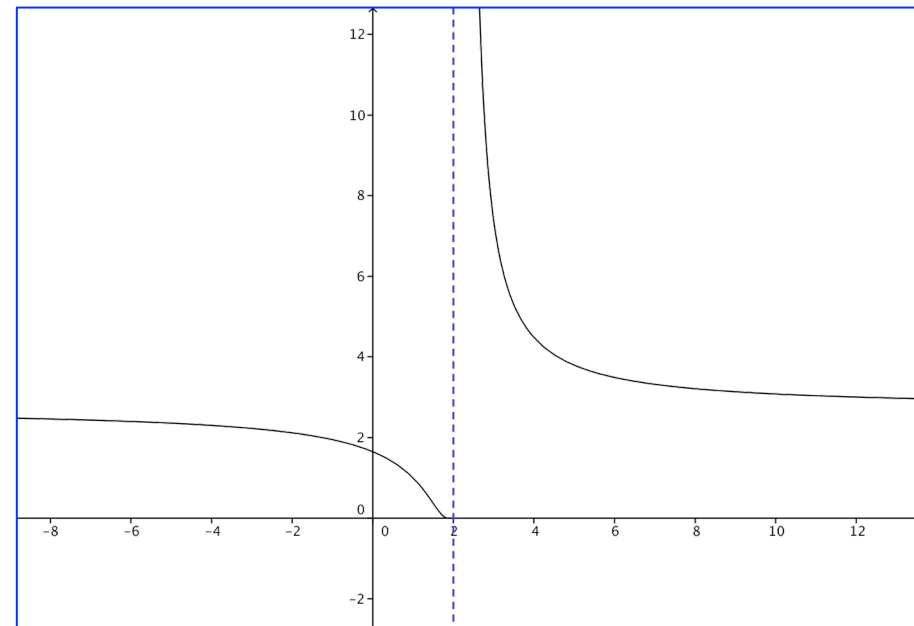


funzioni cotangente

$$f(x) = \cot x \quad D = \mathbb{R} -]k\pi[$$



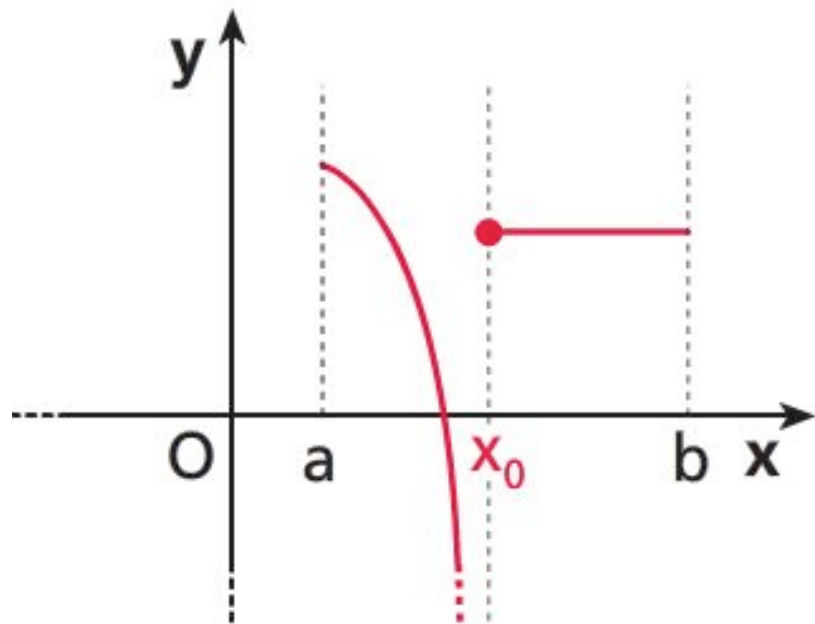
$$y = e^{\frac{x+1}{x-2}} \quad D = \mathbb{R} - \{2\}$$



$x=2$ asintoto verticale da destra

Una funzione può essere **continua** solo **a destra** o **a sinistra** in un punto x_0 :

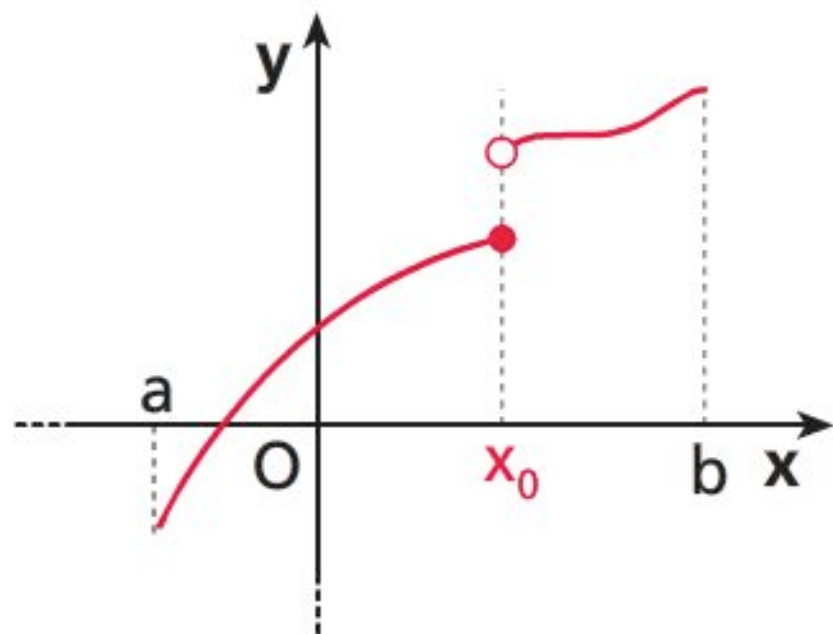
- $f(x)$ è **continua a destra** in x_0 se $f(x_0)$ coincide con il limite destro di $f(x)$ per x che tende a x_0 :



$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

a. La funzione è continua a destra in x_0 .

- $f(x)$ è **continua a sinistra** in x_0 se $f(x_0)$ coincide con il limite sinistro di $f(x)$ per x che tende a x_0 :



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

b. La funzione è continua a sinistra in x_0 .

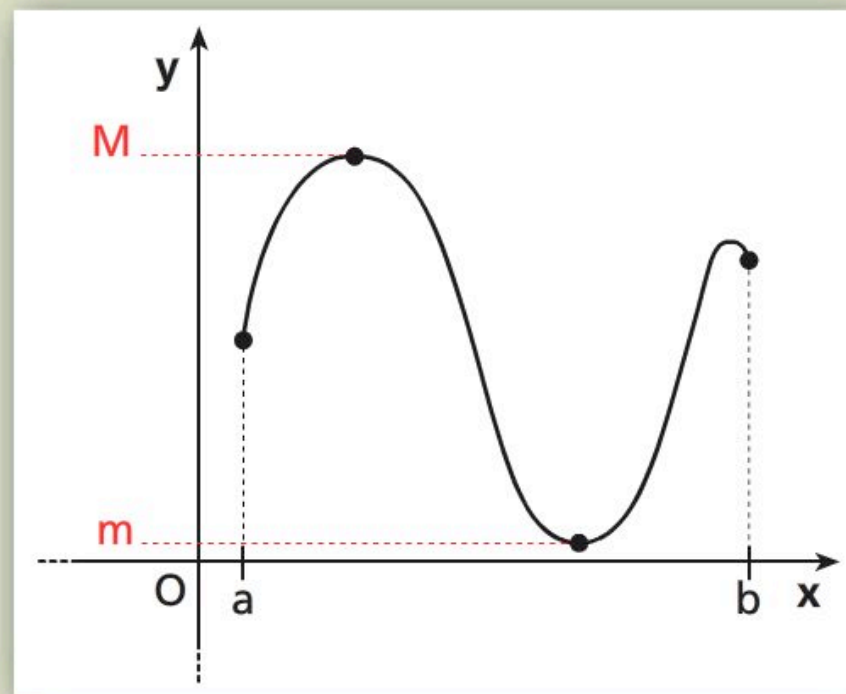
◆ TEOREMI SULLA FUNZIONI CONTINUE

Enunciamo, senza dimostrare, alcuni teoremi che esprimono proprietà importanti delle funzioni continue e ne illustriamo graficamente le conseguenze.

■ TEOREMA

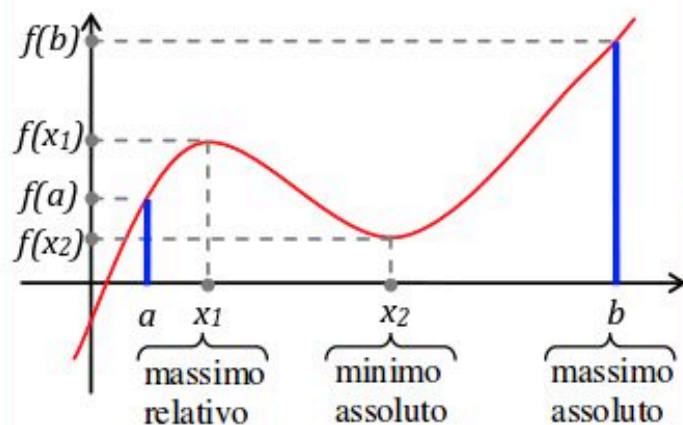
Teorema di Weierstrass

Se f è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$, allora essa assume, in tale intervallo, il massimo assoluto e il minimo assoluto.



definizione dei punti di massimo e di minimo assoluti di una funzione

sia $y = f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ e sia x_0 un punto appartenente ad $[a, b]$



un punto x_0 si dice di **massimo assoluto** per una funzione $f(x)$ in un intervallo $[a, b]$ se è il punto di ordinata maggiore in $[a, b]$ cioè se

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

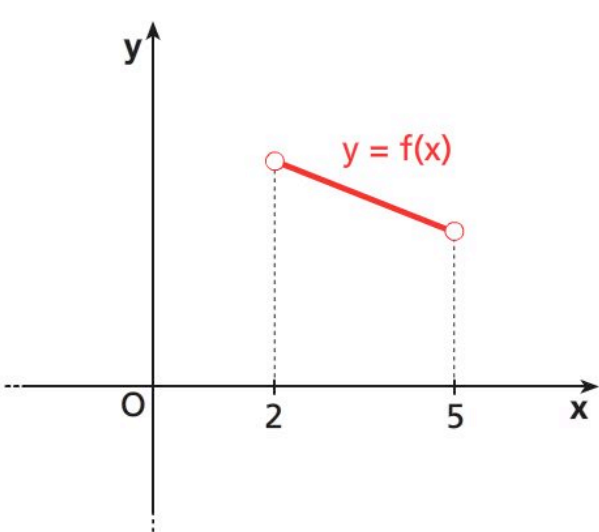
un punto x_0 si dice di **minimo assoluto** per una funzione $f(x)$ in un intervallo $[a, b]$ se è il punto di ordinata minore in $[a, b]$ cioè se

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

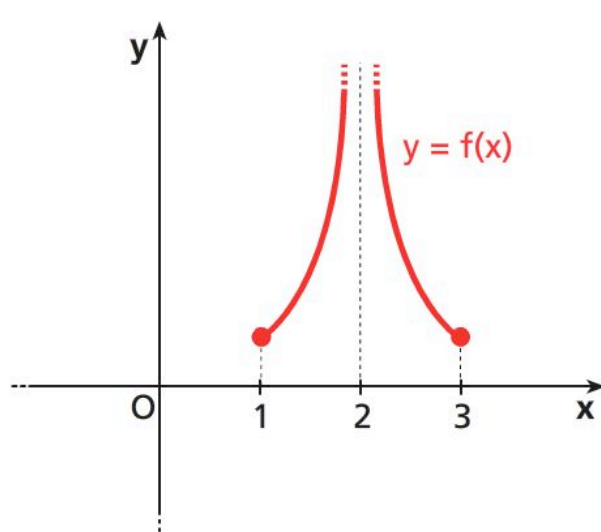
In sintesi

- Il **minimo assoluto** della funzione $f(x)$, se esiste, è il minimo **m** dei valori assunti dalla funzione nel suo intervallo di definizione $[a; b]$.
- Il **massimo assoluto** della funzione $f(x)$, se esiste, è il massimo **M** dei valori assunti dalla funzione nel suo intervallo di definizione $[a; b]$.

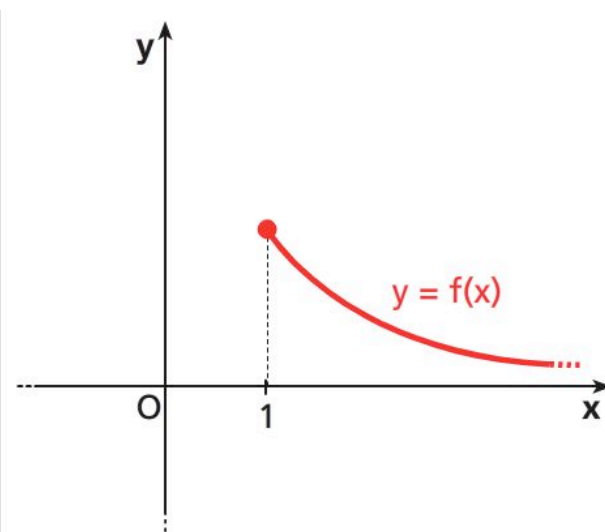
Facciamo dei controesempi per dimostrare come il teorema perde la sua validità quando alcune delle sue ipotesi non sono verificate.



a. La funzione è continua nell'intervallo limitato aperto $]2; 5[$. Essa è priva di massimo e minimo in questo intervallo, in quanto gli estremi non appartengono all'intervallo.



b. La funzione non è continua nel punto $x = 2$. Nell'intervallo $[1; 3]$ essa assume minimo, ma è priva di massimo.

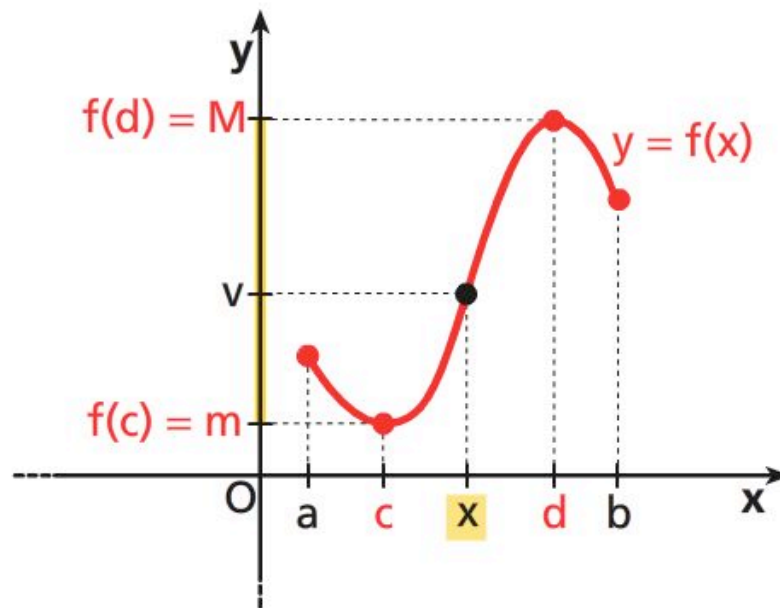


c. La funzione è continua nell'intervallo illimitato $[1; +\infty[$. Non vale il teorema di Weierstrass e la funzione è priva di minimo assoluto.

TEOREMA

Teorema dei valori intermedi

Se f è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$, allora essa assume, almeno una volta, tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo.

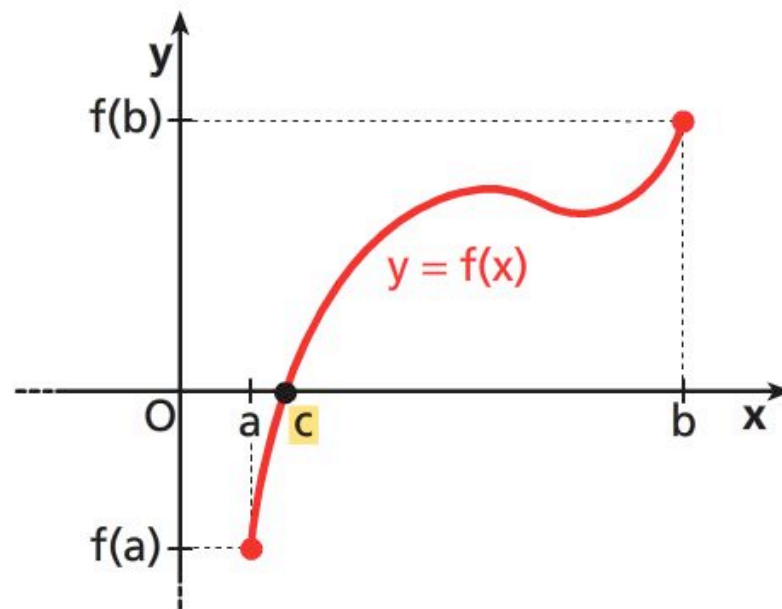


$$\begin{aligned} f \text{ continua in } [a; b] &\Rightarrow \\ \forall v \mid m \leq v \leq M \\ \exists x \in [a; b] \mid f(x) &= v \end{aligned}$$

TEOREMA

Teorema di esistenza degli zeri

Se f è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$ e negli estremi di tale intervallo assume valori di segno opposto, allora esiste almeno un punto c , interno all'intervallo, in cui f si annulla.



f continua in $[a; b]$
 $f(a) < 0, f(b) > 0 \Rightarrow$
 $\exists c \in]a; b[\mid f(c) = 0$

ESEMPIO

Consideriamo la funzione $f(x) = x + \log_2 x$ nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Poiché il dominio di $f(x)$ è $D: x > 0$, la funzione è continua in $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

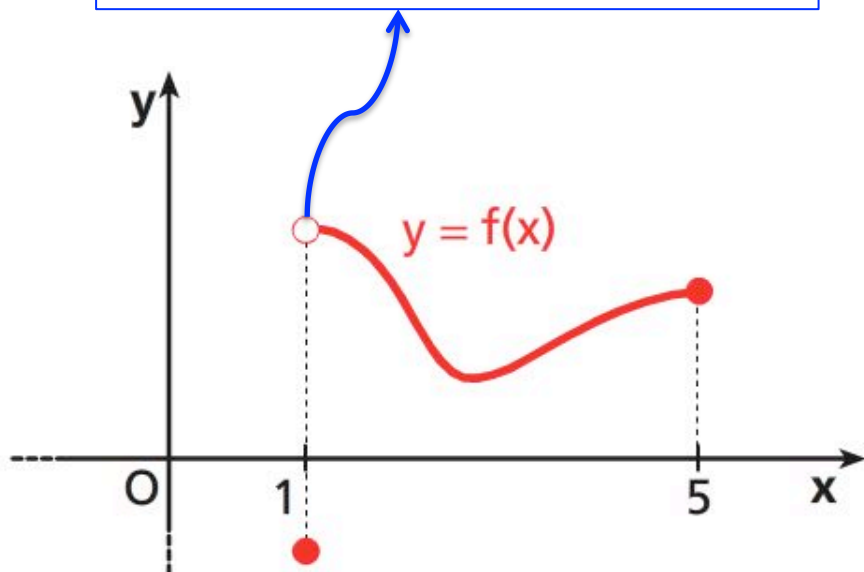
Inoltre si ha:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \log_2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0 \text{ e } f(1) = 1 + \log_2 1 = 1 > 0.$$

Sono verificate le ipotesi del teorema degli zeri, quindi è possibile affermare che l'equazione $f(x) = 0$, e cioè $x + \log_2 x = 0$, ha almeno una soluzione nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

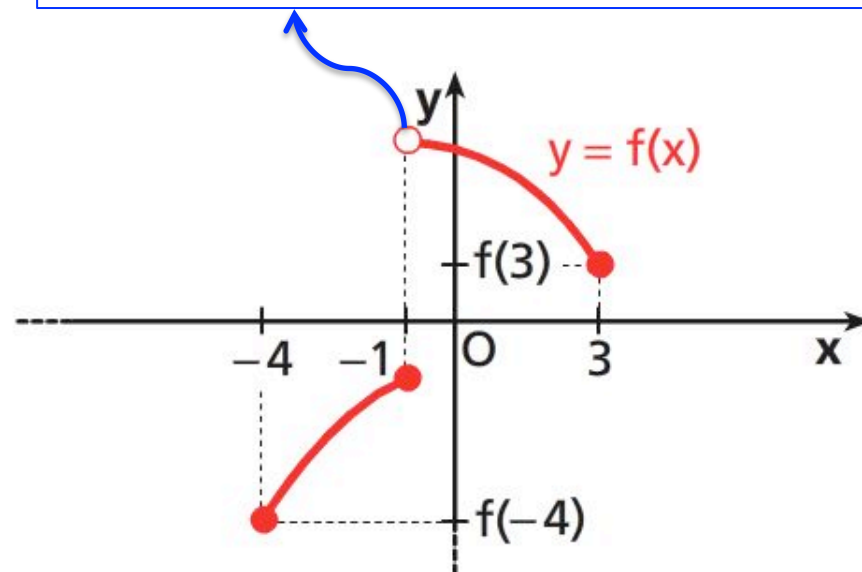
Controesempi per dimostrare come il teorema perde la sua validità quando alcune delle sue ipotesi non sono verificate.

