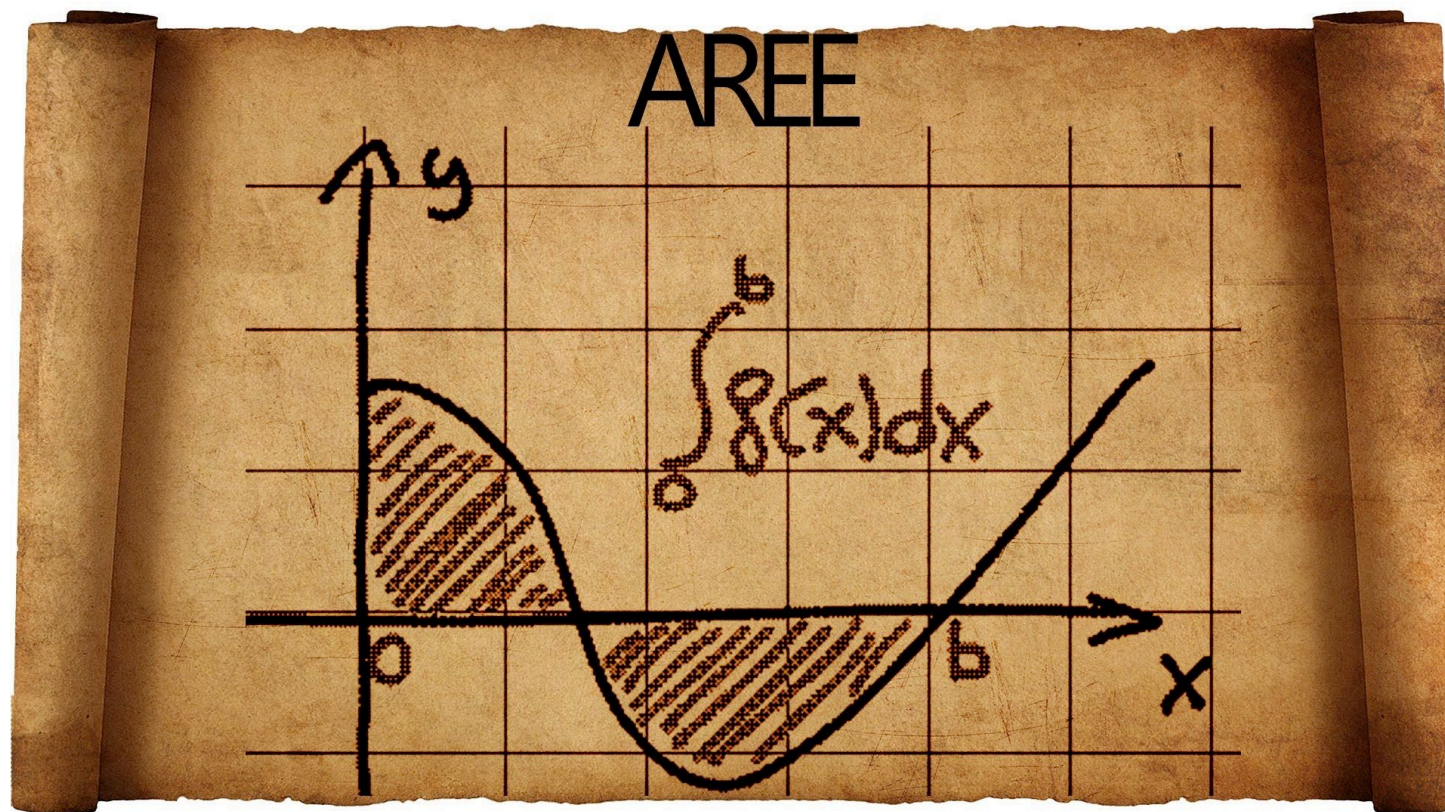


Integrali definiti

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica

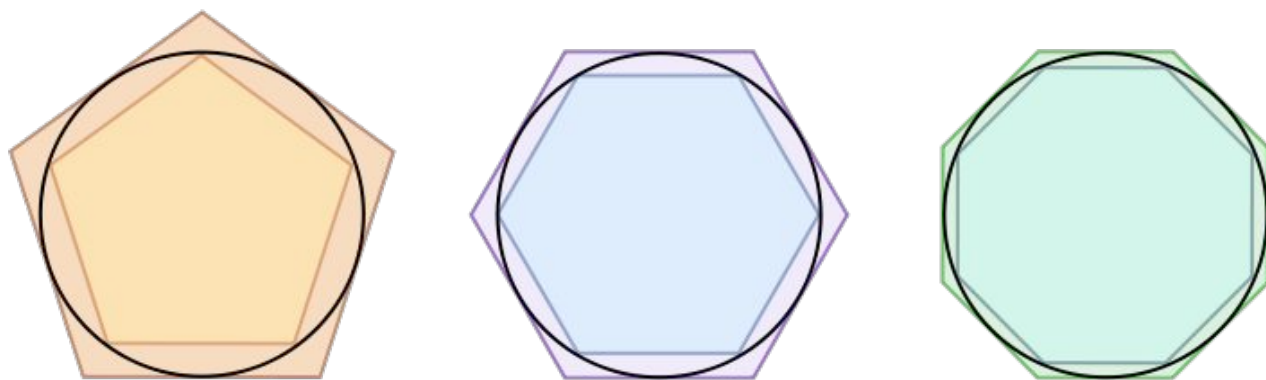


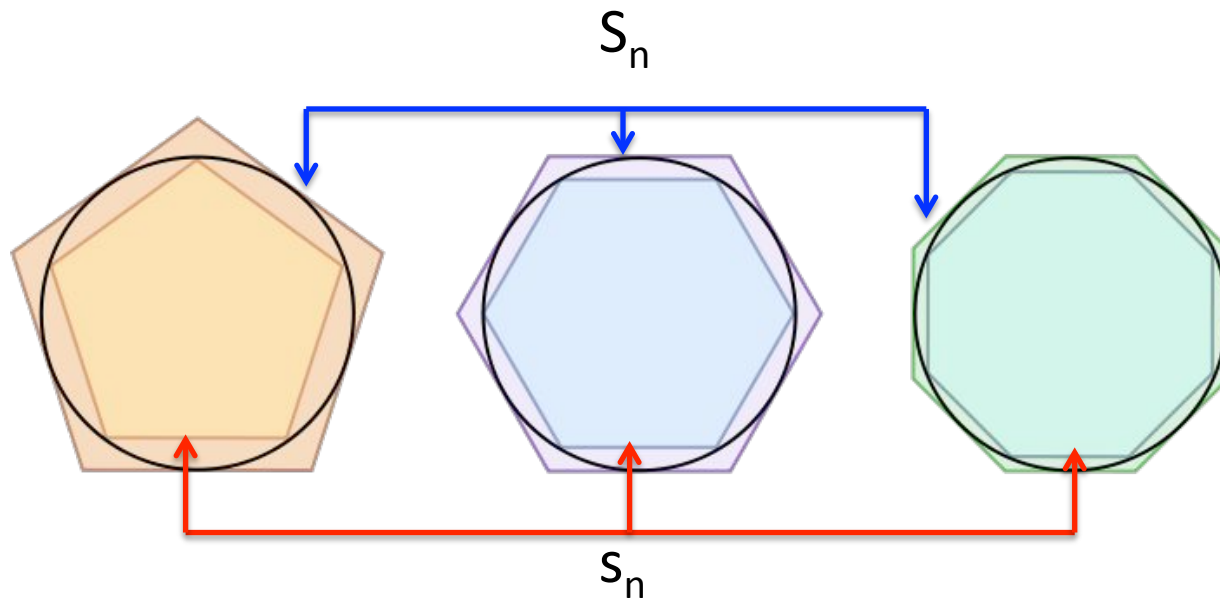
DEFINIZIONE DI INTEGRALE DEFINITO

■ Il problema delle aree

L'introduzione del calcolo degli integrali definiti nasce dalla necessità di determinare le *aree* di figure piane aventi *contorno curvilineo*. Mentre per i poligoni il calcolo dell'area si riconduce a quella di un quadrato, per le figure il cui contorno è una curva qualsiasi il problema è più complesso.

L'esempio più semplice è il cerchio, la cui area è stata determinata da Archimede di Siracusa (287-212 a.C.) mediante il *metodo di esaustione*. Se si considerano due successioni di poligoni regolari di n lati inscritti e circoscritti al cerchio, si può dimostrare che l'area del cerchio coincide con il limite comune delle due successioni costituite rispettivamente dalle aree dei poligoni regolari inscritti e circoscritti al cerchio.

