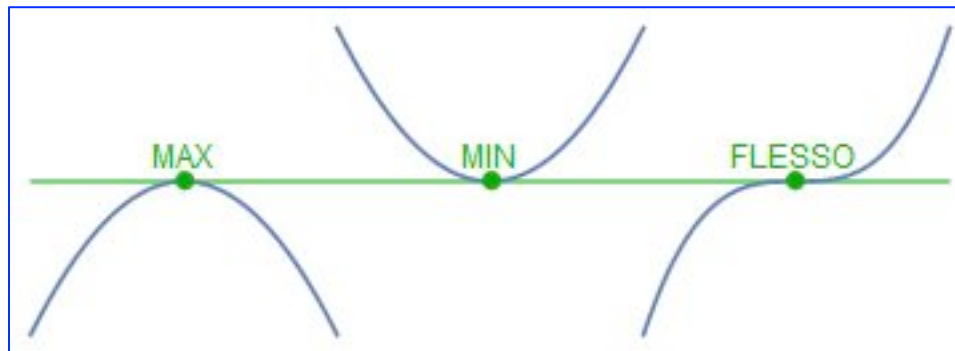


DOCENTE: Vincenzo Pappalardo
MATERIA: Matematica

MASSIMI, MINIMI, FLESSI



DEFINIZIONI

I massimi e i minimi assoluti

DEFINIZIONE

Massimo assoluto, minimo assoluto

Data la funzione $y = f(x)$, definita nell'intervallo I , chiamiamo:

- massimo assoluto di $f(x)$, se esiste, il massimo M dei valori assunti dalla funzione in I , cioè $M = f(x_0)$, $x_0 \in I \wedge M \geq f(x)$, $\forall x \in I$;
- minimo assoluto di $f(x)$, se esiste, il minimo m dei valori assunti dalla funzione in I , cioè $m = f(x_1)$, $x_1 \in I \wedge m \leq f(x)$, $\forall x \in I$.

M e m , se esistono, sono unici.

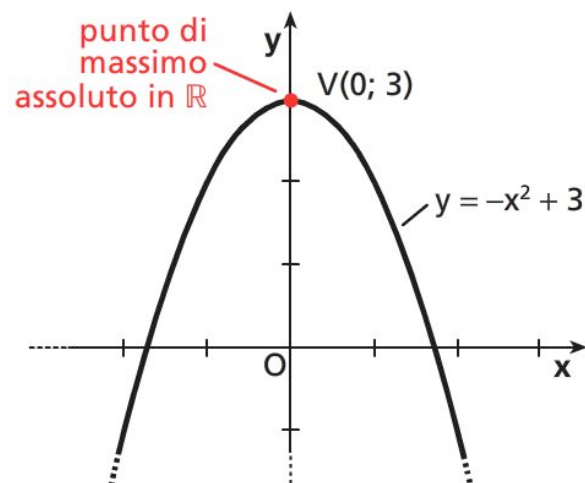
Un punto x_0 di I tale che $f(x_0) = M$ è detto **punto di massimo assoluto**.

Un punto x_0 di I tale che $f(x_0) = m$ è detto **punto di minimo assoluto**.

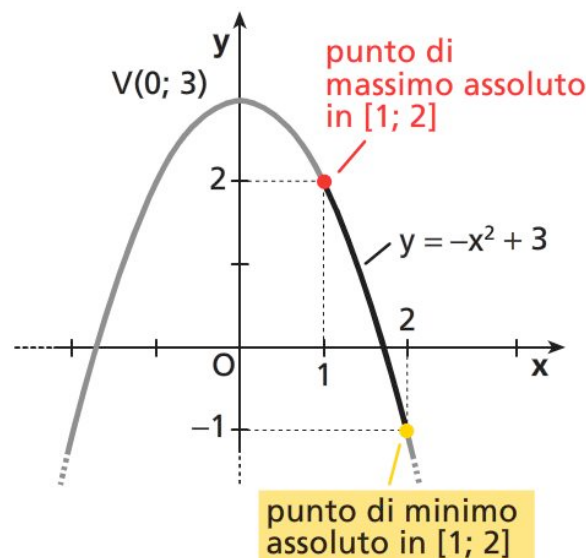
ESEMPIO

Consideriamo la funzione $y = -x^2 + 3$, definita $\forall x \in \mathbb{R}$, il cui grafico è una parabola con la concavità rivolta verso il basso. Il vertice $V(0; 3)$ è il punto di massimo assoluto (figura 1a). 3 è il massimo assoluto della funzione in $\mathbb{R}$: $3 \geq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Non esiste invece il minimo assoluto.

Consideriamo la stessa funzione definita in $[1; 2]$ (figura 1b). In questo intervallo, poiché la funzione è decrescente, il massimo assoluto si ha nel primo estremo, $M = f(1) = 2$, mentre il minimo assoluto si ha nel secondo estremo, $m = f(2) = -1$.



a. Il massimo assoluto della funzione $y = -x^2 + 3$, con dominio $\mathbb{R}$, è 3 (l'ordinata del vertice). Non esiste il minimo.



b. Se per la stessa funzione consideriamo come dominio $[1; 2]$, il massimo assoluto è $2 = f(1)$ e il minimo assoluto è $-1 = f(2)$.

● Ricordiamo che, per il **teorema di Weierstrass**, se una funzione è continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$, allora essa assume, in tale intervallo, il massimo assoluto e il minimo assoluto.

I massimi e i minimi relativi

Nelle prossime definizioni di massimo e minimo *relativi*, l'intorno del punto x_0 deve avere le seguenti caratteristiche:

- se x_0 è interno all'intervallo $[a; b]$, l'intorno considerato di x_0 deve essere completo;
- se x_0 coincide con a , l'intorno di x_0 è destro;
- se x_0 coincide con b , l'intorno di x_0 è sinistro.

DEFINIZIONE

Massimo relativo

Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo I , il punto x_0 di I si dice di massimo relativo se esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che $f(x_0)$ è maggiore o uguale al valore della funzione per ogni x dell'intorno I_{x_0} .

$f(x_0)$ si dice massimo relativo della funzione in I .

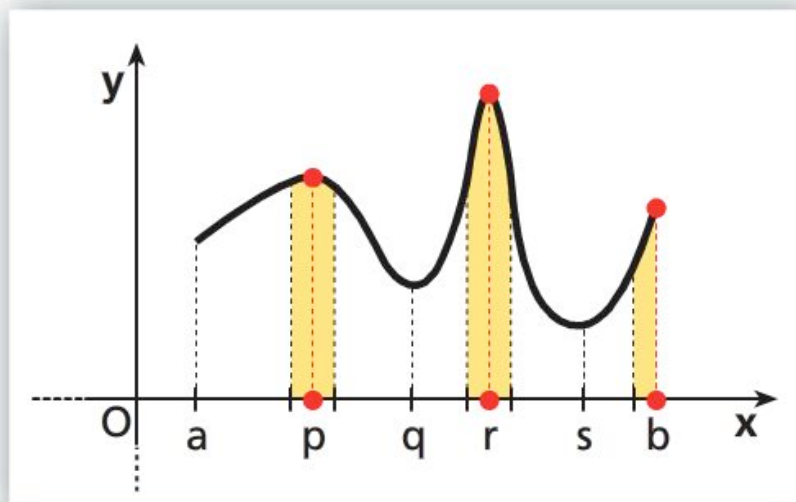
$y = f(x)$ definita in I

x_0 punto di massimo relativo se

$$\exists I_{x_0}: f(x_0) \geq f(x), \forall x \in I_{x_0}$$

$f(x_0)$ massimo relativo

ESEMPIO



◀ **Figura 2** p, r e b sono punti di massimo relativo nell'intervallo $[a; b]$. Il punto r è anche di massimo assoluto.

Osservando il grafico della figura 2, possiamo dire che p è un punto di massimo relativo perché esiste un intorno di p tale che, per tutti gli x che gli appartengono, vale la relazione $f(p) \geq f(x)$. Anche r è un punto di massimo relativo. Fra gli estremi dell'intervallo, b è un punto di massimo relativo; inoltre, r è anche il punto di massimo assoluto.

Dalla definizione e dall'esempio comprendiamo che un punto di massimo assoluto è anche punto di massimo relativo, mentre non è detto che sia vero l'inverso.

DEFINIZIONE

Minimo relativo

Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo I , il punto x_0 di I si dice di minimo relativo se esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che $f(x_0)$ è minore o uguale al valore della funzione per ogni x dell'intorno I_{x_0} .

$f(x_0)$ si dice minimo relativo della funzione in I .

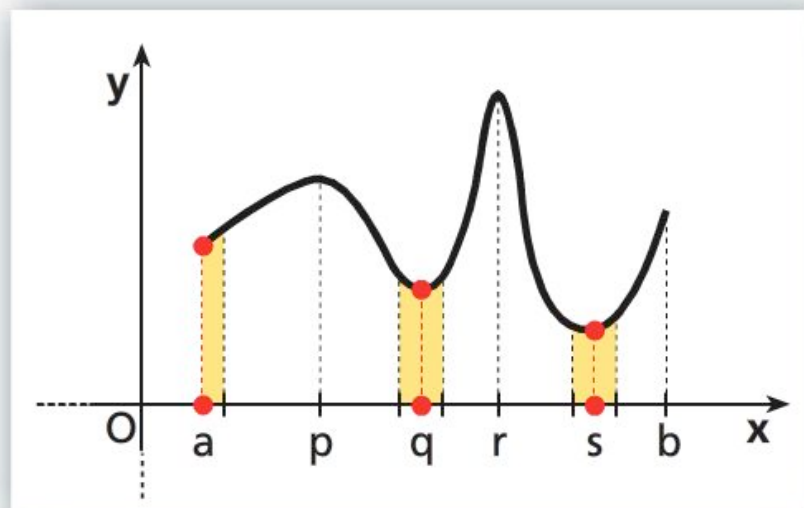
$y = f(x)$ definita in I

x_0 punto di minimo relativo se

$$\exists I_{x_0}: f(x_0) \leq f(x), \forall x \in I_{x_0}$$

$f(x_0)$ minimo relativo

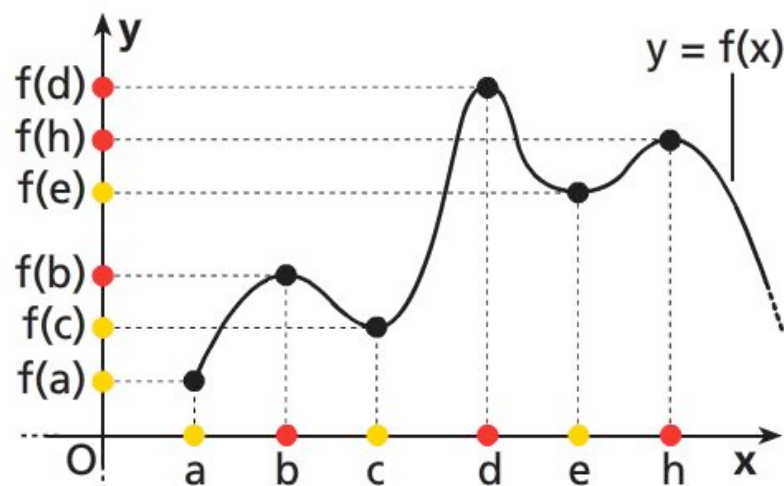
ESEMPIO



◀ **Figura 3** Nell'intervallo $[a; b]$, a , q e s sono punti di minimo relativo. Il punto s è anche di minimo assoluto.

● Un punto di minimo assoluto è anche punto di minimo relativo, mentre non è detto che sia vero il viceversa.

Un punto di un intervallo che sia di massimo relativo viene anche detto **massimante**; un punto di minimo relativo è detto **minimante**. Un punto di un intervallo è detto **estremante** se è massimante o minimante. Il corrispondente valore della funzione è detto **estremo relativo**.



◀ **Figura 4** I punti a, b, c, d, e, h sono estremanti, mentre $f(a), f(b), f(c), f(d), f(e), f(h)$ sono estremi relativi della funzione. Notiamo che un minimo relativo può essere maggiore di un massimo relativo. Per esempio, $f(e) > f(b)$. Osserviamo inoltre che la funzione ha dei minimi relativi ma non ha il minimo assoluto, in quanto è definita in un intervallo aperto.

La concavità

Siano date la funzione $y = f(x)$, definita e derivabile nell'intervallo I , e la retta di equazione $y = t(x)$, tangente al grafico di $f(x)$ nel suo punto di ascissa x_0 , interno all'intervallo I .

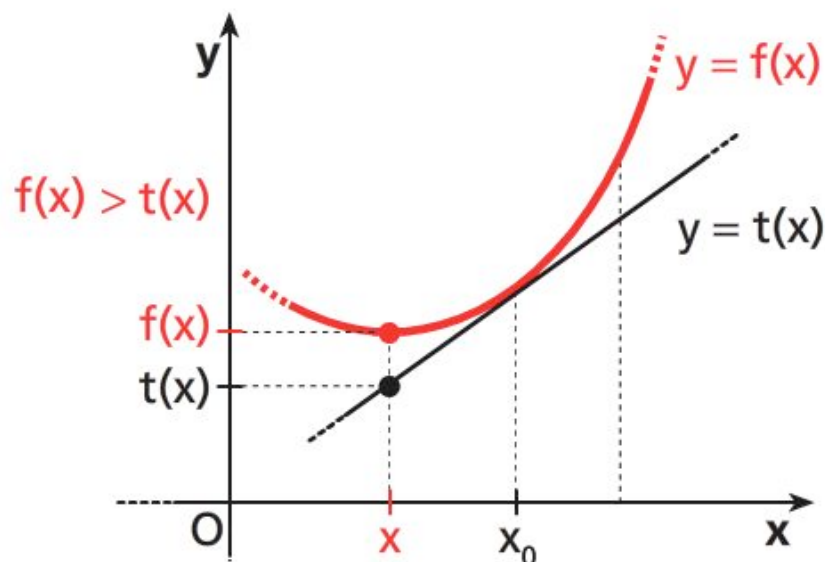
DEFINIZIONE

Concavità verso l'alto

Si dice che in x_0 il grafico della funzione $f(x)$ ha la concavità rivolta verso il semiasse positivo delle y (verso l'alto) se esiste un intorno completo I_{x_0} di x_0 tale che, per ogni x appartenente all'intorno e diverso da x_0 , l'ordinata del punto di ascissa x appartenente al grafico è maggiore di quella del punto appartenente alla tangente t e avente la stessa ascissa, ossia:

$$f(x) > t(x) \quad \forall x \in I_{x_0} \wedge x \neq x_0.$$

● Poiché $f(x)$ è derivabile in I , la retta tangente esiste in ogni punto.



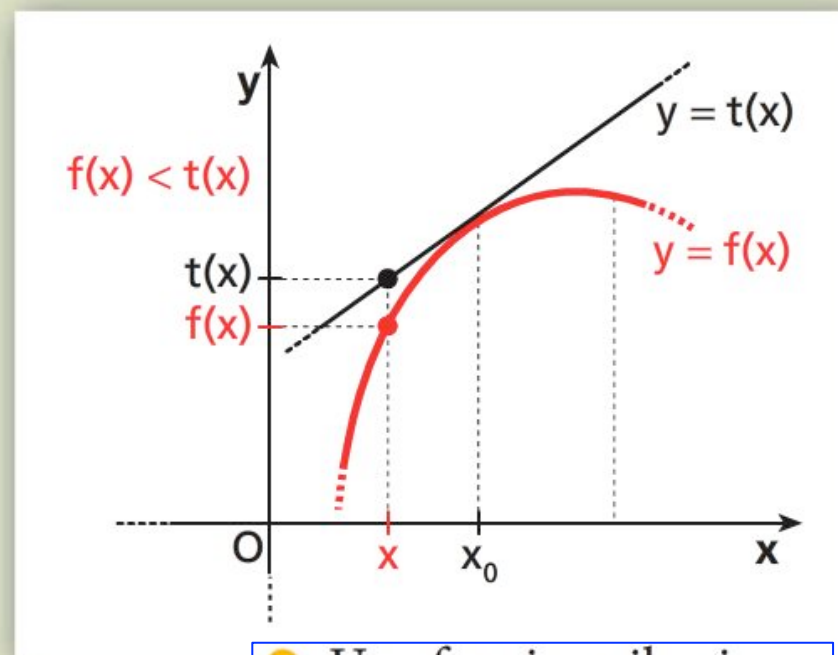
● Una funzione il cui grafico rivolge la concavità verso l'alto si dice anche **convessa**.

DEFINIZIONE

Concavità verso il basso

Si dice che in x_0 il grafico della funzione $f(x)$ ha la concavità rivolta verso il semiasse negativo delle y (verso il basso) se esiste un intorno completo I_{x_0} di x_0 tale che, per ogni x appartenente all'intorno e diverso da x_0 , l'ordinata del punto di ascissa x appartenente al grafico è minore di quella del punto appartenente alla tangente t e avente la stessa ascissa, ossia:

$$f(x) < t(x) \quad \forall x \in I_{x_0} \wedge x \neq x_0.$$



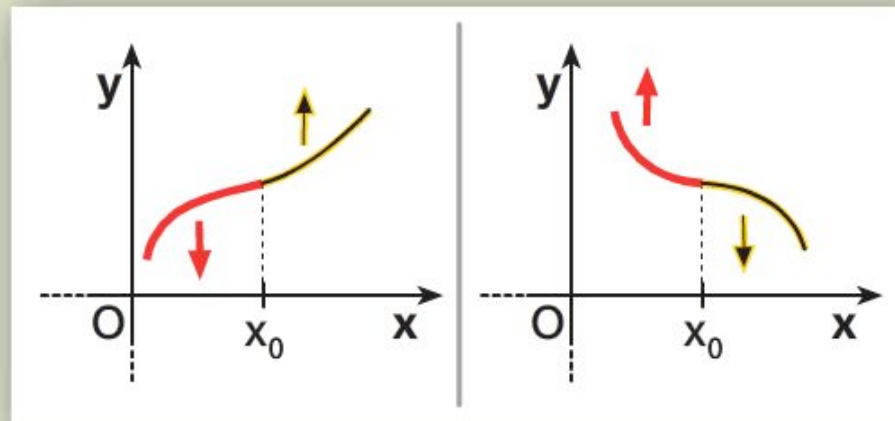
● Una funzione il cui grafico rivolge la concavità verso il basso si dice anche **concava**.

Dato un intervallo I , diciamo che il grafico ha la concavità verso l'alto (oppure verso il basso) **nell'intervallo**, se ha la concavità verso l'alto (o verso il basso) in ogni punto interno dell'intervallo.