L'intervallo $]1;5]$ non è chiuso



a. La funzione è continua nell'intervallo $]1; 5]$, $f(1) < 0$ e $f(5) > 0$, ma non esiste alcun punto dell'intervallo in cui essa si annulla.

La funzione non è continua in $x=-1$



b. La funzione non è continua in $x = -1$; $f(-4) < 0$ e $f(3) > 0$. Non esiste alcun punto dell'intervallo $[-4; 3]$ in cui essa si annulla.

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

Stabiliamo se vale il teorema di Weierstrass per la seguente funzione, nell'intervallo indicato:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x - 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}, \text{ in } [-1; 3].$$

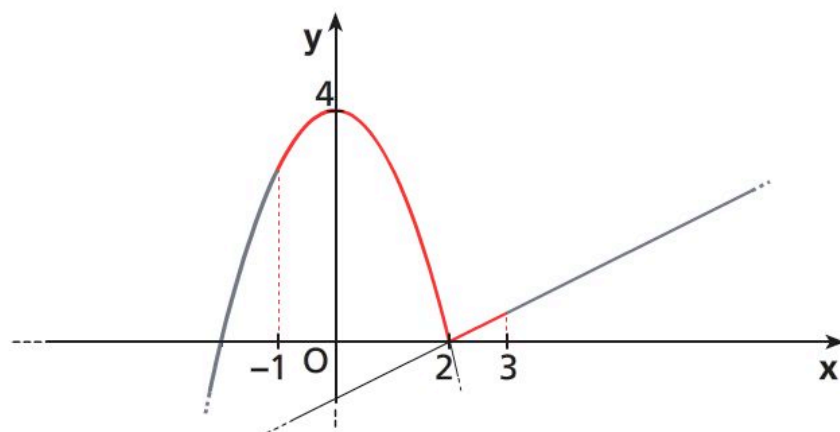
Dobbiamo verificare l'ipotesi del teorema, ossia che la funzione è continua nell'intervallo $[-1; 3]$.

Per ogni $x \in [-1; 3]$ e $x \neq 2$, la funzione è continua perché sono continue le funzioni $y = -x^2 + 4$ e $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Per $x = 2$ si ha $f(2) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + 4) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) = 0$, quindi anche in 2 la funzione è continua.

Concludiamo che vale il teorema di Weierstrass.

Osservazione. Dal grafico della funzione possiamo dedurre che nell'intervallo $[-1; 3]$ il punto di massimo è $(0; 4)$ e quello di minimo è $(2; 0)$. Il massimo M della funzione è $M = 4$ e il minimo m è $m = 0$.



ESERCIZIO GUIDA

Stabiliamo se vale il teorema di esistenza degli zeri per la seguente funzione, nell'intervallo indicato:

$$f(x) = \frac{x}{2x^2 - 1}, \quad \text{in } \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

La funzione è discontinua per i punti in cui $2x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$, ossia per $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Poiché tali punti non appartengono all'intervallo $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, la funzione è continua nell'intervallo.

Inoltre:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 > 0 \text{ e } f\left(\frac{1}{2}\right) = -1 < 0.$$

Sono quindi verificate le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri, pertanto esiste almeno un punto c interno a $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ in cui $f(x) = 0$. Nel nostro caso è $c = 0$.

ESERCIZIO GUIDA

Stabiliamo che la seguente equazione ammette soluzioni nell'intervallo indicato e verifichiamo graficamente il risultato ottenuto:

$$e^x - |\ln x| = 0, \quad \text{in } [0; 1].$$

Poiché $\ln x$ non esiste per $x = 0$, invece dell'intervallo dato ne consideriamo uno meno ampio, con il primo estremo di poco maggiore di 0. Per esempio $[0,1; 1]$.

In $[0,1; 1]$ la funzione $f(x) = e^x - |\ln x|$ è continua. Inoltre

$$f(0,1) \simeq -1,197 < 0; \quad f(1) = e > 0;$$

quindi agli estremi dell'intervallo la funzione assume valori di segno opposto. Sono vere le ipotesi del teorema degli zeri, perciò $e^x - |\ln x| = 0$ in almeno un punto dell'intervallo: l'equazione ammette soluzione in $[0,1; 1]$ e, a maggior ragione, anche in $[0; 1]$.

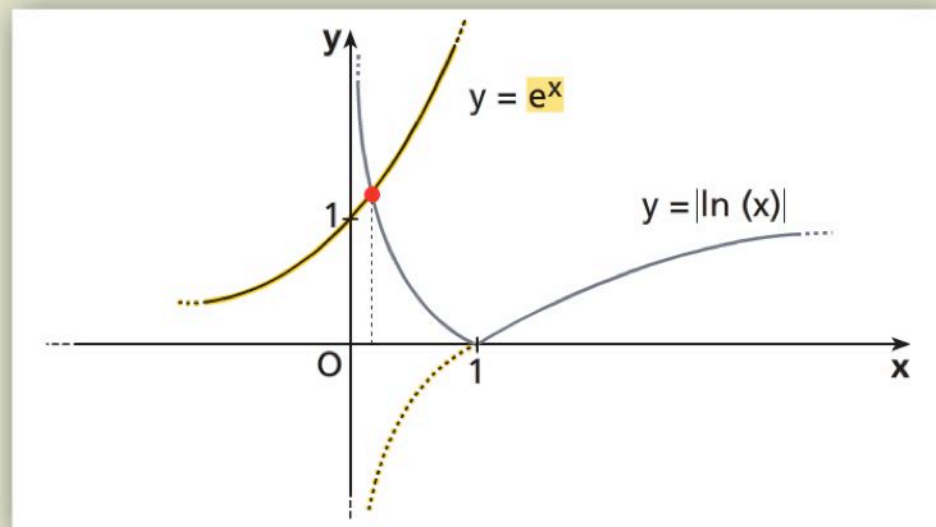
Per verificare graficamente la nostra affermazione tracciamo i grafici delle funzioni:

$$y = e^x \text{ e } y = |\ln x|.$$

I due grafici si intersecano in un punto che ha ascissa appartenente all'intervallo $[0; 1]$.

In tale punto si ha:

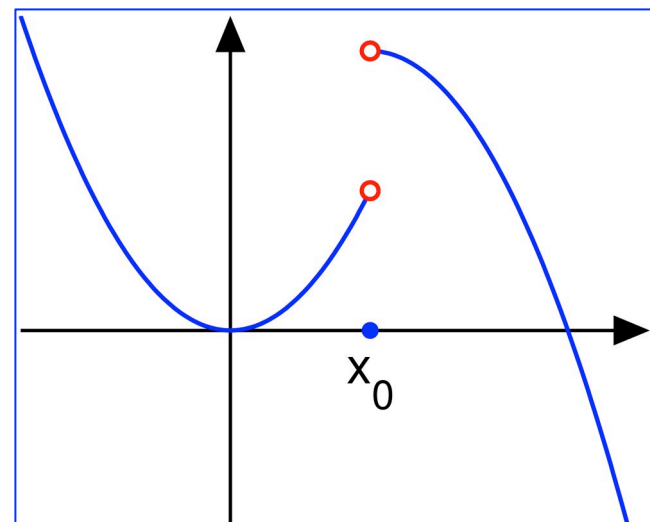
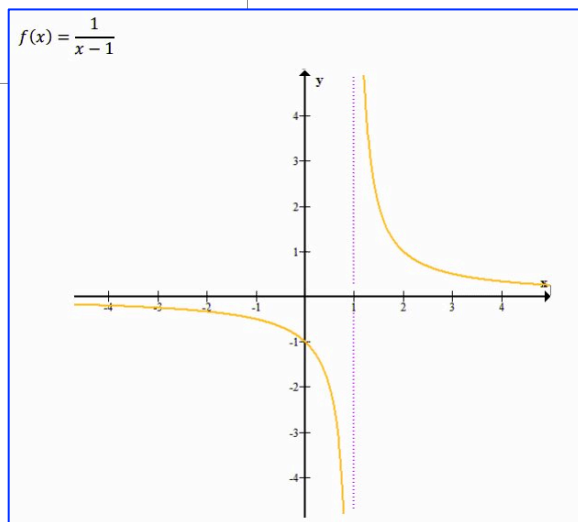
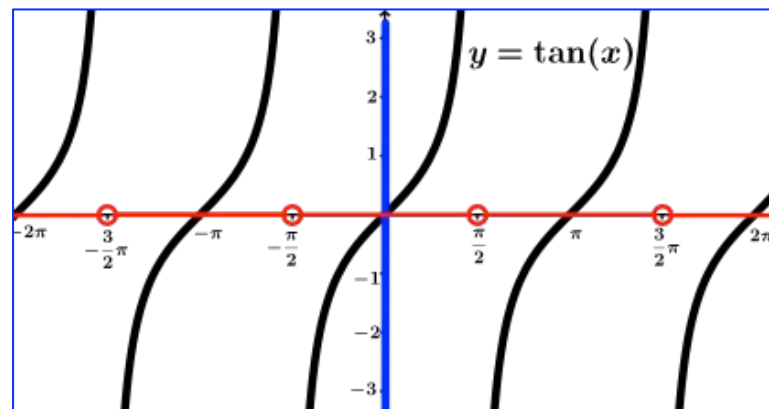
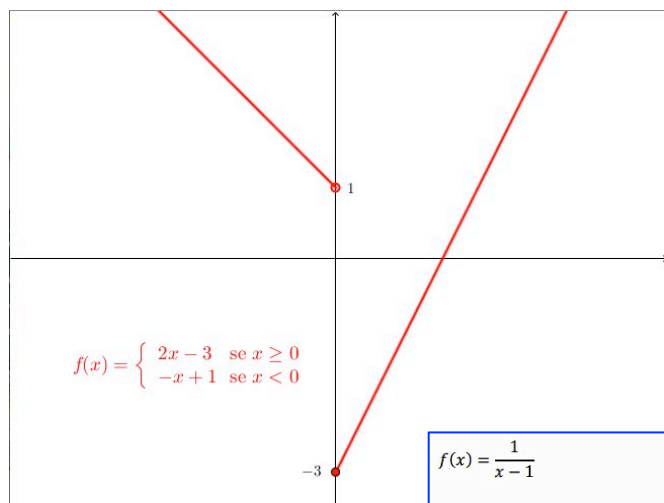
$$e^x = |\ln x| \rightarrow e^x - |\ln x| = 0.$$



PUNTI DI DISCONTINUITA' DI UNA FUNZIONE

◆ PUNTO DI DISCONTINUITA'

definizione – Un punto x_0 di un intervallo $[a;b]$ si dice **punto di discontinuità** (o punto singolare) per una funzione $f(x)$ se la funzione non è continua in x_0 .



I punti di discontinuità x_0 di una funzione si possono classificare in tre categorie: prima, seconda e terza specie.

Il criterio usato per tale classificazione si basa sullo studio del limite della funzione per x che tende a x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

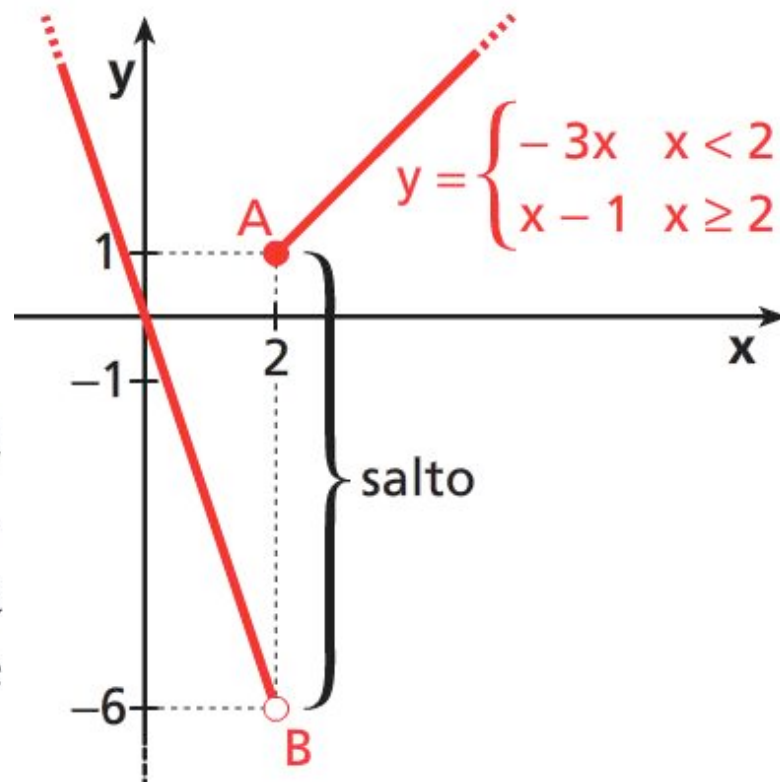
◆ PUNTI DI DISCONTINUITA' DI PRIMA SPECIE

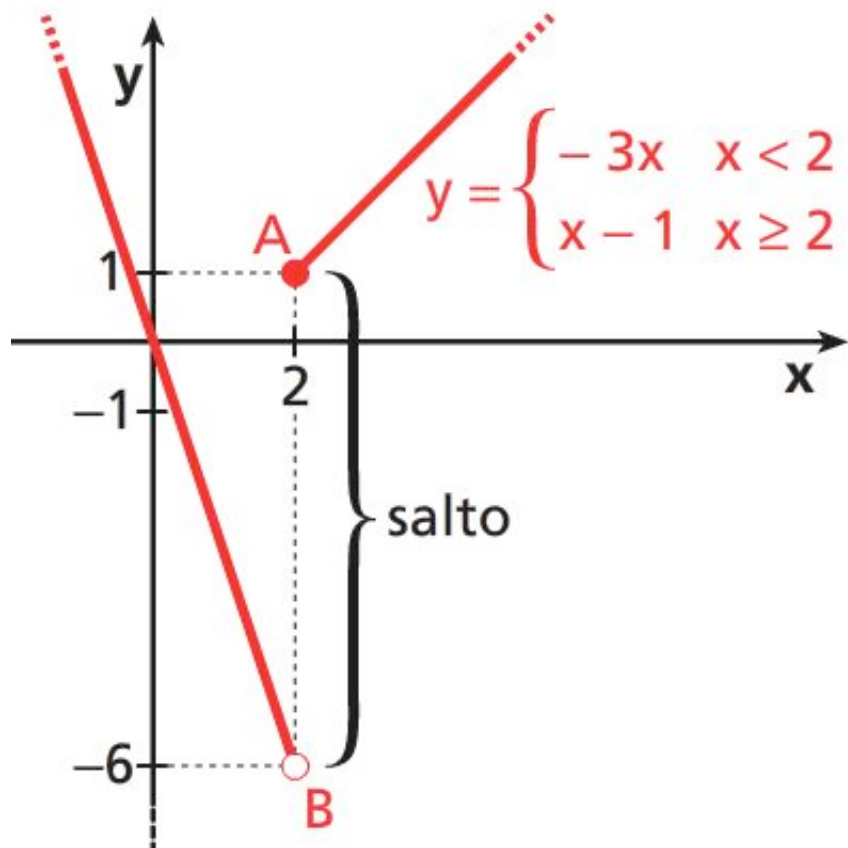
Consideriamo la seguente funzione definita per casi:

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{se } x < 2 \\ x - 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Se calcoliamo il limite per x che tende a 2 da destra, dobbiamo considerare la funzione $y = x - 1$; per x che tende a 2 da sinistra, dobbiamo considerare la funzione $y = -3x$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 1) = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 2^-} (-3x) = -6.$$





Il punto $x_0=2$ è un
**punto di discontinuità
di prima specie.**

La distanza fra i punti A e
B si chiama **salto** della
funzione, il cui valore nel
punto 2 è: $1 - (-6) = 7$

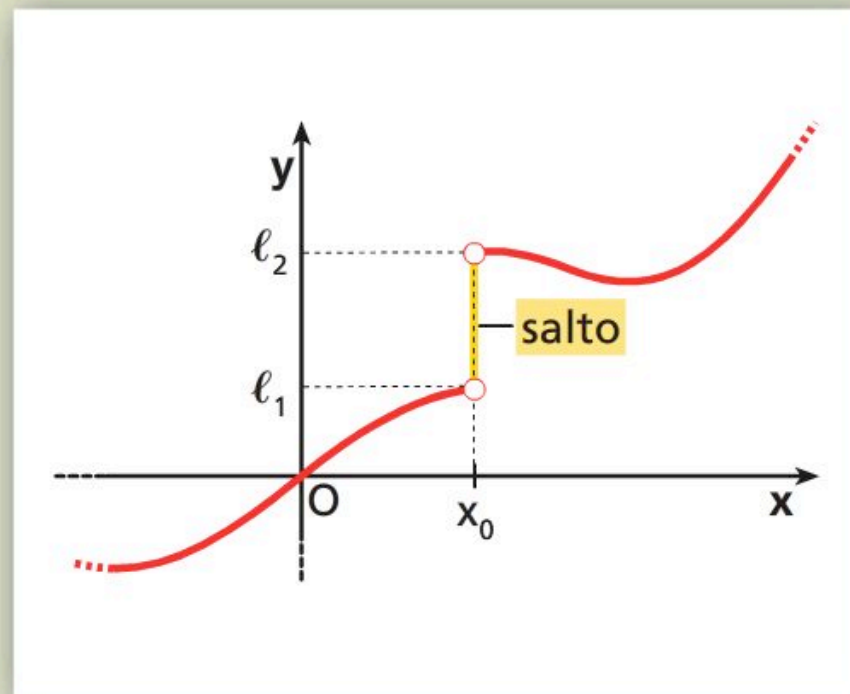
DEFINIZIONE

Punto di discontinuità di prima specie

Un punto x_0 si dice punto di discontinuità di prima specie per la funzione $f(x)$ quando, per $x \rightarrow x_0$, il limite destro e il limite sinistro di $f(x)$ sono entrambi finiti ma diversi fra loro.