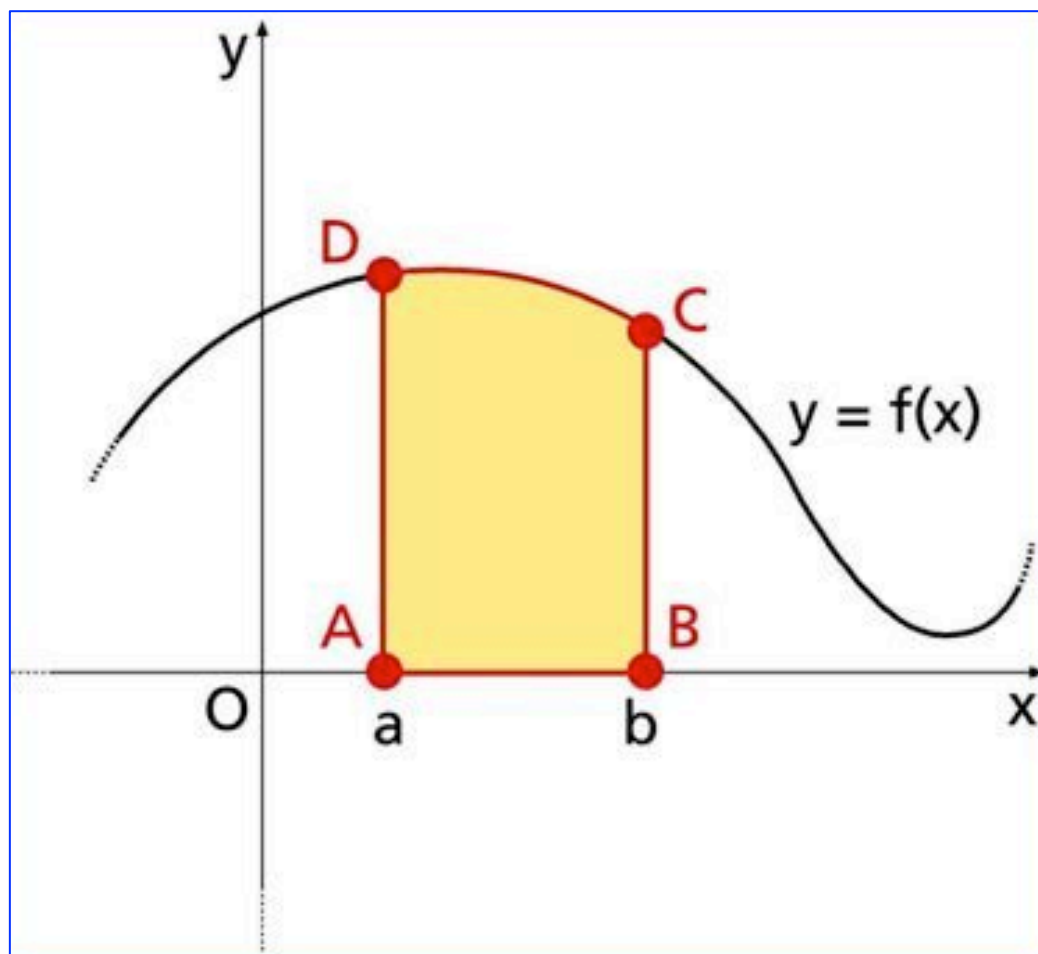




Si chiama **area del cerchio** il **limite comune** a cui tendono le due successioni $\{s_n\}$ e $\{S_n\}$ delle aree dei **poligoni regolari inscritti** e **circoscritti** al cerchio, quando si faccia tendere all'infinito il numero n dei loro lati:

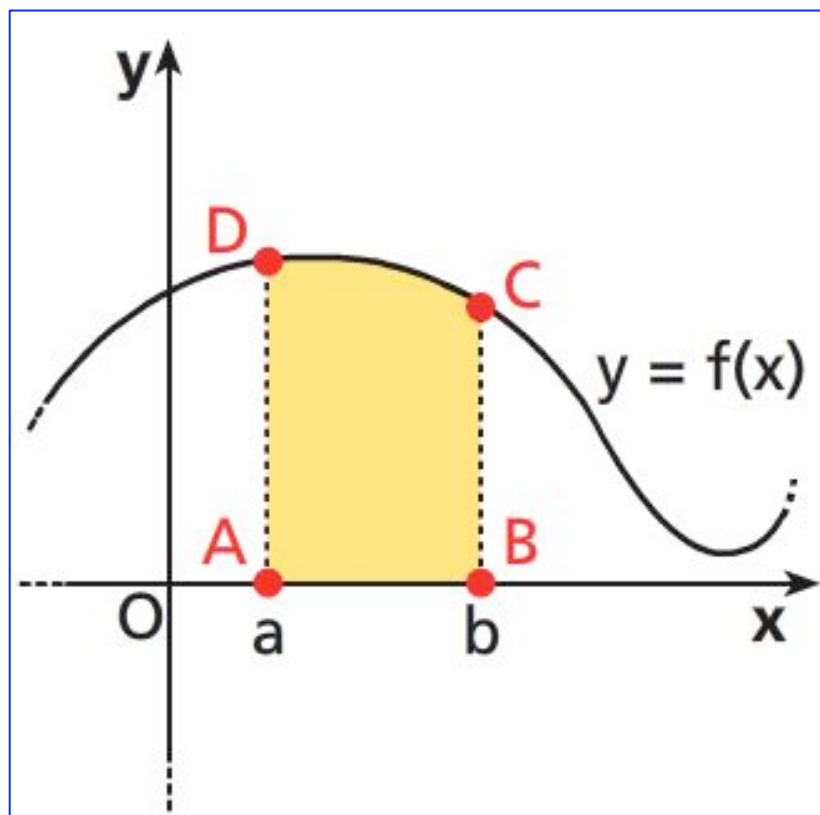
$$Area\ cerchio = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pi r^2$$

Con un ragionamento analogo vedremo che è possibile determinare l'area di un particolare tipo di superficie a contorno curvilineo, che chiamiamo *trapezoide*. Questo procedimento ha portato al concetto più generale e astratto di *integrale definito* che si presta a determinare aree e volumi e a risolvere anche problemi di natura diversa.



Definizione integrale definito

Dati una funzione $y = f(x)$ e un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ nel quale la funzione è *continua* e *positiva* (o nulla), si chiama **trapezoide** la figura piana delimitata dall'asse x , dalle rette $x = a$ e $x = b$ e dal grafico di $f(x)$ (figura 2). Il trapezoide viene chiamato così perché somiglia a un trapezio con le basi parallele all'asse y .



