

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo  
MATERIA: Matematica

# Integrali indefiniti



# DEFINIZIONE DI INTEGRALE INDEFINITO

# Le primitive

Vogliamo ora affrontare il problema inverso della derivazione: data una funzione, esiste una funzione la cui derivata sia uguale alla funzione data? Per esempio, data  $f(x) = 2x$ , ci chiediamo se esiste una funzione  $F(x)$  la cui derivata è  $2x$ . Se consideriamo  $F(x) = x^2$ , si ha che  $F'(x) = 2x$ . Una funzione di questo tipo viene detta *primitiva* di  $f(x)$ .

## DEFINIZIONE

### Primitiva di una funzione

Una funzione  $F(x)$  si dice primitiva della funzione  $f(x)$  definita nell'intervallo  $[a; b]$  se  $F(x)$  è derivabile in tutto  $[a; b]$  e la sua derivata è  $f(x)$ :

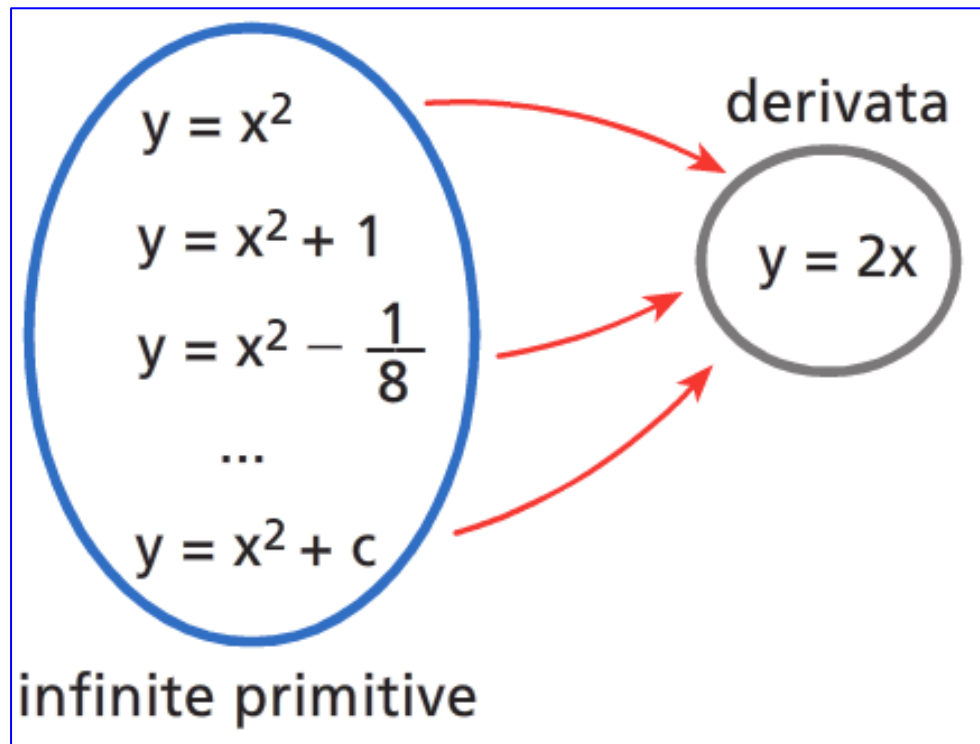
$$F'(x) = f(x).$$

## ESEMPIO

Data la funzione  $f(x) = 3 \sin x$ , la funzione  $F(x) = -3 \cos x$  è una primitiva di  $f(x)$  perché:

$$F'(x) = 3 \sin x = f(x).$$

La primitiva di una funzione, se esiste, non è unica. Poiché  $F(x) = x^2$  ha come derivata  $2x$ , allora  $x^2$  è una primitiva di  $2x$ . Osserviamo però che anche  $x^2 + 1$ ,  $x^2 - \frac{1}{8}$  e in generale  $x^2 + c$  (con  $c$  costante reale) hanno come derivata  $2x$ , quindi esistono infinite primitive di  $2x$ .



◀ **Figura 1** Ogni funzione del tipo  $y = x^2 + c$  ha per derivata  $2x$ , quindi è una primitiva di  $y = 2x$ .

**In generale**, se una funzione  $f(x)$  ammette una primitiva  $F(x)$ , allora ammette infinite primitive del tipo  $F(x) + c$ , con  $c$  numero reale qualunque. Infatti, poiché la derivata di una costante è nulla:

$$D[F(x) + c] = F'(x) = f(x), \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Viceversa, se due funzioni  $F(x)$  e  $G(x)$  sono primitive della stessa funzione  $f(x)$ , allora le due funzioni differiscono per una costante,

$$D[F(x) - G(x)] = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

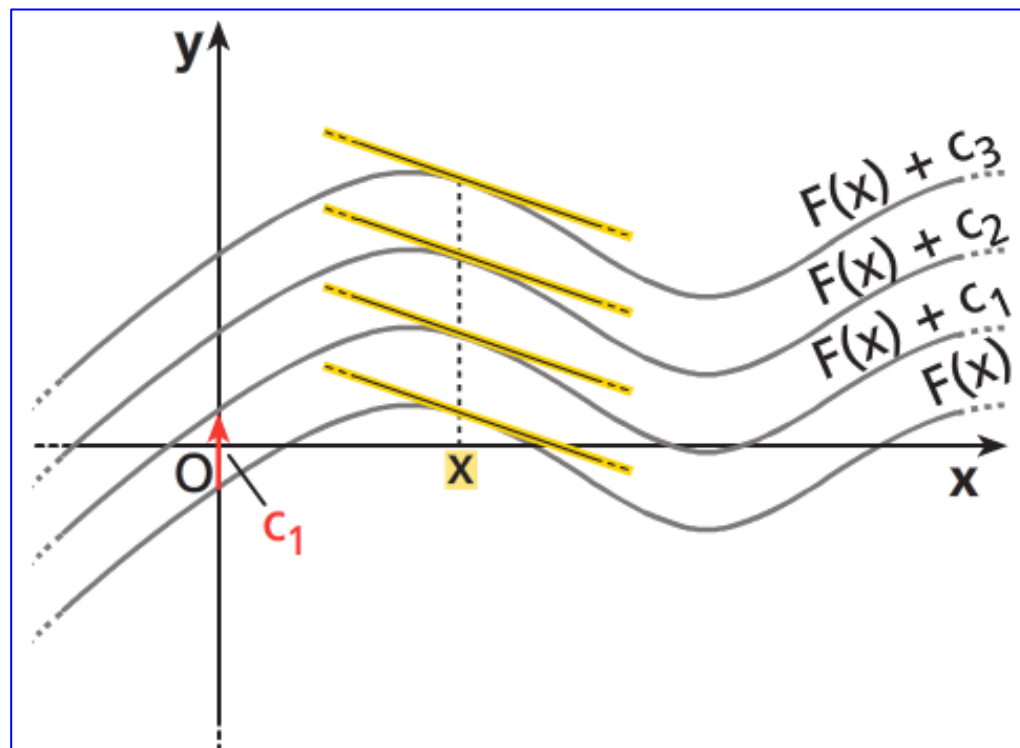
e perciò

$$F(x) - G(x) = c.$$

Concludiamo quindi che:

se  $F(x)$  è una primitiva di  $f(x)$ , allora le funzioni  $F(x) + c$ , con  $c$  numero reale qualsiasi, sono **tutte e sole** le primitive di  $f(x)$ .

- Poiché tutte le primitive di una funzione  $f(x)$  sono funzioni del tipo  $F(x) + c$ , geometricamente sono rappresentate da infinite curve piane ottenute dal grafico di  $F(x)$  mediante una traslazione verticale di vettore  $\vec{v}(0; c)$ ; a ogni valore di  $c$  corrisponde una curva.



◀ **Figura 2** Funzioni i cui grafici sono traslati di un vettore del tipo  $(0; c)$ . Tutte le funzioni hanno la stessa derivata perché nei punti con la stessa ascissa hanno tangente parallela.