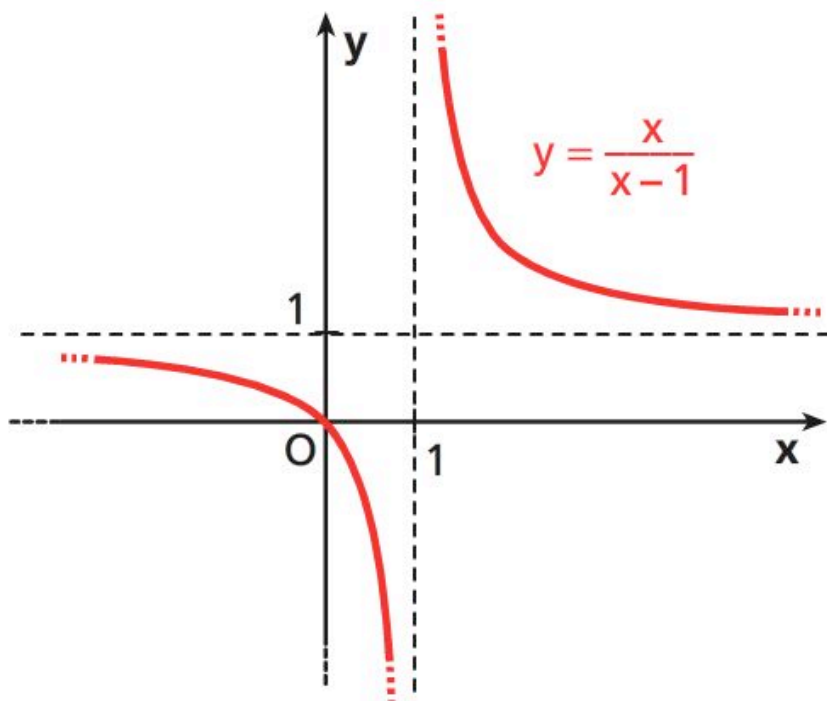
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_1 \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_2.$$

La differenza $|l_2 - l_1|$ si dice **salto** della funzione.

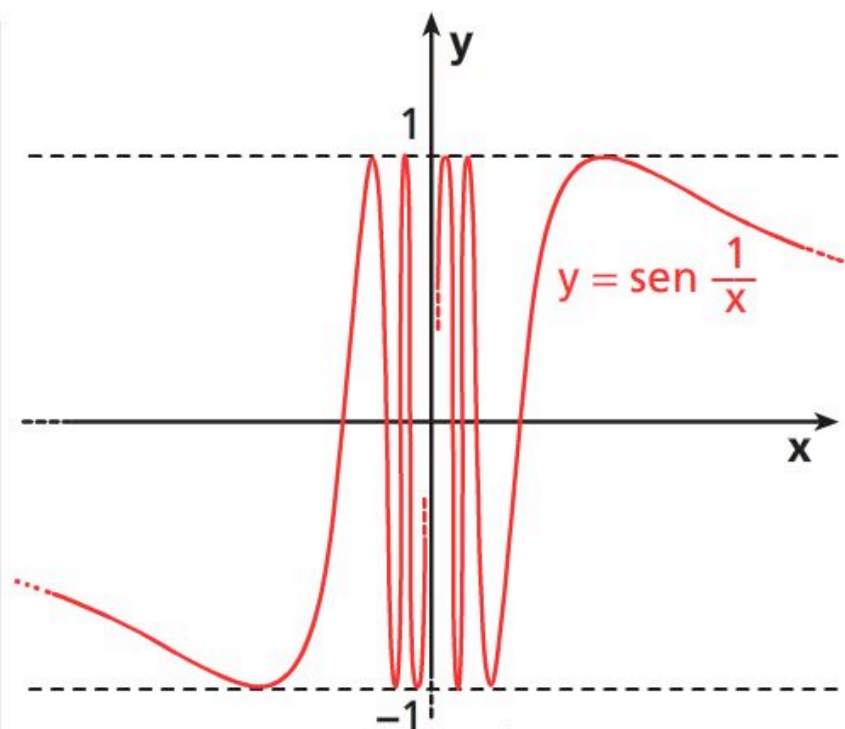


◆ PUNTI DI DISCONTINUITA' DI SECONDA SPECIE

Esaminiamo i seguenti esempi:



a. La funzione $y = \frac{x}{x-1}$ non è definita nel punto $x_0 = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, mentre $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.



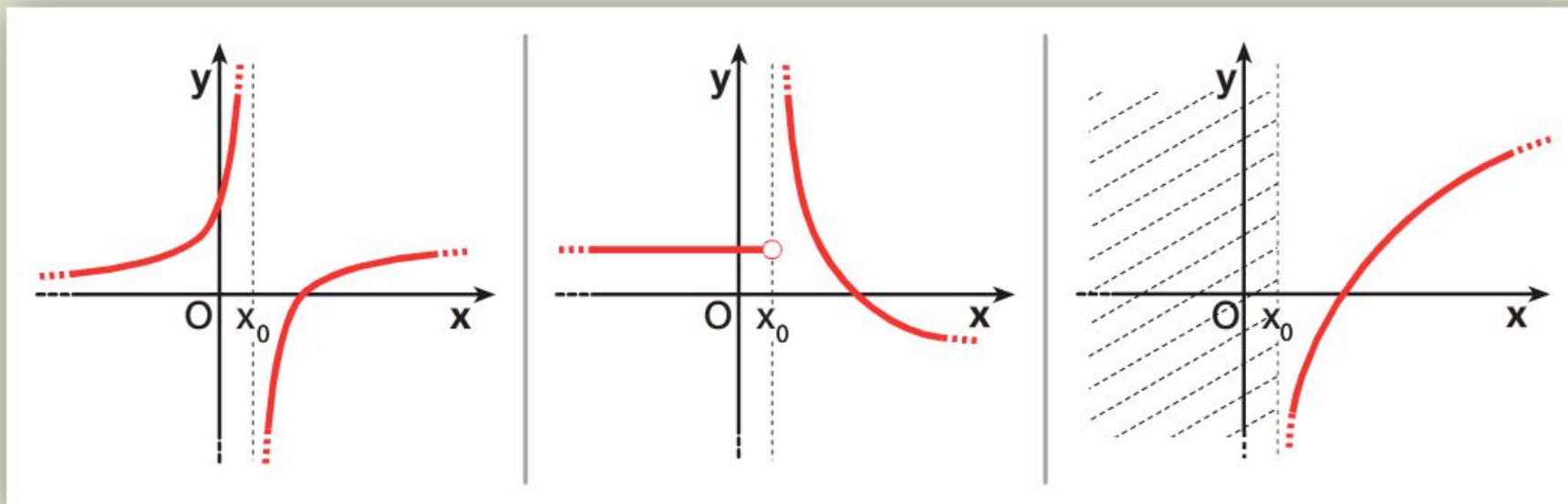
b. La funzione $y = \sin \frac{1}{x}$ non è definita in $x_0 = 0$ e per $x \rightarrow 0$ non ammette né limite destro né limite sinistro: infatti $t = \frac{1}{x}$ tende all'infinito e $\sin t$ continua a oscillare tra -1 e 1 .

In entrambi i casi il punto x_0 è un **punto di discontinuità di seconda specie**.

DEFINIZIONE

Punto di discontinuità di seconda specie

Un punto x_0 si dice punto di discontinuità di seconda specie per la funzione $f(x)$ quando per $x \rightarrow x_0$ almeno uno dei due limiti, destro o sinistro, di $f(x)$ è infinito oppure non esiste.



◆ PUNTI DI DISCONTINUITA' DI TERZA SPECIE (O ELIMINABILE)

Consideriamo la funzione:

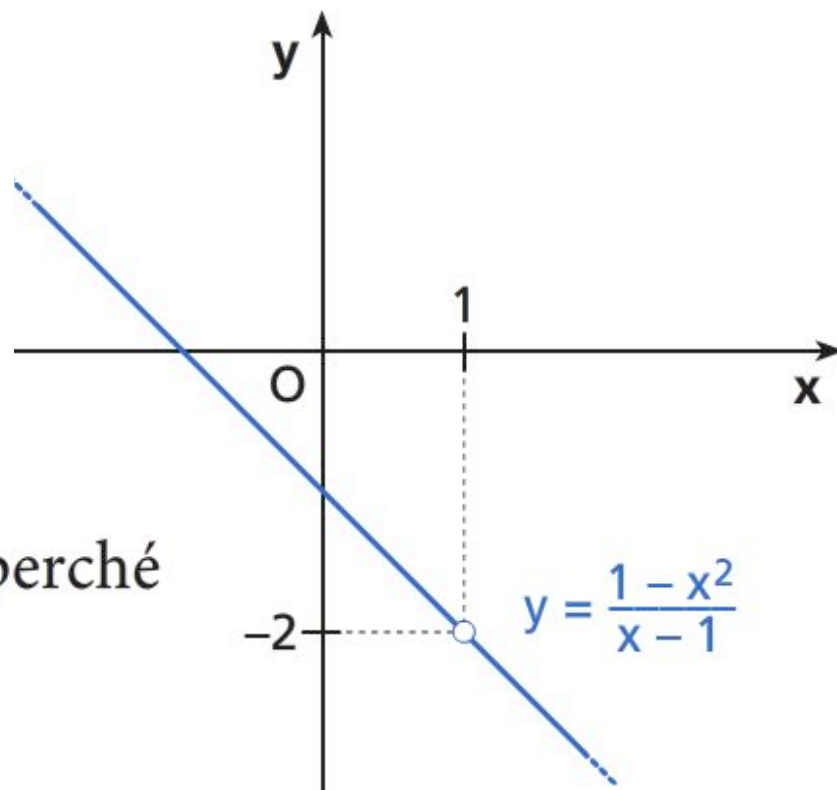
$$f(x) = \frac{1 - x^2}{x - 1}.$$

Il dominio è $\mathbb{R} - \{1\}$.

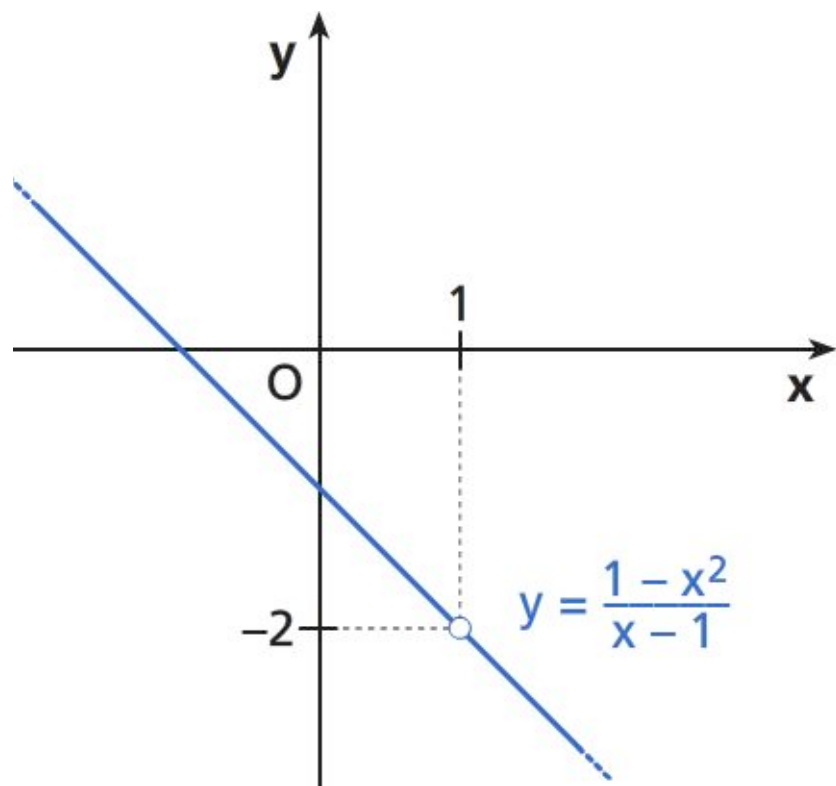
La funzione è discontinua in $x_0 = 1$ perché $f(1)$ non esiste.

Calcoliamo il limite per $x \rightarrow 1$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x)(1 + x)}{-(1 - x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} -(1 + x) = -2.\end{aligned}$$



Per la definizione di limite, possiamo dire che, scelto un intorno completo di $x_0 = 1$ sempre più ristretto, la funzione assume valori sempre più vicini a -2 , e quindi possiamo dire che $f(x)$ è *quasi continua*, perché rimane escluso il solo punto $x_0 = 1$, come si può osservare nel grafico.



Il punto $x_0=1$ è un
**punto di discontinuità
di terza specie.**

Il punto $x_0=1$ è detto
**punto di discontinuità
eliminabile.**

Il punto $x_0=1$ si chiama punto di discontinuità eliminabile perché la funzione può essere modificata nel punto $x_0=1$ in modo da renderla continua, rimanendo invariata nel suo dominio naturale:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ -2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Tale funzione è continua in $x_0=1$ perché:

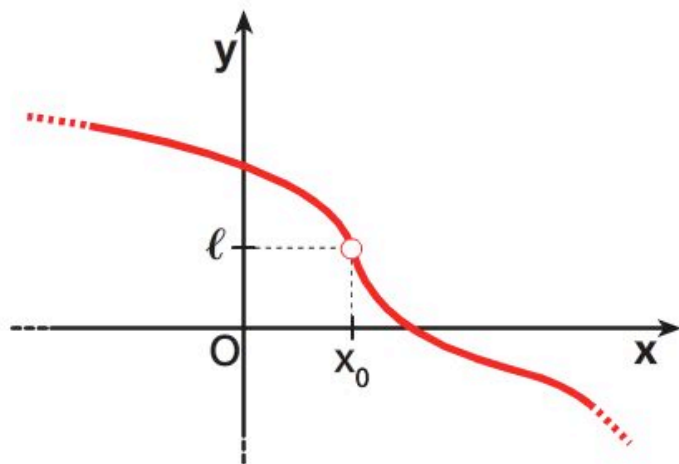
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2 = f(1)$$

DEFINIZIONE

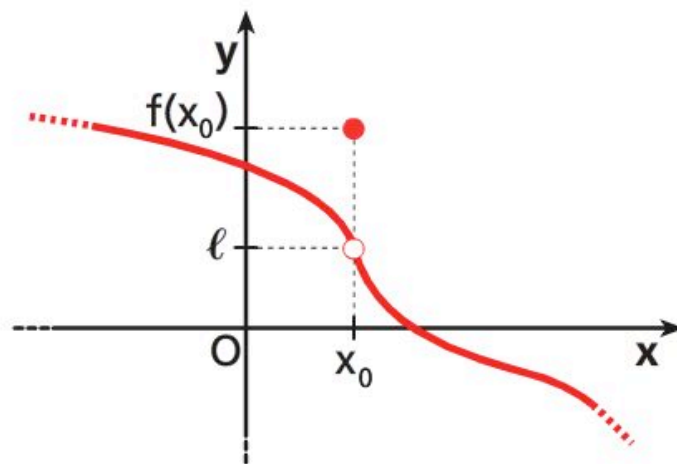
Punto di discontinuità di terza specie (o eliminabile)

Un punto x_0 si dice punto di discontinuità di terza specie per la funzione $f(x)$ quando:

1. esiste ed è finito il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow x_0$, ossia $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$;
2. f non è definita in x_0 , oppure, se lo è, risulta $f(x_0) \neq l$.



a. f non è definita in x_0 .



b. f è definita in x_0 , ma $f(x_0) \neq l$.

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

Cerchiamo, se esistono, i punti di discontinuità della funzione $f(x) = \frac{x+3}{|x^2-9|}$ e classifichiamoli.

Poiché la funzione è il quoziente di due funzioni continue, $g(x) = x+3$ e $h(x) = |x^2-9|$, i suoi punti di discontinuità sono i punti dove si annulla il denominatore.

I punti $x_1 = +3$ e $x_2 = -3$ sono perciò punti di discontinuità della funzione.

Stabiliamo il tipo di discontinuità.

Poiché $x^2 - 9 > 0$, per $x < -3 \vee x > 3$, e $x^2 - 9 < 0$, per $-3 < x < 3$, allora riscriviamo la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x-3} & \text{se } x < -3 \vee x > 3 \\ \frac{x+3}{9-x^2} = \frac{x+3}{(3-x)(3+x)} = \frac{1}{3-x} & \text{se } -3 < x < 3 \end{cases}$$

Calcoliamo il limite destro e il limite sinistro della funzione per $x \rightarrow -3$:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x+3}{|x^2-9|} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{6},$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x+3}{|x^2-9|} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{3-x} = \frac{1}{6}.$$

Poiché il limite destro e quello sinistro sono diversi e sono entrambi finiti, $x = -3$ è un punto di discontinuità di prima specie. Il salto della funzione per $x \rightarrow -3$ vale: $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$.