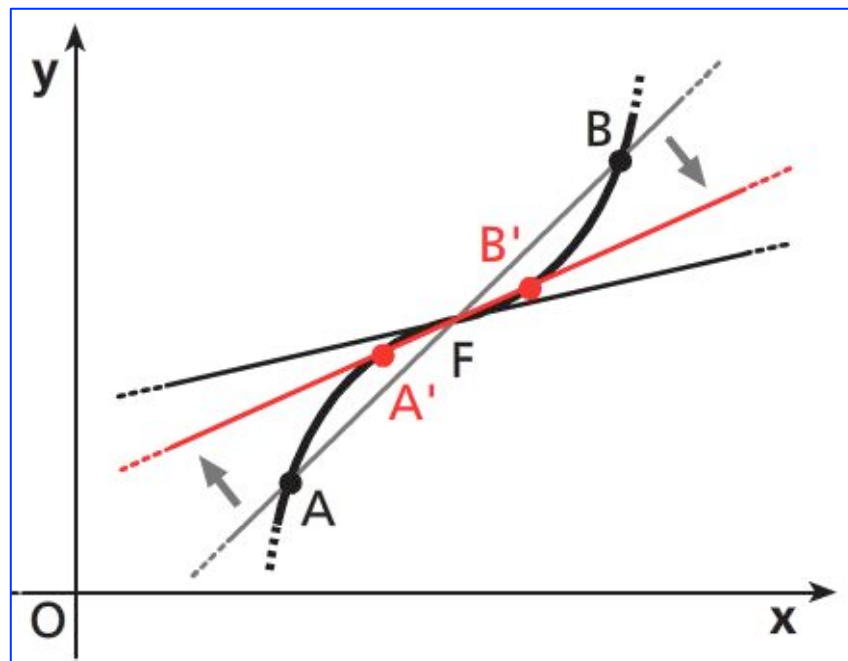
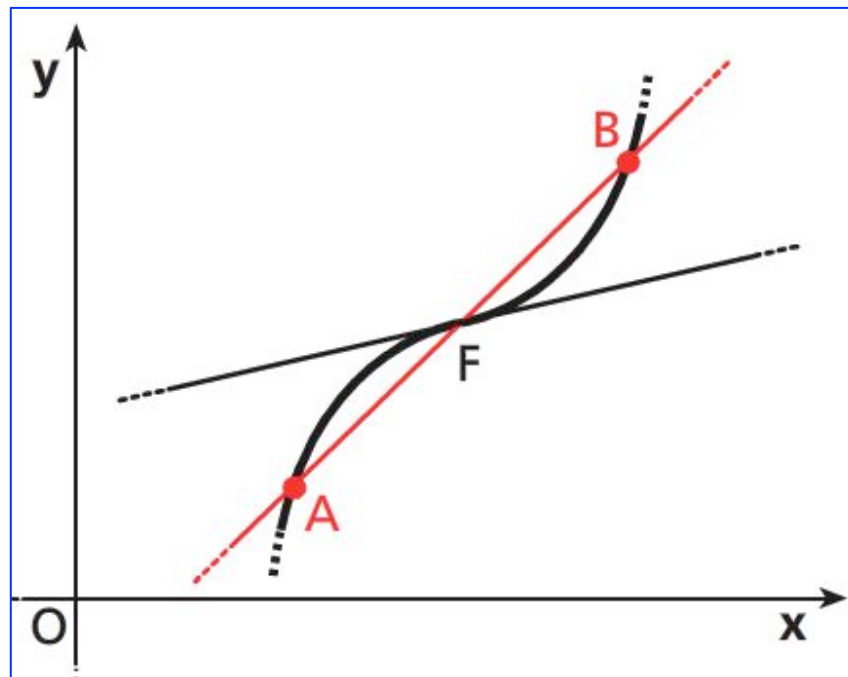
I flessi

DEFINIZIONE

Data la funzione $y = f(x)$ definita e continua nell'intervallo I , e derivabile in I (escluso al più x_0), si dice che presenta in x_0 , interno a I , un punto di flesso se in tale punto il grafico di $f(x)$ cambia concavità.



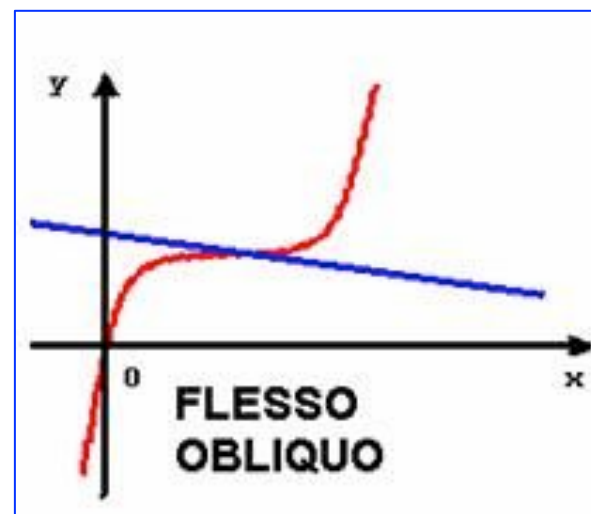
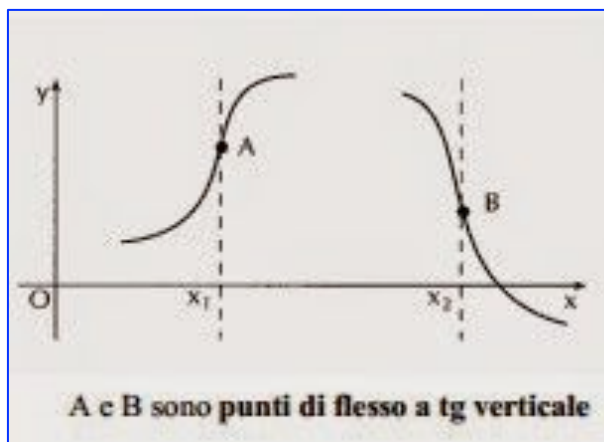
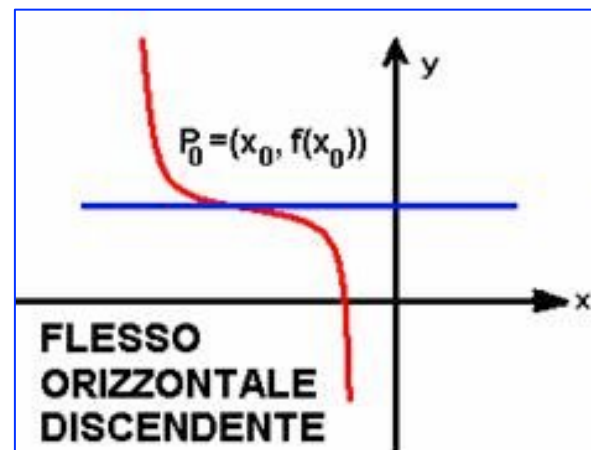
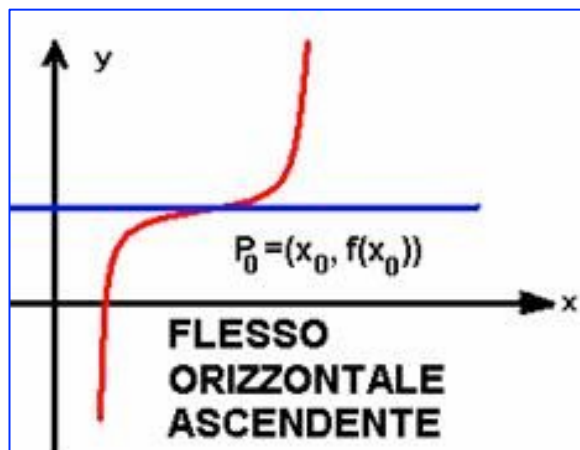
Se la funzione è derivabile nel punto di flesso, esiste la tangente alla curva in tale punto ed è obliqua o parallela all'asse x ; se la derivata è infinita, la tangente è parallela all'asse y . La retta tangente ha la caratteristica di attraversare la curva. Inoltre, il punto di tangenza è un «punto triplo», come si nota nella figura 5.



◀ **Figura 5** Facendo tendere la secante AB passante per F alla posizione della tangente, i punti A e B si avvicinano sempre più al punto F . Il punto F può quindi essere considerato come un punto in cui la tangente ha tre intersezioni coincidenti con la curva.

Se in un punto di flesso esiste la retta tangente, il flesso viene detto:

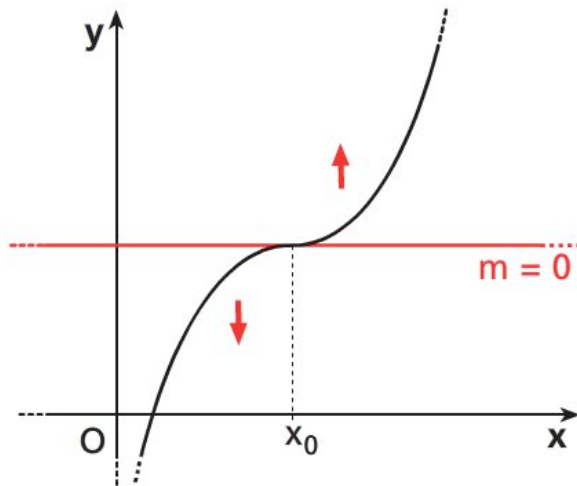
- **orizzontale** se la tangente nel punto di flesso è parallela all'asse x ;
- **verticale** se la tangente è parallela all'asse y ;
- **obliquo** se la tangente non è parallela a uno degli assi.



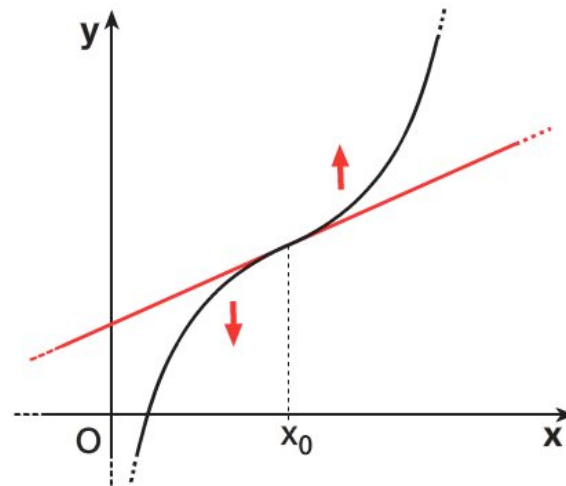
Se esiste un intorno del punto di flesso in cui il grafico della funzione ha:

- concavità verso il basso a sinistra del punto di flesso e verso l'alto a destra, il flesso è **ascendente**;
- concavità verso l'alto a sinistra del punto di flesso e verso il basso a destra, il flesso è **discendente**.

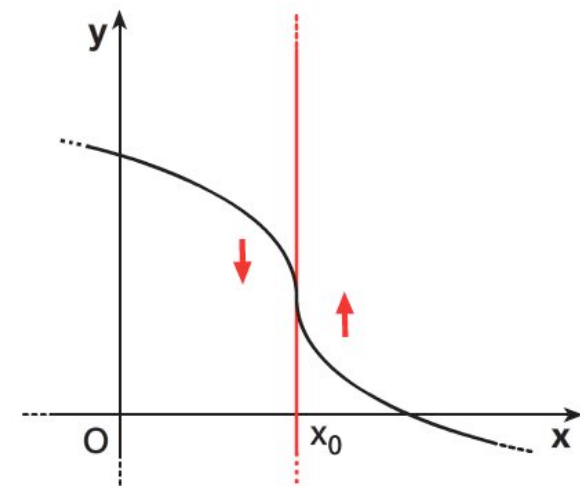
Diversi tipi di flesso ascendente



a. x_0 è punto di flesso orizzontale ascendente.

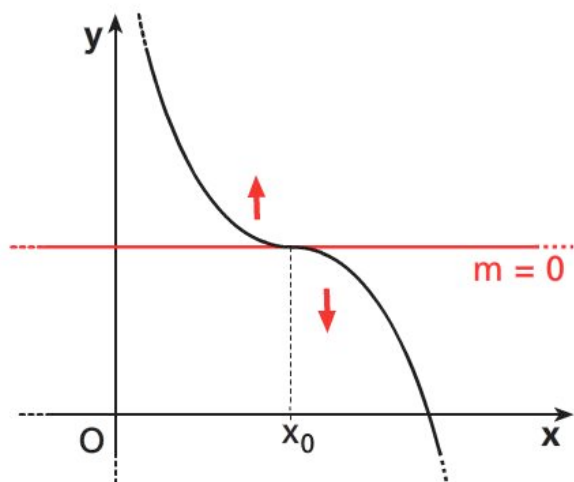


b. x_0 è punto di flesso obliquo ascendente.

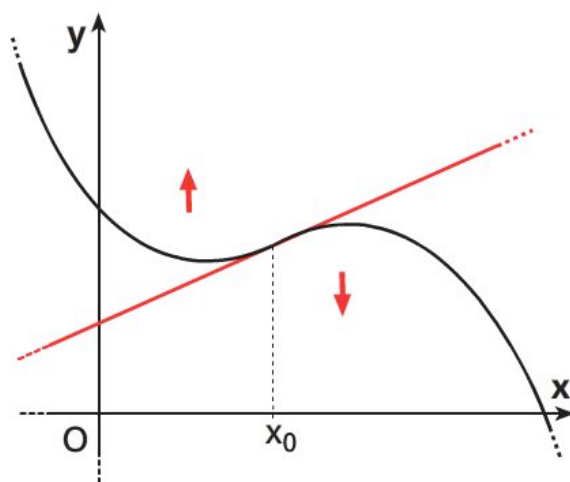


c. x_0 è punto di flesso verticale ascendente.

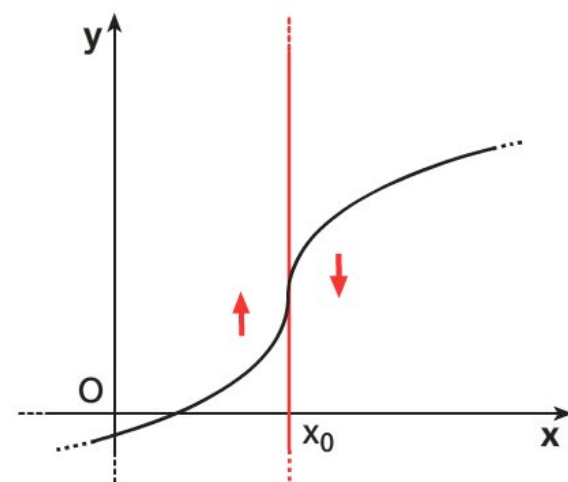
Diversi tipi di flesso discendente



a. x_0 è punto di flesso orizzontale discendente.



b. x_0 è punto di flesso obliquo discendente.



c. x_0 è punto di flesso verticale discendente.

Massimi, minimi, flessi
orizzontali e derivata prima

■ I punti di massimo o di minimo relativo

TEOREMA

Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$, se $f(x)$ ha un massimo o un minimo relativo nel punto x_0 , *interno* ad $[a; b]$, la derivata della funzione in quel punto si annulla, cioè: $f'(x_0) = 0$.

DIMOSTRAZIONE

Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo relativo. Allora, per definizione, esiste un intorno completo I_{x_0} di x_0 tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I_{x_0},$$

ossia:

$$f(x_0 + h) \leq f(x_0) \quad \forall h \in \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad x_0 + h \in I_{x_0}.$$

Quindi si ha:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0, \quad \text{per } h > 0;$$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0, \quad \text{per } h < 0.$$

● Il teorema afferma che i punti di massimo e minimo relativi di una funzione derivabile, interni all'intervallo di definizione, sono punti stazionari.

Un punto $x = c$ è **stazionario** per una funzione derivabile $f(x)$ se $f'(c) = 0$.

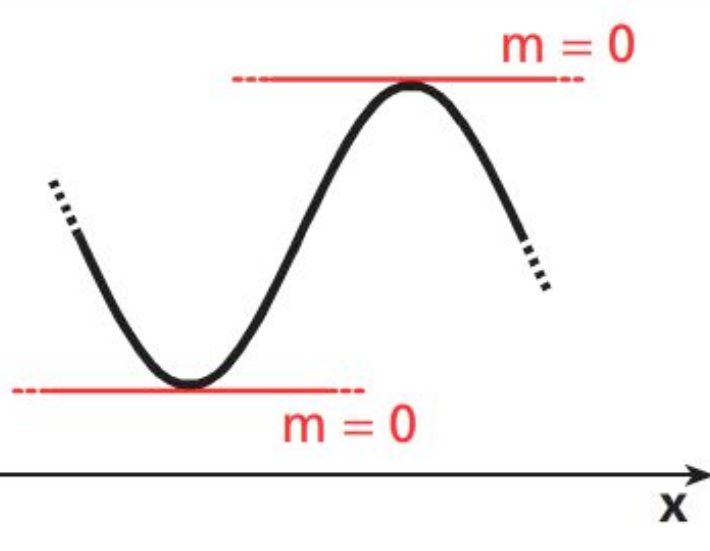
Per l'inverso del teorema della permanenza del segno, risulta:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Poiché $f(x)$ è derivabile in x_0 , entrambi i limiti coincidono con $f'(x_0)$. Quindi:

$$f'(x_0) \leq 0 \quad \text{e} \quad f'(x_0) \geq 0 \quad \rightarrow \quad f'(x_0) = 0.$$

Con un ragionamento analogo si dimostra il caso in cui x_0 è un punto di minimo relativo.



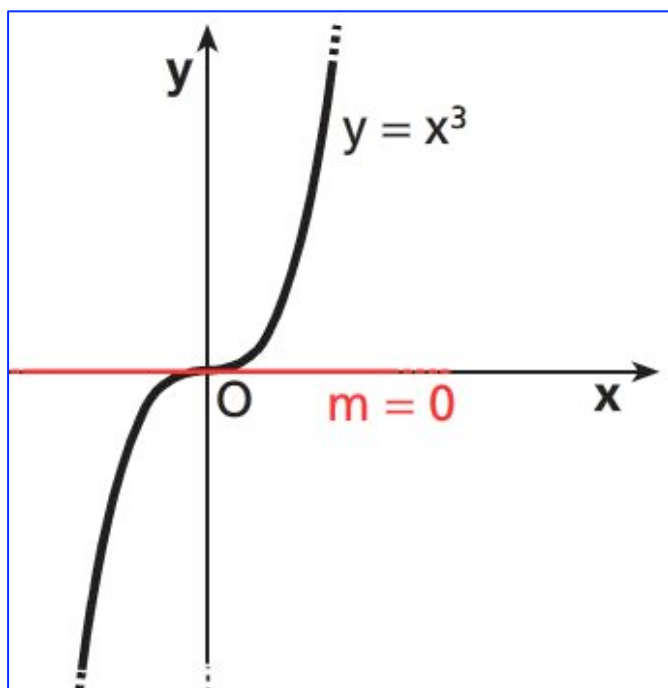
Per il significato geometrico della derivata, dal teorema precedente si deduce che la tangente in un punto del grafico di massimo o minimo relativo (se la tangente esiste e il punto non è un estremo dell'intervallo) è parallela all'asse x

➤ osservazioni

● Il teorema precedente fornisce una *condizione necessaria* per l'esistenza di un massimo o di un minimo relativo in un punto interno ad $[a; b]$, ma tale condizione *non* è *sufficiente*.