# L'integrale indefinito

Riprendiamo l'esempio della funzione  $f(x) = 2x$ . Diamo all'insieme delle sue primitive  $x^2 + c$ , con  $c$  numero reale qualunque, il nome di *integrale indefinito* di  $f(x) = 2x$  e usiamo questa scrittura:

$$\int 2x \, dx = x^2 + c$$

## DEFINIZIONE

### Integrale indefinito

Si chiama integrale indefinito della funzione  $f(x)$ , e si indica con

$\int f(x) \, dx$ , l'insieme di tutte le primitive  $F(x) + c$  di  $f(x)$ , con  $c$  numero reale qualunque.

$$\int f(x) \, dx = \underline{F(x) + c}$$


$$D[F(x) + c] = f(x)$$

Nella scrittura  $\int f(x) dx$  la funzione  $f(x)$  è detta **funzione integranda** e la variabile  $x$  **variabile di integrazione**.

### ESEMPIO

L'integrale indefinito di  $\cos x$  è l'insieme delle primitive di  $\cos x$ , cioè  $\sin x + c$ . Scriviamo:

$$\int \cos x dx = \sin x + c.$$

$$\int \cos x dx = \underline{\sin x + c}$$

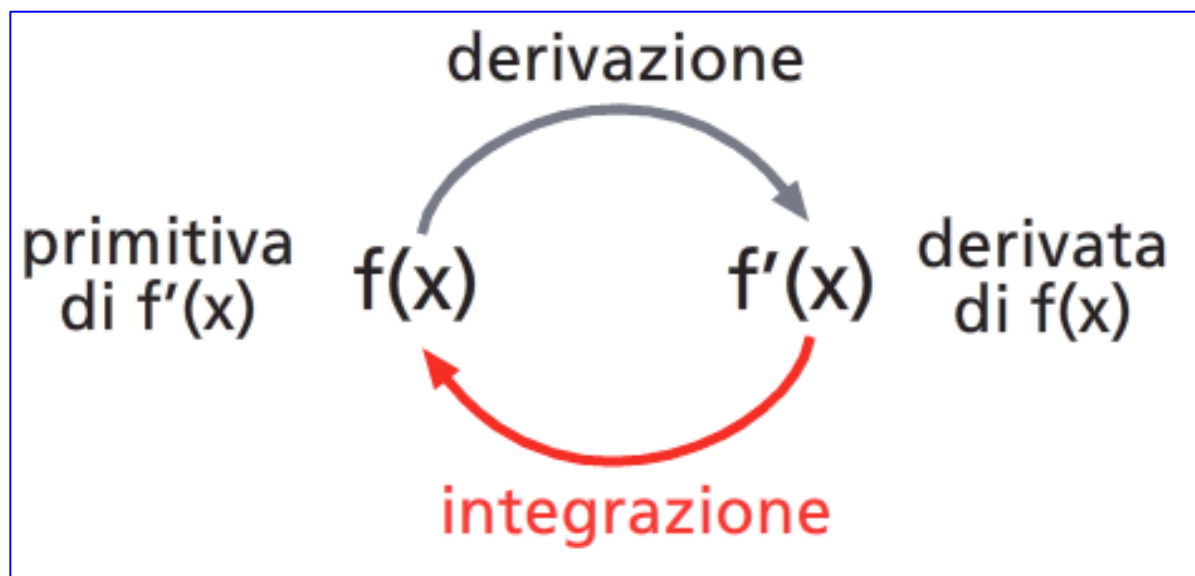

$$D[\sin x + c] = \cos x$$

- Dalla definizione precedente, poiché

$$DF(x) = f(x),$$

segue che  $D\left[\int f(x) dx\right] = f(x)$ .

Questo significa che l'integrazione indefinita agisce come operazione inversa della derivazione.



Una funzione che ammette una primitiva (e quindi infinite primitive) si dice **integrabile**.

Quali sono le funzioni integrabili? Si può dimostrare che è valido il seguente teorema.

## TEOREMA

### Condizione sufficiente di integrabilità

Se una funzione è continua in  $[a; b]$ , allora ammette primitive nello stesso intervallo.

● Sappiamo invece che non sempre una funzione continua è derivabile. Per esempio, ci sono funzioni continue con punti angolosi, e in tali punti non sono derivabili.

Tuttavia, non è sempre facile determinare primitive anche di funzioni continue abbastanza semplici. Per esempio, l'integrale  $\int \frac{\sin x}{x} dx$ , con  $x \neq 0$ , non è calcolabile con i metodi che esamineremo in questo capitolo.

# Le proprietà dell'integrale indefinito

## PROPRIETÀ

### Prima proprietà di linearità

L'integrale indefinito di una somma di funzioni integrabili è uguale alla somma degli integrali indefiniti delle singole funzioni:

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Infatti, se deriviamo entrambi i membri, otteniamo rispettivamente:

$$D\left[\int [f(x) + g(x)] dx\right] = f(x) + g(x);$$

$$D\left[\int f(x) dx + \int g(x) dx\right] = D\left[\int f(x) dx\right] + D\left[\int g(x) dx\right] = f(x) + g(x).$$

I due membri hanno la stessa derivata, quindi rappresentano le primitive della stessa funzione.

## ESEMPIO

$$\int (3x^2 + \cos x) dx = \int 3x^2 dx + \int \cos x dx = x^3 + c_1 + \sin x + c_2.$$

Si è soliti scrivere una sola costante  $c = c_1 + c_2$ , per non appesantire la notazione. Pertanto:

$$\int (3x^2 + \cos x) dx = x^3 + \sin x + c.$$

## PROPRIETÀ

### Seconda proprietà di linearità

L'integrale del prodotto di una costante per una funzione integrabile è uguale al prodotto della costante per l'integrale della funzione:

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx.$$

Infatti, se deriviamo entrambi i membri, otteniamo rispettivamente:

$$D\left[\int k \cdot f(x) dx\right] = k \cdot f(x); \quad D\left[k \cdot \int f(x) dx\right] = k D\left[\int f(x) dx\right] = k \cdot f(x).$$

I due membri hanno la stessa derivata, quindi rappresentano le primitive della stessa funzione.

## ESEMPIO

$$\int 4 \cos x \, dx = 4 \cdot \int \cos x \, dx = 4 \sin x + c.$$

- Le proprietà di linearità si possono esprimere in un'unica formula:

$$\int [c_1 f(x) + c_2 g(x)] \, dx = c_1 \int f(x) \, dx + c_2 \int g(x) \, dx.$$

Si dice anche che **l'integrale è un operatore lineare**.

- Non esistono proprietà riguardanti l'integrale di un prodotto o di un quoziente di funzioni, quindi è necessario studiare per tali casi altri metodi risolutivi.

- Occorre ricordare sempre che, in generale,

$$\begin{aligned} \int f(x) g(x) \, dx &\neq \\ &\neq \int f(x) \, dx \cdot \int g(x) \, dx \text{ e} \\ \int \frac{f(x)}{g(x)} \, dx &\neq \frac{\int f(x) \, dx}{\int g(x) \, dx} \end{aligned}$$

# INTEGRALI INDEFINITI IMMEDIATI

## ■ L'integrale di $x^\alpha$ , con $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \text{ con } \alpha \neq -1$$

Infatti, derivando, abbiamo  $D\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\right] = \frac{1}{\alpha+1} \cdot (\alpha+1)x^{\alpha+1-1} = x^\alpha$

### ESEMPIO

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c. \text{ Infatti, derivando, abbiamo: } D\left[\frac{x^3}{3} + c\right] = \frac{3x^{3-1}}{3} = x^2$$

### Casi particolari

- $\int dx = x + c;$                       infatti  $\int dx = \int 1 dx = \int x^0 dx = x + c$
- $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c;$

- $\int \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c;$

infatti  $\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c.$

### ESEMPIO

1. Calcoliamo  $\int (2x^5 - 4x + 3) \, dx$ . Applichiamo la prima proprietà di linearità:

$$\int (2x^5 - 4x + 3) \, dx = \int 2x^5 \, dx - \int 4x \, dx + \int 3 \, dx.$$

Applichiamo la seconda proprietà di linearità:

$$\begin{aligned} \int 2x^5 \, dx - \int 4x \, dx + \int 3 \, dx &= 2 \cdot \int x^5 \, dx - 4 \cdot \int x \, dx + 3 \cdot \int dx = \\ &= 2 \cdot \frac{x^6}{6} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 3 \cdot x + c = \frac{x^6}{3} - 2x^2 + 3x + c. \end{aligned}$$

2. Calcoliamo  $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ . Scriviamo

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}},$$

quindi:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + c = 2 \cdot \sqrt{x} + c.$$

## L'integrale di $\frac{1}{x}$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

Infatti  $D[\ln|x| + c] = \frac{1}{x}$  perché:

se  $x > 0$ ,  $D \ln|x| = D \ln x = \frac{1}{x}$ ;

se  $x < 0$ ,  $D \ln|x| = D \ln(-x) = \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

### ESEMPIO

Calcoliamo  $\int \frac{3x^2 + 2}{x} dx$ .

$$\int \frac{3x^2 + 2}{x} dx = \int \left( 3x + \frac{2}{x} \right) dx =$$

$$= 3 \int x dx + 2 \int \frac{1}{x} dx = \frac{3}{2} x^2 + 2 \ln |x| + c$$

## ■ L'integrale della funzione esponenziale

$$\int e^x dx = e^x + c$$

infatti  $D[e^x + c] = e^x$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + c$$

infatti  $D\left[\frac{1}{\ln a} \cdot a^x + c\right] = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \cdot \ln a = a^x$

### ESEMPIO

Calcoliamo  $\int(2e^x + 5^x) dx$ .