Calcoliamo il limite destro e il limite sinistro della funzione per $x \rightarrow 3$ e otteniamo:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{|x^2-9|} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{3-x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty.$$

Poiché la funzione ha limite infinito per x che tende a 3, $x = 3$ è un punto di discontinuità di seconda specie.

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo per quali valori di a e b la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - b & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ -x^2 + a & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

è continua in tutto $\mathbb{R}$.

Dovrà perciò valere:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow -1 = 2 - b,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) \Leftrightarrow 6 - b = -9 + a.$$

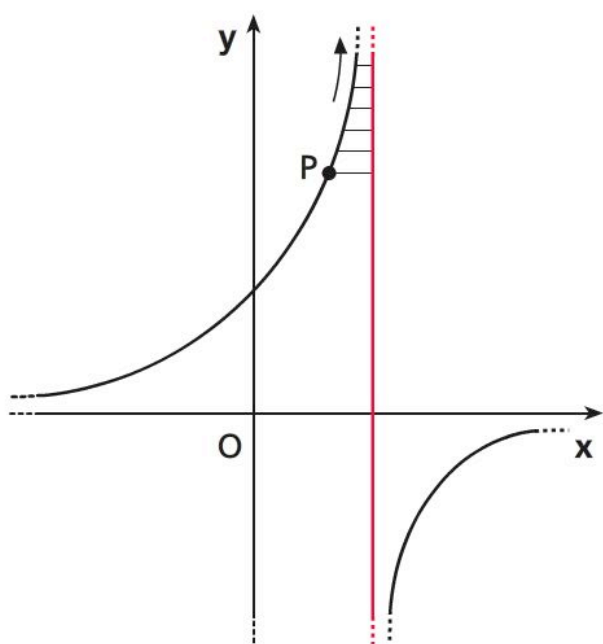
Determiniamo a e b risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} -1 = 2 - b \\ 6 - b = -9 + a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a + b = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = 3 \end{cases}$$

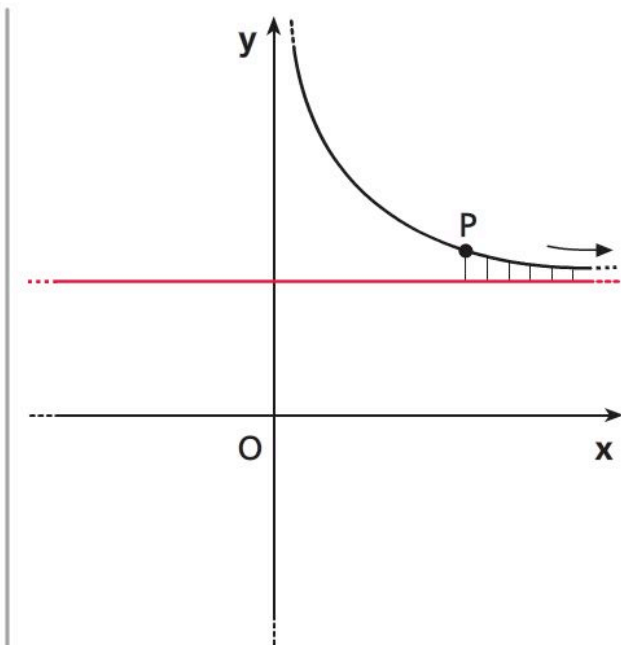
RICERCA DEGLI ASINTOTI

◆ DEFINIZIONE ASINTOTO

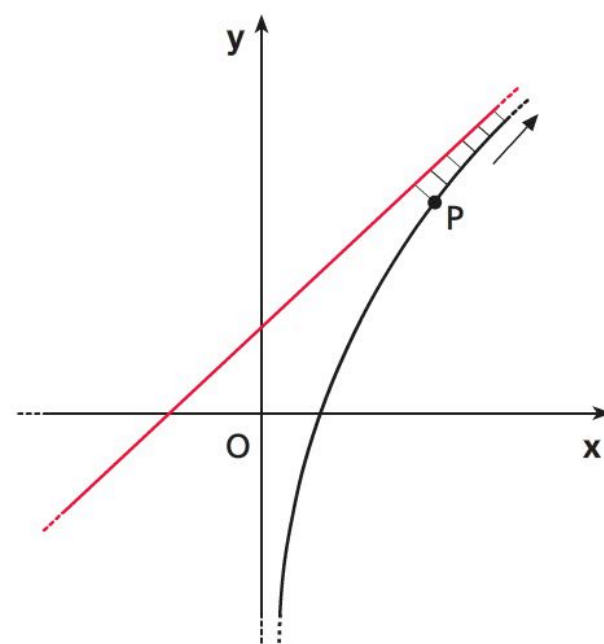
definizione – L'asintoto di una funzione $f(x)$ è una retta la cui distanza dal grafico di $f(x)$ tende a 0 man mano che un generico punto P sul grafico si allontana all'infinito.



a. Asintoto verticale.



b. Asintoto orizzontale.



c. Asintoto obliquo.

◆ RICERCA ASINTOTI ORIZZONTALI E VERTICALI

Riprendiamo le definizioni di asintoto verticale e orizzontale:

DEFINIZIONE

Asintoto verticale

Data la funzione $y = f(x)$, se si verifica che

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty,$$

si dice che la retta $x = c$ è asintoto verticale per il grafico della funzione.

DEFINIZIONE

Asintoto orizzontale

Data la funzione $y = f(x)$, se si verifica una delle condizioni

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = q \text{ o } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = q \text{ o } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = q,$$

si dice che la retta $y = q$ è asintoto orizzontale per il grafico della funzione.

e vediamo in che modo è possibile effettuare la loro ricerca:

- si esamina il dominio D della funzione e se D è illimitato, gli asintoti orizzontali si determinano calcolando il:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

- gli asintoti verticali si determinano calcolando il:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

dove x_0 è il punto in cui la funzione è discontinua (punto escluso dal dominio D).

ESEMPIO

Data la funzione $y = \frac{4x^2 + 3}{x^2 - 1}$, cerchiamo le equazioni dei suoi asintoti orizzontali e verticali. Il dominio della funzione è $D = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

Asintoti orizzontali:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3}{x^2 - 1} = 4.$$

La retta di equazione $y = 4$ è asintoto orizzontale per il grafico della funzione.

Asintoti verticali:

$$\lim_{x \rightarrow +1} \frac{4x^2 + 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + 3}{x^2 - 1} = \infty.$$

Le rette di equazioni $x = 1$ e $x = -1$ sono gli asintoti verticali.

◆ RICERCA ASINTOTI OBLIQUI

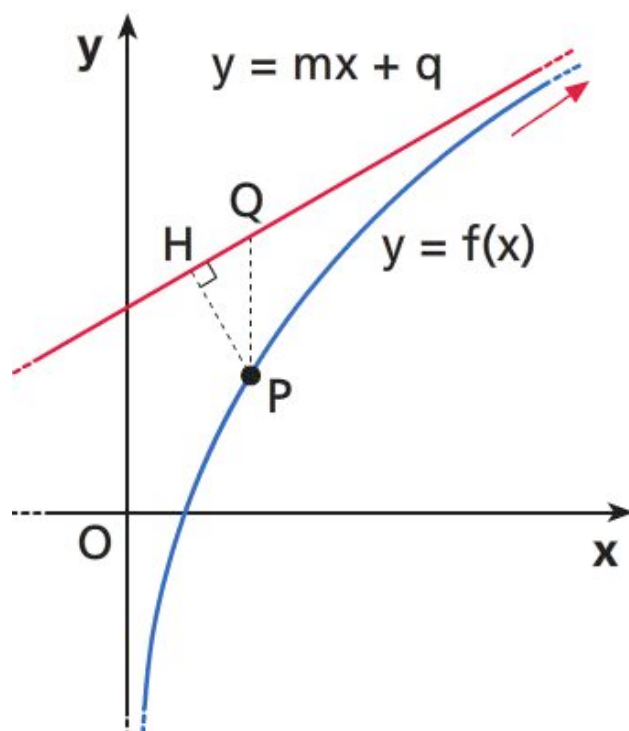
DEFINIZIONE

Asintoto obliquo

Data la funzione $y = f(x)$, se si verifica che

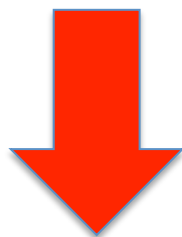
$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (mx + q)] = 0,$$

si dice che la retta di equazione $y = mx + q$ è asintoto obliquo per il grafico della funzione.



● Per $x \rightarrow +\infty$ parliamo di asintoto obliquo destro, per $x \rightarrow -\infty$ di asintoto obliquo sinistro.

Condizione necessaria, ma non sufficiente,
per l'esistenza dell'asintoto obliquo



● Una funzione può avere
un asintoto obliquo solo se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

o uno dei limiti analoghi
con $+\infty$ o $-\infty$.

TEOREMA

Se il grafico della funzione $y = f(x)$ ha un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$, con $m \neq 0$, allora m e q sono dati dai seguenti limiti:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x};$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx].$$

DIMOSTRAZIONE

Se esiste un asintoto obliquo, è vero che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (mx + q)] = 0,$$

e quindi, dividendo per $x \neq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (mx + q)}{x} = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x} \right] = 0,$$

e, poiché $\lim_{x \rightarrow \infty} m = m$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q}{x} = 0$, deve essere:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Se m è diverso da 0, per calcolare q consideriamo nuovamente:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (mx + q)] &= 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} [(f(x) - mx) - q] = 0 \rightarrow \\ \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] - q &= 0 \rightarrow \mathbf{q = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]}.\end{aligned}$$

Viceversa, si può dimostrare che, se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ed esistono finiti i limiti $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ e $q = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$, con $m \neq 0$, allora il grafico della funzione $y = f(x)$ presenta un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$.

ESEMPIO

Determiniamo, se esiste, l'asintoto obliquo della funzione:

$$y = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 1}.$$

Essendo $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, la curva può avere un asintoto obliquo. Calcoliamo m :

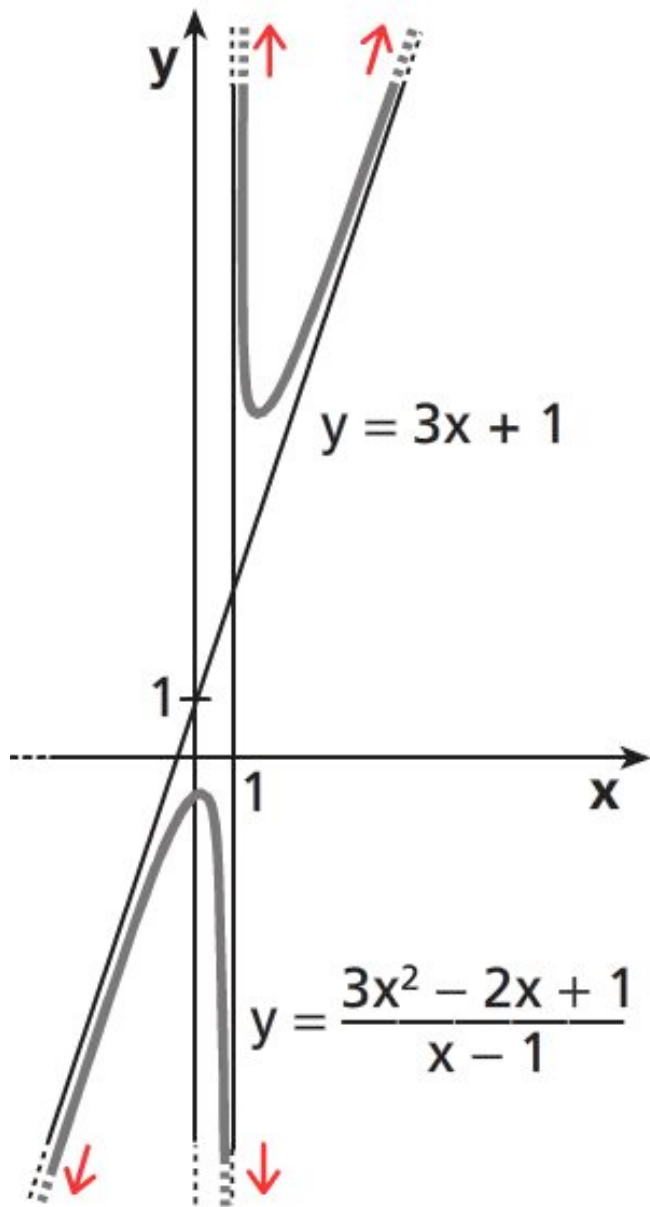
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} = 3.$$

Calcoliamo q , sostituendo nella formula il valore 3 al posto di m :

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 1} - 3x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1 - 3x^2 + 3x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{x - 1} = 1. \end{aligned}$$

I calcoli svolti sono validi sia per $x \rightarrow +\infty$ sia per $x \rightarrow -\infty$; quindi, in entrambi i casi, il grafico della funzione ha un asintoto obliquo di equazione:

$$y = 3x + 1.$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \infty$$

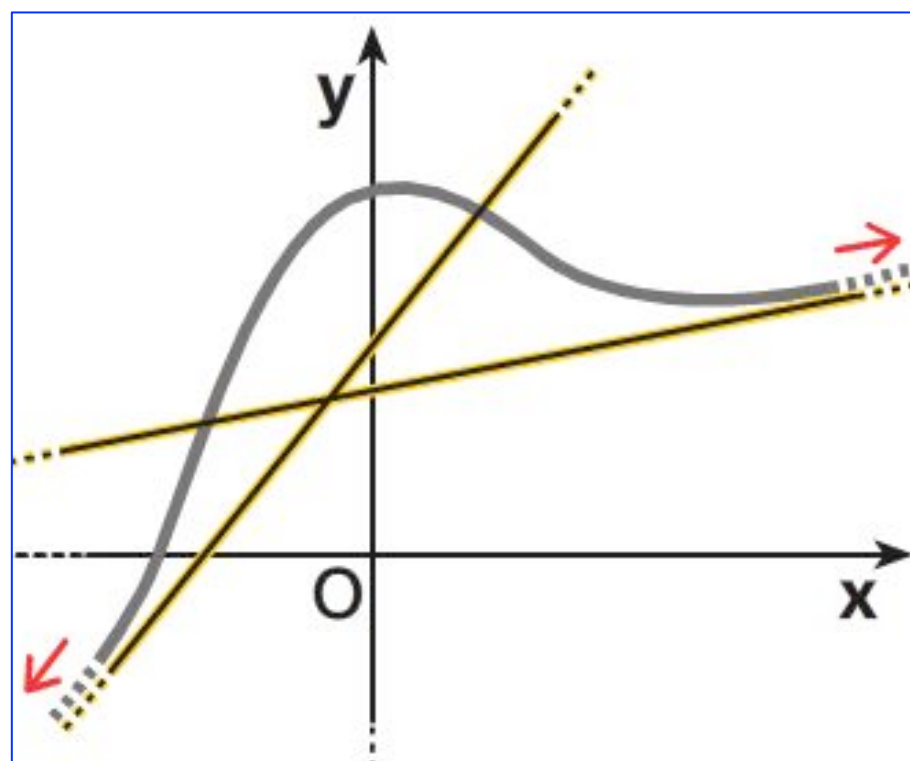
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} = 3$$

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 1} - 3x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1 - 3x^2 + 3x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{x - 1} = 1 \end{aligned}$$

asintoto obliquo

$$y = 3x + 1$$

● Un asintoto obliquo si può avere sia per $x \rightarrow +\infty$ sia per $x \rightarrow -\infty$, oppure in uno solo dei due casi. Per esempio, la funzione rappresentata qui sotto ha due asintoti obliqui diversi per $x \rightarrow +\infty$ e per $x \rightarrow -\infty$.



◆ RICERCA ASINTOTI OBLIQUI:
caso particolare

Sia $f(x)$ una *funzione razionale fratta*

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$$

tale che $A(x)$ sia un polinomio di grado n e $B(x)$ un polinomio di grado $n - 1$.

Allora, effettuando la divisione tra i due polinomi, possiamo scrivere:

$$f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)},$$

Si dimostra che il quoziente $Q(x)$ è l'asintoto obliquo della
funzione $f(x)$:

$$Q(x) = y = mx + q$$

ESEMPIO

Consideriamo la funzione razionale fratta:

$$f(x) = \frac{2x^4 - 2x + 1}{x^3 - 1}.$$

Osserviamo che il grado del numeratore supera di una unità quello del denominatore, quindi la funzione ammette un asintoto obliquo, che troviamo eseguendo la divisione tra $A(x) = 2x^4 - 2x + 1$ e $B(x) = x^3 - 1$.

Otteniamo come quoziente $Q(x) = 2x$ e come resto $R(x) = 1$, quindi possiamo scrivere

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x^3 - 1}$$

e la retta di equazione $y = 2x$ è un asintoto obliquo per $f(x)$.

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo le equazioni degli eventuali asintoti orizzontali e verticali delle seguenti funzioni:

a) $y = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1}$; b) $y = \frac{1}{\operatorname{sen} x - 1}$.

a) La funzione data è una funzione razionale fratta, il cui dominio è $] -\infty; -1[\cup] -1; 1[\cup] 1; +\infty[$, ossia $D: x \neq \pm 1$.

La ricerca degli asintoti viene effettuata esaminando i limiti nei punti esclusi dal dominio e per $x \rightarrow \infty$ se il dominio è illimitato. Ricordiamo che se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$, allora la retta $y = l$ è asintoto orizzontale, mentre se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$, la retta $x = c$ è asintoto verticale.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} = 3 \quad \rightarrow \quad \text{la retta } y = 3 \text{ è asintoto orizzontale.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^\pm} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} = \mp\infty \quad \rightarrow \quad \text{la retta } x = -1 \text{ è asintoto verticale.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} = \pm\infty \quad \rightarrow \quad \text{la retta } x = 1 \text{ è asintoto verticale.}$$

Osservazione. Possiamo giungere più rapidamente al risultato se notiamo che la funzione è pari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y . Quindi basta calcolare i limiti per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow 1^\pm$.

b) La funzione data è una funzione goniometrica fratta, periodica di periodo 2π . Limitiamoci a considerare il suo dominio nell'intervallo $[0; 2\pi]$, che è $D: \left[0; \frac{\pi}{2} \left[\cup \right] \frac{\pi}{2}; 2\pi \right]$.

Essendo la funzione periodica, non esistono asintoti orizzontali.

Consideriamo il valore $\frac{\pi}{2}$ in cui la funzione non esiste perché si annulla il denominatore. Poiché

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^{\pm}} \frac{1}{\sin x - 1} = -\infty,$$

la retta $x = \frac{\pi}{2}$ è asintoto verticale in D .

Considerando poi la funzione nel suo dominio naturale, poiché essa è periodica di periodo 2π , i suoi asintoti hanno equazioni:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

ESERCIZIO GUIDA

Data la funzione $y = \frac{x^2 - x + 1}{x + 3}$, determiniamo le equazioni degli eventuali asintoti obliqui.