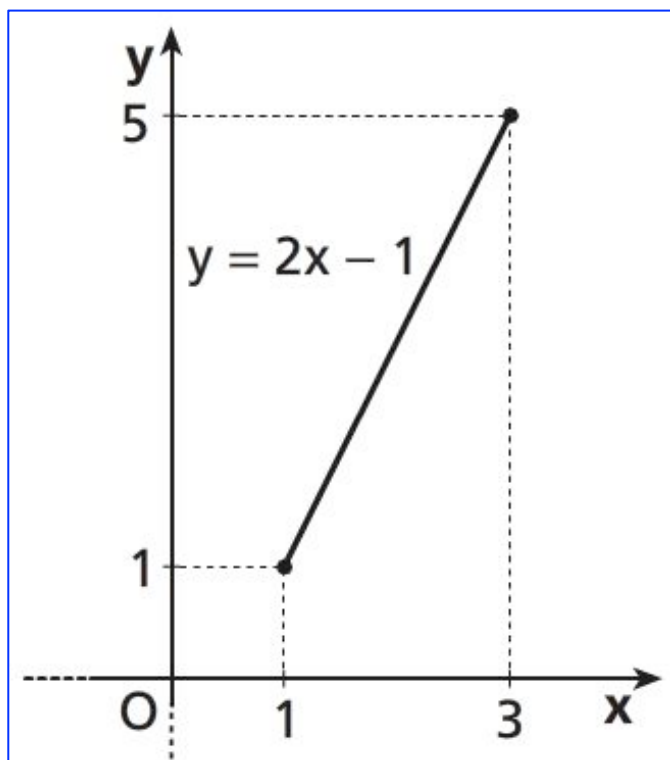
Può infatti accadere che in un punto la retta tangente al grafico della funzione sia parallela all'asse x , ma che in quel punto non ci sia né un massimo né un minimo.

Per esempio, consideriamo la funzione $y = x^3$ e il suo grafico (figura 9). Calcoliamo la derivata della funzione: $y' = 3x^2$.

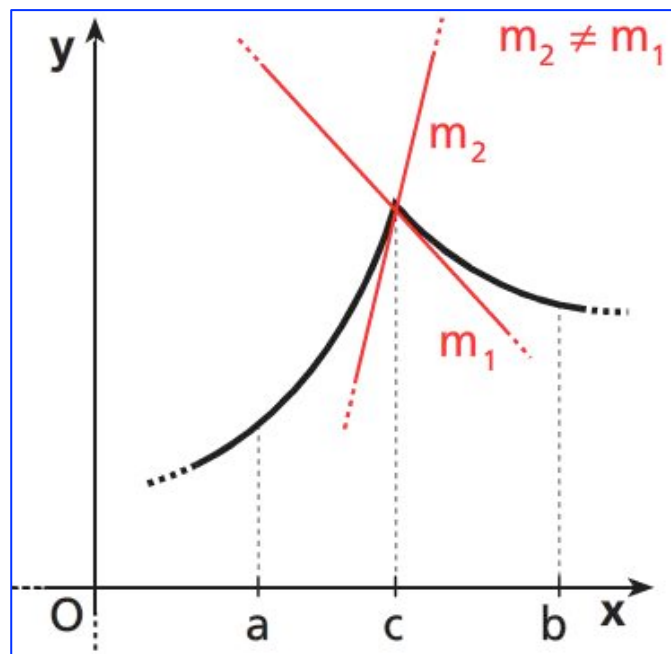


La derivata prima si annulla per $x = 0$. D'altra parte, poiché la derivata è positiva (ossia la funzione è crescente) sia a destra sia a sinistra di 0, in tale punto non può esserci né un massimo né un minimo.

- Il teorema parla dei punti *interni* all'intervallo di definizione. Come si vede nell'esempio della figura 10, per un estremo dell'intervallo la condizione del teorema può non essere neppure necessaria, ossia un estremo può essere un punto di massimo o minimo con $f'(x) \neq 0$ e quindi con tangente non parallela all'asse x .

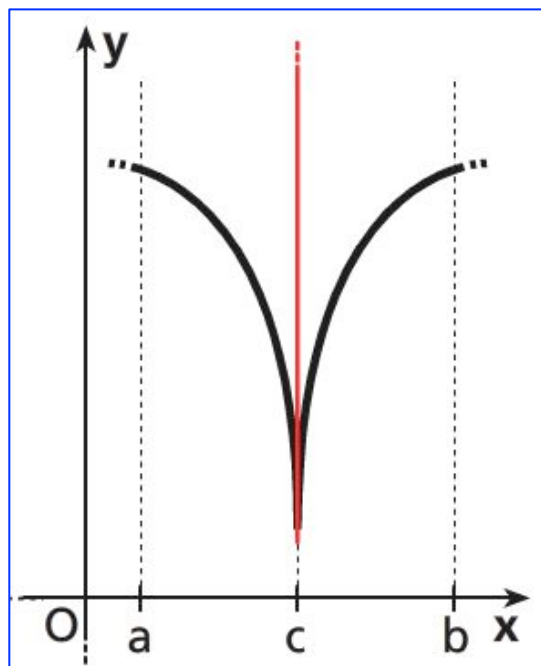


La funzione $y = 2x - 1$ è rappresentata da una retta con coefficiente angolare 2. La tangente al grafico coincide con la retta stessa in ogni suo punto e, in particolare, in $x = 1$ e in $x = 3$, estremi dell'intervallo considerato. In 1 c'è un minimo e in 3 un massimo, ma la tangente non è orizzontale.



Anche quando viene a mancare l'ipotesi della derivabilità in tutti i punti interni dell'intervallo, la condizione può non essere necessaria (figure 11 e 12).

◀ **Figura 11** In $[a; b]$ il punto c è punto di massimo della funzione $y = f(x)$. Le tangenti alla curva, considerando intornoi destri e sinistri di c , sono diverse e quindi $f'_+(c) \neq f'_-(c)$. Nel punto c la derivata non esiste, quindi non può essere $f'(c) = 0$.



◀ **Figura 12** In questo caso c è un punto di minimo relativo, ma la tangente è parallela all'asse y e la derivata non esiste.

➤ conclusione

Possiamo concludere che, data una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo $[a; b]$, i possibili estremanti vanno ricercati tra:

- i punti in cui $f'(x) = 0$;
- gli estremi dell'intervallo;
- i punti in cui la funzione è continua ma non derivabile.

■ La ricerca dei massimi e minimi relativi con la derivata prima

Esaminiamo ora una condizione sufficiente per l'esistenza di un massimo o minimo relativo in un punto interno a un intervallo.

TEOREMA

La funzione $y = f(x)$ sia definita e continua in un intorno completo I_{x_0} del punto x_0 e derivabile nello stesso intorno per ogni $x \neq x_0$.

- a) Se per ogni x dell'intorno si ha $f'(x) > 0$ quando $x < x_0$ e $f'(x) < 0$ quando $x > x_0$, allora x_0 è un punto di massimo relativo.
- b) Se per ogni x dell'intorno si ha $f'(x) < 0$ quando $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ quando $x > x_0$, allora x_0 è un punto di minimo relativo.
- c) Se il segno della derivata prima è lo stesso per ogni $x \neq x_0$ dell'intorno, allora x_0 non è un punto estremante.

DIMOSTRAZIONE

a) Per $x < x_0$ si ha $f'(x) > 0$, quindi $f(x)$ è crescente (per il teorema delle funzioni crescenti e decrescenti); pertanto, se $x < x_0$, $f(x) < f(x_0)$.

Per $x > x_0$ si ha $f'(x) < 0$, quindi $f(x)$ è decrescente; pertanto, se $x > x_0$, $f(x) < f(x_0)$.

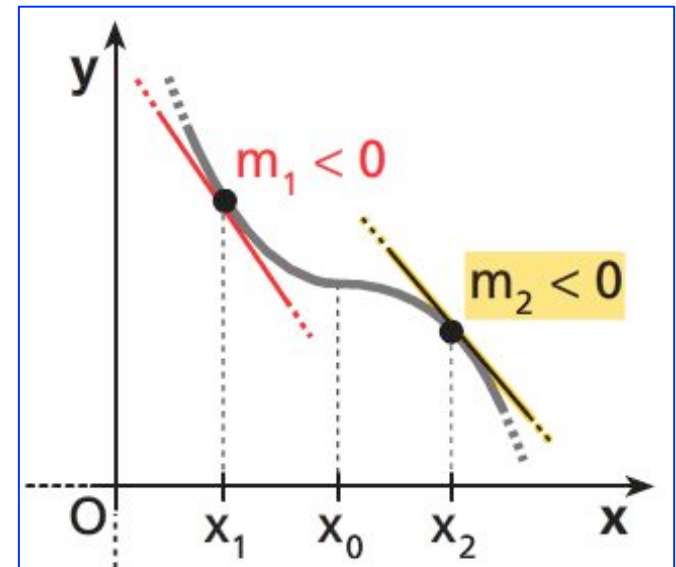
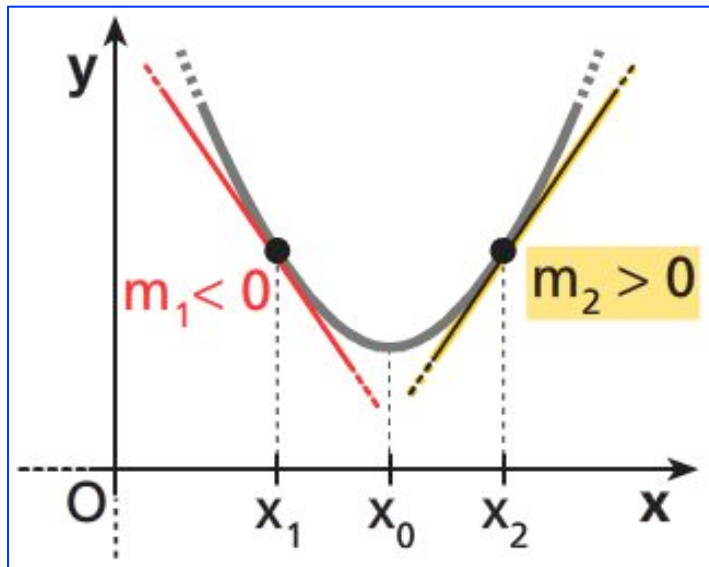
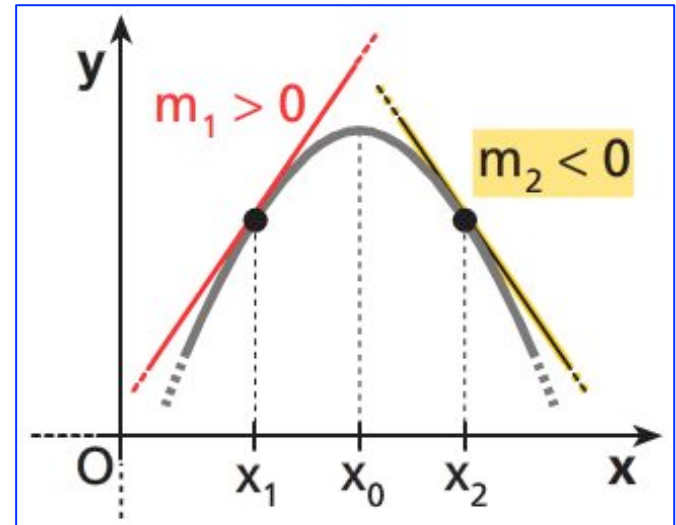
Per ogni $x \neq x_0$ dell'intorno si ha $f(x) < f(x_0)$, quindi x_0 è punto di massimo relativo (figura *a* a lato).

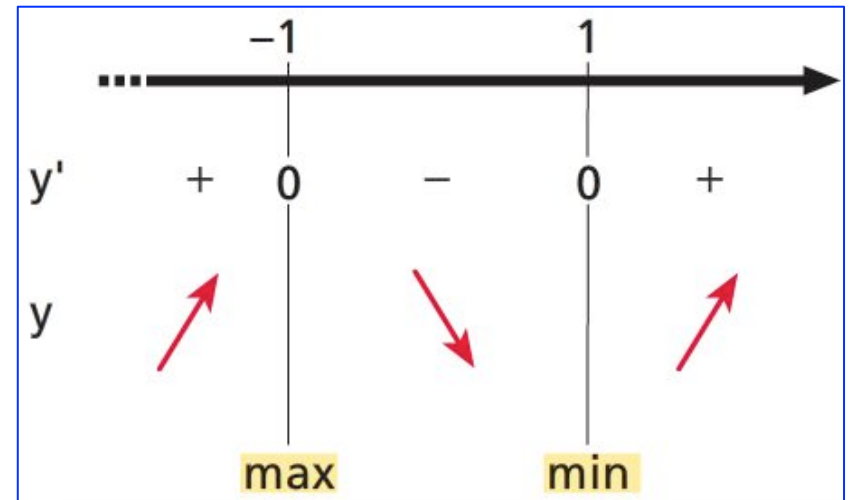
b) Analogamente al caso precedente: per $x < x_0$ si ha $f'(x) < 0$, quindi $f(x)$ è decrescente, ossia, se $x < x_0$, $f(x) > f(x_0)$; per $x > x_0$ si ha $f'(x) > 0$, quindi $f(x)$ è crescente, ossia, se $x > x_0$, $f(x) > f(x_0)$. Per ogni $x \neq x_0$ dell'intorno si ha $f(x) > f(x_0)$, quindi x_0 è punto di minimo relativo (figura *b* a lato).

c) Supponiamo che per ogni $x \neq x_0$ dell'intorno si abbia $f'(x) < 0$ (dimostrazione analoga si ha se $f'(x) > 0$). La funzione è decrescente sia per $x < x_0$ sia per $x > x_0$. Pertanto se $x < x_0$, $f(x) > f(x_0)$, mentre se $x > x_0$, $f(x) < f(x_0)$. Concludiamo che x_0 non è né punto di massimo né punto di minimo (figura *c* a lato).

➤ ricordiamo

● Un punto è estremo se è di massimo o di minimo relativo.





La condizione sufficiente permette di affermare che $x = -1$ è un punto di massimo relativo, mentre $x = 1$ è di minimo relativo. Poiché $f'(x) = 0$ per $x = -1$ e $x = 1$, allora *tali punti sono stazionari*, ovvero in corrispondenza di essi la tangente al grafico è orizzontale.

I corrispondenti valori della funzione sono:

$$M = f(-1) = 2 \quad \text{e} \quad m = f(1) = -2.$$

I punti $(-1; 2)$ e $(1; -2)$ sono, rispettivamente, un punto di massimo relativo e uno di minimo relativo del grafico della funzione.

➤ **osservare**

Osserviamo che il teorema non richiede che la funzione sia derivabile in $x = x_0$. Se ciò avviene, allora, per il teorema dei massimi e dei minimi relativi di funzioni derivabili, si ha $f'(x_0) = 0$, e quindi x_0 è un punto stazionario per $f(x)$.

Se invece la funzione non è derivabile in x_0 , non abbiamo un punto stazionario anche in presenza di un massimo o di un minimo relativi.

ESEMPIO

1. Consideriamo la funzione $y = |x^2 - 1|$, ossia:

$$y = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ -x^2 + 1 & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

La funzione è continua $\forall x \in \mathbb{R}$. La sua derivata è

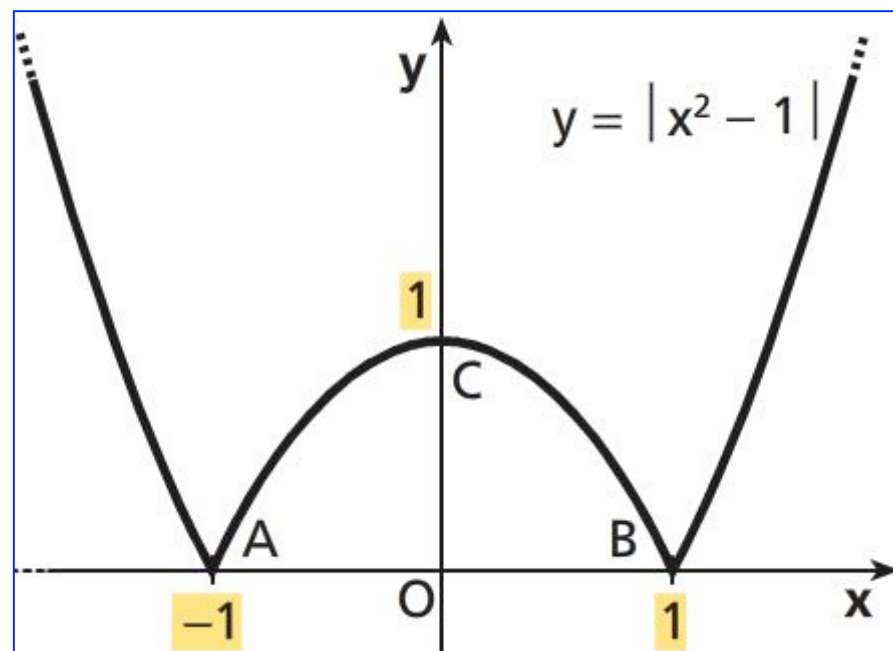
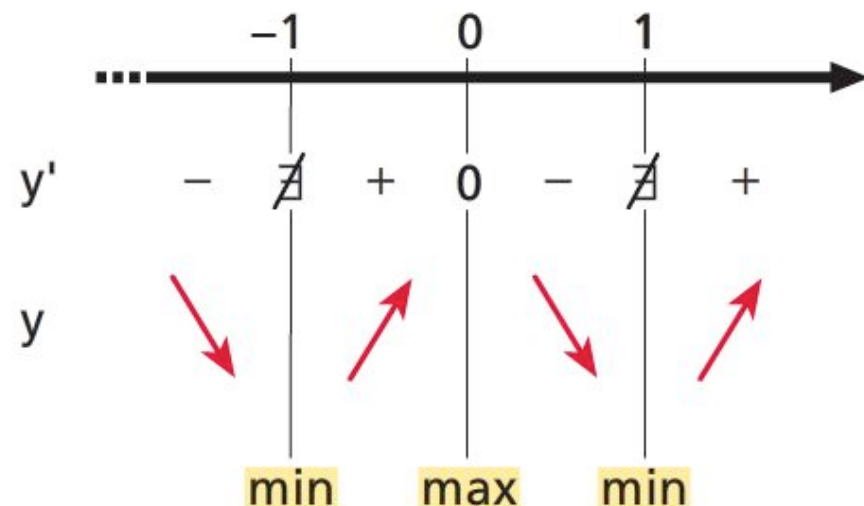
$$y' = \begin{cases} 2x & \text{se } x < -1 \vee x > 1 \\ -2x & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

e non esiste per $x = \pm 1$. Poiché $2x > 0$ per $x > 0$ e $-2x > 0$ per $x < 0$

La funzione ha due minimi relativi in -1 e 1 , mentre ha un massimo relativo in 0 . I corrispondenti punti del grafico sono $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$.