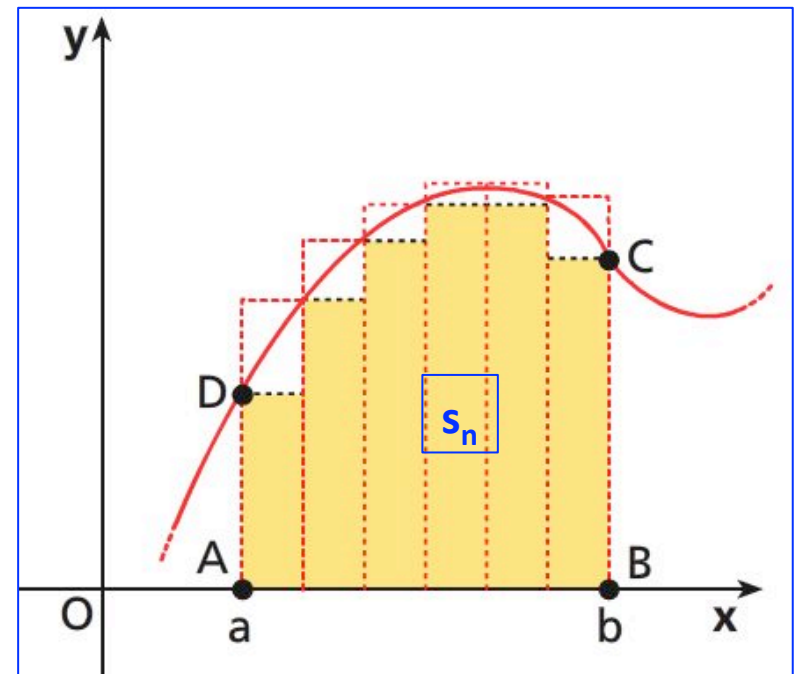
● Poiché la funzione è continua, il teorema di Weierstrass garantisce che negli intervalli considerati esistono il minimo e il massimo assoluto.

L'area S di un trapezoide non può essere calcolata in modo elementare, tuttavia possiamo approssimarla utilizzando il seguente procedimento:

- dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in n parti uguali di ampiezza $h = \frac{b-a}{n}$ (per esempio, nella figura 3 abbiamo considerato $n = 6$);
- consideriamo gli n rettangoli aventi ciascuno per base un segmento di suddivisione e per altezza il segmento associato al minimo m_i che la funzione assume in tale intervallo;
- indichiamo con s_n la somma delle aree di tutti questi n rettangoli:

$$s_n = m_1h + m_2h + \dots + m_nh = \sum_{i=1}^n m_ih$$

L'area del trapezoide viene così approssimata per difetto da s_n .

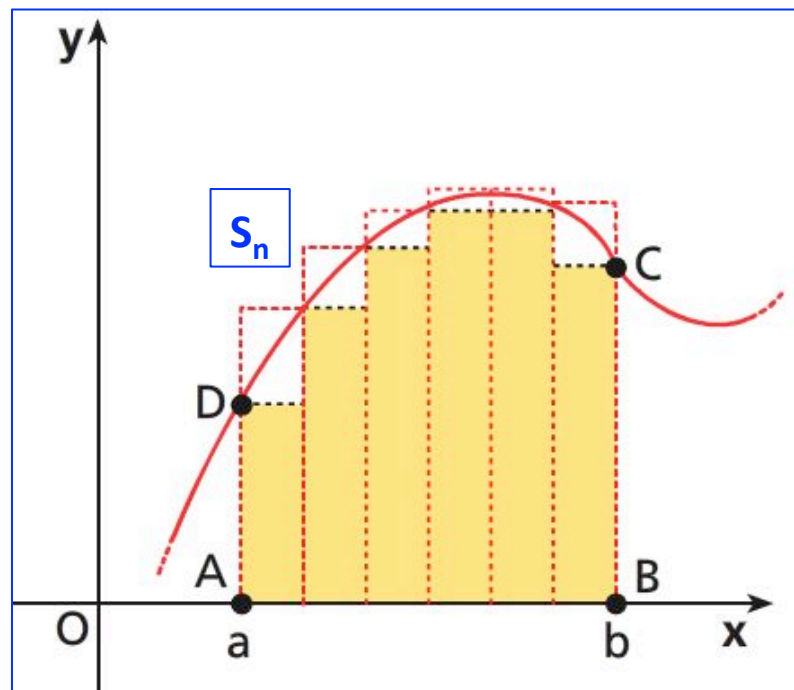


In maniera analoga, possiamo approssimare per eccesso l'area del trapezoide tramite la somma delle aree dei rettangoli associati a una scomposizione dell'intervallo $[a; b]$ in n parti uguali e aventi per altezza il segmento associato al massimo M_i della funzione nel corrispondente intervallo. Indichiamo la somma con S_n :