Ricordiamo che, quando $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, esiste un asintoto obliquo se esistono finiti i limiti

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad q = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx],$$

e in questo caso l'equazione dell'asintoto è $y = mx + q$.

Calcoliamo il limite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + 3} = \infty.$$

Essendo verificata la prima ipotesi, calcoliamo i limiti:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x \cdot (x + 3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 3x} = 1,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x + 3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1 - x^2 - 3x}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x + 1}{x + 3} = -4.$$

L'asintoto obliquo della funzione data è la retta di equazione:

$$y = x - 4.$$

GRAFICO DI UNA FUNZIONE

◆ GRAFICO PROBABILE DI UNA FUNZIONE

Con il calcolo dei limiti siamo in grado di ottenere ulteriori informazioni sul grafico di una funzione.

Ecco tutti gli elementi di una funzione che possiamo, al momento, determinare:

Caratteristiche di una funzione

Dominio – Simmetrie – Intersezione con gli assi – Segno
- Limiti agli estremi del dominio - Punti di discontinuità
- Asintoti

Con la determinazione di questi elementi siamo in grado di tracciare un grafico approssimativo della funzione, che chiameremo **grafico probabile**.

ESERCIZI

Funzioni polinomiali:

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad n \in \mathbb{N}, n > 0$$

- Dominio: l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$
- Non hanno punti di discontinuità
- Non hanno asintoti (escludendo le funzioni lineari, il cui grafico è una retta e quindi coincide con l'asintoto).

ESERCIZIO GUIDA

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = x^4 - 3x^2 + 2.$$

1. Determiniamo il dominio della funzione. Poiché non esistono limitazioni per x , si ha $D: \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Controlliamo se la funzione presenta delle simmetrie.

Essendo $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 2 = x^4 - 3x^2 + 2 = f(x)$, la funzione è pari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y .

3. Intersezioni con gli assi.

Asse y :

$$\begin{cases} y = x^4 - 3x^2 + 2 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \text{il punto di intersezione con l'asse } y \text{ è } A(0; 2).$$

Asse x :

$$\begin{cases} y = x^4 - 3x^2 + 2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x^4 - 3x^2 + 2 = 0.$$

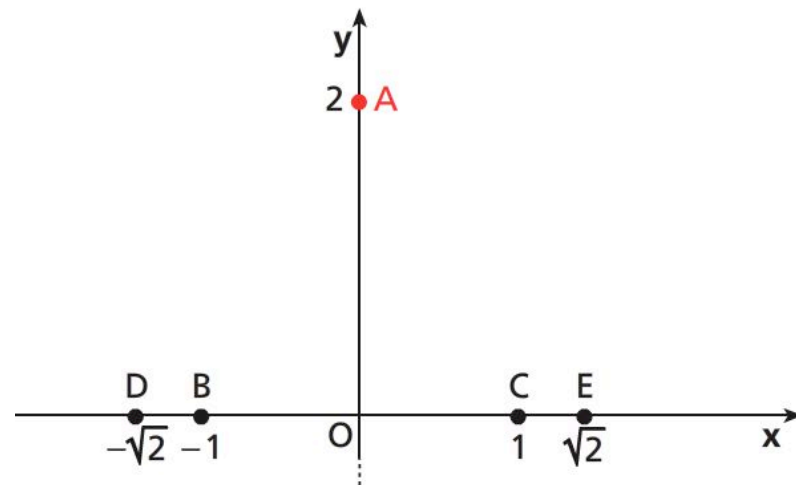
L'equazione ha per soluzioni:

$$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -\sqrt{2}, x_4 = \sqrt{2}.$$

I punti di intersezione con l'asse x sono:

$$B(-1; 0), C(1; 0),$$

$$D(-\sqrt{2}; 0), E(\sqrt{2}; 0).$$



4. Studiamo il segno della funzione.

$$x^4 - 3x^2 + 2 > 0$$

$$x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 2)(x^2 - 1) > 0.$$

Primo fattore:

$$x^2 - 2 > 0 \text{ per } x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}.$$

Secondo fattore:

$$x^2 - 1 > 0 \text{ per } x < -1 \vee x > 1.$$

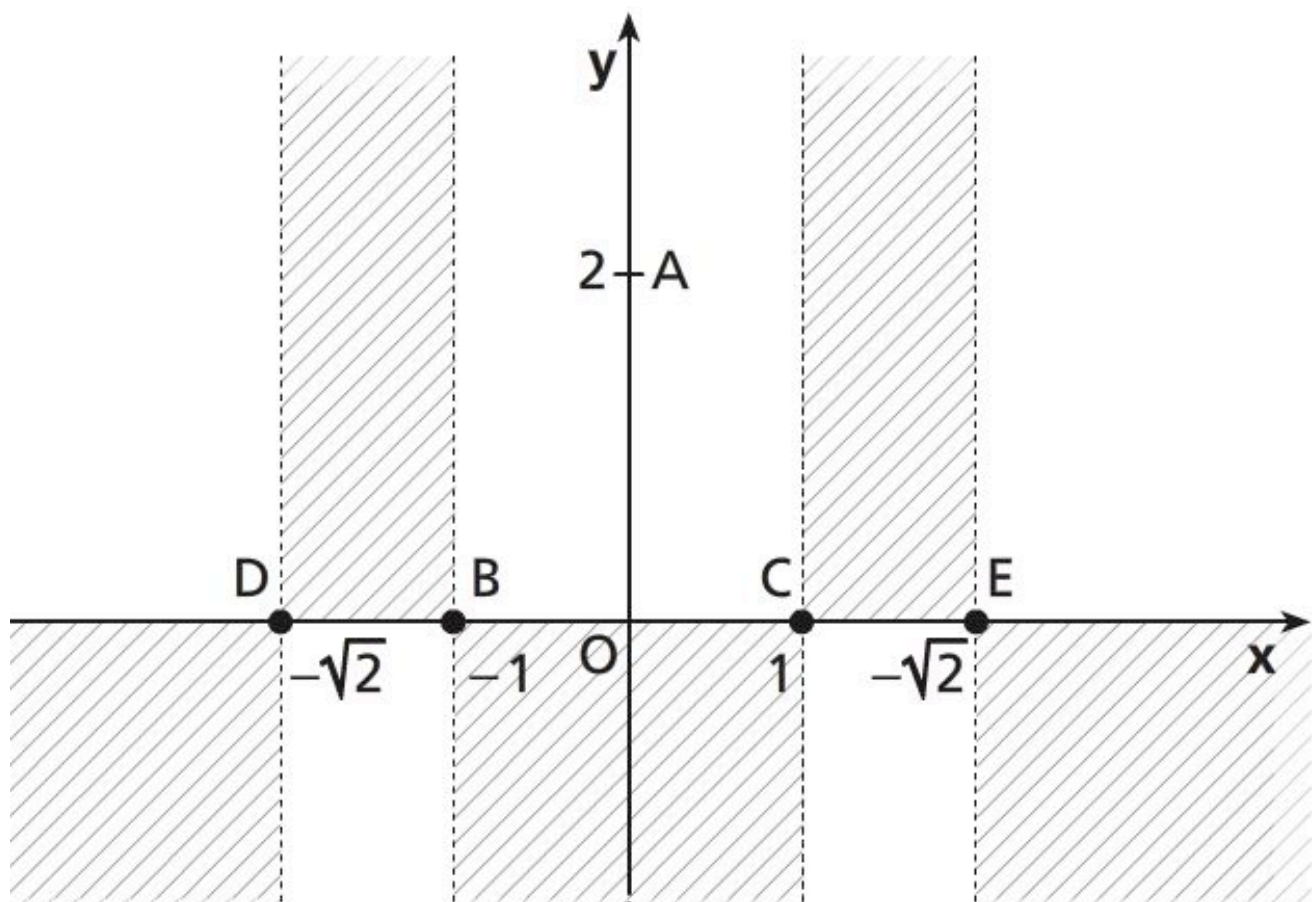
Compiliamo il quadro dei segni (figura b).

$$f(x) > 0,$$

$$\text{per } x < -\sqrt{2} \vee -1 < x < 1 \vee x > \sqrt{2}.$$

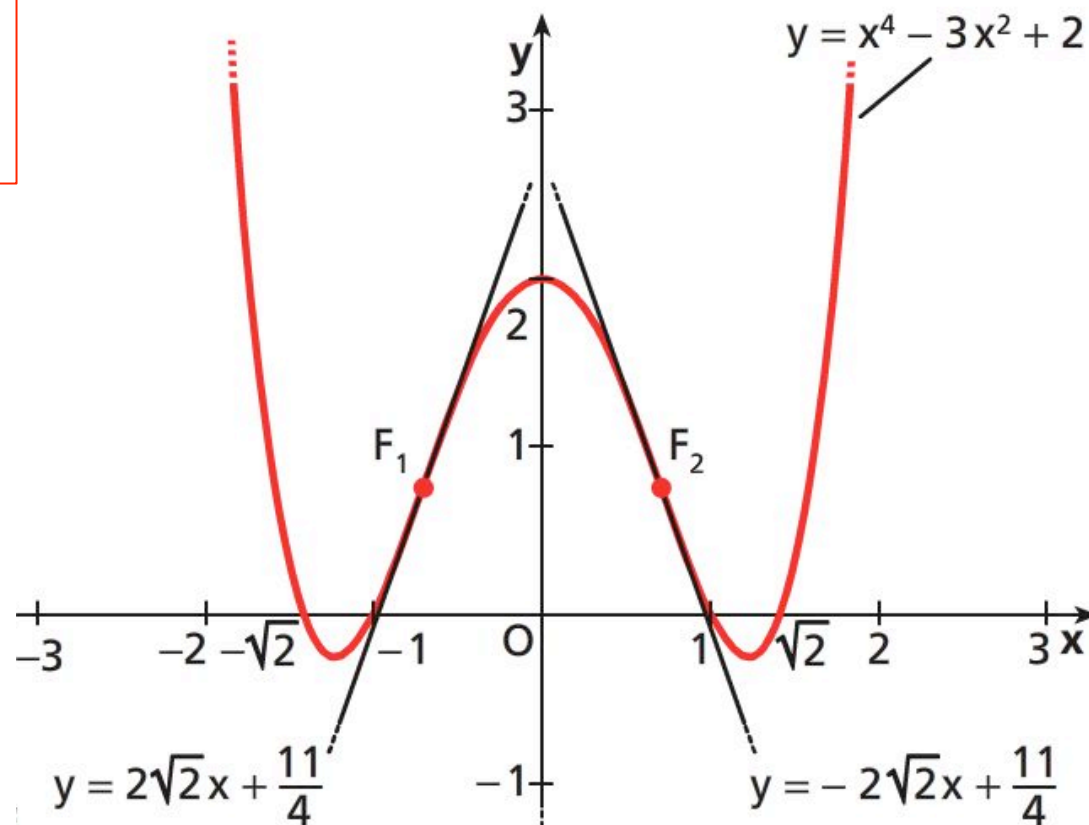
		$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$	
$x^2 - 2$	+	0	-		-		-	0	+
$x^2 - 1$	+		+	0	-	0	+		+
y	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Rappresentiamo i risultati fin qui ottenuti su un piano cartesiano, tratteggiando le zone del piano in cui la funzione non è definita.



5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^4 - 3x^2 + 2) = +\infty$. Poiché la funzione è polinomiale, con grado maggiore di 1, **non** esiste un asintoto obliquo.

6. Grafico della funzione



◆ GRAFICO FUNZIONE RAZIONALE FRATTA

Le funzioni razionali fratte,

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \frac{A(x)}{B(x)},$$

- hanno come dominio $\mathbb{R}$ con esclusione dei valori che annullano $B(x)$;
- possono avere asintoti verticali che vanno ricercati fra i valori che annullano $B(x)$;
- intersecano l'asse x nei punti in cui $A(x) = 0$;
- se $n = m$, hanno un asintoto orizzontale di equazione $y = \frac{a_n}{b_m}$;
- se $n < m$, hanno come asintoto orizzontale l'asse x ;
- se $n > m$, con $n - m = 1$, hanno un asintoto obliquo.

ESERCIZIO GUIDA

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione $y = \frac{x^2 - 1}{x}$

1. Determiniamo il dominio della funzione. Si tratta di una funzione razionale fratta il cui denominatore deve essere non nullo. Quindi:

$$D: \mathbb{R} - \{0\}.$$

2. Cerchiamo eventuali simmetrie.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{-x} = -\frac{x^2 - 1}{x} = -f(x).$$

Poiché $f(-x) = -f(x)$, la funzione è dispari. Il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi.

3. Determiniamo le intersezioni con gli assi.

Asse y : nessuna intersezione, essendo $x = 0$ escluso dal dominio.

Asse x :

$$\begin{cases} y = \frac{x^2 - 1}{x} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

I punti di intersezione con l'asse x sono:

$$A(-1; 0), \quad B(1; 0).$$

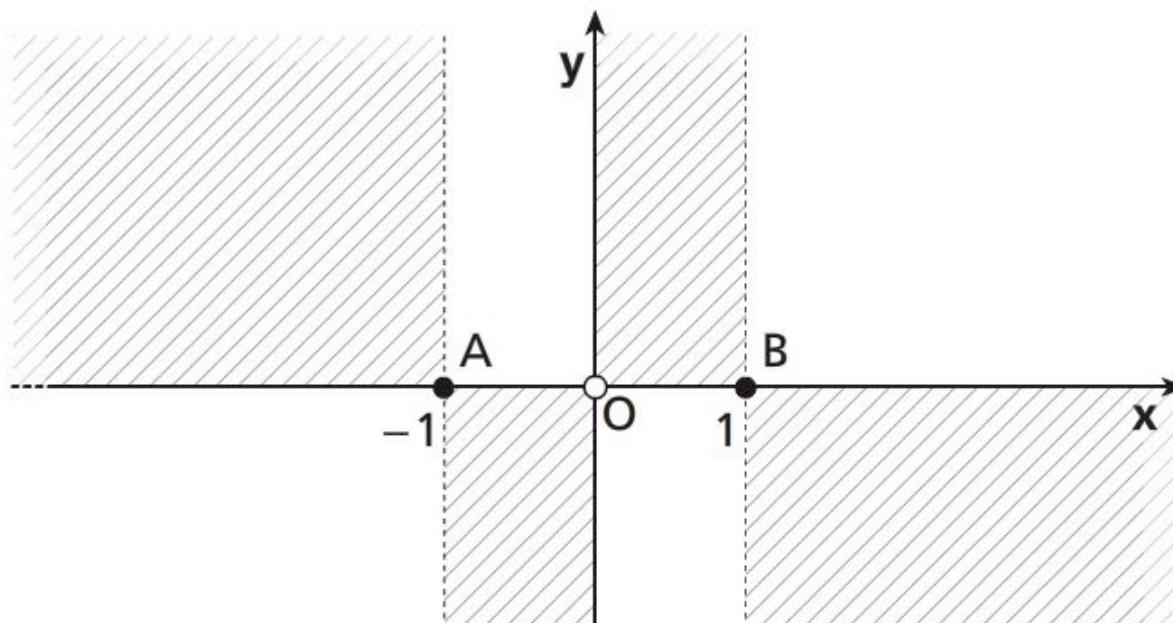
4. Studiamo il segno della funzione.

$$\frac{x^2 - 1}{x} > 0 \quad N > 0 \text{ per } x < -1 \vee x > 1,$$

$$D > 0 \text{ per } x > 0.$$

	...	-1		0		1		...
Segno di N	+	0	-		-	0	+	
Segno di D	-		-	0	+		+	
Segno di $\frac{N}{D}$	-	0	+	0	-	0	+	

Rappresentiamo i risultati fin qui ottenuti su un piano cartesiano, tratteggiando le zone del piano in cui la funzione non è definita.



5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x} = \pm\infty$; poiché il grado del numeratore supera di 1 quello del denominatore, esiste un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$.

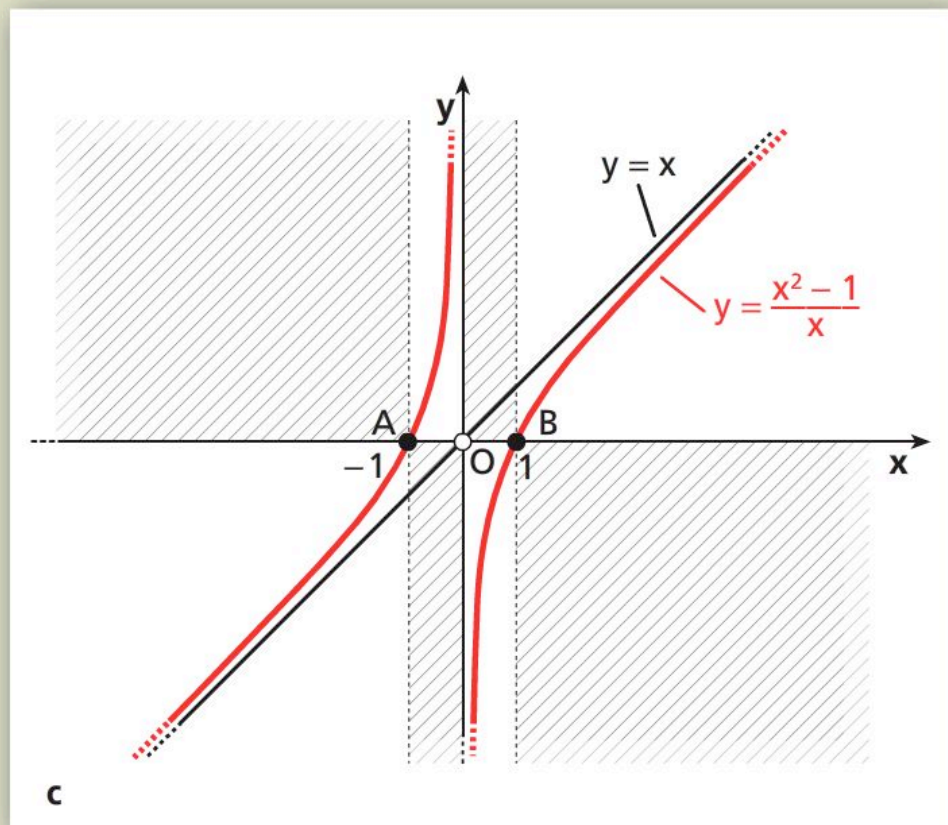
$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{x} = \\ = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0.$$

L'asintoto obliquo ha equazione $y = x$.

- $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x^2 - 1}{x} = \mp\infty \rightarrow x = 0$ è un asintoto verticale.

Tracciamo il grafico probabile della funzione (figura c).