● In $x = \pm 1$ esistono le derivate destra e sinistra, ma sono diverse. Per esempio, $f'_-(1) = -2$, mentre $f'_+(1) = 2$. I punti -1 e 1 sono *punti angolosi*.

Il grafico della funzione $y = |x^2 - 1|$. La derivata della funzione in $x = \pm 1$ non esiste, ma il teorema può essere applicato ugualmente. I due punti A e B sono punti di minimo relativo e punti angolosi. Il punto C è punto di massimo relativo e punto stazionario.



2. Consideriamo la funzione:

$$y = \sqrt[3]{x^2}.$$

La funzione è continua $\forall x \in \mathbb{R}$. La sua derivata è

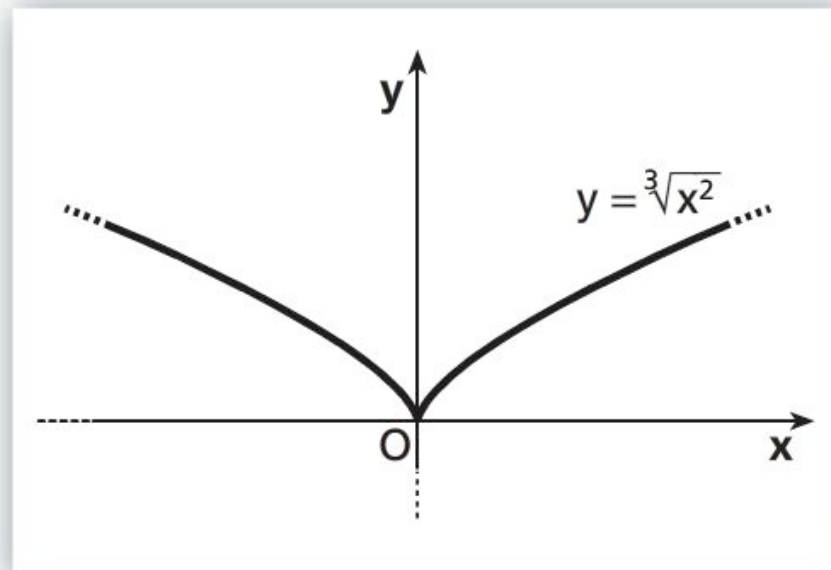
$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}},$$

e non esiste per $x = 0$. Essa è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$, quindi nel punto $x = 0$ c'è un minimo relativo.

Poiché

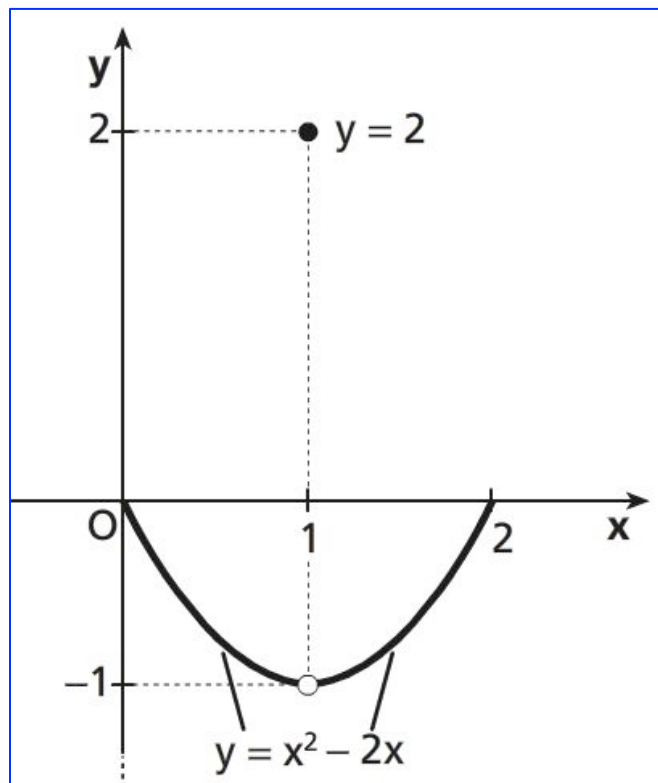
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^-} y' = -\infty,$$

in $x = 0$ c'è un punto a tangente verticale, che in questo caso è una *cuspid*.



Se in x_0 la funzione non è continua, il verificarsi delle altre ipotesi del teorema non è sufficiente per poterlo applicare.

ESEMPIO

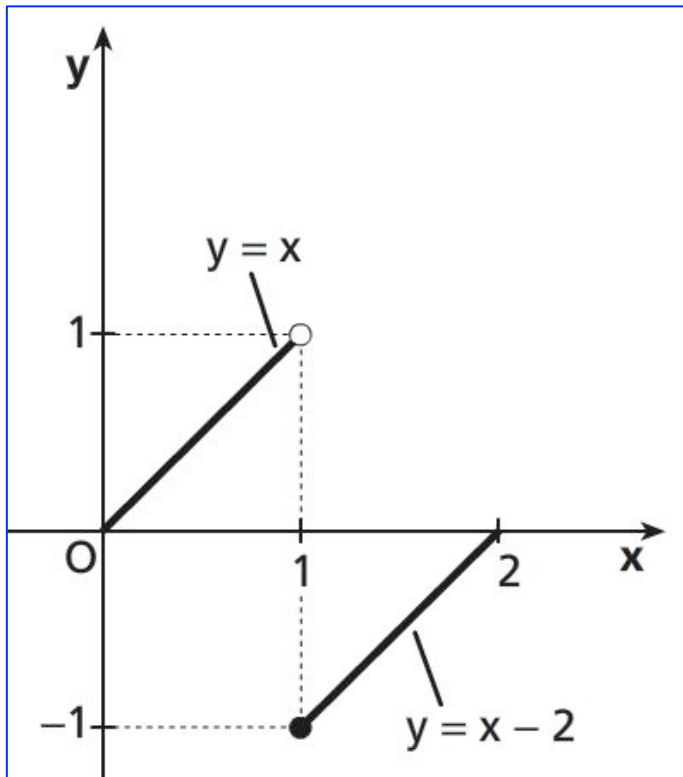


Nell'intervallo $[0; 2]$, la funzione

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

presenta nel punto $x_0=1$ un massimo relativo, e non un minimo, pur essendo la derivata prima $y'=2x-2$ negativa prima di 1 e positiva dopo.

ESEMPIO

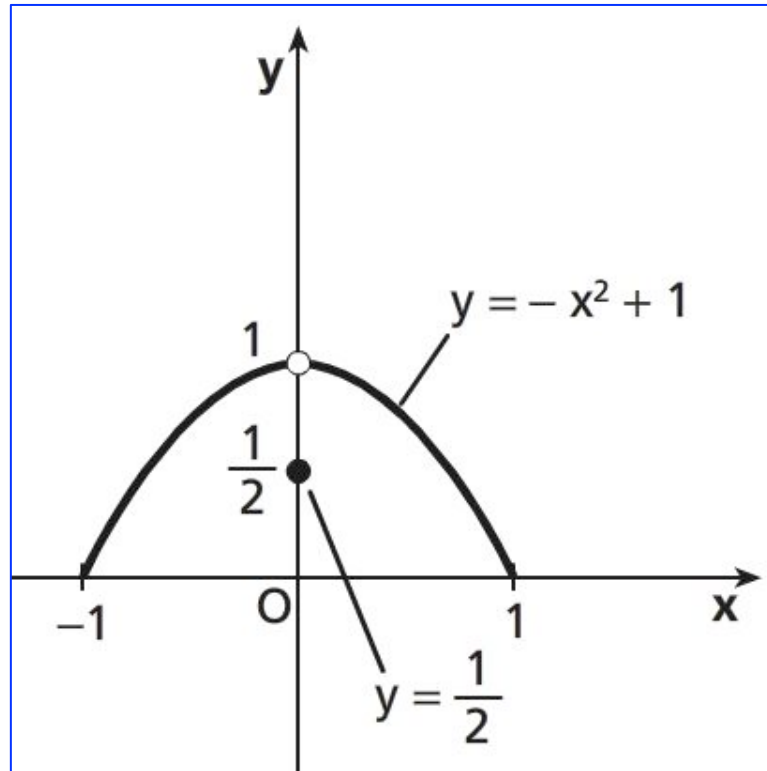


Nell'intervallo $[0; 2]$, la funzione

$$y = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ x - 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

presenta nel punto $x_0=1$ un minimo relativo, pur essendo la derivata prima $y'=1$ positiva sia che dopo 1.

ESEMPIO



Nell'intervallo $[-1; 1]$, la funzione

$$y = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

non presenta nel punto $x_0=0$ un massimo relativo, pur essendo la derivata prima $y'=-2x$ positiva prima di 0 e negativa dopo..

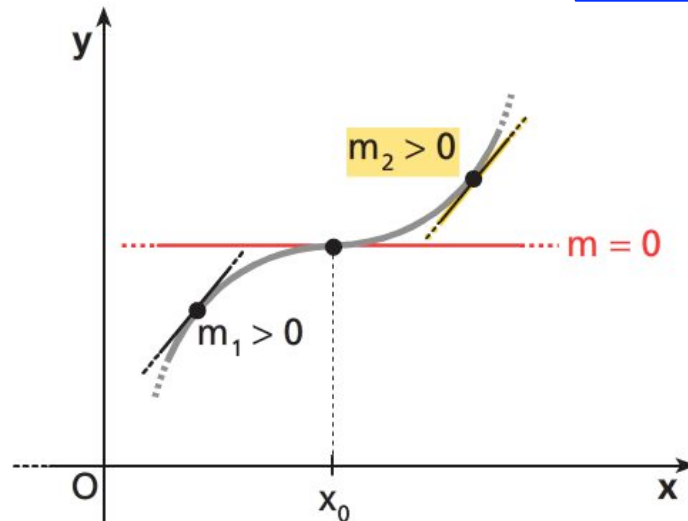
I punti stazionari di flesso orizzontale

TEOREMA

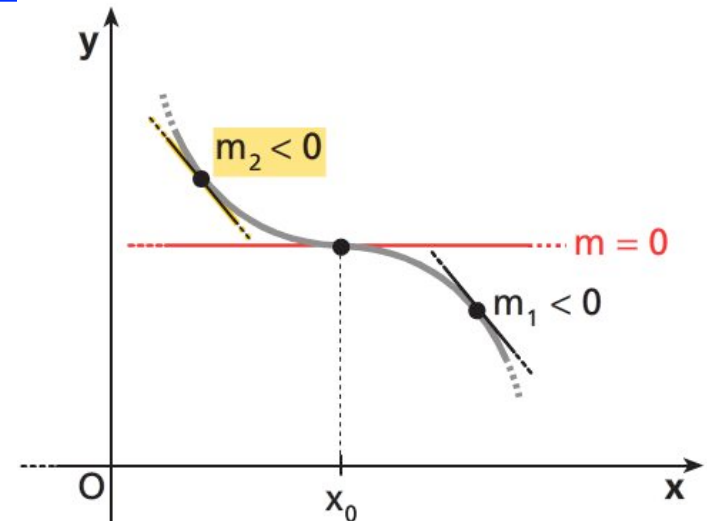
Data la funzione $y = f(x)$ definita e continua in un intorno completo I_{x_0} del punto x_0 e derivabile nello stesso intorno, x_0 è un punto di flesso orizzontale se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

- $f'(x_0) = 0$;
- il segno della derivata prima è lo stesso per ogni $x \neq x_0$ dell'intorno I_{x_0} .

I casi possibili sono



a. Per ogni $x \neq x_0$, $f'(x) > 0$, quindi $f(x)$ è crescente. x_0 è un punto di flesso orizzontale.



b. Per ogni $x \neq x_0$, $f'(x) < 0$, quindi $f(x)$ è decrescente. x_0 è un punto di flesso orizzontale.

ESEMPIO

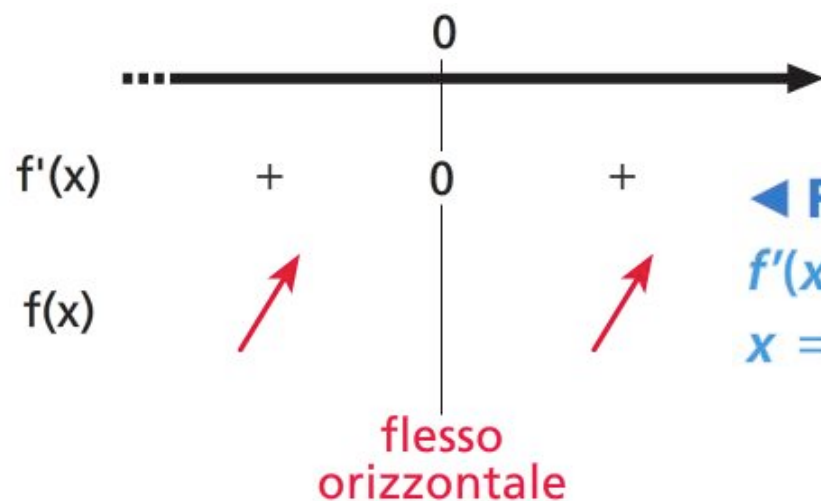
Consideriamo la funzione $y = 3x^5 + 1$.

Calcoliamo la derivata prima e studiamo il segno:

$$f'(x) = 15x^4$$

$$15x^4 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$15x^4 > 0 \rightarrow \forall x \neq 0.$$



◀ **Figura 19** Sia per $x < 0$ sia per $x > 0$ si ha $f'(x) > 0$, quindi la funzione è crescente; per $x = 0$ si ha $f'(x) = 0$.

Concludiamo che $x = 0$ è un punto di flesso orizzontale.

➤ Regola generale

Riassumendo, per una funzione $f(x)$ continua lo studio del segno della derivata prima è fondamentale per la **ricerca dei massimi e dei minimi relativi e dei flessi orizzontali**. Si procede nel seguente modo:

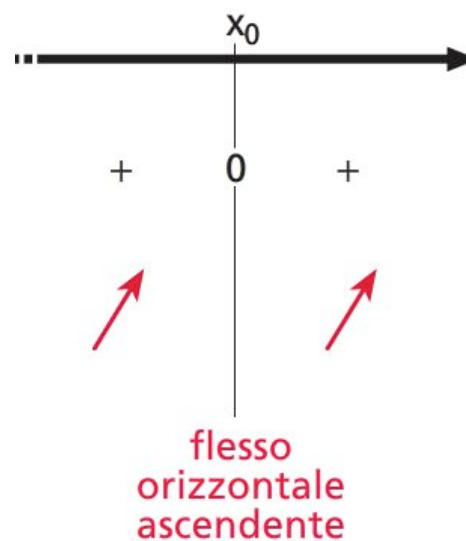
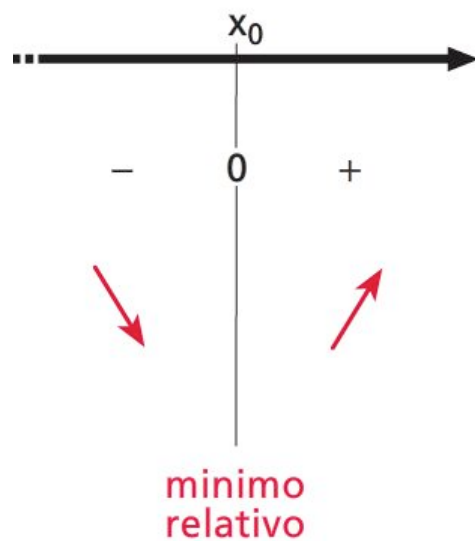
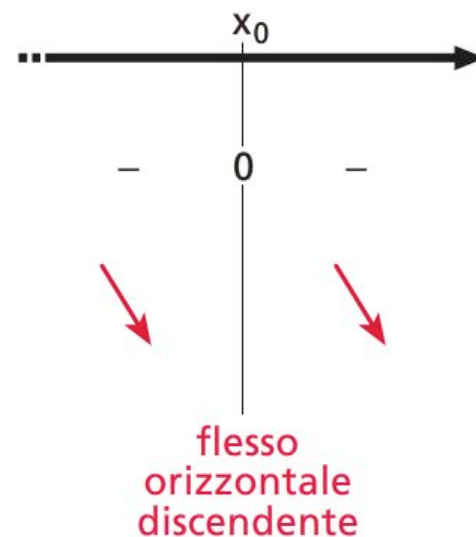
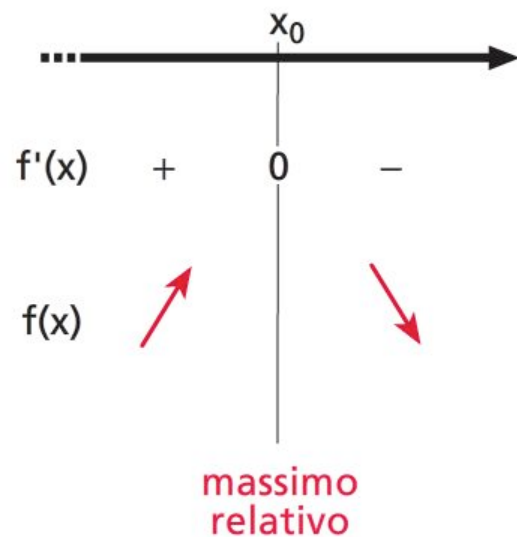
- si calcola la derivata $f'(x)$ e si determina il suo dominio per trovare gli eventuali punti in cui la funzione non è derivabile (cuspidi, flessi verticali, punti angolosi);
- si risolve l'equazione

$$f'(x) = 0$$

per trovare i punti stazionari;

- si studia il segno di $f'(x)$ per trovare massimi e minimi *relativi* (anche non stazionari) e i flessi a tangente orizzontale.

I casi possibili sono



I teoremi enunciati valgono per i punti interni agli intervalli di definizione della funzione, pertanto occorre esaminare anche i valori che la funzione assume negli eventuali estremi di tali intervalli.