Applichiamo le proprietà di linearità:

$$\int(2e^x + 5^x) dx = 2 \int e^x dx + \int 5^x dx = 2e^x + \frac{1}{\ln 5} \cdot 5^x + c$$

## L'integrale delle funzioni seno e coseno

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

infatti  $D[-\cos x + c] = -(-\sin x) = \sin x$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

infatti  $D[\sin x + c] = \cos x$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c$$

infatti  $D[\tan x + c] = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c$$

infatti  $D[-\operatorname{cotg} x + c] = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

### ESEMPIO

Calcoliamo  $\int \left( 3 \operatorname{sen} x - \frac{4}{\cos^2 x} \right) dx$ .

Applichiamo le proprietà di linearità:

$$\begin{aligned} \int \left( 3 \operatorname{sen} x - \frac{4}{\cos^2 x} \right) dx &= 3 \int \operatorname{sen} x dx - 4 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \\ &= 3 \cdot (-\cos x) - 4 \cdot \operatorname{tg} x + c = -3 \cos x - 4 \operatorname{tg} x + c. \end{aligned}$$

## L'integrale delle funzioni le cui primitive sono le funzioni goniometriche inverse

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \underline{\arcsen x + c}$$

Poiché  $D[\arcsen x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

● Utilizzando invece l'arcocotangente:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \\ &= - \int -\frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= -\operatorname{arccotg} x + c. \end{aligned}$$

● Utilizzando invece l'arcocoseno:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \\ &= - \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= -\arccos x + c. \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$$

Poiché  $D[\operatorname{arctg} x] = \frac{1}{1+x^2}$

### ESEMPIO

Calcoliamo  $\int \left( \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{7}{1+x^2} \right) dx$ .

Applichiamo le proprietà di linearità:

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{7}{1+x^2} \right) dx &= 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + 7 \int \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= 2 \arcsen x + 7 \arctg x + c. \end{aligned}$$

## ■ L'integrale delle funzioni la cui primitiva è una funzione composta

$$\int [f(x)]^\alpha \underline{f'(x) dx} = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \text{con } \alpha \neq -1$$

Infatti:

$$\begin{aligned} D \left[ \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right] &= \\ &= [f(x)]^\alpha \cdot f'(x). \end{aligned}$$

Si procede analogamente anche per calcolare integrali di altre funzioni composte riconducibili a regole di integrazione diverse:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$



$$D[\ln |f(x)|] = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$$



$$D[e^{f(x)}] = f'(x) e^{f(x)}$$

$$\int f'(x) a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$



$$D\left[\frac{a^{f(x)}}{\ln a}\right] = f'(x) a^{f(x)}$$

$$\int f'(x) \operatorname{sen} f(x) dx = -\cos f(x) + c$$



$$D[-\cos f(x)] = f'(x) \operatorname{sen} f(x).$$

$$\int f'(x) \cos f(x) dx = \operatorname{sen} f(x) + c$$



$$D[\operatorname{sen} f(x)] = f'(x) \cos f(x).$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \operatorname{tg} f(x) + c$$



$$D[\operatorname{tg} f(x)] = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$$

$$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)} dx = -\operatorname{cotg} f(x) + c$$



$$\begin{aligned} D[-\operatorname{cotg} f(x)] &= \\ &= \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}. \end{aligned}$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}} dx = \operatorname{arcsen} f(x) + c$$



$$\begin{aligned} D[\operatorname{arcsen} f(x)] &= \\ &= \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}. \end{aligned}$$

$$\int \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2} dx = \operatorname{arctg} f(x) + c$$



$$\begin{aligned} D[\operatorname{arctg} f(x)] &= \\ &= \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2}. \end{aligned}$$

Le ultime due formule si possono generalizzare:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2 - [f(x)]^2}} dx = \arcsen \frac{f(x)}{|a|} + c$$



$$\begin{aligned} D \left[ \arcsen \frac{f(x)}{|a|} \right] &= \\ &= \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2 - [f(x)]^2}}. \end{aligned}$$

$$\int \frac{f'(x)}{a^2 + [f(x)]^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{f(x)}{a} + c.$$



$$\begin{aligned} D \left[ \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{f(x)}{a} \right] &= \\ &= \frac{f'(x)}{a^2 + [f(x)]^2}. \end{aligned}$$

## ESEMPIO

Calcoliamo i seguenti integrali.

$$1. \int 3x^2 (x^3 + 2)^2 dx = \frac{(x^3 + 2)^3}{3} + c.$$

$$2. \int \operatorname{tg} x dx; \quad \int \operatorname{cotg} x dx.$$

Scriviamo la tangente come rapporto fra seno e coseno e notiamo che, a meno del segno, il numeratore è la derivata del denominatore:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = - \int -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + c.$$

Quindi  $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + c.$

In modo simile si trova che:  $\int \operatorname{cotg} x dx = \ln |\operatorname{sen} x| + c.$

## ESEMPIO

Calcoliamo i seguenti integrali.

$$1. \int 3x^2 (x^3 + 2)^2 dx = \frac{(x^3 + 2)^3}{3} + c.$$

$$2. \int \operatorname{tg} x dx; \quad \int \operatorname{cotg} x dx.$$

Scriviamo la tangente come rapporto fra seno e coseno e notiamo che, a meno del segno, il numeratore è la derivata del denominatore:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = - \int -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + c.$$

Quindi  $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + c.$

In modo simile si trova che:  $\int \operatorname{cotg} x dx = \ln |\operatorname{sen} x| + c.$

3.  $\int x \operatorname{sen} x^2 dx$ .

Osserviamo che, a meno di una costante moltiplicativa,  $x$  è la derivata di  $x^2$ , argomento della funzione seno. Pertanto, moltiplichiamo e dividiamo per 2:

$$\int x \operatorname{sen} x^2 dx = \frac{1}{2} \int 2x \operatorname{sen} x^2 dx = -\frac{1}{2} \cos x^2 + c.$$

4.  $\int 2e^x \cos e^x dx = 2 \int e^x \cos e^x dx = 2 \operatorname{sen} e^x + c$ .

5.  $\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{1+(2x)^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x + c$ .

# Riepilogo

## Integrali immediati delle funzioni fondamentali

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \text{con } \alpha \neq -1$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cotg x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c$$

## Integrali la cui primitiva è una funzione composta

$$\int [f(x)]^{\alpha} f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \text{con } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \operatorname{tg} f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)} dx = -\operatorname{cotg} f(x) + c$$

$$\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}} dx = \operatorname{arcsen} f(x) + c$$

$$\int f'(x) a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2} dx = \operatorname{arctg} f(x) + c$$

$$\int f'(x) \operatorname{sen} f(x) dx = -\cos f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2 - [f(x)]^2}} dx = \operatorname{arcsen} \frac{f(x)}{|a|} + c, \quad \text{con } a \neq 0$$

$$\int f'(x) \cos f(x) dx = \operatorname{sen} f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{a^2 + [f(x)]^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{f(x)}{a} + c, \quad \text{con } a \neq 0$$

# L'INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Quando l'integrale non è di risoluzione immediata può essere utile applicare il **metodo di sostituzione**, che consiste nell'effettuare un cambiamento di variabile che consenta di riscrivere l'integrale dato in una forma che sappiamo risolvere.

### ESEMPIO

Calcoliamo  $\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$ .