$$S_n = M_1h + M_2h + \dots + M_nh = \sum_{i=1}^n M_ih$$

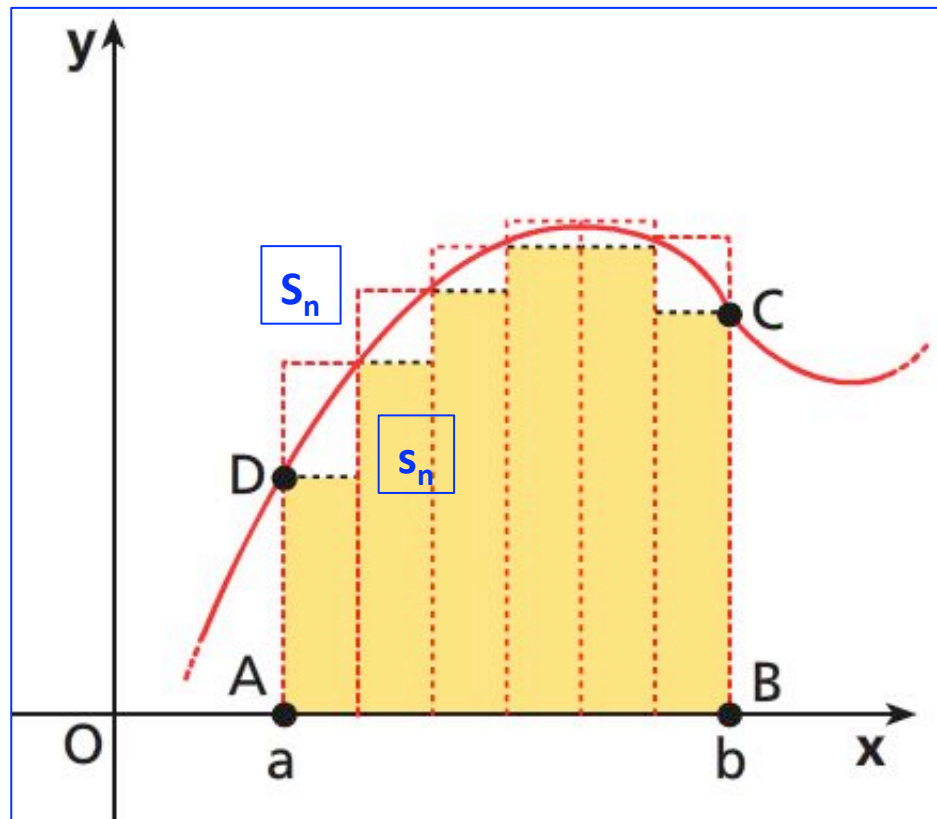
s_n e S_n vengono chiamate rispettivamente **somma integrale inferiore** e **somma integrale superiore**. L'area S del trapezoide risulta compresa fra l'area per difetto e quella per eccesso, ossia possiamo scrivere:

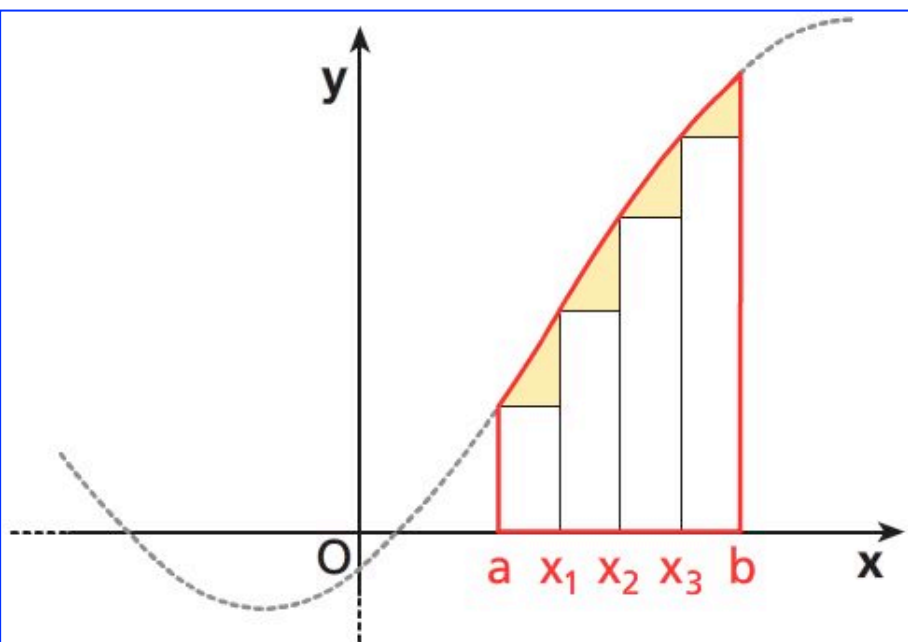
$$s_n \leq S \leq S_n$$



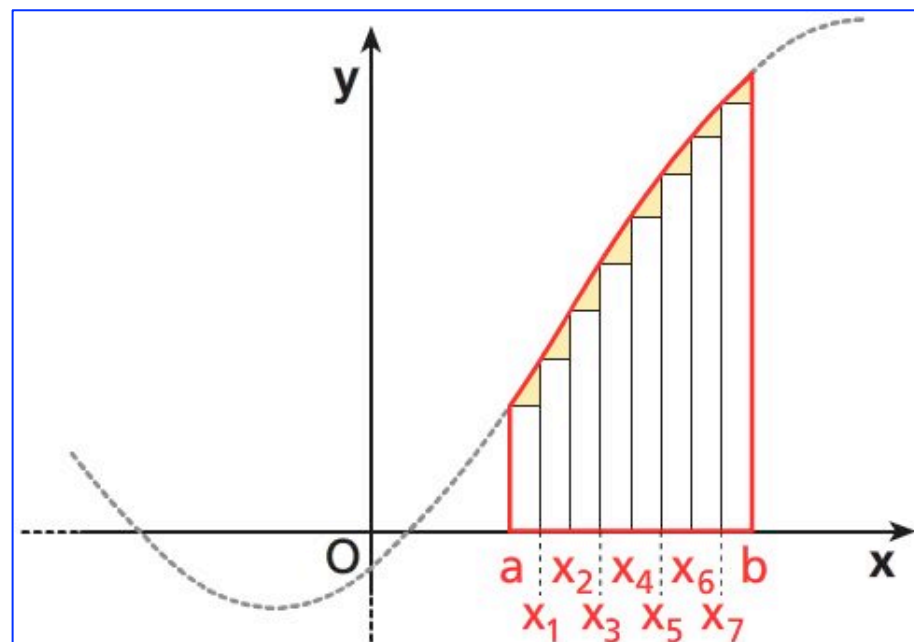
► **Figura 3** L'area del trapezoide $ABCD$ è compresa tra il plurirettangolo inscritto s_6 e il plurirettangolo circoscritto S_6 .