Se dobbiamo trovare **il massimo e il minimo assoluti**:

- se la funzione $f(x)$ è continua e l'intervallo di definizione della funzione è chiuso e limitato, il teorema di Weierstrass assicura l'esistenza di massimo e minimo assoluti; per determinarli si confrontano le ordinate dei punti di massimo e minimo relativi tra di loro e con i valori che $f(x)$ assume negli estremi dell'intervallo: il valore maggiore corrisponde al punto di massimo assoluto e quello minore corrisponde al punto di minimo assoluto;
- se l'intervallo non è chiuso e limitato, massimo e minimo assoluti potrebbero non esistere.

Flessi e derivata
seconda

La concavità e il segno della derivata seconda

Un criterio per la concavità

Un criterio per stabilire la concavità del grafico di una funzione in un suo punto di ascissa x_0 è dato dal seguente teorema.

TEOREMA

Sia $y = f(x)$ una funzione definita e continua in un intervallo I , insieme con le sue derivate prima e seconda, e sia x_0 un punto interno a questo intervallo. Se in x_0 è $f''(x_0) \neq 0$, il grafico della funzione volge in x_0 :

- la concavità verso l'alto se $f''(x_0) > 0$;
- la concavità verso il basso se $f''(x_0) < 0$.

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo l'equazione della retta tangente $y = t(x)$ al grafico di $f(x)$ nel punto $(x_0; f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \rightarrow \quad t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

La differenza tra le ordinate dei punti del grafico di $f(x)$ e della tangente $t(x)$, aventi la stessa ascissa x , è:

$$g(x) = f(x) - t(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)].$$

La funzione $g(x)$ è derivabile due volte perché differenza di due funzioni derivabili due volte, e si ha:

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_0) \quad \text{e} \quad g''(x) = f''(x).$$

In particolare per $x = x_0$ si ha:

$$g(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad g'(x_0) = 0.$$

- Sia $f''(x_0) > 0$. Poiché $g''(x) = f''(x)$ è continua:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g''(x) = g''(x_0) = f''(x_0) > 0.$$

Allora, per il *teorema della permanenza del segno*, esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che $g''(x) > 0$ per ogni $x \in I_{x_0}$, e quindi, essendo $g''(x)$ la derivata prima di $g'(x)$, segue che $g'(x)$ è crescente in I_{x_0} . Pertanto:

$$g'(x) < g'(x_0) = 0 \quad \forall x \in I_{x_0}, \text{ con } x < x_0;$$

$$g'(x) > g'(x_0) = 0 \quad \forall x \in I_{x_0}, \text{ con } x > x_0.$$

Quindi, per la condizione sufficiente per i massimi e i minimi relativi, x_0 è un punto di minimo relativo per $g(x)$, cioè:

$$g(x) > g(x_0) = 0 \quad \forall x \in I_{x_0}, \text{ con } x \neq x_0.$$

Ossia, per ogni $x \in I_{x_0}$, con $x \neq x_0$:

$$f(x) - t(x) > 0 \rightarrow f(x) > t(x).$$

Per definizione, questo significa che la funzione $f(x)$ ha in x_0 la concavità rivolta verso l'alto.

- Sia $f''(x_0) < 0$. Con ragionamento analogo al precedente, si dimostra che la funzione $f(x)$ ha in x_0 la concavità rivolta verso il basso.

● *Teorema della permanenza del segno*: se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, con $l \neq 0$, allora esiste un intorno di x_0 in cui la funzione $f(x)$ ha lo stesso segno di l .

ESEMPIO

Data la funzione $y = f(x) = 2x^3 - 5$, cerchiamo gli intervalli in cui il grafico della funzione volge la concavità verso l'alto o verso il basso.

Calcoliamo le derivate prima e seconda:

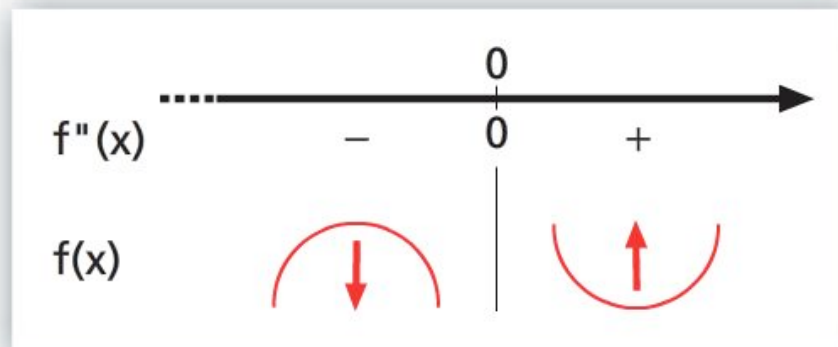
$$f'(x) = 6x^2, \quad f''(x) = 12x.$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \quad \text{per } 12x > 0, \quad \text{quindi per } x > 0.$$

Per $x < 0$, la concavità è rivolta verso il basso.

Per $x > 0$, la concavità è rivolta verso l'alto.



Una condizione necessaria per i flessi

Per la ricerca dei flessi è utile il seguente teorema di cui ci limitiamo a fornire l'enunciato.

TEOREMA

Sia data una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo $[a; b]$ e in tale intervallo esistano le sue derivate prima e seconda. Se $f(x)$ ha un flesso nel punto x_0 , interno ad $[a; b]$, la derivata seconda della funzione in quel punto si annulla, cioè: $f''(x_0) = 0$.

Il teorema fornisce una *condizione necessaria ma non sufficiente* per l'esistenza di un flesso in un punto.

ESEMPIO

La funzione $y = x^6$ ha come derivate:

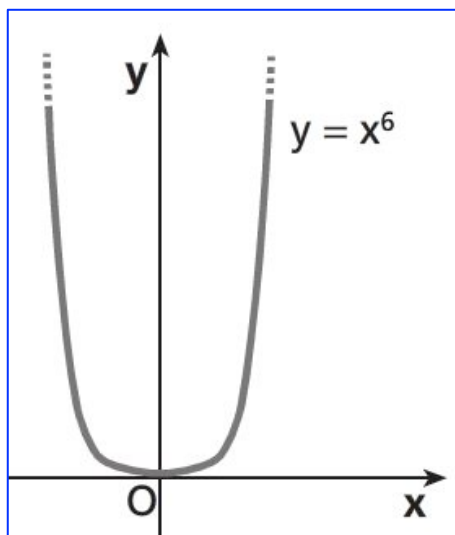
$$y' = 6x^5; \quad y'' = 30x^4.$$

La derivata seconda è nulla in $x = 0$.

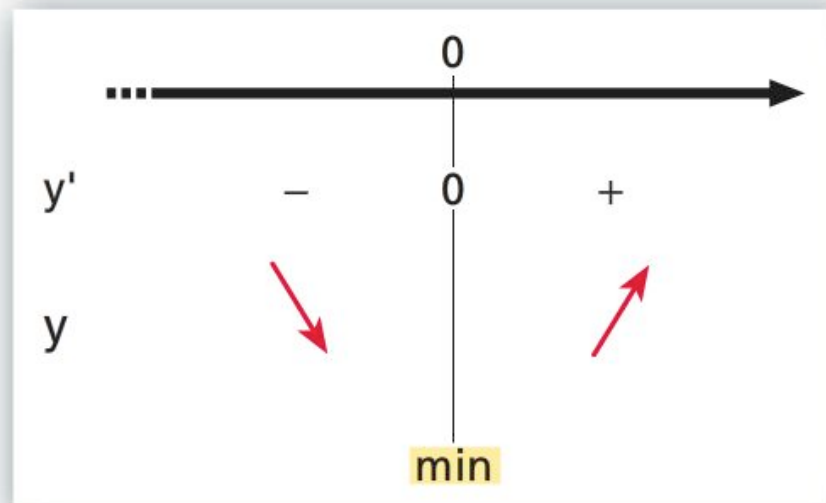
Studiamo il segno della derivata prima:

$$6x^5 > 0 \quad \text{per } x > 0.$$

Il quadro dei segni è quello della figura 22. La derivata seconda è nulla in 0, ma nel punto c'è un minimo relativo e non un flesso.



▼ **Figura 22** In 0 si ha un punto di stazionarietà, prima di 0 la funzione è decrescente, dopo 0 è crescente. 0 è un punto di minimo e non di flesso, anche se $y'' = 0$ in $x = 0$.

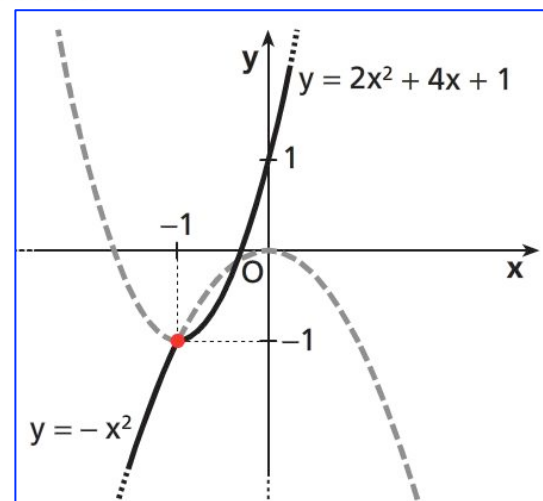


Se nel punto x_0 la funzione non è derivabile, non è possibile applicare il teorema precedente, ma nel punto può esserci ugualmente un flesso.

ESEMPIO

La funzione

$$y = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \leq -1 \\ 2x^2 + 4x + 1 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$



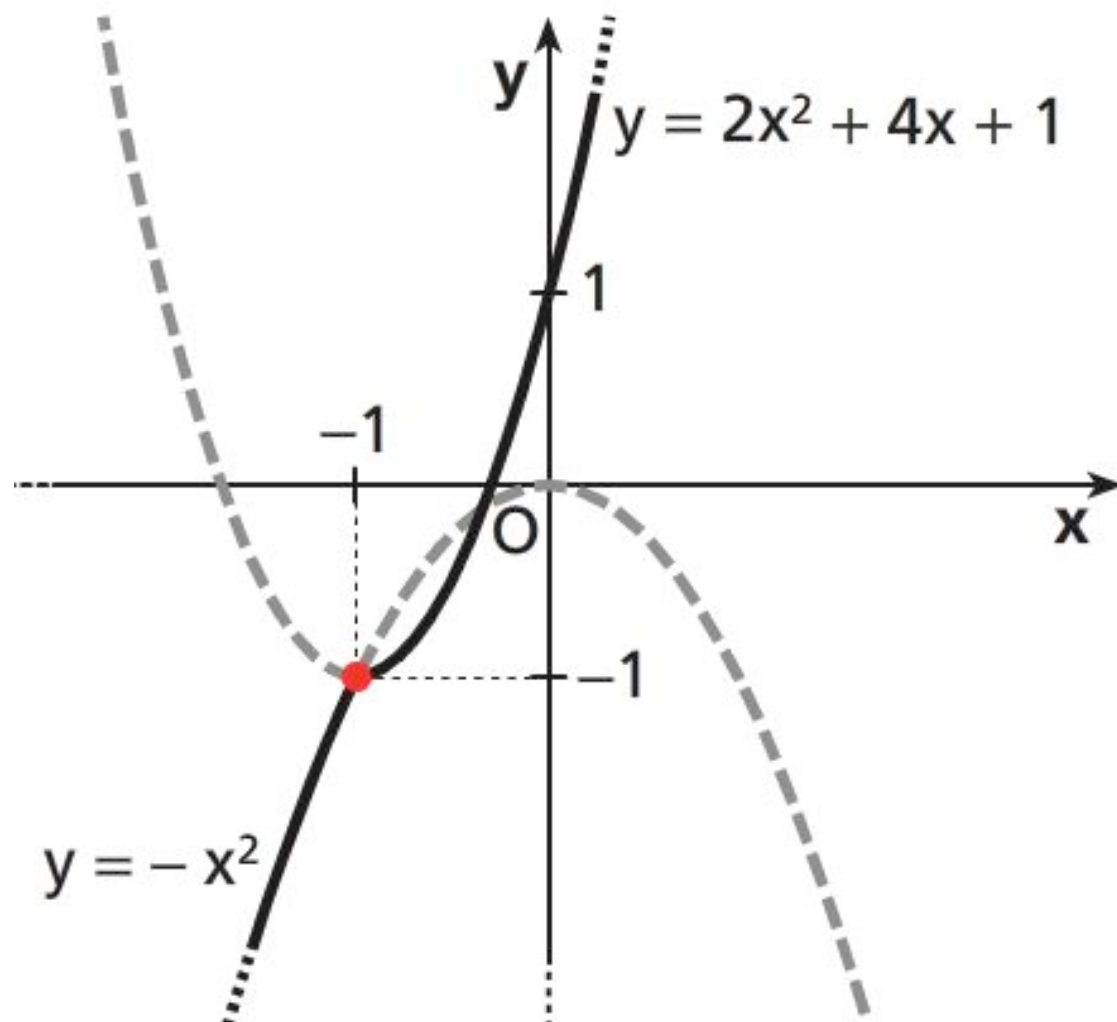
è continua in $\mathbb{R}$, ma non è derivabile in $x = -1$, in quanto:

$$\text{per } x < -1 \quad y' = -2x \quad \rightarrow \quad y'_-(-1) = 2;$$

$$\text{per } x > -1 \quad y' = 4x + 4 \quad \rightarrow \quad y'_+(-1) = -4 + 4 = 0.$$

Il punto $x = -1$ è un punto angoloso.

Poiché il grafico della funzione è costituito da due rami di parabola, il primo con concavità verso il basso e il secondo con concavità verso l'alto, esso ha per definizione un flesso in $x = -1$

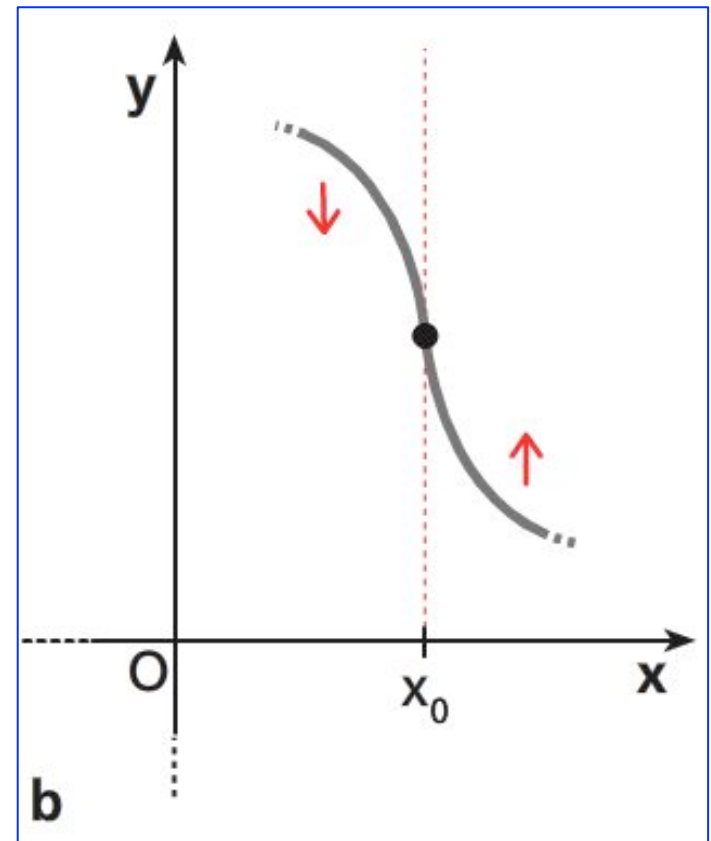
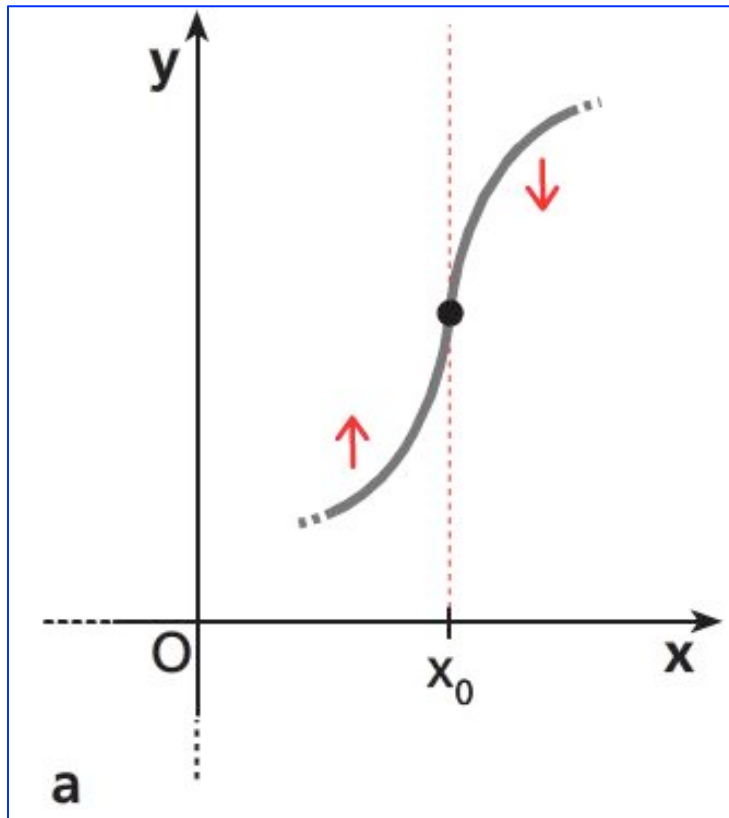


La funzione in $x = -1$ ha un
flesso anche se la derivata prima non esiste.

In particolare, se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = -\infty,$$

nel punto x_0 c'è un flesso verticale rispettivamente discendente (figura *a* a lato) oppure ascendente (figura *b* a lato).





Flessi e studio del segno della derivata seconda

Per trovare i punti di flesso possiamo studiare il segno della derivata seconda. Vale infatti il seguente teorema.

TEOREMA

Sia data la funzione $y = f(x)$ definita e continua in un intorno completo I_{x_0} del punto x_0 e in tale intorno esistano le sue derivate prima e seconda per ogni $x \neq x_0$.

Se per ogni $x \neq x_0$ dell'intorno si ha

- $f''(x) > 0$ per $x < x_0$ e $f''(x) < 0$ per $x > x_0$, oppure
- $f''(x) < 0$ per $x < x_0$ e $f''(x) > 0$ per $x > x_0$,

allora x_0 è un punto di flesso.