- Poniamo  $\sqrt{x} = t$ , ossia  $x = t^2$ .
- Calcoliamo il differenziale:  $dx = 2t dt$ .
- Sostituiamo nell'integrale dato e calcoliamo l'integrale rispetto a  $t$ :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx &= \int \frac{1}{1 + t} 2t dt = 2 \int \frac{t}{1 + t} dt = 2 \int \frac{t + 1 - 1}{1 + t} dt = \\ &= 2 \int dt - 2 \int \frac{1}{t + 1} dt = 2t - 2 \ln|t + 1| + c.\end{aligned}$$

- Utilizzando la posizione iniziale, scriviamo il risultato in funzione di  $x$ :

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} - 2 \ln(\sqrt{x} + 1) + c.$$

● Aggiungiamo e togliamo 1 al numeratore e poi scomponiamo la frazione in:

$$\frac{t + 1}{t + 1} - \frac{1}{t + 1}.$$

● Nella sostituzione abbiamo tolto il valore assoluto perché  $\sqrt{x} + 1$  ha valore sempre positivo.

Il metodo di sostituzione può essere utilizzato anche per calcolare l'integrale di una funzione composta nei casi già esaminati nel paragrafo precedente.

### ESEMPIO

Calcoliamo  $\int 2x \cos x^2 dx$ .

Essendo  $Dx^2 = 2x$ , possiamo utilizzare la regola vista nel paragrafo precedente:

$$\int 2x \cos x^2 dx = \sin x^2 + c.$$

$$\bullet \quad \int f'(x) \cos f(x) dx = \\ = \sin f(x) + c.$$

In alternativa, applichiamo il metodo di sostituzione.

- Poniamo  $t = x^2$ .
- Calcoliamo il differenziale:  $dt = 2x dx$ .
- Sostituiamo nell'integrale e risolviamo:

$$\int 2x \cos x^2 dx = \int \cos t dt = \sin t + c.$$

- Scriviamo il risultato in funzione di  $x$ :

$$\int 2x \cos x^2 dx = \sin x^2 + c.$$

## In generale:

1. Sostituire la variabile d'integrazione  $x$  con un'altra variabile  $t$  legata alla  $x$  dalla relazione  $x=g(t)$ .
2. La funzione  $g(t)$  deve essere derivabile e invertibile  $t=g^{-1}(x)$ .
3. Con queste condizioni la funzione integranda  $f(x)$  diventa:  $f(x)=f[g(t)]$  e il differenziale  $dx$  diventa:  $dx=g'(t)dt$ .

Formula dell'integrazione  
per sostituzione

$$\int f(x) = \int f[g(t)]g'(t)dt$$

# L'INTEGRAZIONE PER PARTI

Date due funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  derivabili, con derivata continua, in un intervallo  $[a; b]$ , consideriamo la derivata del loro prodotto:

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Integriamo entrambi i membri:

$$\int D[f(x) \cdot g(x)] dx = \int [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)] dx,$$

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx.$$

Isolando  $\int f(x) g'(x) dx$ , otteniamo:

formula di **integrazione per parti**

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

La formula è utile nei casi in cui la funzione integranda si può pensare come *prodotto di due fattori*.

$f(x)$  viene chiamato **fattore finito** e  $g'(x) dx$  **fattore differenziale**.

Nell'applicazione della formula, una delle due funzioni, quella del fattore finito, viene soltanto derivata, mentre l'altra, quella del fattore differenziale, viene solo integrata. È quindi importante scegliere opportunamente i due fattori.

### ESEMPIO

$$\begin{aligned} \int \underset{\substack{\uparrow \\ g'}}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{\ln x} dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c = \\ &= \frac{x^2}{2} \left( \ln x - \frac{1}{2} \right) + c. \end{aligned}$$

Abbiamo scelto  $x dx$  come fattore differenziale in quanto sappiamo calcolare la primitiva di  $x$ . Del fattore finito  $\ln x$  sappiamo calcolare la derivata, che si semplifica con la primitiva di  $x$ , in modo da ottenere un integrale semplice da calcolare.

Al secondo membro della formula compare un altro integrale, quindi questo metodo di integrazione risulta utile se riusciamo a passare da un integrale più difficile a uno più facile da calcolare.

## ESEMPIO

Calcoliamo  $\int x \sin x \, dx$ .

Sappiamo calcolare sia la derivata sia la primitiva di entrambe le funzioni. La scelta migliore è quella di derivare  $x$ , perché l'integrale si semplifica:

$$\begin{array}{c} \int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int -\cos x \, dx = \\ \uparrow \quad \uparrow \\ f \quad g' \end{array} = -x \cos x + \sin x + c.$$

● Scegliamo  $x$  come fattore finito, e  $\sin x \, dx$  come fattore differenziale.

Se scegliamo, invece,  $\sin x$  come fattore finito, otteniamo:

$$\int x \sin x \, dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \int \frac{x^2}{2} \cos x \, dx,$$

dove l'integrale a secondo membro è più complicato di quello di partenza.

**In generale**, negli integrali del tipo

$$\int \underline{x^n \sin x \, dx}, \quad \int \underline{x^n \cos x \, dx}, \quad \int \underline{x^n e^x \, dx}$$

$x^n$  si considera come fattore finito, mentre negli integrali del tipo

$$\int \underline{x^n \ln x \, dx}, \quad \int \underline{x^n \operatorname{arctg} x \, dx}, \quad \int \underline{x^n \arcsen x \, dx}$$

$x^n \, dx$  si considera come fattore differenziale.

In particolare, negli integrali

$$\int \underline{\ln x \, dx}, \quad \int \underline{\operatorname{arctg} x \, dx}, \quad \int \underline{\arcsen x \, dx}$$

si considera come fattore differenziale  $x^0 \, dx$ , ossia  $1 \, dx$ .

### ESEMPIO

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + c.$$

● Otteniamo così la regola di integrazione del logaritmo.

# L'INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

Affrontiamo in questo paragrafo il calcolo degli integrali di funzioni razionali fratte:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx,$$

dove il numeratore  $N(x)$  e il denominatore  $D(x)$  sono dei polinomi.

Nelle nostre considerazioni supporremo che il grado del numeratore sia minore del grado del denominatore perché, se ciò non accade, è sempre possibile eseguire la divisione del polinomio  $N(x)$  per il polinomio  $D(x)$ , ottenendo un polinomio quoziente  $Q(x)$  e un polinomio resto  $R(x)$  di grado minore di quello di  $D(x)$ , cioè:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}, \text{ da cui}$$

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int \left[ Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \right] dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx$$

● Considerati la divisione,  $N(x) : D(x)$ , il suo quoziente  $Q(x)$  e il resto  $R(x)$ , è vero che:  
 $N(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$ ,  
da cui, dividendo per  $D(x)$ , otteniamo la relazione che utilizziamo.

Nell'addizione dei due integrali, il primo è calcolabile in quanto è l'integrale di un polinomio; il secondo è l'integrale di una funzione razionale fratta con numeratore di grado inferiore al grado del denominatore.

### ESEMPIO

Calcoliamo  $\int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + 1} dx$ .

Il numeratore ha grado maggiore del denominatore.

Eseguiamo la divisione  $(x^3 + 2x^2 + x + 1) : (x^2 + 1)$ :

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 + x + 1 & x^2 + 1 \\ -x^3 & \\ \hline & 2x^2 + x + 1 \\ -2x^2 & \\ \hline & x + 1 \\ -x & \\ \hline & 1 \end{array}$$

Quindi:

$$Q(x) = x + 2, \quad R(x) = -1.$$

Il rapporto può essere scritto così:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = x + 2 + \frac{-1}{x^2 + 1}.$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + 1} dx &= \int \left( x + 2 + \frac{-1}{x^2 + 1} \right) dx = \\ &= \int x dx + 2 \int dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{x^2}{2} + 2x - \operatorname{arctg} x + c.\end{aligned}$$

Studiamo quindi integrali del tipo  $\int \frac{R(x)}{D(x)} dx$ , con  $R(x)$  polinomio di grado inferiore a quello di  $D(x)$ .

## Il numeratore è la derivata del denominatore

Abbiamo già visto che

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c,$$

ossia l'integrale indefinito di una funzione fratta in cui il numeratore è la derivata del denominatore è uguale al logaritmo del valore assoluto del denominatore.

### ESEMPIO

Calcoliamo  $\int \frac{6x - 2}{3x^2 - 2x - 1} dx$ .