ESERCIZIO GUIDA

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = \frac{(2 - x)^3}{3(x - 4)}.$$

1. Determiniamo il dominio della funzione. Il suo denominatore deve essere non nullo.

Quindi:

$$D: x \neq 4.$$

2. Cerchiamo eventuali simmetrie:

$$f(-x) = \frac{[2 - (-x)]^3}{3(-x - 4)} = \frac{(2 + x)^3}{-3(x + 4)}.$$

Poiché $f(-x) \neq -f(x)$ e $f(-x) \neq f(x)$, la funzione non è né dispari né pari.

3. Determiniamo le intersezioni con gli assi.

Asse y :

$$\begin{cases} y = \frac{(2-x)^3}{3(x-4)} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{-12} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ x = 0 \end{cases}$$

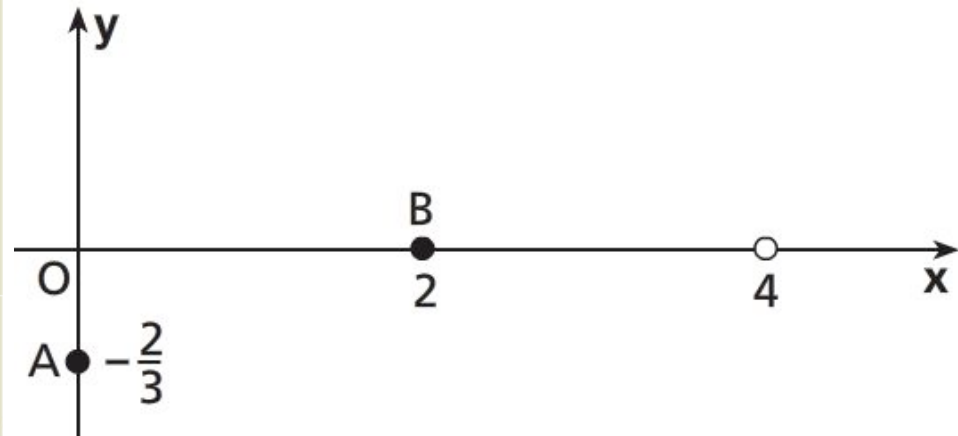
Il punto di intersezione con l'asse y è $A\left(0; -\frac{2}{3}\right)$.

Asse x :

$$\begin{cases} y = \frac{(2-x)^3}{3(x-4)} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{(2-x)^3}{3(x-4)} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2-x)^3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2-x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Il punto di intersezione con l'asse x è $B(2; 0)$.



4. Studiamo il segno della funzione:

$$\frac{(2-x)^3}{3(x-4)} > 0 \quad N > 0 \text{ per } x < 2$$

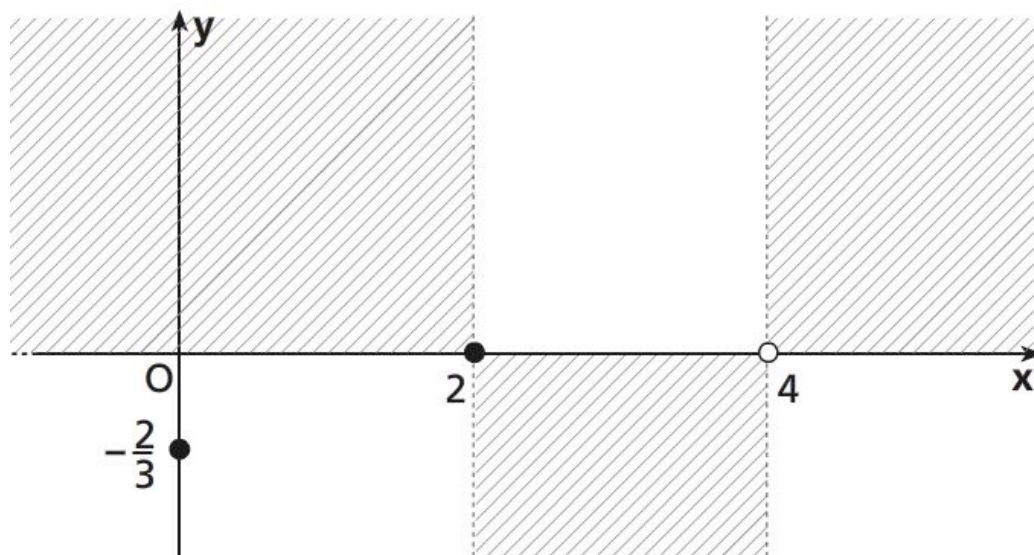
$$D > 0 \text{ per } x > 4.$$

Compiliamo il quadro dei segni (figura b).

$$f(x) > 0 \quad \text{per } 2 < x < 4.$$

		2		4	
...					→
$(2-x)^3$	+	0	-		-
$3(x-4)$	-		-	0	+
y	-	0	+	0	-

Rappresentiamo i risultati fin qui ottenuti su un piano cartesiano, tratteggiando le zone del piano in cui la funzione non è definita.



5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

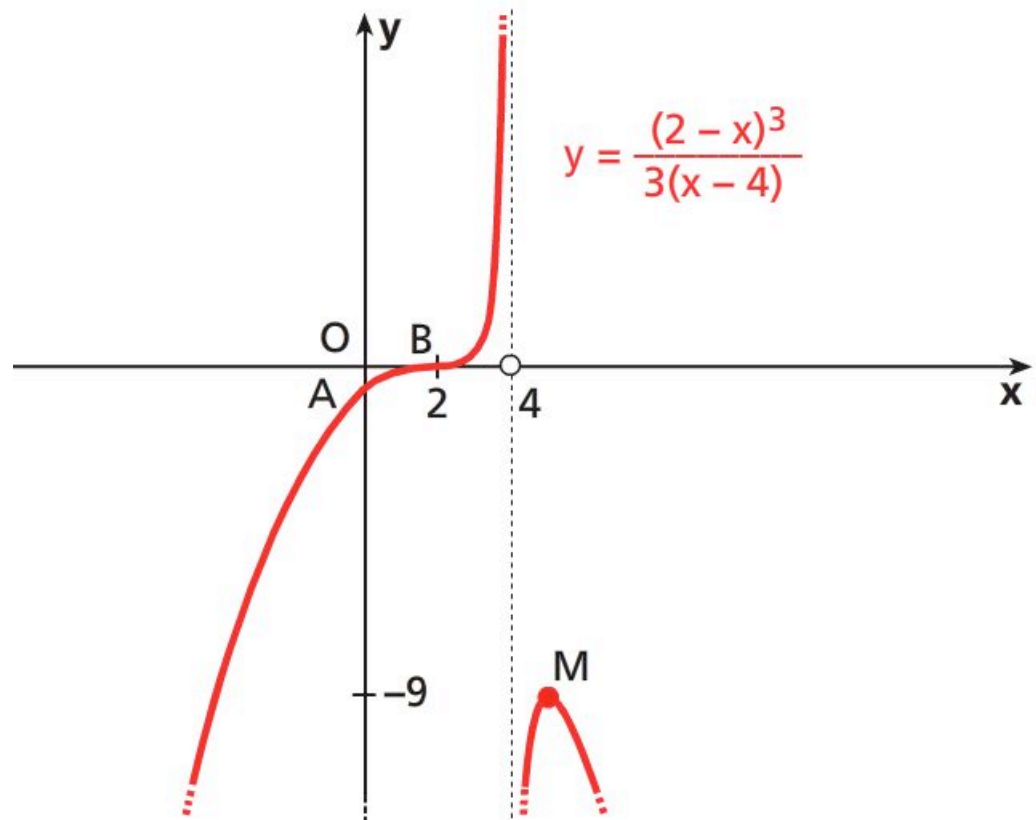
$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(2-x)^3}{3(x-4)} = -\infty;$$

poiché la differenza fra il grado del numeratore e il grado del denominatore è 2, non esiste asintoto obliquo;

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 4^\pm} \frac{(2-x)^3}{3(x-4)} = \mp\infty;$$

$x = 4$ è un asintoto verticale.

6. Grafico della funzione



Funzioni irrazionali:

$$y = \sqrt[n]{A(x)} \quad oppure \quad y = \sqrt[n]{\frac{A(x)}{B(x)}}$$

Dominio:

$$A(x) \geq 0 \quad oppure \quad \frac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \quad se \ n \ è \ pari$$

ESERCIZIO GUIDA

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

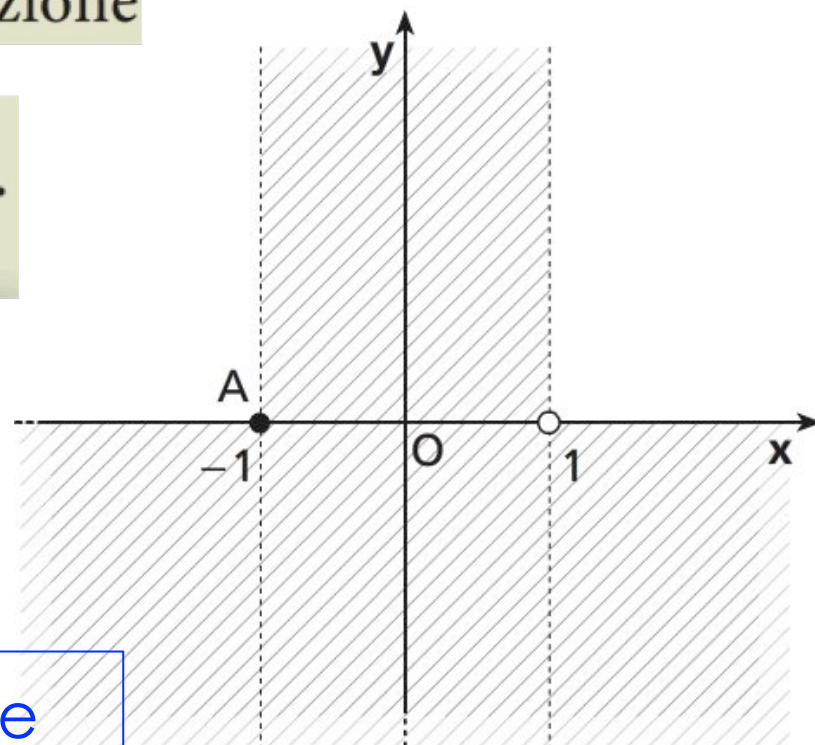
1. Determiniamo il dominio della funzione

$$\frac{x+1}{x-1} \geq 0 \quad \text{per } x \leq -1 \vee x > 1.$$

Il dominio della funzione è

$$x \leq -1 \vee x > 1$$

La funzione non esiste nelle zone tratteggiate del piano cartesiano.



2. Cerchiamo eventuali simmetrie. Calcoliamo:

$$f(-x) = \sqrt{\frac{-x+1}{-x-1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Essendo

$$f(-x) \neq \pm f(x),$$

la funzione non è né pari né dispari.

3. Intersezioni con gli assi.

Non esiste intersezione con l'asse y in quanto $x = 0$ è escluso dal dominio.

Calcoliamo l'intersezione con l'asse x :

$$\begin{cases} y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \\ y = 0 \end{cases}$$

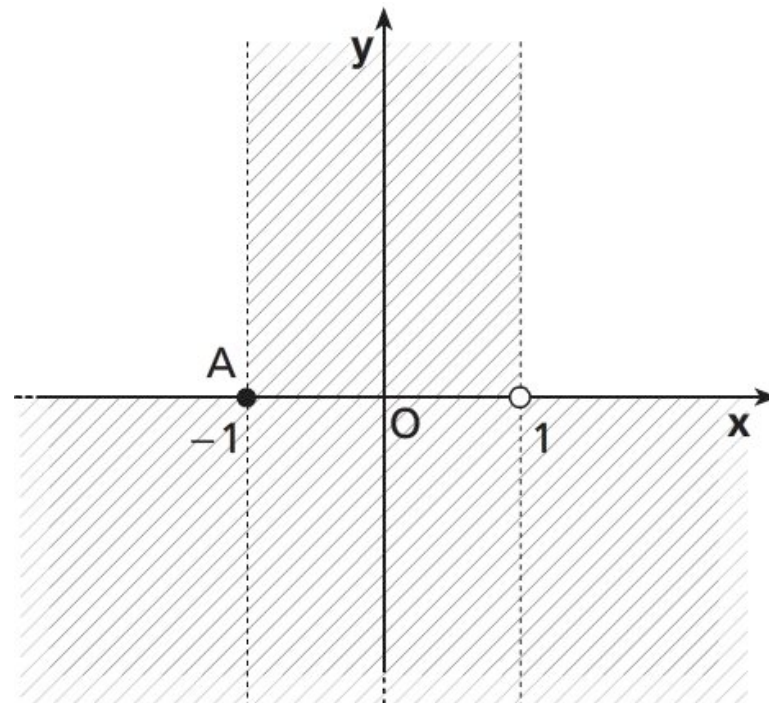
Il punto di intersezione con l'asse x è:

$$A(-1; 0).$$

4. Studiamo il segno della funzione.

La funzione è sempre positiva nel suo dominio in quanto un radicale con n pari è sempre positivo o nullo.

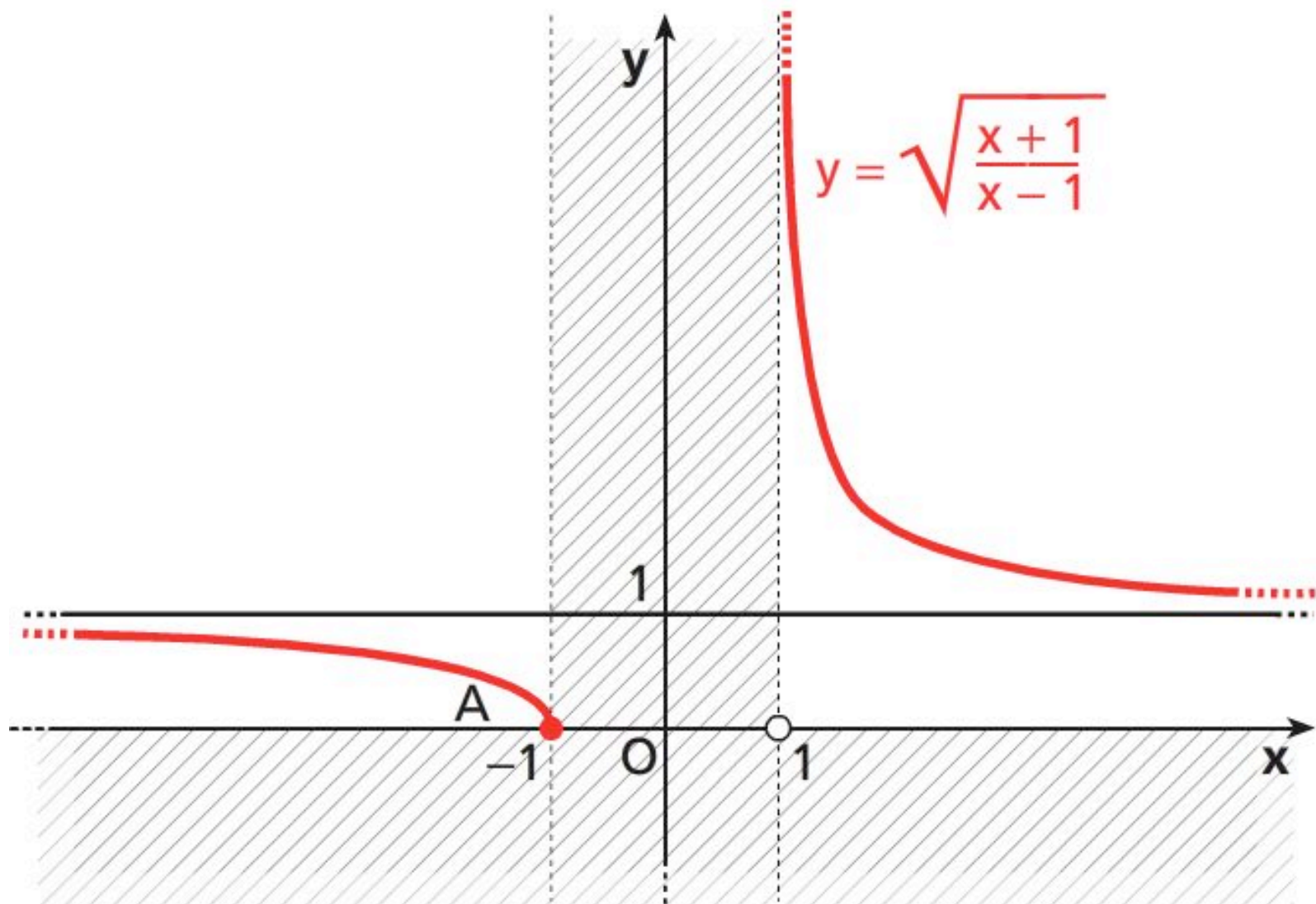
Rappresentiamo i risultati fin qui ottenuti su un piano cartesiano, tratteggiando le zone del piano in cui la funzione non è definita.



5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 1 \rightarrow y = 1$ asintoto orizzontale;
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = +\infty \rightarrow x = 1$ asintoto verticale.

6. Grafico della funzione



Funzioni esponenziali:

$$y=e^{A(x)}$$

- Non ci sono osservazioni particolari da fare

ESERCIZIO GUIDA

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = x^2 \cdot e^x.$$

1. Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$.

2. Cerchiamo eventuali simmetrie. Calcoliamo: $f(-x) = (-x)^2 \cdot e^{-x} = x^2 \cdot e^{-x}$.

Poiché $f(-x) \neq \pm f(x)$, la funzione non è né pari né dispari.