ESEMPIO

La funzione

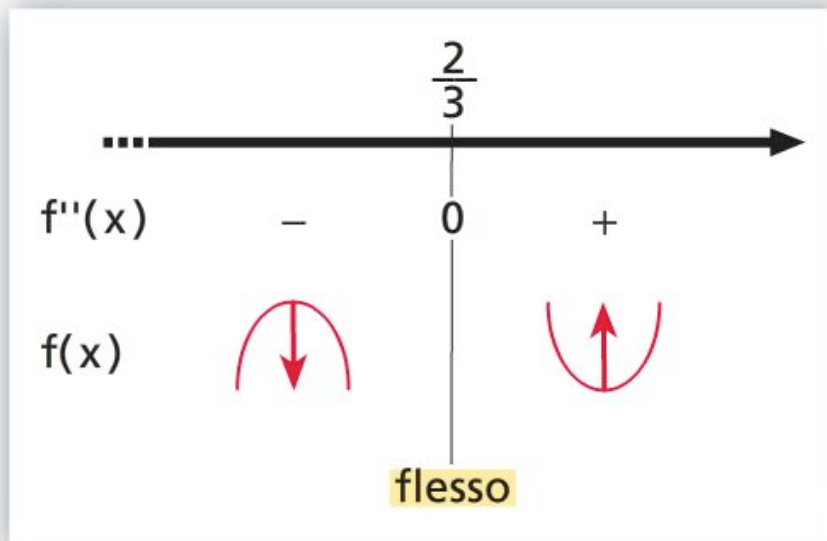
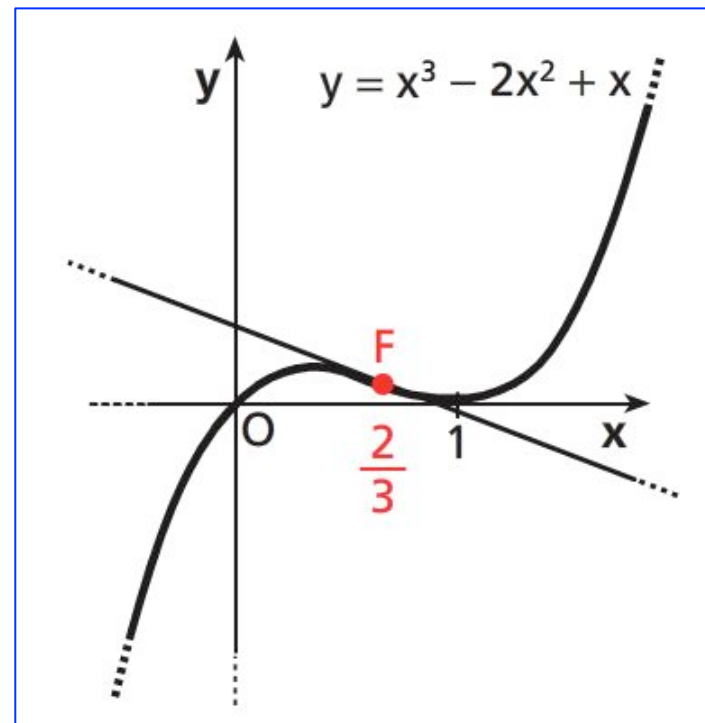
$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$$

è continua $\forall x \in \mathbb{R}$; calcoliamo $f'(x)$ e $f''(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1; \quad f''(x) = 6x - 4.$$

Studiamo il segno di $f''(x)$:

$$6x - 4 > 0 \text{ per } x > \frac{2}{3}.$$



Per $x < \frac{2}{3}$ la concavità è verso il basso, mentre per $x > \frac{2}{3}$ la concavità è verso l'alto. In $x = \frac{2}{3}$ la funzione ha un punto di flesso. In particolare, si tratta di un flesso ascendente.

Se, oltre alle ipotesi del teorema precedente, è vero che in x_0 la derivata seconda è continua, allora necessariamente $f''(x_0) = 0$. Quindi, i punti di flesso delle funzioni che hanno derivate prima e seconda continue vanno cercati fra le soluzioni dell'equazione $f''(x) = 0$. Inoltre, nei punti x_0 di flesso, se $f'(x_0) \neq 0$ il flesso è obliquo, se $f'(x_0) = 0$ il flesso è orizzontale.

Nell'esempio precedente, poiché $f''(x)$ è una funzione continua, possiamo cercare i punti di flesso risolvendo l'equazione $f''(x) = 0$, ossia:

$$6x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Lo studio del segno di $f''(x)$ completa la ricerca, e inoltre, poiché

$$f'\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3} \neq 0,$$

il flesso è obliquo.

Esaminiamo ora un esempio in cui una funzione $f(x)$ presenta anche un flesso a tangente verticale.

ESEMPIO

La funzione

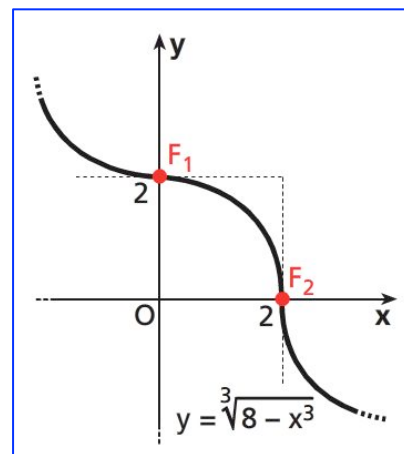
$$f(x) = \sqrt[3]{8 - x^3}$$

è continua $\forall x \in \mathbb{R}$; calcoliamo la derivata prima e seconda:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{-3x^2}{\sqrt[3]{(8 - x^3)^2}} = -\frac{x^2}{\sqrt[3]{(8 - x^3)^2}};$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2x\sqrt[3]{(8 - x^3)^2} + x^2 \cdot \frac{-2x^2}{\sqrt[3]{8 - x^3}}}{(8 - x^3) \cdot \sqrt[3]{8 - x^3}} = \frac{-2x \cdot (8 - x^3) - 2x^4}{(8 - x^3) \cdot \sqrt[3]{(8 - x^3)^2}} = \\ &= \frac{-16x}{(8 - x^3) \cdot \sqrt[3]{(8 - x^3)^2}}. \end{aligned}$$

$f'(x)$ e $f''(x)$ hanno come dominio $\mathbb{R} - \{2\}$.



Studiamo il segno di $f''(x)$:

il numeratore è positivo per $x < 0$; il denominatore è positivo se $8 - x^3 > 0$, cioè per $x < 2$.

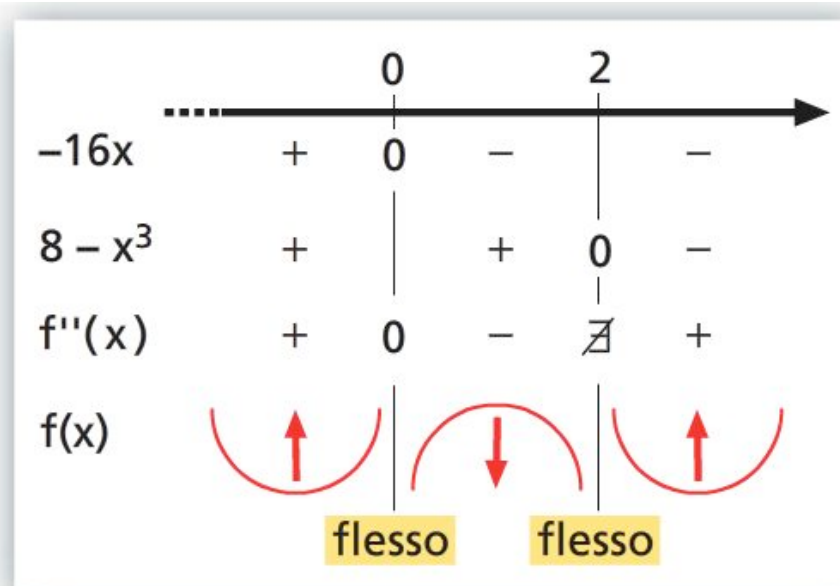
Quindi, per $x < 0$ e $x > 2$ la concavità è rivolta verso l'alto, mentre per $0 < x < 2$ la concavità è rivolta verso il basso.

In $x = 0$, la funzione ha un flesso discendente; inoltre:

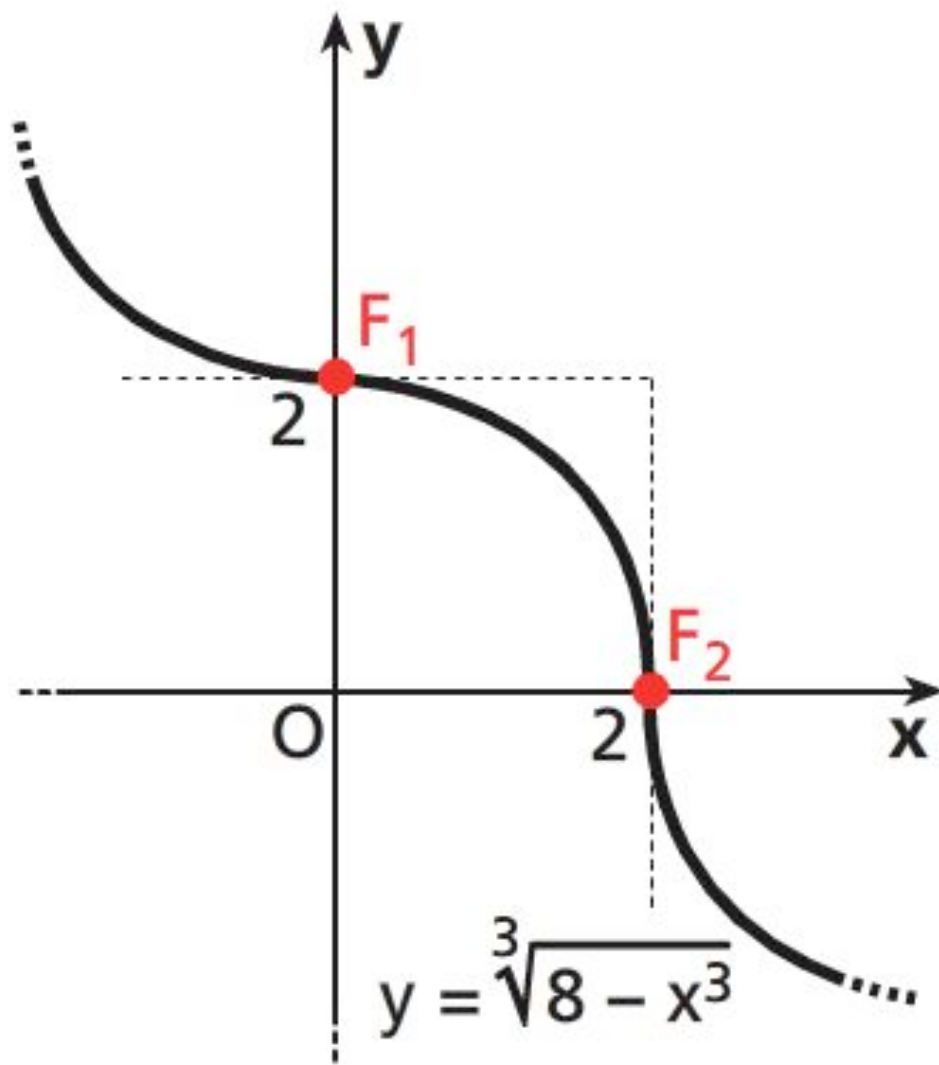
$f'(0) = 0 \rightarrow$ il punto $F_1(0; 2)$ è un flesso discendente orizzontale.

In $x = 2$, la funzione ha un flesso ascendente; inoltre:

$\lim_{x \rightarrow 2} f'(x) = -\infty \rightarrow$ il punto $F_2(2; 0)$ è un flesso ascendente verticale.



▲ Figura 25 Quadro dei segni.



➤ Regola generale

Riassumendo, data una funzione $f(x)$, continua e derivabile, per la **ricerca dei flessi** si procede così:

- si calcola la derivata seconda $f''(x)$ e si determina il suo dominio;
- si studia il segno di $f''(x)$ e si cercano i punti in cui la concavità cambia, ossia i punti di flesso;
- se x_0 è un punto di flesso e:

$f'(x_0) = 0$, il flesso è **orizzontale**;

$f'(x_0) \neq 0$, il flesso è **obliquo**.

Se la funzione $f(x)$ non è derivabile in un punto x_0 in cui $f''(x)$ cambia segno, allora, quando

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = +\infty \text{ oppure } \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = -\infty,$$

in x_0 c'è un flesso **verticale**.

Massimi, minimi, flessi e
derivate successive

I massimi, i minimi, i flessi orizzontali e le derivate successive

Esaminiamo un'altra condizione sufficiente che, come vedremo negli esercizi, è utile per la ricerca di massimi, minimi e flessi orizzontali nei casi in cui non è facile studiare il segno della derivata prima o se non si vogliono risolvere disequazioni. In questi casi utilizziamo le *derivate successive* alla prima. Per indicare le derivate successive alla terza utilizziamo indici che ne precisano l'**ordine**. Per esempio,

$$f^{(5)}(x), f^{(8)}(x), f^{(n)}(x)$$

indicano rispettivamente la derivata quinta, la derivata ottava e la generica derivata n -esima di $f(x)$. Diremo che la derivata è di **ordine pari** se l'indice è pari, è **dispari** se l'indice è dispari.

TEOREMA

Sia $y = f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a; b]$ tale che nei punti interni dell'intervallo esistano le sue derivate fino alla n -esima, continue in $]a; b[$. Sia x_0 un punto interno all'intervallo in cui:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ e } f^{(n)}(x_0) \neq 0, \text{ con } n \geq 2.$$

Se la derivata n -esima diversa da 0 è di ordine pari, allora in x_0 si ha:

- a) un massimo relativo se $f^{(n)}(x_0) < 0$;
- b) un minimo relativo se $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Se la derivata n -esima diversa da 0 è di ordine dispari, allora in x_0 si ha un flesso orizzontale che è:

- c) un flesso discendente se $f^{(n)}(x_0) < 0$;
- d) un flesso ascendente se $f^{(n)}(x_0) > 0$.

DIMOSTRAZIONE

Per semplicità, dimostriamo i casi a) e b) per $n = 2$ e i casi c) e d) per $n = 3$.

a) Sia $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$. Poiché la derivata seconda è continua in x_0 , si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f''(x) = f''(x_0) < 0,$$

e quindi, per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno completo I di x_0 tale che:

$$f''(x) < 0 \quad \forall x \in I.$$

Essendo $f''(x)$ la derivata prima di $f'(x)$, segue che $f'(x)$ è decrescente in I , e poiché $f'(x_0) = 0$:

$$f'(x) > 0, \quad \text{per } x < x_0 \text{ e } x \in I;$$

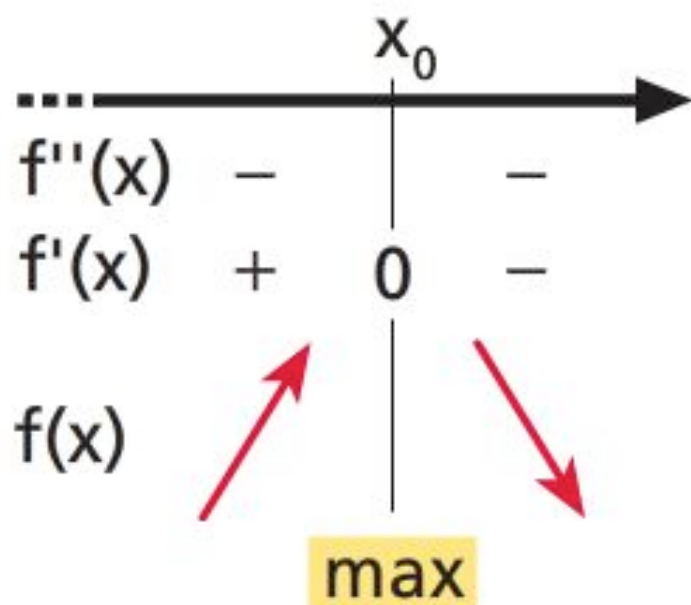
$$f'(x) < 0, \quad \text{per } x > x_0 \text{ e } x \in I.$$

Questo significa che nell'intorno I :

$f(x)$ è crescente per $x < x_0$ $\rightarrow f(x) < f(x_0)$ per $x < x_0$;

$f(x)$ è decrescente per $x > x_0$ $\rightarrow f(x) < f(x_0)$ per $x > x_0$.

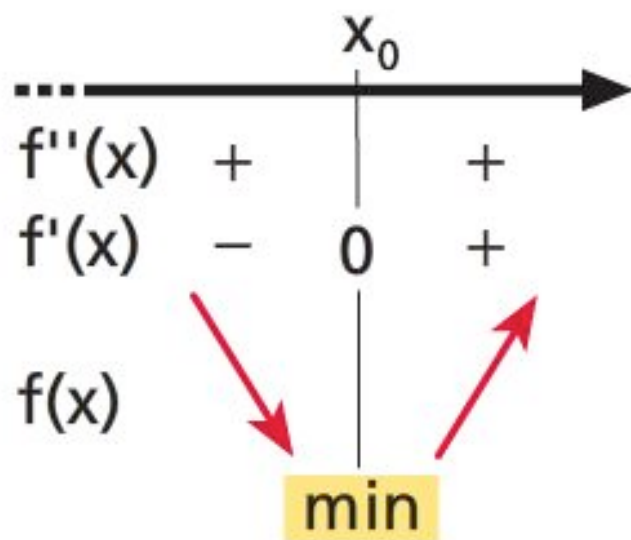
Dunque x_0 è un punto di massimo relativo



Caso in cui

$$f'(x_0) = 0 \text{ e } f''(x_0) < 0$$

b) Sia $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$. Con un ragionamento analogo al precedente si dimostra che x_0 è un punto di minimo relativo



Caso in cui

$$f'(x_0) = 0 \text{ e } f''(x_0) > 0$$

c) Sia $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) < 0$. La funzione $f'(x)$ soddisfa le ipotesi del risultato a) di questo teorema perché la derivata prima di $f'(x)$, cioè $f''(x)$, si annulla in x_0 e la derivata seconda di $f'(x)$, cioè $f'''(x)$, è negativa in x_0 , per ipotesi. Quindi possiamo dire che x_0 è un punto di massimo relativo per $f'(x)$.

Allora esiste un intorno completo I di x_0 in cui:

$$f'(x) < f'(x_0) = 0 \quad \text{per } x \neq x_0.$$

Quindi, per il teorema sui punti stazionari di flesso orizzontale, x_0 è un punto di flesso orizzontale. Inoltre, essendo $f'(x) < 0$, sappiamo che $f(x)$ è decrescente sia per $x < x_0$, sia per $x > x_0$. Pertanto a sinistra di x_0 la concavità di $f(x)$ è rivolta verso l'alto, mentre a destra di x_0 la concavità è rivolta verso il basso, cioè x_0 è un punto di flesso discendente.

d) Sia $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) > 0$. Con un ragionamento analogo al precedente si dimostra che x_0 è un punto di flesso orizzontale ascendente.