Osserviamo che  $D[3x^2 - 2x - 1] = 6x - 2$ , quindi:

$$\int \frac{6x - 2}{3x^2 - 2x - 1} dx = \ln|3x^2 - 2x - 1| + c.$$

## ■ Il denominatore è di primo grado: $\int \frac{1}{ax+b} dx$

Anche l'integrale  $\int \frac{1}{ax+b} dx$ , con  $a \neq 0$ , in cui la frazione algebrica ha il denominatore di primo grado, può essere ricondotto al caso in cui il numeratore è la derivata del denominatore.

Infatti, basta moltiplicare la frazione per  $\frac{a}{a}$  e applicare la seconda proprietà di linearità:

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \int \frac{a}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c.$$

●  $a$  è la derivata di  $ax+b$

### ESEMPIO

Calcoliamo  $\int \frac{1}{3x-2} dx$ .

$$\int \frac{1}{3x-2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3}{3x-2} dx = \frac{1}{3} \ln|3x-2| + c.$$

## Il denominatore è di secondo grado:

$$\int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} dx$$

Per calcolare l'integrale

$$\int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} dx, \quad \text{con } a \neq 0,$$

si utilizzano metodi risolutivi diversi a seconda del segno del discriminante del denominatore  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

### Il discriminante è positivo: $\Delta > 0$

#### **ESEMPIO**

Calcoliamo  $\int \frac{5x - 1}{x^2 - x - 2} dx$ .

Il discriminante del denominatore è:  $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$ .

Essendo il discriminante positivo, il denominatore può essere scomposto nel prodotto di due binomi di primo grado, cioè:

$$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2),$$

dove  $x_1 = -1$  e  $x_2 = 2$  sono le soluzioni di  $x^2 - x - 2 = 0$ .

La frazione  $\frac{5x - 1}{x^2 - x - 2}$  può essere pensata come somma di due frazioni aventi per denominatori i fattori trovati, ossia:

$$\frac{5x - 1}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2}, \text{ con } A \text{ e } B \text{ costanti da determinare.}$$

Calcoliamo la somma delle due frazioni:

$$\frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2} = \frac{Ax - 2A + Bx + B}{x^2 - x - 2} = \frac{(A + B)x - 2A + B}{x^2 - x - 2}.$$

L'uguaglianza

$$\frac{5x - 1}{x^2 - x - 2} = \frac{(A + B)x - 2A + B}{x^2 - x - 2}$$

● Se l'equazione  $ax^2 + bx + c = 0$  ammette le soluzioni  $x = x_1$  e  $x = x_2$ , allora:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \\ &= a(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

è valida, per  $x \neq -1 \wedge x \neq 2$ , soltanto se i numeratori sono polinomi identici. Quindi scriviamo e risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ -2A + B = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B = 5 - A \\ -2A + 5 - A = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 3 \end{cases}$$

Possiamo dunque scrivere:

$$\frac{5x - 1}{x^2 - x - 2} = \frac{2}{x + 1} + \frac{3}{x - 2}, \text{ quindi:}$$

$$\int \frac{5x - 1}{x^2 - x - 2} dx = \int \left( \frac{2}{x + 1} + \frac{3}{x - 2} \right) dx =$$

$$= 2 \int \frac{1}{x + 1} dx + 3 \int \frac{1}{x - 2} dx = 2 \ln|x + 1| + 3 \ln|x - 2| + c.$$

● Il principio di identità dei polinomi afferma che se due polinomi nelle stesse variabili, non nulli e scritti in forma ridotta, assumono valori uguali per tutti i valori attribuiti alle variabili, allora sono identici.

**In generale**, se  $\Delta > 0$ :

- si scompone il denominatore:  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ;
- si scrive la frazione data come somma di frazioni con denominatore di primo grado:

$$\frac{px + q}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \left( \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} \right);$$

- si calcola la somma delle due frazioni al secondo membro;
- si determinano i valori di  $A$  e  $B$  risolvendo il sistema le cui equazioni si ottengono uguagliando fra loro rispettivamente i coefficienti della  $x$  e i termini noti;
- si risolve l'integrale  $\frac{1}{a} \int \left( \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} \right) dx$ .

## Il discriminante è nullo: $\Delta = 0$

### ESEMPIO

1. Calcoliamo  $\int \frac{1}{9x^2 + 6x + 1} dx$ .

Il discriminante del denominatore è  $\frac{\Delta}{4} = 9 - 9 = 0$ , possiamo quindi scrivere:  $9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2$ . Si ha allora:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{9x^2 + 6x + 1} dx &= \int \frac{1}{(3x + 1)^2} dx = \int (3x + 1)^{-2} dx = \\ &= \frac{1}{3} \int 3(3x + 1)^{-2} dx = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(3x + 1)} + c. \end{aligned}$$

2. Calcoliamo  $\int \frac{x - 3}{x^2 - 6x + 9} dx$ .

Essendo  $D[x^2 - 6x + 9] = 2x - 6$ , si ha:

$$\begin{aligned} \int \frac{x - 3}{x^2 - 6x + 9} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 9} dx = \frac{1}{2} \ln(x - 3)^2 + c = \\ &= \ln|x - 3| + c. \end{aligned}$$

● Si può risolvere l'integrale anche così:

$$\begin{aligned}\int \frac{x-3}{(x-3)^2} dx &= \\ &= \int \frac{1}{x-3} dx = \\ &= \ln|x-3| + c.\end{aligned}$$

3. Calcoliamo  $\int \frac{2x-3}{x^2-4x+4} dx$ .

Essendo  $D[x^2-4x+4] = 2x-4$ , togliamo e aggiungiamo 1 al numeratore per ottenere:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-3-1+1}{x^2-4x+4} dx &= \int \frac{2x-4}{x^2-4x+4} dx + \int \frac{1}{x^2-4x+4} dx = \\ &= \ln(x-2)^2 + \int (x-2)^{-2} dx = 2\ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + c.\end{aligned}$$

**In generale**, se  $\Delta = 0$ :

- si scompone il denominatore  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ ;
- si scrive  $\int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{px + q}{(x - x_1)^2} dx$ ;
- se  $p = 0$  oppure  $px + q$  è la derivata del denominatore, il calcolo dell'integrale è immediato;
- se non si verificano le condizioni precedenti, si cerca, con passaggi opportuni, di decomporre l'integrale in modo da ottenerle.

## Il discriminante è negativo: $\Delta < 0$

Esaminiamo due casi.

1. Il numeratore è di grado zero, ossia l'integrale è del tipo:

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx, \quad \text{con } a \neq 0.$$

Formula completamento del quadrato

$$ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

dove:  $\Delta = b^2 - 4ac$

### ESEMPIO

Calcoliamo  $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$ .

Il discriminante del denominatore è  $\Delta = -4 < 0$ .

Cerchiamo di ricondurre l'integrale al modello:

$$\int \frac{f'(x)}{k^2 + [f(x)]^2} dx = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{f(x)}{k} + c.$$

Scriviamo il denominatore nella forma  $[f(x)]^2 + k^2$  con il metodo del completamento del quadrato:

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 - 1 + 2 = (x + 1)^2 + 1.$$

L'integrale dato diventa:

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} dx.$$

Utilizzando il modello, abbiamo  $f(x) = x + 1$ ,  $k = 1$  e  $f'(x) = 1$ , quindi:

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{1}{1} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{1} + c = \operatorname{arctg}(x + 1) + c.$$

**In generale**, per calcolare  $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$  se  $\Delta < 0$ :

- si raccoglie il coefficiente di  $x^2$ :  $\frac{1}{a} \int \frac{1}{x^2 + mx + n} dx$ ;
- si scrive il denominatore nella forma:  $(x + h)^2 + k^2$ ;
- si calcola l'integrale  $\frac{1}{a} \int \frac{1}{(x + h)^2 + k^2} dx = \frac{1}{ak} \operatorname{arctg} \frac{x + h}{k} + c$ .

2. Il numeratore è un polinomio di primo grado, cioè l'integrale è del tipo:

$$\int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} dx, \quad \text{con } a \neq 0 \text{ e } p \neq 0.$$

### ESEMPIO

Calcoliamo  $\int \frac{x+3}{x^2+x+1} dx$ .

Il denominatore ha  $\Delta = -3 < 0$ .