3. Intersezioni con gli assi.

Asse y :

$$\begin{cases} y = x^2 \cdot e^x \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \text{il punto di intersezione con l'asse } y \text{ è } O(0; 0).$$

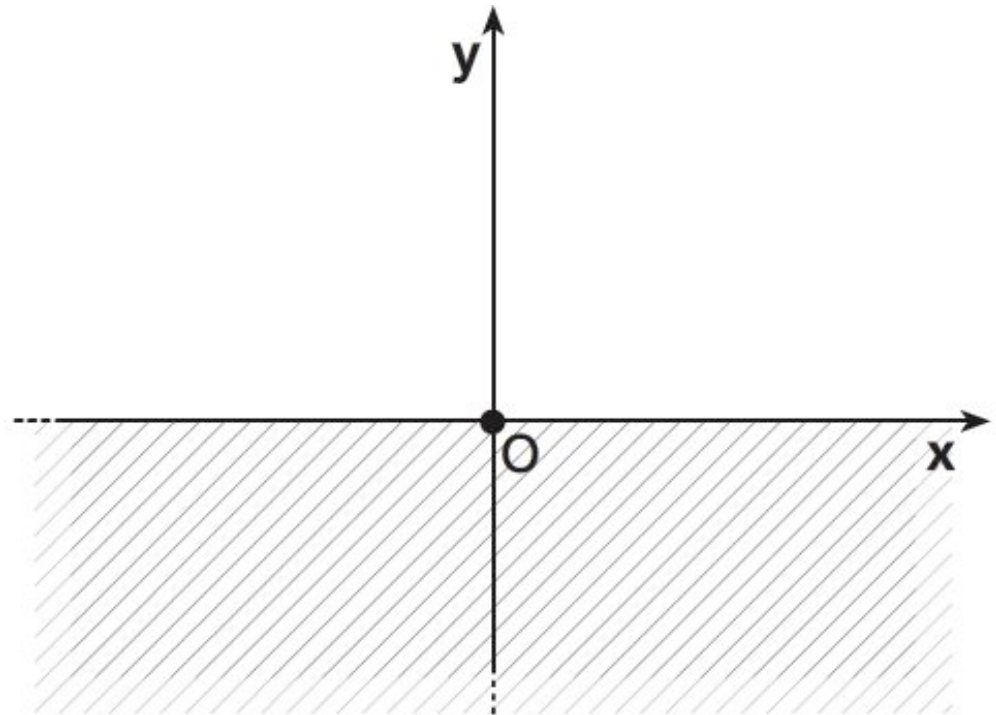
Asse x :

$$\begin{cases} y = x^2 \cdot e^x \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 \cdot e^x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \text{il punto di intersezione con l'asse } x \text{ è } O(0; 0).$$

4. Studiamo il segno della funzione:

$$y > 0 \rightarrow x^2 \cdot e^x > 0 \quad \forall x \neq 0$$

Rappresentiamo i risultati fin qui ottenuti su un piano cartesiano, tratteggiando le zone del piano in cui la funzione non è definita.



5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio.

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 \cdot e^x.$

Poiché per $x \rightarrow -\infty$ si ha che $x^2 \rightarrow +\infty$ ed $e^x \rightarrow 0$, siamo in presenza della forma indeterminata $\infty \cdot 0$. Scriviamo l'espressione in altra forma,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}},$$

e applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

La regola di De L'Hospital sarà studiata
nel capitolo sulle derivate.

Quindi:

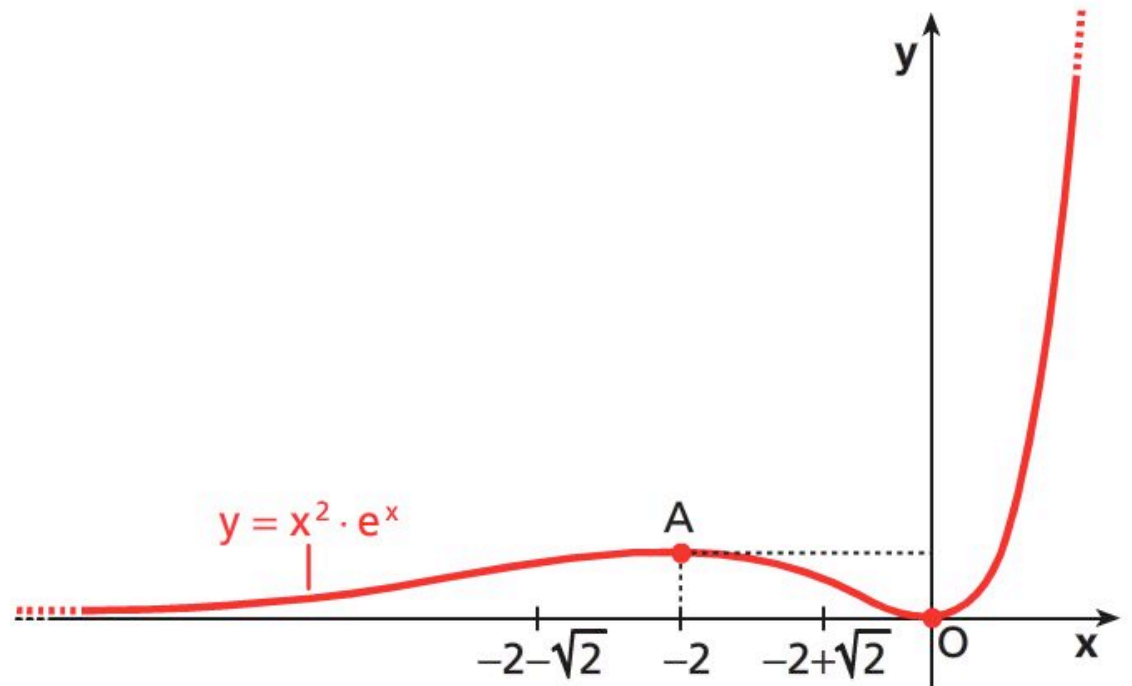
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot e^x = 0 \rightarrow y = 0 \text{ asintoto orizzontale.}$$

Essendo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^x = +\infty \rightarrow \text{potrebbe esistere un asintoto obliquo.}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^x = +\infty \rightarrow \text{non esistono asintoti obliqui.}$$

6. Grafico della funzione



Funzioni logaritmiche:

$$y = \log[A(x)] \quad oppure \quad y = \log\left[\frac{A(x)}{B(x)}\right]$$

➤ Dominio:

$$A(x) > 0 \quad oppure \quad \frac{A(x)}{B(x)} > 0$$

➤ Se sono funzioni del tipo $y = \log[A(x)/B(x)]$, possono presentare asintoti verticali per valori che annullano $A(x)$ (ossia per $A(x)=0$) o $B(x)$ (ossia per $B(x)=0$).

ESERCIZIO GUIDA

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = x^2 \cdot \ln x.$$

1. Determiniamo il dominio della funzione.

Poiché l'argomento del logaritmo deve essere positivo, il dominio è:

$$D: x > 0.$$

2. La funzione non presenta simmetrie rispetto agli assi cartesiani in quanto il suo dominio riguarda solo le ascisse positive.
3. Calcoliamo l'intersezione soltanto con l'asse x , perché quella con l'asse y ($x = 0$) è esclusa dal dominio.

Asse x :

$$\begin{cases} y = x^2 \cdot \ln x \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 \cdot \ln x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \text{il punto di intersezione con l'asse } x \text{ è } A(1; 0).$$

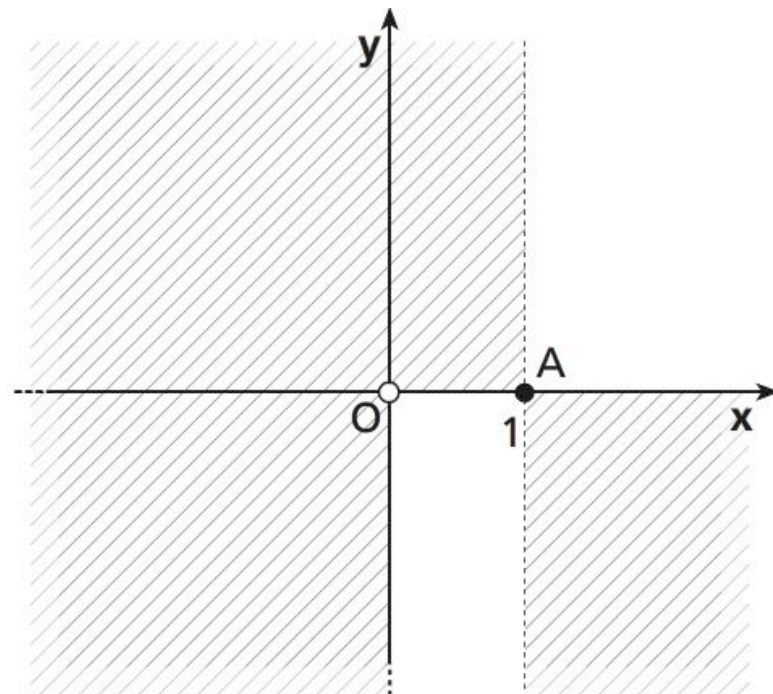
4. Studiamo il segno della funzione:

$$x^2 \cdot \ln x > 0.$$

Primo fattore: $x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$.

Secondo fattore: $\ln x > 0$ per $x > 1$.

Si ha $y > 0$ per $x > 1$.



5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \ln x = +\infty.$

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty,$$

non esiste un asintoto obliquo.

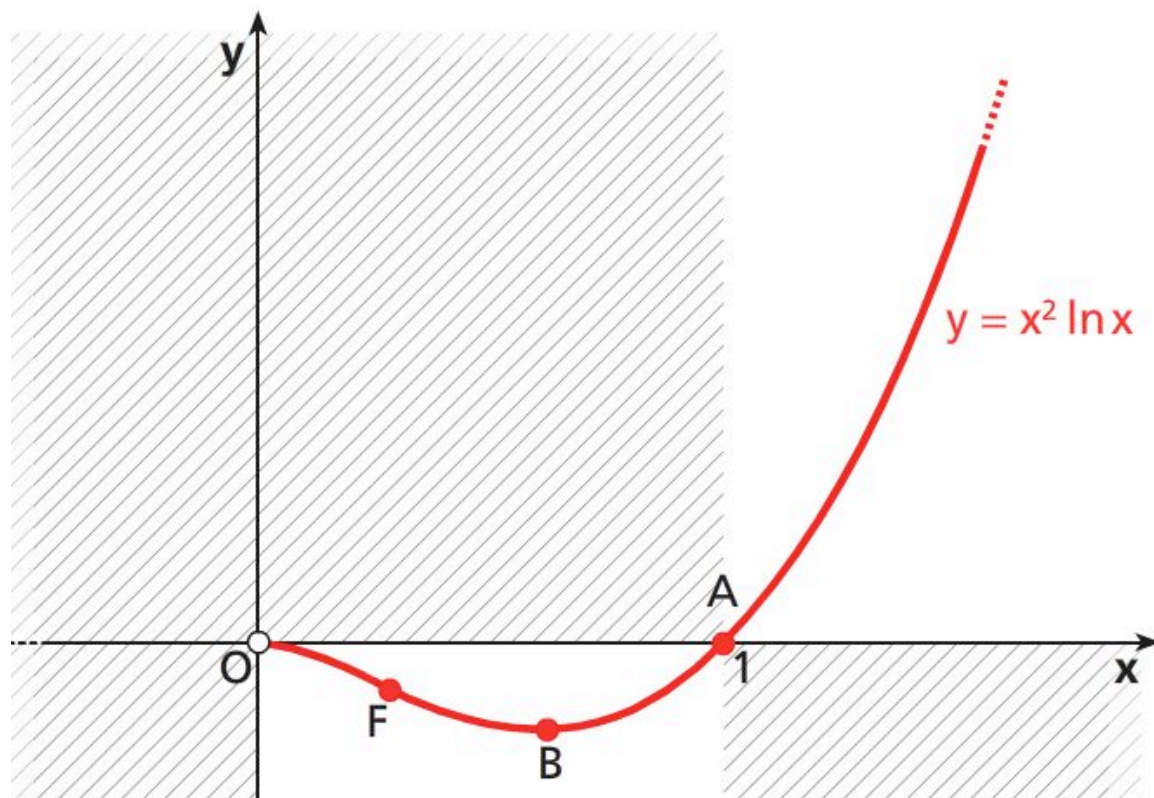
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \cdot \ln x.$

Tale limite presenta una forma indeterminata del tipo $0 \cdot \infty$ eliminabile riscrivendo l'espressione come quoziente e applicando la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2}{2} \right) = 0.$$

La regola di De L'Hospital
sarà studiata
nel capitolo sulle derivate.

6. Grafico
della funzione



Funzioni goniometriche:

$y=\text{sen}A(x)$ $y=\text{cos}A(x)$ $y=\text{tg}A(x)$ $y=\text{cotg}A(x)$...

- Sono quasi sempre periodiche, per cui basta studiarle nel loro periodo
- Se sono periodiche, non presentano asintoti orizzontali o obliqui; possono avere solo asintoti verticali.

ESERCIZIO GUIDA

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = \frac{2 \operatorname{sen} x - 1}{\cos^2 x - 1}, \quad \text{nell'intervallo } [0; 2\pi].$$

1. Determiniamo il dominio della funzione nell'intervallo indicato.

La funzione è fratta, quindi dobbiamo porre il denominatore diverso da 0:

$$\cos^2 x - 1 \neq 0 \rightarrow \cos x \neq \pm 1 \rightarrow D: x \neq 0 \wedge x \neq \pi \wedge x \neq 2\pi.$$

2. Non studiamo se la funzione è pari o dispari

poiché ci limitiamo allo studio nell'intervallo $[0; 2\pi]$.

3. Cerchiamo soltanto le intersezioni con l'asse delle ascisse perché quella con l'asse delle ordinate $x = 0$ è esclusa dal dominio.

Asse x :

$$\begin{cases} y = \frac{2 \operatorname{sen} x - 1}{\cos^2 x - 1} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5}{6}\pi \\ y = 0 \end{cases}$$

I punti di intersezione con l'asse x sono:

$$A\left(\frac{\pi}{6}; 0\right), \quad B\left(\frac{5}{6}\pi; 0\right).$$

4. Studiamo il segno della funzione:

$$\frac{2 \operatorname{sen} x - 1}{\cos^2 x - 1} > 0;$$

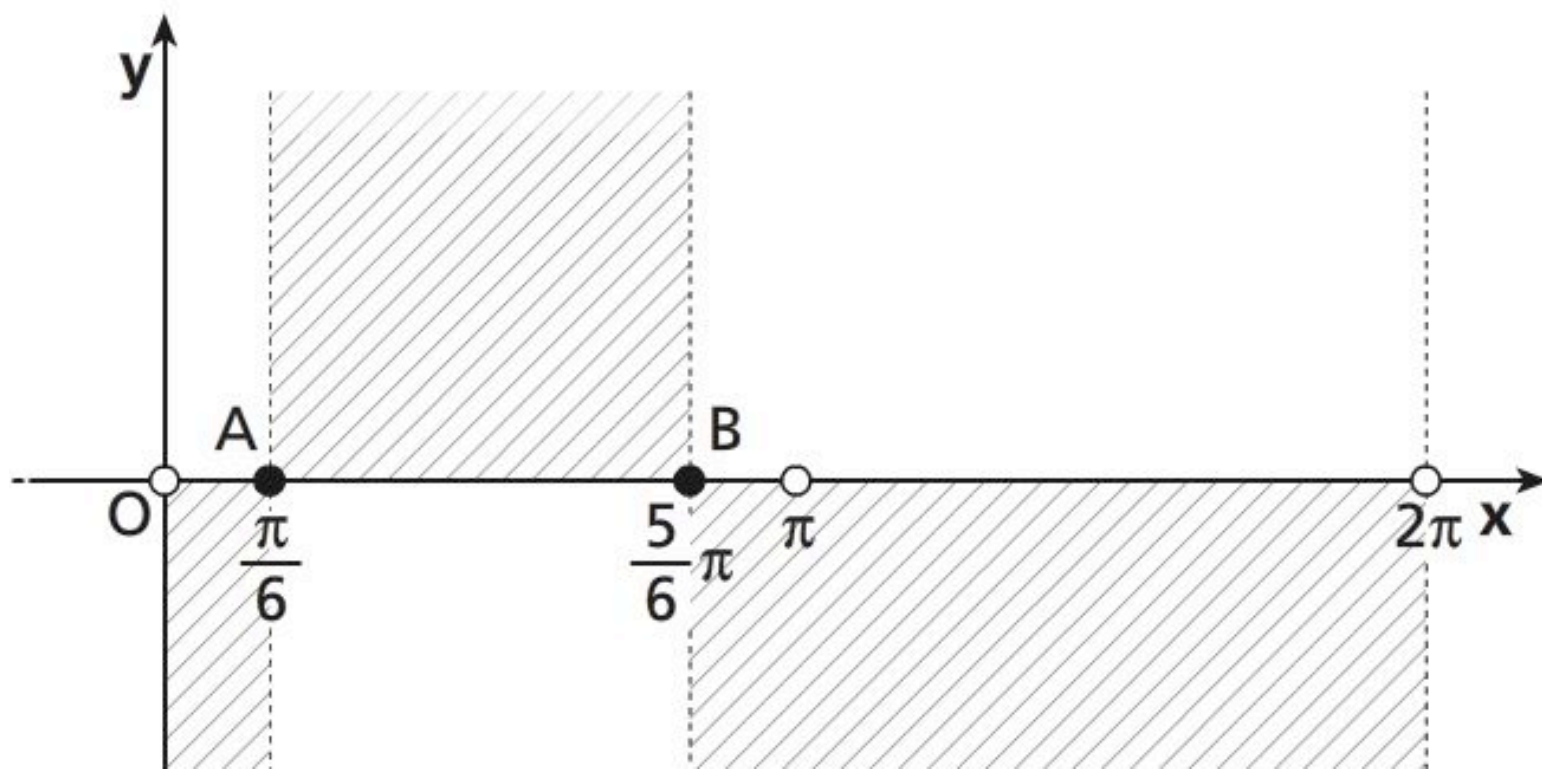
$$N > 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} x - 1 > 0 \rightarrow \frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi;$$

$$D > 0 \rightarrow \cos^2 x - 1 > 0 \rightarrow \text{nessun valore di } x.$$

La funzione è positiva quando il numeratore è negativo, ossia per:

$$0 < x < \frac{\pi}{6} \vee \frac{5}{6}\pi < x < \pi \vee \pi < x < 2\pi.$$

Rappresentiamo i risultati fin qui ottenuti su un piano cartesiano, tratteggiando le zone del piano in cui la funzione non è definita.