ESEMPIO

Consideriamo la funzione:

$$y = f(x) = 4x^3 - 3x + 1.$$

La sua derivata prima è

$$f'(x) = 12x^2 - 3,$$

e ponendola uguale a 0 si ottiene:

$$12x^2 - 3 = 0 \rightarrow 3(4x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = \pm \frac{1}{2}.$$

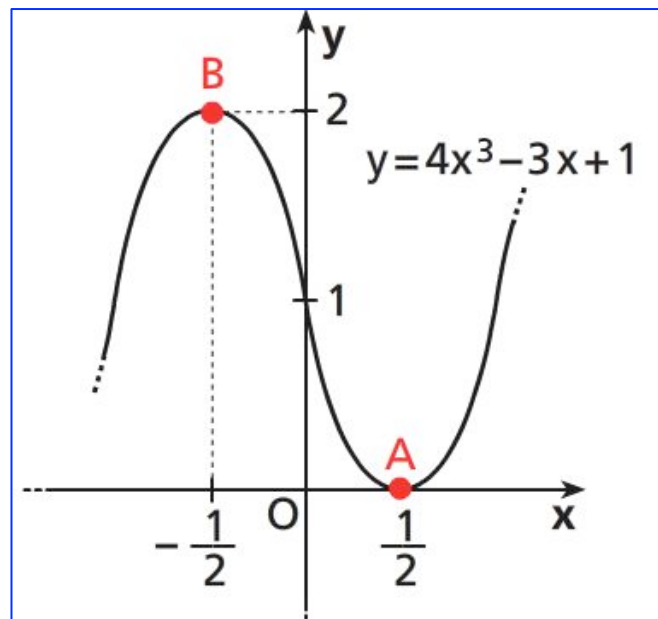
La derivata seconda di $f(x)$ è:

$$f''(x) = 24x.$$

Poiché

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 12 > 0 \text{ e } f''\left(-\frac{1}{2}\right) = -12 < 0,$$

si può concludere che in $x = \frac{1}{2}$ si ha un minimo relativo, mentre in $x = -\frac{1}{2}$ si ha un massimo relativo.



I flessi e le derivate successive

TEOREMA

Sia $y = f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a; b]$, tale che nei punti interni dell'intervallo esistano le sue derivate fino alla n -esima, continue in $]a; b[$. Sia x_0 un punto interno all'intervallo in cui:

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ e } f^{(n)}(x_0) \neq 0, \text{ con } n \geq 3.$$

Se la derivata n -esima diversa da 0 è di ordine dispari, allora in x_0 si ha un flesso che è:

- un flesso discendente se $f^{(n)}(x_0) < 0$;
- un flesso ascendente se $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Se la derivata n -esima diversa da 0 è di ordine pari, allora in x_0 la curva non ha flesso e volge la:

- concavità verso il basso se $f^{(n)}(x_0) < 0$;
- concavità verso l'alto se $f^{(n)}(x_0) > 0$.

ESEMPIO

Data la funzione $f(x) = -3x^4 + 4x^3$, continua $\forall x \in \mathbb{R}$, determiniamo le derivate prima e seconda:

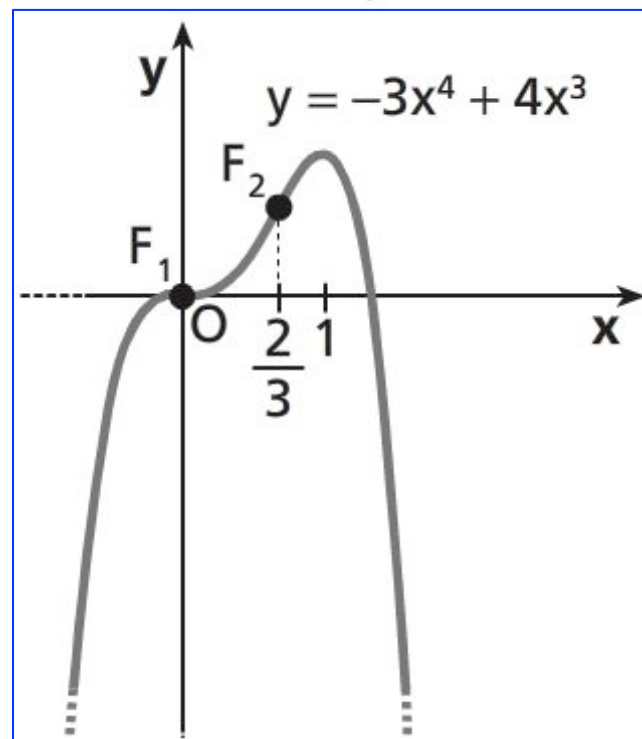
$$f'(x) = -12x^3 + 12x^2; \quad f''(x) = -36x^2 + 24x.$$

Calcoliamo gli zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12x(-3x + 2) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}.$$

La derivata terza di $f(x)$ è:

$$f'''(x) = -72x + 24.$$



➤ Regola generale

Riassumendo, per determinare i massimi e i minimi relativi e i flessi, con il metodo delle derivate successive, si procede in questo modo:

- si calcola la derivata prima $f'(x)$ e si trovano gli zeri $x_1, x_2, \dots$ di questa funzione;
- per ogni x_i si calcolano i valori che assumono le derivate successive; se la prima derivata $f^{(n)}(x)$ che non si annulla in x_i è di ordine pari, allora x_i è un punto di massimo o di minimo relativo, mentre se è di ordine dispari in x_i si ha un flesso orizzontale;
- si cercano gli zeri $z_1, z_2, \dots$ della derivata seconda $f''(x)$;
- per ogni z_i si calcolano i valori che assumono le derivate successive; se la prima derivata $f^{(n)}(x)$ che non si annulla in z_i è di ordine dispari, allora in z_i si ha un flesso obliquo.

Esercizi di riepilogo

ESERCIZIO GUIDA

Applicando le definizioni di massimo, minimo e flesso, verifichiamo quanto è indicato a fianco di ogni funzione:

a) $f(x) = x^3 - 12x + 2$, $x = -2$ punto di massimo relativo;

b) $g(x) = \frac{2x}{1 - x^2}$, $x = 0$ punto di flesso obliquo ascendente.

a) Per verificare che $x = -2$ è punto di massimo relativo è necessario trovare un suo intorno completo nel quale si abbia per ogni x :

$$f(x) \leq f(-2) \rightarrow x^3 - 12x + 2 \leq -8 + 24 + 2.$$

Risolviamo la disequazione:

$$x^3 - 12x + 2 \leq 18 \rightarrow x^3 - 12x - 16 \leq 0.$$

Scomponendo il trinomio in fattori, si ottiene:

$$(x + 2)^2 (x - 4) \leq 0.$$

Poiché è $(x + 2)^2 \geq 0$ per ogni x , la disequazione è verificata per $x \leq 4$ e quindi sicuramente in un intorno completo di -2 , perciò -2 è punto di massimo relativo.

b) Per verificare che il punto x_0 è di flesso, occorre dimostrare che, in x_0 , $g(x)$ cambia concavità, cioè $g(x) < t(x)$ per $x < x_0$ e $g(x) > t(x)$ per $x > x_0$ (o viceversa), essendo $y = t(x)$ l'equazione della tangente in $(x_0; g(x_0))$.

Per $x = 0$, si ha $g(0) = 0$. Essendo $g'(x) = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$, si ha $g'(0) = 2$. L'equazione della tangente nel punto $x = 0$ è:

$$y - 0 = 2(x - 0) \rightarrow t(x) = y = 2x.$$

Risolviamo la disequazione che si ottiene con $g(x) < t(x)$:

$$\frac{2x}{1-x^2} < 2x \rightarrow \frac{2x - 2x(1-x^2)}{1-x^2} < 0 \rightarrow \frac{2x^3}{1-x^2} < 0.$$

Studiamo il segno della frazione (figura a lato).

La disequazione è verificata in un intorno sinistro di 0, dove si ha quindi $g(x) < t(x)$, mentre in un intorno destro di 0 la frazione è positiva e quindi $g(x) > t(x)$. In 0 abbiamo quindi un flesso che è obliquo in quanto la tangente in $(0; 0)$ non è parallela a uno degli assi.

Il flesso è ascendente perché per $x < 0$ la concavità è rivolta verso il basso, essendo $g(x) < t(x)$, e per $x > 0$ la concavità è rivolta verso l'alto, essendo $g(x) > t(x)$.

	-1		0		1	
$2x^3$	-		-	0	+	+
$1-x^2$	-	0	+		+	0
$\frac{2x^3}{1-x^2}$	+	0	-	0	+	0

ESERCIZIO GUIDA

Troviamo i punti di massimo e di minimo relativo e di flesso orizzontale della funzione:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2.$$

La funzione è definita e continua per ogni $x \in \mathbb{R}$.

- Calcoliamo la derivata prima e determiniamo il suo dominio.

$$f'(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x - 2)^2.$$

$f'(x)$ esiste $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Risolviamo l'equazione $f'(x) = 0$. Si ha $x(x - 2)^2 = 0$ per $x = 0$ e $x = 2$.
Quindi $x = 0$ e $x = 2$ sono punti stazionari.

- Studiamo il segno di $f'(x)$.

$$x(x - 2)^2 > 0.$$

Il primo fattore è positivo per $x > 0$ e il secondo fattore $(x - 2)^2 > 0 \quad \forall x \neq 2$.

Dallo schema deduciamo che:

- per $x = 0$ si ha un punto di minimo relativo di coordinate $(0; 0)$, essendo $f(0) = 0$;
- per $x = 2$ si ha un flesso orizzontale perché il segno della derivata prima è lo stesso in un intorno di 2; tale punto ha coordinate $\left(2; \frac{4}{3}\right)$, essendo $f(2) = \frac{4}{3}$.

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
x	$-$	0	$+$		$+$
$(x-2)^2$	$+$		$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	$\nearrow$
		min		flesso orizzontale	

ESERCIZIO GUIDA

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2} & \text{se } x < 0 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

troviamo i suoi punti di massimo e di minimo relativo, distinguendo i punti stazionari da quelli angolosi.

La funzione è ovunque definita e continua in $\mathbb{R}$.

- Calcoliamo la derivata prima e determiniamo il suo dominio:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2(x-1)}{(x-1)^3} = \frac{-2}{(x-1)^2} & \text{se } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Per $x = 0$, $f'(x)$ non esiste in quanto $f'_-(0) = 2$ e $f'_+(0) = -2$.

- $f'(x) = 0$ soltanto se:

$$2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1.$$

Quindi $x = 1$ è l'unico punto stazionario.

- Studiamo il segno di $f'(x)$.

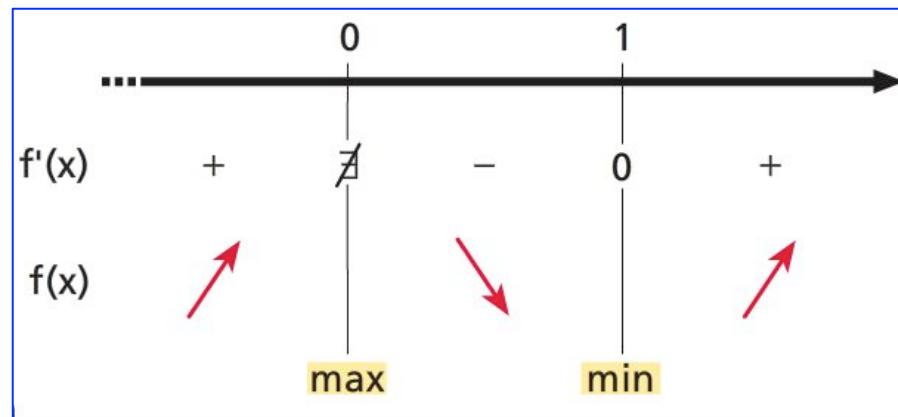
Per $x < 0$, $\frac{-2}{(x-1)^3} > 0$ se $x-1 < 0$

ovvero $x < 1$; quindi:

$$f'(x) > 0 \quad \forall x < 0.$$

Per $x > 0$, $2x - 2 > 0$ se $x > 1$.

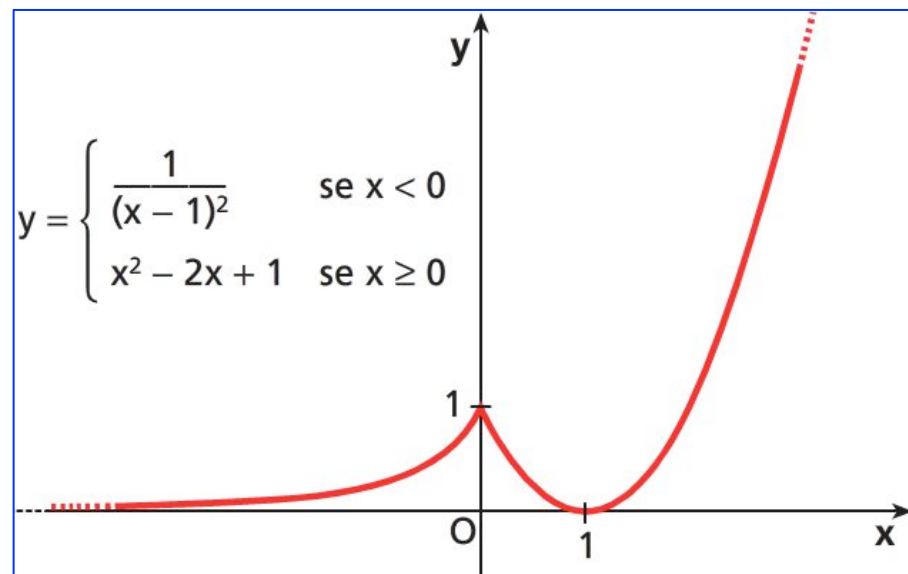
Tracciamo il quadro dei segni di $f'(x)$ e degli intervalli in cui $f(x)$ è crescente e decrescente



Dallo schema deduciamo che $x = 0$ è un punto di massimo relativo e $x = 1$ è un punto di minimo relativo.

Essendo $f(0) = 1$ e $f(1) = 0$, i corrispondenti punti del grafico sono $(0; 1)$ e $(1; 0)$.

Osservazione. Il punto $x = 0$ è un punto di massimo perché la funzione, pur non essendo derivabile, è continua e la derivata cambia segno nell'intorno di 0, come richiede la condizione sufficiente.



ESERCIZIO GUIDA

Troviamo i punti di massimo e di minimo relativo della seguente funzione, specificando se sono punti di cuspid:

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-3)^2}.$$

La funzione è continua in $\mathbb{R}$.

- Calcoliamo la derivata prima e determiniamo il suo dominio. Poiché si può scrivere $f(x) = (x-3)^{\frac{2}{3}}$, si ha:

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-3)^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-3}}.$$

La derivata non esiste per $x = 3$.

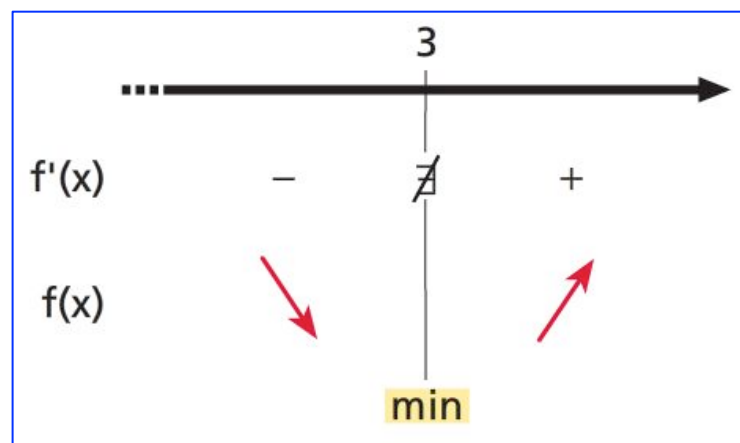
- Risolviamo $f'(x) = 0$. L'equazione

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{x-3}} = 0$$

non ha soluzioni, quindi non ci sono punti stazionari.

- Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \rightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{x-3}} > 0 \rightarrow x > 3.$$

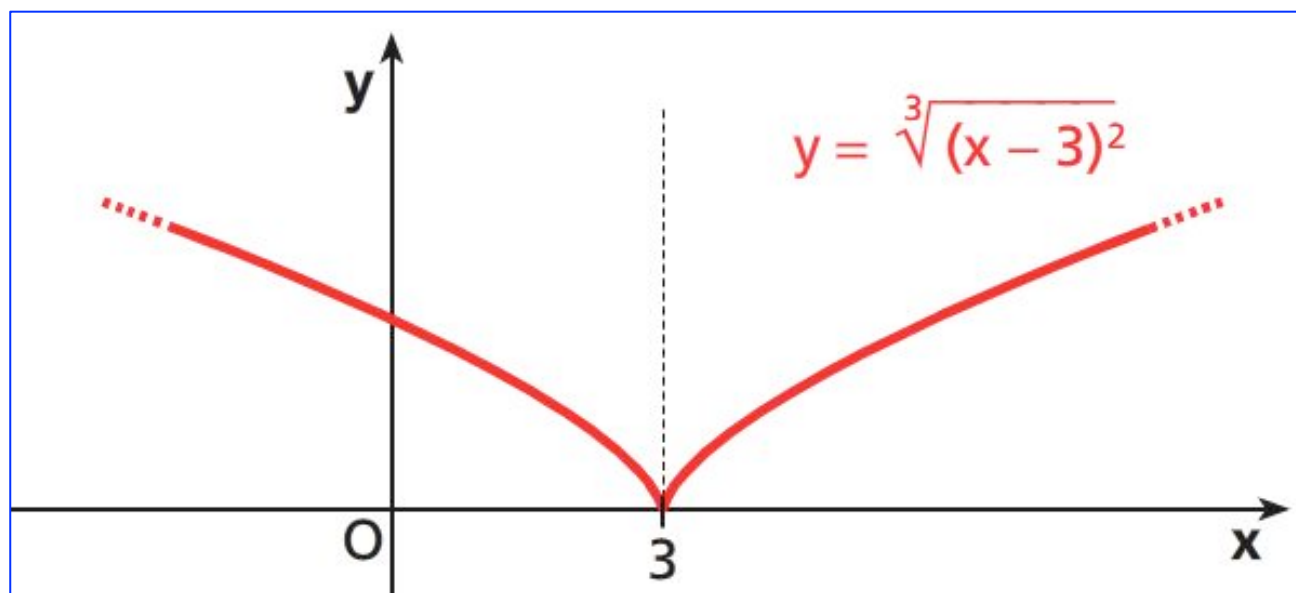


In $x = 3$ si ha un punto di minimo relativo, di coordinate $(3; 0)$.