Trasformiamo il numeratore in modo da farvi figurare la derivata del denominatore, ossia  $2x + 1$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2+x+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2(x+3)}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+6}{x^2+x+1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1+5}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \int \left( \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{5}{x^2+x+1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{5}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx. \end{aligned}$$

Calcoliamo separatamente i due integrali:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \ln|x^2+x+1| + c;$$

$$\bullet \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \\ = \ln|f(x)| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c, \text{ applicando lo stesso metodo dell'esempio precedente.}$$

Quindi:

$$\int \frac{x+3}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{5}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$$

**In generale**, per calcolare  $\int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} dx$ , con  $a \neq 0$ ,  $p \neq 0$  e  $\Delta < 0$ :

- si opera sul numeratore per farvi figurare la derivata del denominatore;
- si scrive l'integrale come somma di due integrali:

$$r \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + s \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx;$$

- si calcola il primo integrale ricordando che  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$ , quindi:

$$\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx = \ln|ax^2 + bx + c| + c_1;$$

- si calcola il secondo integrale con il metodo già visto;
- si sommano i risultati ottenuti.

## Il denominatore è di grado superiore al secondo

Quando il denominatore è di grado superiore al secondo, occorre, se è possibile, scomporlo in fattori e scrivere la frazione algebrica come somma di frazioni con denominatori di primo e secondo grado, riconducendosi così al calcolo di integrali dei tipi descritti in precedenza.

### ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo  $\int \frac{x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2} dx$ .

Scomponiamo il denominatore  $P(x)$  utilizzando la regola di Ruffini.

Poiché  $P(1) = 0$ , il polinomio  $x - 1$  è divisore di  $P(x)$ .

Eseguiamo la divisione utilizzando la regola di Ruffini:

|   |   |   |   |     |
|---|---|---|---|-----|
|   | 1 | 1 | 0 | − 2 |
| 1 |   | 1 | 2 | 2   |
| — | 1 | 2 | 2 | 0   |

Quindi  $P(x) = (x - 1)(x^2 + 2x + 2)$ .

Il trinomio  $x^2 + 2x + 2$  ha discriminante  $\Delta = -4 < 0$  ed è perciò irriducibile.

Scriviamo la frazione algebrica iniziale come somma di due frazioni algebriche con denominatori rispettivamente  $x - 1$  e  $x^2 + 2x + 2$ , cioè:

$$\frac{x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2}, \text{ dove } A, B \text{ e } C \text{ rappresentano numeri reali.}$$

Determiniamo il valore delle costanti  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Sommiamo le frazioni al secondo membro:

$$\begin{aligned} \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2} &= \frac{A(x^2 + 2x + 2) + (Bx + C)(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{Ax^2 + 2Ax + 2A + Bx^2 + Cx - Bx - C}{x^3 + x^2 - 2} = \\ &= \frac{(A + B)x^2 + (2A - B + C)x + 2A - C}{x^3 + x^2 - 2}. \end{aligned}$$

Affinché l'uguaglianza

$$\frac{x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2} = \frac{(A + B)x^2 + (2A - B + C)x + 2A - C}{x^3 + x^2 - 2}$$

sia un'identità, dobbiamo porre:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A - B + C = 5 \\ 2A - C = -1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, otteniamo  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $C = 3$ .

In conclusione, vale l'uguaglianza

$$\frac{x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2} = \frac{1}{x - 1} + \frac{3}{x^2 + 2x + 2},$$

che permette di calcolare l'integrale dato:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2} dx &= \int \left( \frac{1}{x - 1} + \frac{3}{x^2 + 2x + 2} \right) dx = \int \frac{1}{x - 1} dx + 3 \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \\ &= \ln|x - 1| + 3 \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} dx = \ln|x - 1| + 3 \operatorname{arctg}(x + 1) + c. \end{aligned}$$

**Osservazione.** Nella trasformazione della frazione algebrica iniziale nella somma di due o più frazioni si procede diversamente a seconda di come è scomposto il denominatore.

Vediamo tre esempi:

- $\frac{4x}{(x - 1)(x + 1)(x - 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 3};$
- $\frac{2x + 3}{(x - 1)(x + 2)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{(x + 2)^2};$
- $\frac{6x - 1}{(x - 2)^3} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2} + \frac{C}{(x - 2)^3}.$

ESERCIZI

### ESERCIZIO GUIDA

Nella coppia di funzioni  $y = x - x^2 - x^3$  e  $y = 1 - 2x - 3x^2$ , una delle due è una primitiva dell'altra. Determiniamo quale e scriviamo la relazione che lega le due funzioni mediante un integrale indefinito.

Calcoliamo la derivata delle due funzioni:

$$D[x - x^2 - x^3] = 1 - 2x - 3x^2,$$

$$D[1 - 2x - 3x^2] = -2 - 6x.$$

Osserviamo che la derivata della prima funzione è uguale alla seconda funzione:  $y = x - x^2 - x^3$  è una primitiva di  $y = 1 - 2x - 3x^2$ . Scriviamo:

$$\int (1 - 2x - 3x^2) dx = x - x^2 - x^3 + c.$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \text{con } \alpha \neq -1; \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c.$$

## ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo gli integrali:

$$\text{a) } \int \left( x^4 + 2x - \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^2} + 3 \right) dx; \quad \text{b) } \int \frac{x^2 - 5\sqrt[3]{x} + 4}{x^3} dx.$$

a) Applichiamo le proprietà di linearità:

$$\int \left( x^4 + 2x - \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^2} + 3 \right) dx = \int x^4 dx + 2 \int x dx - \int \sqrt[3]{x^2} dx + \int \frac{1}{x^2} dx + 3 \int dx.$$

Scriviamo il reciproco come potenza di  $x$  a esponente negativo e la radice come potenza di  $x$  a esponente razionale:

$$\int x^4 dx + 2 \int x dx - \int x^{\frac{2}{3}} dx + \int x^{-2} dx + 3 \int dx =$$

Applichiamo la formula per l'integrazione delle potenze di  $x$ :

$$= \frac{x^{4+1}}{4+1} + 2 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} - \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 3x + c = \frac{x^5}{5} + x^2 - \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - x^{-1} + 3x + c =$$

$$= \frac{x^5}{5} + x^2 - \frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x} + 3x + c.$$

b) Poiché il denominatore della frazione è un monomio, scomponiamo la frazione in frazioni più semplici e applichiamo le proprietà di linearità:

$$\int \frac{x^2 - 5\sqrt[3]{x} + 4}{x^3} dx = \int \frac{x^2}{x^3} dx - 5 \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x^3} dx + 4 \int \frac{1}{x^3} dx = \int \frac{1}{x} dx - 5 \int x^{-\frac{8}{3}} dx + 4 \int x^{-3} dx =$$

$$= \ln|x| - 5 \frac{x^{-\frac{8}{3}+1}}{-\frac{8}{3}+1} + 4 \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = \ln|x| + 3x^{-\frac{5}{3}} - 2x^{-2} + c =$$

$$= \ln|x| + \frac{3}{x\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^2} + c.$$

$$\int e^x dx = e^x + c;$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + c.$$

### ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo gli integrali:

a)  $\int (2e^x + 3 \cdot 5^x) dx;$       b)  $\int \frac{10^{x-1}}{5^x} dx.$

a) Applichiamo le proprietà di linearità:

$$\int (2e^x + 3 \cdot 5^x) dx = 2 \int e^x dx + 3 \int 5^x dx.$$

Applichiamo le formule degli integrali delle funzioni esponenziali:

$$2 \int e^x dx + 3 \int 5^x dx = 2e^x + 3 \frac{1}{\ln 5} \cdot 5^x + c = 2e^x + \frac{3}{\ln 5} \cdot 5^x + c.$$

b) In questo caso occorre semplificare la frazione integranda in modo da ricondurci a un unico esponenziale:

$$\int \frac{10^{x-1}}{5^x} dx = \int \frac{10^x}{5^x} \cdot 10^{-1} dx = \int \left( \frac{10}{5} \right)^x \cdot \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10} \int 2^x dx = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^x + c.$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c; \quad \int \cos x \, dx = \sin x + c;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cotg x + c; \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tg x + c.$$

### ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo  $\int \left( 1 + 2 \sin x - \cos x - \frac{4}{\sin^2 x} \right) dx$ .