L'approssimazione delle due aree s_n e S_n risulta migliore man mano che si scelgono più piccoli gli intervalli di suddivisione di $[a; b]$.





a. Per $n = 4$ l'intervallo è suddiviso in 4 parti. La somma delle aree dei 4 rettangoli approssima, per difetto, l'area del trapezoide.



b. Se $n = 8$, la somma delle aree degli 8 rettangoli approssima meglio della precedente, per difetto, l'area del trapezoide.

Per $n = 1, 2, 3, \dots$ i valori di s_n e S_n formano le due successioni:

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$$

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$$

Si può dimostrare, utilizzando l'ipotesi della continuità della funzione $f(x)$ in $[a; b]$, che tali successioni convergono allo stesso limite ossia che:

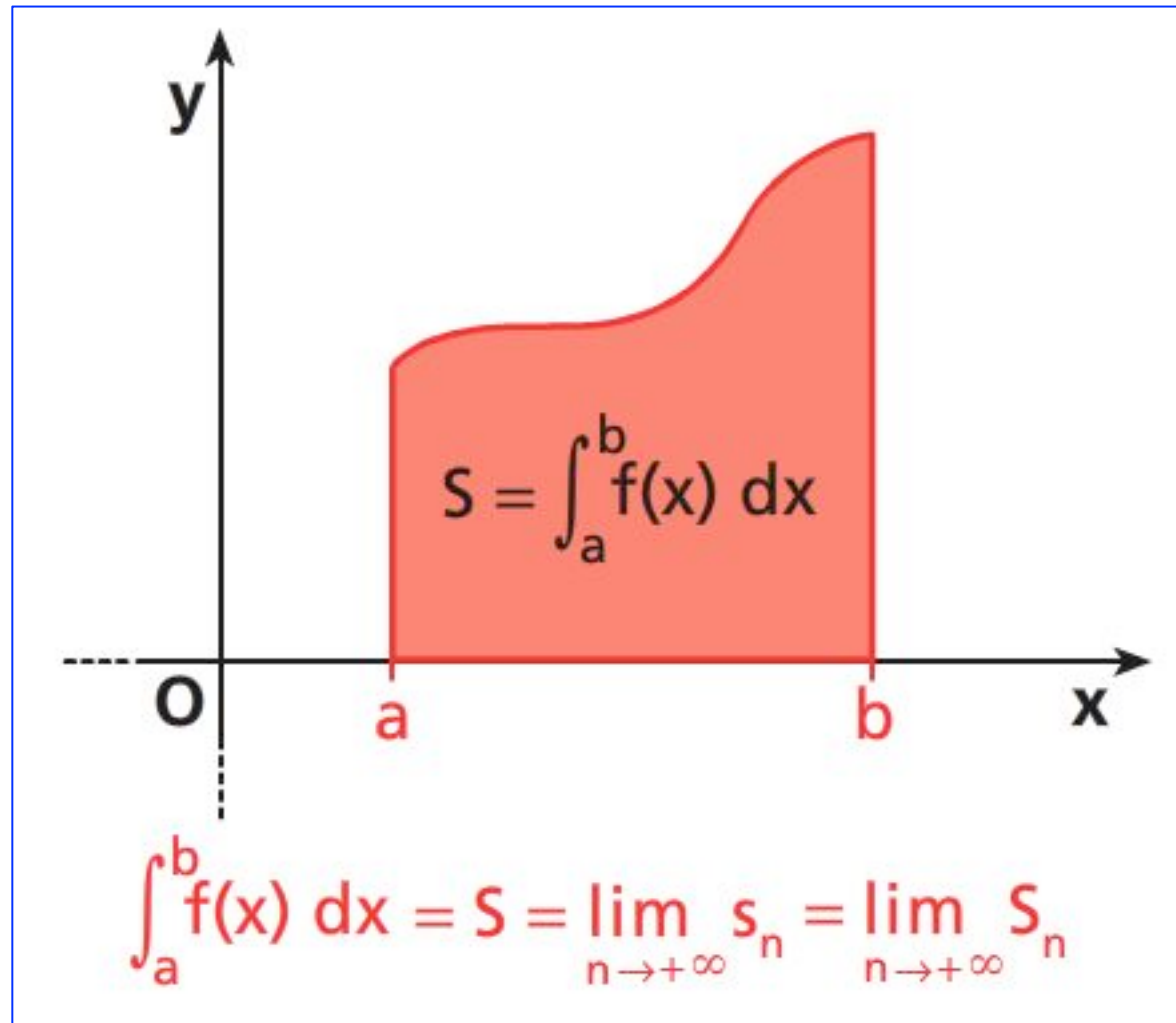
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

Il limite delle due successioni si chiama **integrale definito** e viene indicato con il simbolo

$$\int_a^b f(x) dx$$

che si legge «integrale da a a b di $f(x)$ in dx ».

Tale limite fornisce la misura dell'area S del trapezoide relativo alla funzione $f(x)$ e nell'intervallo $[a;b]$.