Notiamo che nel punto $x = 3$ la derivata non esiste perché:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = +\infty.$$

Il punto $x = 3$ è una cuspide.



ESERCIZIO GUIDA

Troviamo i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1, \text{ nell'intervallo } -2 \leq x \leq 1.$$

La funzione è definita e continua $\forall x \in [-2; 1]$.

Per il teorema di Weierstrass esistono il minimo e il massimo assoluti nell'intervallo $[-2; 1]$.

Determiniamo i minimi e i massimi relativi.

- Calcoliamo la derivata prima e il suo dominio.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1).$$

$$f'(x) \text{ esiste } \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Risolviamo l'equazione $f'(x) = 0$:

$$4x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = \pm 1.$$

Quindi $x = 0$ e $x = \pm 1$ sono punti stazionari.

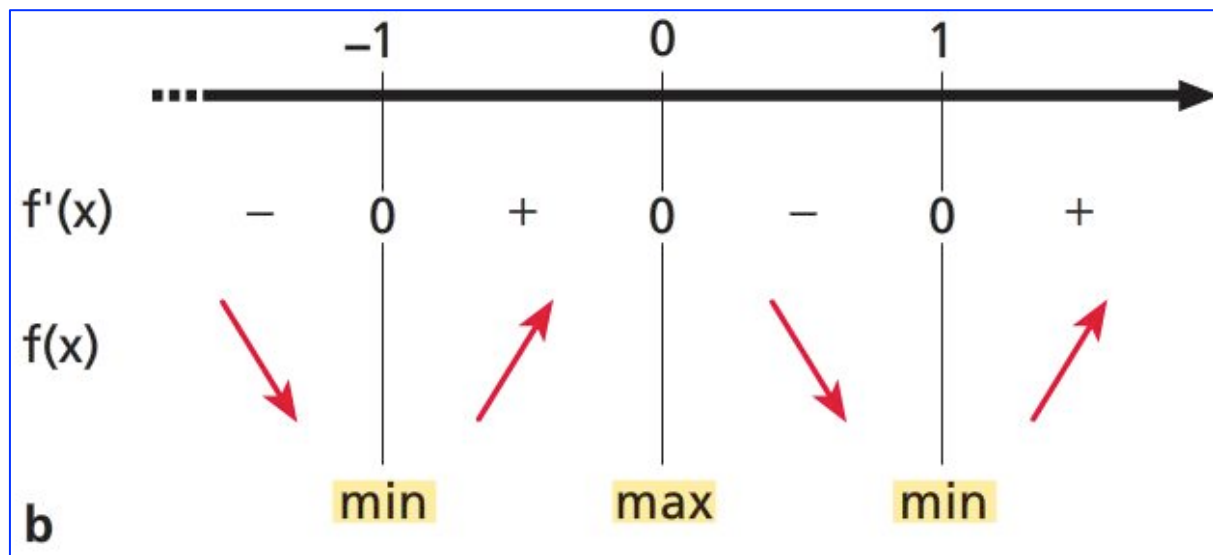
- Studiamo il segno di $f'(x)$.

$$f'(x) > 0 \text{ se } 4x(x^2 - 1) > 0.$$

$$4x > 0 \rightarrow x > 0.$$

$$x^2 - 1 > 0 \rightarrow x < -1 \vee x > 1.$$

		-1		0		1	
							→
4x	-		-	0	+		+
x ² -1	+	0	-		-	0	+
f'(x)	-	0	+	0	-	0	+



Analizziamo il quadro di confronto della derivata e della funzione (figura *b*).

In $x = \pm 1$ la funzione ha due minimi relativi di coordinate $(-1; 0)$ e $(1; 0)$, essendo $f(-1) = 0$ e $f(1) = 0$.

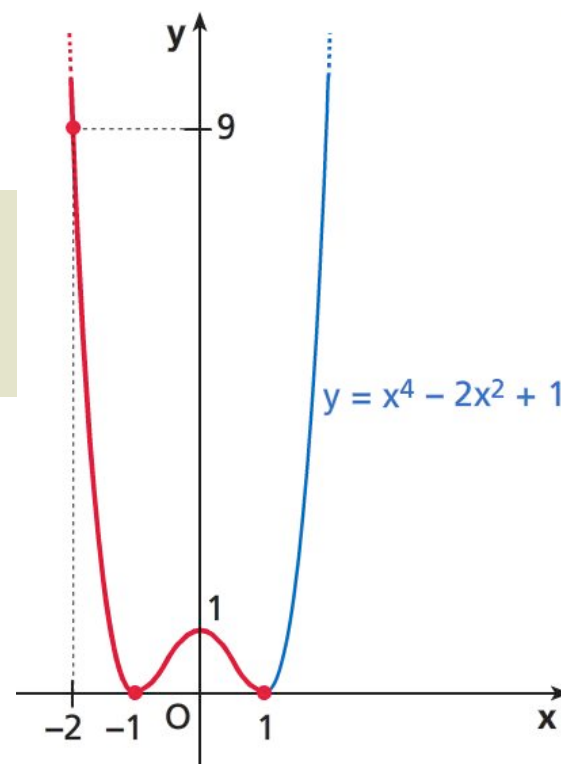
In $x = 0$ la funzione ha un massimo relativo di coordinate $(0; 1)$, essendo $f(0) = 1$.

Per determinare ora i massimi e i minimi assoluti calcoliamo il valore della funzione agli estremi dell'intervallo assegnato:

$$f(-2) = 16 - 8 + 1 = 9, f(1) = 0.$$

Confrontando le ordinate dei punti considerati si può affermare che il minimo assoluto si ha in $x = -1$ e $x = 1$, mentre il massimo assoluto è in $x = -2$.

Per chiarire il risultato osserviamo il grafico della funzione (figura c). Il massimo relativo in $(0; 1)$ non è il massimo assoluto nell'intervallo.



ESERCIZIO GUIDA

Data la funzione $y = \frac{x}{x^2 - 1}$, troviamo gli intervalli in cui il suo grafico rivolge la concavità verso l'alto o verso il basso.

La funzione è definita per $x \neq \pm 1$. Calcoliamo le derivate prima e seconda:

$$y' = \frac{1 \cdot (x^2 - 1) - x(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2};$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{-2x(x^2 - 1)^2 - (-x^2 - 1) \cdot 2(x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{-2x(x^2 - 1)^2 + 4x(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{2x \cancel{(x^2 - 1)} [-(x^2 - 1) + 2(x^2 + 1)]}{(x^2 - 1)^{\cancel{4}^3}} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}. \end{aligned}$$

Studiamo il segno della derivata seconda ponendo:

$$\frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} > 0.$$

Studiamo quando sono positivi i fattori N_1 e N_2 del numeratore e il denominatore D :

$$N_1: x > 0;$$

$$N_2: x^2 + 3 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$D: (x^2 - 1)^3 > 0 \quad \text{se} \quad x^2 - 1 > 0 \rightarrow \\ \rightarrow x < -1 \vee x > 1.$$

Compiliamo il quadro dei segni.

Per $x < -1 \vee 0 < x < 1$ la concavità è rivolta verso il basso; per $-1 < x < 0 \vee x > 1$ la concavità è rivolta verso l'alto.

	-1		0		1		
N_1	-	-	0	+	+	+	
N_2	+	+	+	+	+	+	
D	+	0	-	-	0	+	
$f''(x)$	-	$\neq$	+	0	-	$\neq$	+
$f(x)$							

ESERCIZIO GUIDA

Troviamo i punti di flesso delle funzioni: a) $f(x) = -x(x+1)^3$; b) $g(x) = 2\sqrt[3]{x+2}$.

a) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda:

$$f'(x) = -(x+1)^3 - x \cdot 3 \cdot (x+1)^2 = (x+1)^2(-x-1-3x) = (x+1)^2(-4x-1);$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2(x+1) \cdot (-4x-1) + (x+1)^2(-4) = (x+1)[2(-4x-1) + (x+1)(-4)] = \\ &= (x+1)(-8x-2-4x-4) = (x+1)(-12x-6) = -6(x+1)(2x+1). \end{aligned}$$

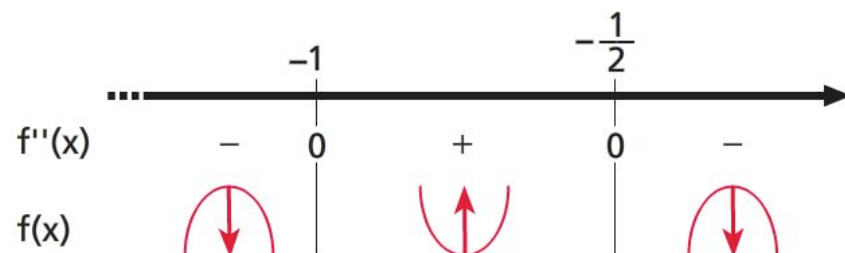
La derivata seconda è una funzione continua, quindi possiamo cercare i punti di flesso $f''(x) = 0$:

$$-6(x+1)(2x+1) = 0 \rightarrow x = -1 \quad \vee \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Studiamo il segno di $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 \quad \text{se} \quad -6(x+1)(2x+1) > 0 &\rightarrow \\ \rightarrow (x+1)(2x+1) < 0 &\rightarrow -1 < x < -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Compiliamo il quadro di confronto della derivata seconda e della funzione.



Dal quadro si deduce che i punti $x_1 = -1$ e $x_2 = -\frac{1}{2}$ sono punti di flesso.

Essendo $f'(-1) = 0$ e $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \neq 0$, $x_1 = -1$ è un flesso orizzontale e $x_2 = -\frac{1}{2}$ è un flesso obliquo.

b) La funzione è definita $\forall x \in \mathbb{R}$. Calcoliamo le derivate prima e seconda:

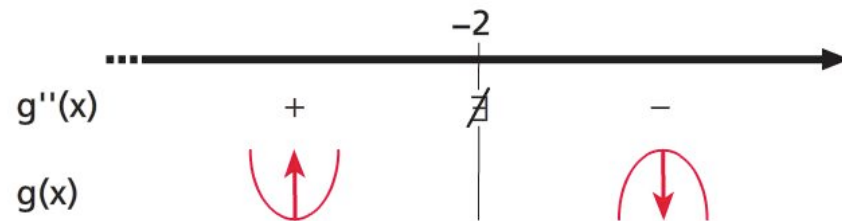
$$g'(x) = 2 \cdot \frac{1}{3}(x+2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}; \quad g''(x) = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)(x+2)^{-\frac{5}{3}} = -\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^5}}.$$

La derivata seconda non esiste in $x = -2$ ed è positiva per $x < -2$ e negativa per $x > -2$.

Il punto $x = -2$ è di flesso.

Poiché in -2 la $g'(x)$ non esiste e

$\lim_{x \rightarrow -2} g'(x) = +\infty$, il flesso è verticale.



ESERCIZIO GUIDA

Scriviamo le equazioni delle tangenti inflessionali nei punti di flesso $x_1 = -1$ e $x_2 = -\frac{1}{2}$ della funzione $f(x) = -x(x+1)^3$ dell'esercizio guida 162.

Abbiamo già visto che, essendo $f'(-1) = 0$, in $x_1 = -1$ c'è un flesso orizzontale.

Essendo $y_1 = f(-1) = 0$, la tangente inflessionale ha equazione $y = y_1$, ossia $y = 0$.

In $x_2 = -\frac{1}{2}$ c'è un flesso obliquo e $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} = m$ è il coefficiente angolare della tangente inflessionale.

Poiché $y_2 = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{16}$, l'equazione della tangente inflessionale è:

$$y - y_2 = m(x - x_2) \rightarrow y - \frac{1}{16} = \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{2}\right) \rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{16}.$$

ESERCIZIO GUIDA

Troviamo i punti di massimo, di minimo e di flesso orizzontale delle seguenti funzioni con il metodo delle derivate successive:

a) $f(x) = x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 2x^2$; b) $f(x) = \sin x + \cos x$.

a) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

- Calcoliamo: $f'(x) = 4x^3 - 8x^2 + 4x = 4x(x^2 - 2x + 1) = 4x(x - 1)^2$.

- Poniamo $f'(x) = 0$:

$$4x(x - 1)^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1.$$

- Calcoliamo ora la derivata seconda:

$$f''(x) = 4(x - 1)^2 + 4x \cdot 2(x - 1) = 4(x - 1)(x - 1 + 2x) = 4(x - 1)(3x - 1).$$

- Calcoliamo il valore della derivata seconda in $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$.

Per $x = 0$ si ha: $f''(0) = 4(-1) \cdot (-1) = 4$.

Poiché $f'(0) = 0$ e $f''(0) > 0$, in $x_1 = 0$ si ha un minimo.

Per $x = 1$ si ha: $f''(1) = 4 \cdot (0) \cdot (2) = 0$.

Poiché $f''(1) = 0$ dobbiamo calcolare la derivata successiva $f'''(x)$:

$$f'''(x) = 4(3x - 1) + 4(x - 1) \cdot 3 = 12x - 4 + 12x - 12 = 24x - 16.$$

Calcoliamo ora il valore della derivata terza in $x_2 = 1$:

$$f'''(1) = 24 - 16 = 8.$$

Poiché $f'(1) = 0$, $f''(1) = 0$ e $f'''(1) \neq 0$, allora $x_2 = 1$ è un punto di flesso orizzontale.

b) La funzione $f(x) = \sin x + \cos x$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è periodica di periodo 2π , quindi limitiamo il suo studio all'intervallo $[0; 2\pi]$.

- Calcoliamo: $f'(x) = \cos x - \sin x$.
- Poniamo $f'(x) = 0$: $\cos x - \sin x = 0$.

Dividiamo per $\cos x$, con $x \neq \frac{\pi}{2} \wedge x \neq \frac{3}{2}\pi$:

$$1 - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \rightarrow 1 - \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{5}{4}\pi.$$

- Calcoliamo la derivata seconda: $f''(x) = -\sin x - \cos x$.

- Sostituiamo in $f''(x)$ i valori x_1 e x_2 appena trovati:

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}; \quad f''\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\operatorname{sen}\frac{5}{4}\pi - \cos\frac{5}{4}\pi = \sqrt{2}.$$

Essendo $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ e $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$, $x_1 = \frac{\pi}{4}$ è un punto di massimo;

essendo $f'\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 0$ e $f''\left(\frac{5}{4}\pi\right) > 0$, $x_2 = \frac{5}{4}\pi$ è un punto di minimo.

ESERCIZIO GUIDA

Troviamo i punti di flesso della funzione $f(x) = -2x^4 + 4x^3 + 3x + 1$ con il metodo delle derivate successive.

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Calcoliamo:

$$f'(x) = -8x^3 + 12x^2 + 3; \quad f''(x) = -24x^2 + 24x.$$

Troviamo gli zeri della derivata seconda ponendo $f''(x) = 0$:

$$-24x^2 + 24x = 0 \rightarrow 24x(-x + 1) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1.$$

Calcoliamo la derivata terza, $f'''(x) = -48x + 24$, e troviamo il segno che essa assume nei punti $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$:

$$f'''(0) = 24 > 0$$

$$f'''(1) = -48 + 24 = -24 < 0.$$

Il punto $x_1 = 0$ è di flesso ascendente, $x_2 = 1$ è di flesso discendente.

ESERCIZIO GUIDA

Data la funzione $y = \frac{ax}{(bx - 1)^2}$, con $a \neq 0$, determiniamo a e b in modo che il grafico che la rappresenta abbia un estremo relativo, cioè un minimo o un massimo, nel punto $\left(-1; -\frac{1}{4}\right)$.

Per trovare i valori di a e b , servono due condizioni che, poste a sistema, forniranno i valori richiesti.

1. Il punto di coordinate $\left(-1; -\frac{1}{4}\right)$ appartiene alla funzione, quindi sostituendo i valori -1 e $-\frac{1}{4}$ nell'espressione della funzione data si ha:

$$\frac{1}{4} = \frac{a}{(-b-1)^2} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{a}{(b+1)^2} \rightarrow (b+1)^2 = 4a, \quad \text{con } b \neq -1.$$

2. Poiché il punto $\left(-1; -\frac{1}{4}\right)$ deve essere un estremo relativo e nel suo dominio la funzione data è derivabile, in $x = -1$ la derivata prima di y si deve annullare.

Calcoliamo la derivata prima:

$$y' = \frac{a(bx-1)^2 - ax \cdot 2 \cdot (bx-1) \cdot b}{(bx-1)^4} = \frac{a(\cancel{bx-1})(bx-1-2bx)}{(bx-1)^{\cancel{4}^3}} = \frac{a(-bx-1)}{(bx-1)^3}.$$

Calcoliamo y' in $x = -1$ e poniamo il risultato uguale a 0, cioè $y'(-1) = 0$:

$$\frac{a \cdot (b-1)}{(-b-1)^3} = 0 \rightarrow a(b-1) = 0, \quad \text{con } b \neq -1.$$

Poniamo a sistema le due equazioni, con la condizione $b \neq -1$ e con $a \neq 0$ per ipotesi:

$$\begin{cases} (b+1)^2 = 4a \\ a(b-1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (b+1)^2 = 4a \\ b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4 = 4a \\ b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Sostituendo nella funzione data, abbiamo la funzione richiesta: $y = \frac{x}{(x-1)^2}$.

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo i coefficienti a, b, c, d in modo che il grafico della funzione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ passi per $(0; 1)$ e abbia un flesso orizzontale in $(-1; 0)$.

Per determinare a, b, c, d servono quattro condizioni ricavabili da:

1. passaggio per $(0; 1)$;
2. passaggio per $(-1; 0)$;
3. punto di flesso: $y''(-1) = 0$;
4. tangente orizzontale nel punto di flesso: $y'(-1) = 0$.

Esprimiamo le condizioni analiticamente:

1. $1 = d$;
2. $0 = -a + b - c + d$;
3. calcoliamo la derivata prima e seconda: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $y'' = 6ax + 2b$; imponiamo che sia $y''(-1) = 0$, sostituendo -1 a x nella derivata seconda: $-6a + 2b = 0$;
4. imponiamo che sia $y'(-1) = 0$, sostituendo -1 nella derivata prima: $3a - 2b + c = 0$.

Mettiamo ora a sistema le quattro condizioni e risolviamo:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1 = d \\ 0 = -a + b - c + d \\ -6a + 2b = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} 1 = d \\ 0 = -a + 3a - c + 1 \\ b = 3a \\ 3a - 6a + c = 0 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ 2a - c + 1 = 0 \\ b = 3a \\ -3a + c = 0 \end{cases} \rightarrow \\ \begin{cases} d = 1 \\ 2a - 3a + 1 = 0 \\ b = 3a \\ c = 3a \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ -a + 1 = 0 \\ b = 3a \\ c = 3a \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 3 \\ d = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Sostituendo nella funzione iniziale, otteniamo quella cercata: $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.