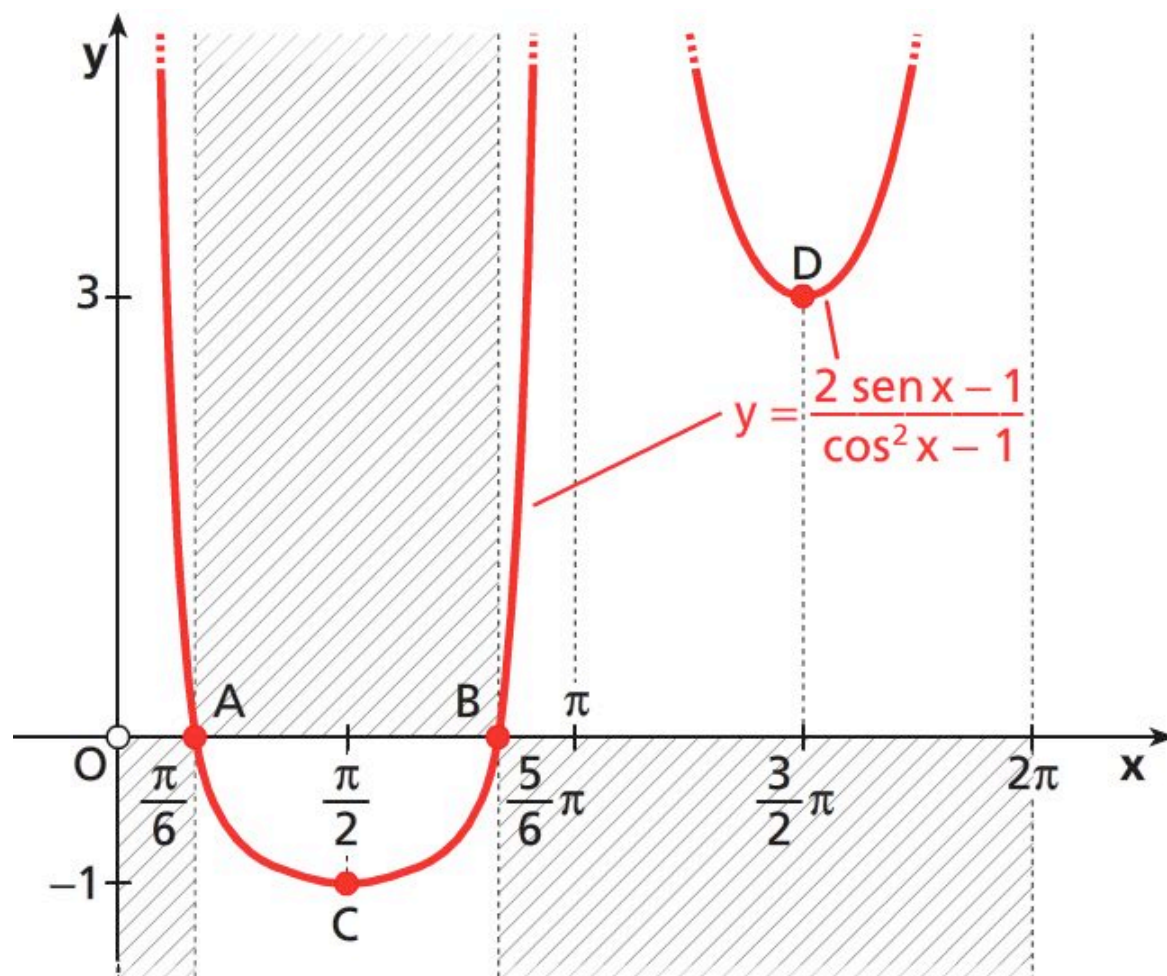


5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin x - 1}{\cos^2 x - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{2 \sin x - 1}{\cos^2 x - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} \frac{2 \sin x - 1}{\cos^2 x - 1} = +\infty.$$

Siamo in presenza di tre asintoti verticali: $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

6. Grafico
della funzione



ESERCIZIO GUIDA

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione: $y = \operatorname{arctg} \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

1. Determiniamo il dominio della funzione.

Poiché il denominatore $1 + x^2$ è non nullo per ogni x reale:

$$D: \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Cerchiamo eventuali simmetrie:

$$f(-x) = \operatorname{arctg} \frac{1 - (-x)^2}{1 + (-x)^2} = f(x).$$

Poiché $f(-x) = f(x)$, la funzione è pari.

Il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y .

3. Determiniamo le intersezioni con gli assi.

Asse y :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \operatorname{arctg} \frac{1-x^2}{1+x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \operatorname{arctg} 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Asse x :

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \operatorname{arctg} \frac{1-x^2}{1+x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{1-x^2}{1+x^2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 1-x^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \pm 1 \end{cases}$$

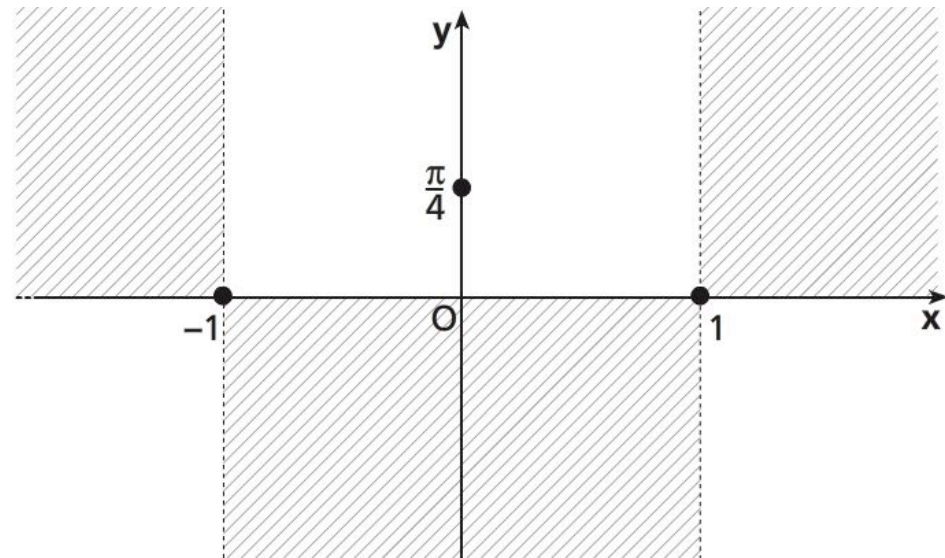
Il punto di intersezione con l'asse y è $A\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$; i punti di intersezione con l'asse x sono $B(-1; 0)$ e $C(1; 0)$.

4. Studiamo il segno della funzione:

$$\operatorname{arctg} \frac{1-x^2}{1+x^2} > 0 \rightarrow \frac{1-x^2}{1+x^2} > 0$$

$$1-x^2 > 0 \quad \text{per} \quad -1 < x < 1$$

$$1+x^2 > 0 \quad \text{per} \quad \text{ogni } x.$$

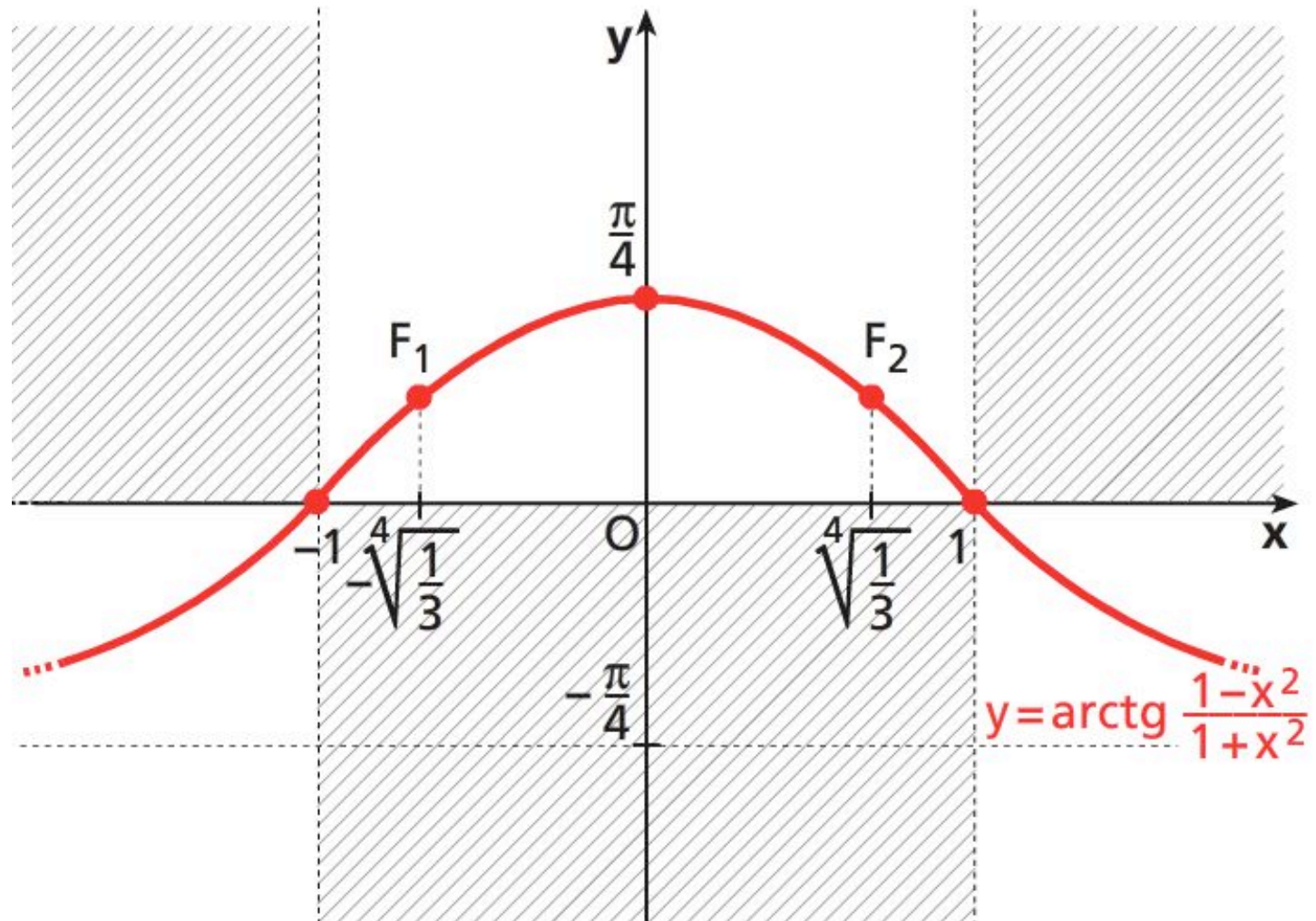


La funzione ha quindi lo stesso segno di $1 - x^2$.

5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} \rightarrow y = -\frac{\pi}{4} \text{ è un asintoto orizzontale.}$$

6. Grafico della funzione



Funzioni valore assoluto:

$$y = |A(x)|$$

- Non ci sono osservazioni particolari da fare, se non ricordare la definizione di valore assoluto.

ESERCIZIO GUIDA

Studiamo e rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = \frac{x^2 - 1}{|x - 2| + 3x}.$$

Scriviamo la funzione come:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{4x - 2} & \text{se } x \geq 2 \\ \frac{x^2 - 1}{2x + 2} & \text{se } x < 2 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{4x - 2} & \text{se } x \geq 2 \\ \frac{x - 1}{2} & \text{se } x < 2 \wedge x \neq -1 \end{cases}$$

Studiamo $f_1(x) = \frac{x^2 - 1}{4x - 2}$ ed evidenziamo poi, nel grafico, l'arco che si ottiene per $x \geq 2$.

1. Determiniamo il dominio di $y = \frac{x^2 - 1}{4x - 2}$. Il denominatore deve essere non nullo, quindi:

$$D: x \neq \frac{1}{2}.$$

2. Cerchiamo eventuali simmetrie:

$$f_1(-x) = \frac{x^2 - 1}{-4x - 2} \neq \pm f_1(x) \rightarrow \text{la funzione non è né pari né dispari.}$$

3. Determiniamo le intersezioni con gli assi.

$$\text{Asse } y: \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{Asse } x: \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{x^2 - 1}{4x - 2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \pm 1 \end{cases}$$

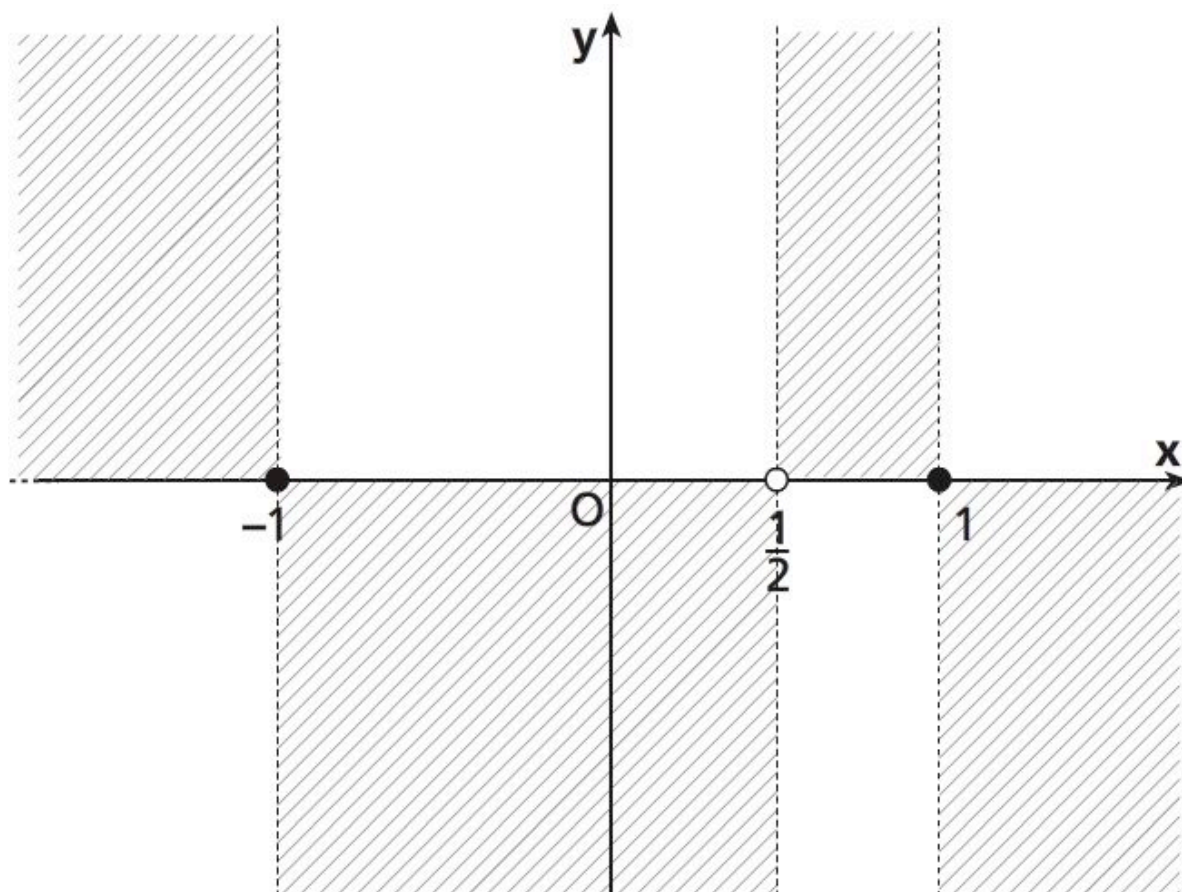
I punti di intersezione sono $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$, $B(-1; 0)$, $C(1; 0)$.

4. Studiamo il segno della funzione:

$$\frac{x^2 - 1}{4x - 2} > 0 \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \text{ per } x < -1 \vee x > 1 \\ 4x - 2 > 0 \text{ per } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

	...	-1		$\frac{1}{2}$		1		...
$x^2 - 1$	+	0	-		-	0	+	
$4x - 2$	-		-	0	+		+	
y	-	0	+	0	-	0	+	

Rappresentiamo i risultati fin qui ottenuti su un piano cartesiano, tratteggiando le zone del piano in cui la funzione non è definita.



5. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$;

poiché il grado del numeratore supera di 1 quello del denominatore, esiste un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{4},$$

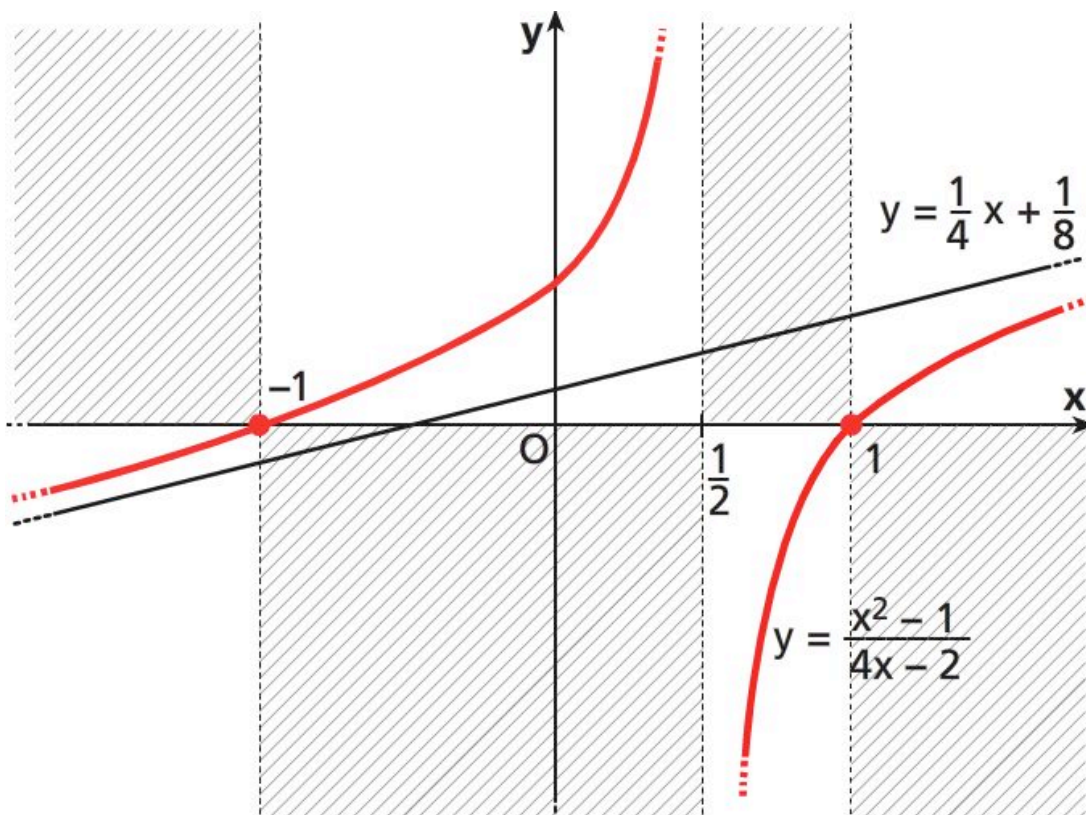
$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{4x - 2} - \frac{1}{4}x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - 2 - 2x^2 + x}{4(2x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - 2}{4(2x - 1)} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

L'asintoto obliquo ha equazione:

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}.$$

- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^{\pm}} f(x) = \mp \infty \rightarrow x = \frac{1}{2}$ è un asintoto verticale.

6. Grafico della funzione



Tracciamo il grafico completo della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 2| + 3x}, \text{ considerando il gra-}$$

fico della figura c per $x \geq 2$ e disegnando

il grafico della retta $y = \frac{x - 1}{2}$ per

$x < 2 \wedge x \neq -1$ (figura d).

Quindi, la retta è privata del punto $(-1; -1)$.