Applichiamo le proprietà di linearità:

$$\int \left( 1 + 2 \sin x - \cos x - \frac{4}{\sin^2 x} \right) dx = \int 1 \, dx + 2 \int \sin x \, dx - \int \cos x \, dx - 4 \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx =$$

Applichiamo le formule degli integrali delle funzioni goniometriche:

$$= x + 2 \cdot (-\cos x) - \sin x - 4(-\cotg x) + c = x - 2 \cos x - \sin x + 4 \cotg x + c.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x + c = -\arccos x + c;$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + c = -\operatorname{arccotg} x + c.$$

### ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo gli integrali:

$$\text{a) } \int \left( \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{5}{1+x^2} \right) dx; \quad \text{b) } \int \frac{6x^2}{1+x^2} dx.$$

$$\text{a) } \int \left( \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{5}{1+x^2} \right) dx = 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + 5 \int \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Applichiamo le formule degli integrali delle funzioni goniometriche inverse:

$$2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + 5 \int \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \arcsen x + 5 \arctg x + c.$$

$$\text{b) } \int \frac{6x^2}{1+x^2} dx = 6 \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx.$$

Ora possiamo spezzare la frazione integranda nella somma di due frazioni di cui l'integrale è noto:

$$6 \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx = 6 \int \frac{x^2 + 1}{1+x^2} dx - 6 \int \frac{1}{1+x^2} dx = 6 \int dx - 6 \arctg x + c = 6(x - \arctg x) + c.$$

$$\int [f(x)]^{\alpha} f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \text{ con } \alpha \neq -1$$

### ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo  $\int 3x^2(x^3 - 2)^4 dx$ .

Osserviamo che  $D[x^3 - 2] = 3x^2$ .

Possiamo applicare la formula  $\int [f(x)]^{\alpha} f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ , ponendo  $f(x) = x^3 - 2$  e  $\alpha = 4$ :

$$\int (x^3 - 2)^4 \cdot 3x^2 dx = \frac{(x^3 - 2)^{4+1}}{4+1} + c = \frac{(x^3 - 2)^5}{5} + c.$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

### ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo  $\int \frac{12x}{2x^2 + 1} dx$ .

Osserviamo che il numeratore è un multiplo della derivata del denominatore:

$$D[2x^2 + 1] = 4x.$$

Applichiamo la seconda proprietà di linearità e la regola  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$ :

$$\int \frac{12x}{2x^2 + 1} dx = 3 \int \frac{4x}{2x^2 + 1} dx = 3 \ln(2x^2 + 1) + c.$$

$$\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c; \quad \int f'(x) a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c.$$

## ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo  $\int e^{x^2-x} (4x - 2) dx$ .

Raccogliamo 2 e applichiamo la seconda proprietà di linearità:

$$\int e^{x^2-x} (4x - 2) dx = 2 \int e^{x^2-x} (2x - 1) dx.$$

Applichiamo la regola  $\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$ , essendo  $D[x^2 - x] = 2x - 1$ :

$$2 \int e^{x^2-x} (2x - 1) dx = 2e^{x^2-x} + c.$$

$$\int f'(x) \operatorname{sen} f(x) dx = -\cos f(x) + c; \quad \int f'(x) \cos f(x) dx = \operatorname{sen} f(x) + c;$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \operatorname{tg} f(x) + c;$$

$$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)} dx = -\operatorname{cotg} f(x) + c.$$

### ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo  $\int \frac{\operatorname{sen} \ln x}{x} dx$ .

Scriviamo l'integrale nella forma:

$$\int \frac{1}{x} \operatorname{sen} \ln x dx.$$

Il fattore  $\frac{1}{x}$  è la derivata dell'argomento del seno, cioè di  $\ln x$ .

Applichiamo la regola  $\int f'(x) \operatorname{sen} f(x) dx = -\cos f(x) + c$ :

$$\int \frac{1}{x} \operatorname{sen} \ln x dx = -\cos \ln x + c.$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}} dx = \arcsen f(x) + c; \quad \int \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2} dx = \operatorname{arctg} f(x) + c.$$

### ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo  $\int \frac{1}{x + x \ln^2 x} dx$ .

Raccogliendo  $x$  al denominatore, l'integrale diventa:  $\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \ln^2 x} dx$ .

Essendo  $D[\ln x] = \frac{1}{x}$ , applichiamo la regola  $\int f'(x) \frac{1}{1 + f^2(x)} dx = \operatorname{arctg} f(x) + c$ :

$$\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \ln^2 x} dx = \operatorname{arctg} \ln x + c.$$

$$\int f(x) = \int f[g(t)]g'(t)dt$$

## ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo per sostituzione l'integrale  $\int \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} dx$ .

Poniamo  $t = \sqrt{x}$ , da cui  $x = t^2$ .

Calcoliamo il differenziale di  $x$  e sostituiamo:

$$dx = 2t dt \rightarrow \int \frac{1}{2t(1+t^2)} 2t dt = \int \frac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{arctg} t + c.$$

Sostituiamo, nella primitiva trovata,  $\sqrt{x}$  a  $t$ :

$$\operatorname{arctg} t + c = \operatorname{arctg} \sqrt{x} + c \rightarrow \int \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} dx = \operatorname{arctg} \sqrt{x} + c.$$

### ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo  $\int \frac{2}{1 + \sin x} dx$ .

Poniamo  $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$ , con  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , da cui:

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1 + t^2} dt.$$

Sostituiamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{1 + \sin x} dx &= \int \frac{2}{1 + \frac{2t}{1 + t^2}} \cdot \frac{2}{1 + t^2} dt = 4 \int \frac{\cancel{1 + t^2}}{1 + t^2 + 2t} \cdot \frac{1}{\cancel{1 + t^2}} dt = \\ &= 4 \int \frac{1}{(t + 1)^2} dt = 4 \int (t + 1)^{-2} dt = \frac{-4}{t + 1} + c = \frac{-4}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} + c. \end{aligned}$$

**Osservazione.** In tutti i casi come quello precedente, in cui *la funzione integranda contiene soltanto la funzione seno o la funzione coseno*, si ricorre alle formule parametriche:

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \text{con } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

### ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo l'integrale  $\int \frac{2 \operatorname{tg}^3 x + 2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 5} dx$ .

Poniamo  $\operatorname{tg} x = z$  e utilizziamo in modo abbreviato il metodo della sostituzione calcolando i differenziali di ciascun membro senza ricavare la variabile  $x$  in funzione di  $z$ :

$$(1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = dz.$$

Sostituiamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{2 \operatorname{tg}^3 x + 2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 5} dx &= 2 \int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 5} (\operatorname{tg}^2 x + 1) dx = 2 \int \frac{z}{z + 5} dz = 2 \int \frac{z + 5 - 5}{z + 5} dz = \\ &= 2 \int 1 dz - 10 \int \frac{1}{z + 5} dz = 2z - 10 \ln |z + 5| + c = 2 \operatorname{tg} x - 10 \ln |\operatorname{tg} x + 5| + c. \end{aligned}$$

## Gli integrali del tipo $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

### 295 ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo  $\int \sqrt{1 - x^2} dx$ .

Poniamo  $x = \sin t$ , con  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  per l'invertibilità della funzione (il dominio di  $\sqrt{1 - x^2}$  è  $[-1; 1]$ , cioè il codominio della funzione seno). Differenziando:  $dx = \cos t dt$ . Sostituiamo:

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \int \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt,$$

poiché  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , allora  $\cos t \geq 0$ , e quindi  $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$ .

Utilizziamo la formula di bisezione  $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$  per  $\alpha = 2t$  ed eleviamo al quadrato:

$$\int \cos^2 t \, dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + c.$$

Usiamo la formula di duplicazione  $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$ :

$$\int \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \sin t \cos t + c.$$

Essendo  $x = \sin t$ , si ha  $t = \arcsin x$ , quindi:

$$\int \sqrt{1 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + c.$$

**Osservazione.** In generale si può ottenere, ripetendo lo stesso procedimento, ma ponendo  $x = a \sin t$ :

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + c, \text{ con } a > 0.$$

**Gli integrali del tipo  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx$  e  $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx$**

### ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo l'integrale  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ .

Poniamo  $t = x + \sqrt{x^2 + 1}$ , da cui si ricava:

$$t - x = \sqrt{x^2 + 1} \rightarrow t^2 + \cancel{x^2} - 2tx = 1 + \cancel{x^2} \rightarrow 2tx = t^2 - 1 \rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{2t}.$$

Sostituiamo l'espressione di  $x$ :

$$\sqrt{x^2 + 1} = t - x \rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = t - \frac{t^2 - 1}{2t} \rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = \frac{t^2 + 1}{2t}.$$

Differenziamo l'espressione di  $x$ :

$$dx = \frac{2t \cdot 2t - 2(t^2 - 1)}{4t^2} dt \rightarrow dx = \frac{2t^2 + 2}{4t^2} dt \rightarrow dx = \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt.$$

Sostituiamo nell'integrale:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx &= \int \frac{1}{\frac{t^2 + 1}{2t}} \cdot \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt = \int \frac{2t}{t^2 + 1} \cdot \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c = \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + c.\end{aligned}$$

**Osservazione.** In generale, gli integrali dei seguenti tipi,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx, \quad \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx,$$

si risolvono ponendo  $t = x + \sqrt{x^2 \pm a^2}$ .

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

### ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo con l'integrazione per parti: a)  $\int x^2 \ln x dx$ ; b)  $\int e^x \sin x dx$ .

a) Come funzione  $g'(x)$  scegliamo  $y = x^2$  perché sappiamo calcolarne l'integrale.

Sappiamo che  $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$ . Trascurando la costante  $c$ ,  $g(x) = \frac{x^3}{3}$ . Applichiamo la formula:

$$\int x^2 \ln x dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c.$$

b) Applichiamo la formula di integrazione per parti, ponendo:  $g'(x) = e^x$  e  $f(x) = \sin x$ .

Poiché  $\int e^x dx = e^x + c$ , allora  $g(x) = e^x$  e  $f'(x) = \cos x$ . Pertanto:

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx.$$

Applichiamo a  $\int e^x \cos x dx$  ancora l'integrazione per parti, con  $g'(x) = e^x$  e  $f(x) = \cos x$ :

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x - \int -e^x \sin x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx.$$

Quindi:

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx.$$

Portando a primo membro  $-\int e^x \sin x dx$  e sommando otteniamo:

$$2 \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x + c_1 \rightarrow \int e^x \sin x dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + c, \text{ dove } c = \frac{c_1}{2}.$$

In conclusione:  $\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + c$ .

## Il denominatore è di primo grado

### ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo  $\int \frac{2x^2 + 5x + 1}{2x + 1} dx$ .

Poiché il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore, dividiamo il polinomio  $2x^2 + 5x + 1$  per il polinomio  $2x + 1$ :

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 + 5x + 1 & 2x + 1 \\ - 2x^2 - x & x + 2 \\ \hline 4x + 1 & \\ - 4x - 2 & \\ \hline -1 & \end{array}$$

Il quoziente della divisione è  $Q(x) = x + 2$  e il resto  $R(x) = -1$ , quindi:

$$\frac{2x^2 + 5x + 1}{2x + 1} = x + 2 + \frac{-1}{2x + 1}.$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 5x + 1}{2x + 1} dx &= \int \left( x + 2 - \frac{1}{2x + 1} \right) dx = \int (x + 2) dx - \int \frac{1}{2x + 1} dx = \\ &= \int (x + 2) dx - \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2} \ln |2x + 1| + c. \end{aligned}$$

## Il denominatore è di secondo grado

Il discriminante è positivo:  $\Delta > 0$

### ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo  $\int \frac{x-1}{x^2+5x+6} dx$ .

Calcoliamo il discriminante del denominatore:  $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$ .

Le soluzioni dell'equazione associata al denominatore sono:  $x_1 = -2$  e  $x_2 = -3$ .

Il denominatore si scompone nel prodotto di due binomi:  $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$ .

Scriviamo  $\frac{x-1}{x^2+5x+6}$  come somma di due frazioni aventi come denominatori i fattori trovati:

$$\frac{x-1}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}, \text{ dove } A \text{ e } B \text{ sono numeri reali.}$$

Svolgiamo i calcoli a secondo membro:

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{Ax + 3A + Bx + 2B}{x^2 + 5x + 6} = \frac{(A+B)x + 3A + 2B}{x^2 + 5x + 6}.$$

Affinché l'uguaglianza

$$\frac{x-1}{x^2+5x+6} = \frac{(A+B)x+3A+2B}{x^2+5x+6}$$

sia un'identità, dobbiamo porre:

$$\begin{cases} A+B=1 & \text{uguaglianza dei coefficienti della } x \\ 3A+2B=-1 & \text{uguaglianza dei termini noti} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, otteniamo  $A = -3$  e  $B = 4$ , per cui l'integrale diventa:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2+5x+6} dx &= \int \left( \frac{-3}{x+2} + \frac{4}{x+3} \right) dx = -3 \int \frac{1}{x+2} dx + 4 \int \frac{1}{x+3} dx = \\ &= -3 \ln|x+2| + 4 \ln|x+3| + c. \end{aligned}$$

## Il discriminante è nullo: $\Delta = 0$

### ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo  $\int \frac{x+5}{x^2+6x+9} dx$ .

Calcoliamo il discriminante del denominatore:  $\frac{\Delta}{4} = 9 - 9 = 0$ .

Riscriviamo il numeratore in modo che compaia la derivata del denominatore.

Essendo  $D[x^2 + 6x + 9] = 2x + 6$ , moltiplichiamo e dividiamo il numeratore per 2 e poi aggiungiamo e togliamo 6:

$$\int \frac{x+5}{x^2+6x+9} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+10+6-6}{x^2+6x+9} dx.$$

Possiamo così decomporre l'integrale nella somma:

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x+6}{x^2+6x+9} dx + \frac{1}{2} \int \frac{4}{x^2+6x+9} dx.$$

Nel primo integrale applichiamo la regola  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$ , mentre nel secondo, essendo  $\Delta = 0$ , possiamo riscrivere il denominatore come quadrato di binomio. Otteniamo così:

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x+6}{x^2+6x+9} dx + 2 \int (x+3)^{-2} dx = \frac{1}{2} \ln(x+3)^2 - \frac{2}{x+3} + c = \ln|x+3| - \frac{2}{x+3} + c.$$

**Il discriminante è negativo,  $\Delta < 0$ ,  
e il numeratore è di grado zero**

### ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo  $\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$ .

Calcoliamo il discriminante del denominatore:  $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ .

Cerchiamo di ricondurre l'integrale al modello:  $\int \frac{f'(x)}{k^2 + [f(x)]^2} dx = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{f(x)}{k} + c$ .

Per poter scrivere  $x^2 + x + 1$  nella forma  $[f(x)]^2 + k^2$ , utilizziamo il metodo del completamento del quadrato. Possiamo pensare che  $x^2$  e  $x$  siano, rispettivamente, il quadrato di  $x$  e il doppio prodotto di  $x$  per un altro numero, ossia:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + 1.$$

Il fattore  $\frac{1}{2}$  ci conduce al binomio  $x + \frac{1}{2}$ , il cui quadrato è:  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$ . Pertanto:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

quindi:

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx.$$

Utilizzando il modello iniziale, abbiamo  $f(x) = x + \frac{1}{2}$ ,  $k = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  e  $f'(x) = 1$ , quindi:

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + c.$$

**Il discriminante è negativo,  $\Delta < 0$ ,**  
**e il numeratore è di grado maggiore di zero**

### ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo  $\int \frac{x-1}{x^2-4x+5} dx$ .

Calcoliamo il discriminante del denominatore:  $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$ .

Trasformiamo il numeratore in modo da poter ottenere la derivata del denominatore:

$$D[x^2 - 4x + 5] = 2x - 4.$$

Moltiplichiamo e dividiamo per 2:

$$\frac{1}{2} \int \frac{2(x-1)}{x^2-4x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-4x+5} dx.$$

Aggiungiamo e togliamo 4 al numeratore e scriviamo la frazione come somma di due frazioni:

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-4x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-4+4-2}{x^2-4x+5} dx = \frac{1}{2} \int \left( \frac{2x-4}{x^2-4x+5} + \frac{4-2}{x^2-4x+5} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \left( \frac{2x-4}{x^2-4x+5} + \frac{2}{x^2-4x+5} \right) dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx + \int \frac{1}{x^2-4x+5} dx.$$

Calcoliamo separatamente i due integrali; osserviamo che  $x^2 - 4x + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , poiché  $\Delta < 0$ .

$$\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx = \ln(x^2-4x+5) + c,$$

$$\int \frac{1}{x^2-4x+5} dx = \int \frac{1}{x^2-4x+4-4+5} dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+1} dx = \operatorname{arctg}(x-2) + c.$$

Otteniamo:

$$\int \frac{x-1}{x^2-4x+5} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2-4x+5) + \operatorname{arctg}(x-2) + c.$$