Il procedimento seguito per una funzione $f(x)$ positiva nell'intervallo $[a; b]$ può essere ripetuto anche per una funzione che cambia segno in $[a; b]$ e si dimostra il teorema seguente.

TEOREMA

Se una funzione $f(x)$ è continua in $[a; b]$ le successioni s_n e S_n per $n \rightarrow +\infty$ sono convergenti e ammettono lo stesso limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

DEFINIZIONE

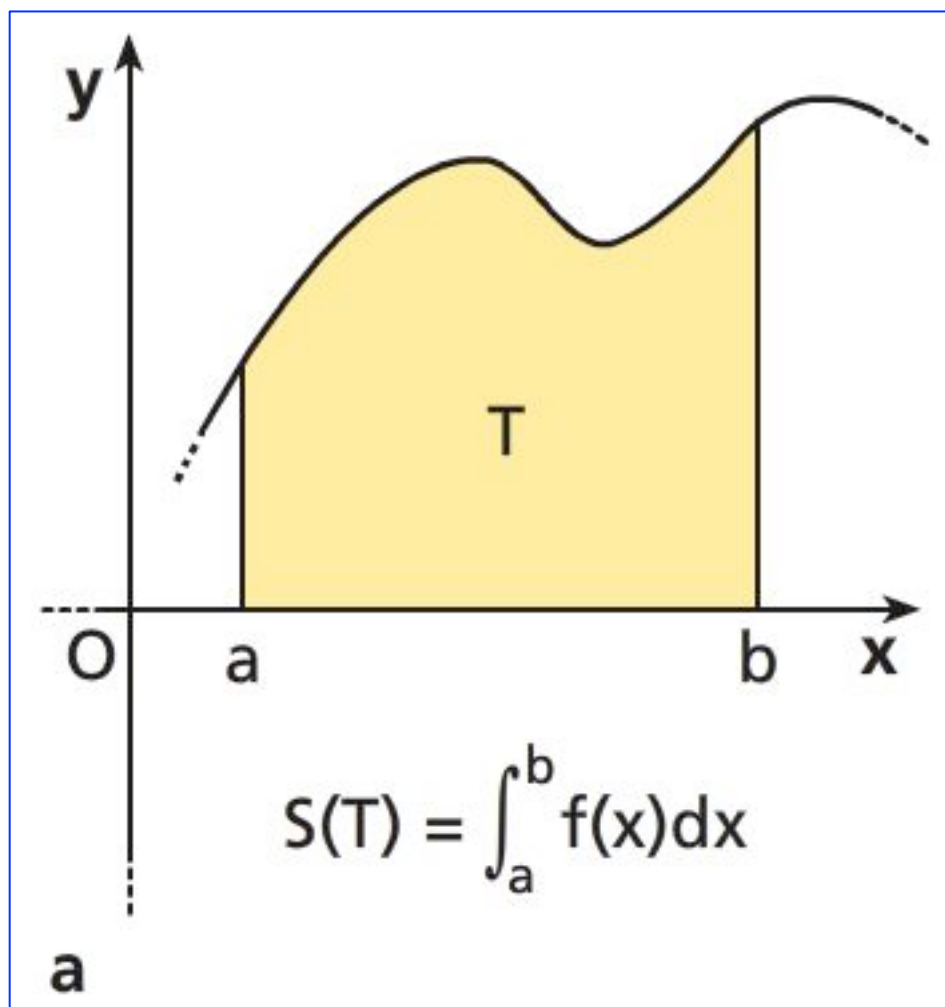
Integrale definito

Data una funzione $f(x)$ continua in $[a; b]$, si chiama integrale definito esteso all'intervallo $[a; b]$ il valore comune del limite per $n \rightarrow +\infty$ delle due successioni s_n , per difetto, e S_n , per eccesso. Tale valore viene indicato con la scrittura:

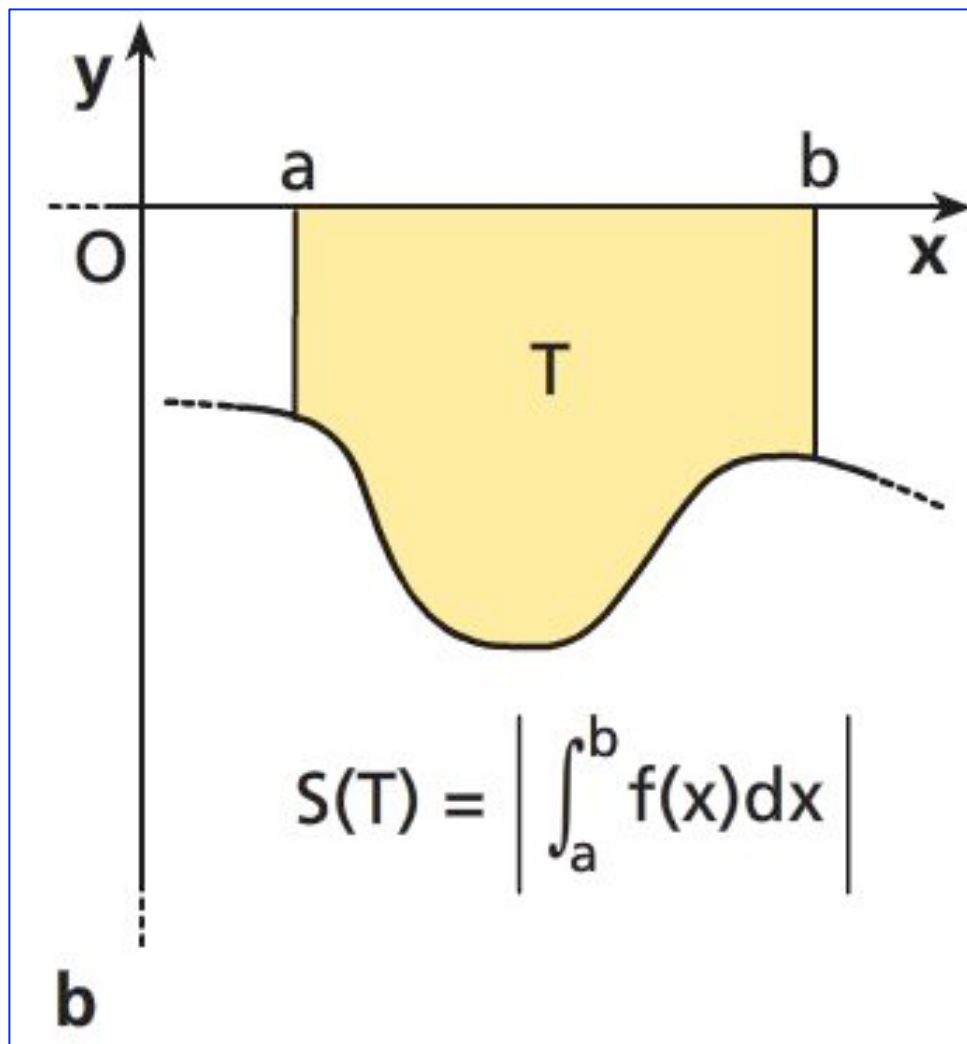
$$\int_a^b f(x) dx.$$

a e b sono gli **estremi di integrazione**: a è detto **estremo inferiore**, b **estremo superiore**. La funzione $f(x)$ è detta **funzione integranda**.

- Se $f(x) > 0$ in $[a; b]$, allora $\int_a^b f(x) dx > 0$ e il valore dell'integrale definito rappresenta l'area del trapezoide (figura a).

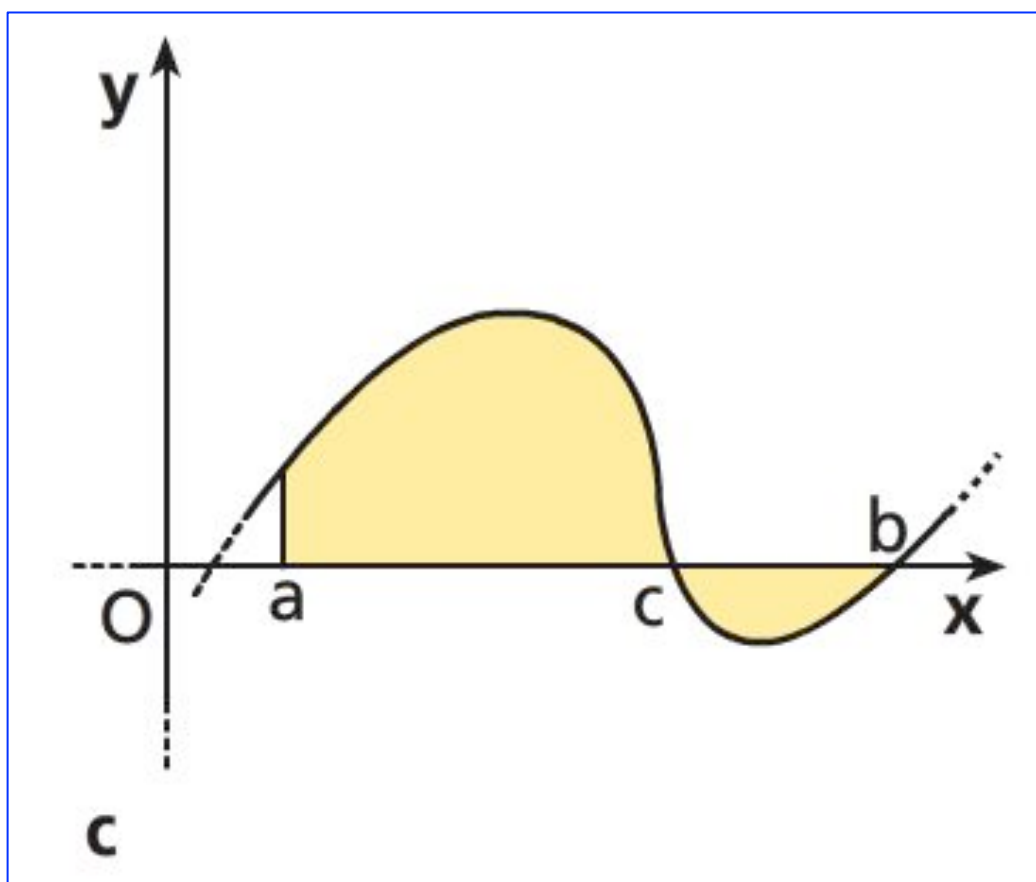


- Se $f(x) < 0$ in $[a; b]$, allora $\int_a^b f(x) dx < 0$. Per determinare l'area compresa tra il grafico di $f(x)$ e l'asse x (figura *b*) occorre calcolare il valore assoluto di $\int_a^b f(x) dx$.



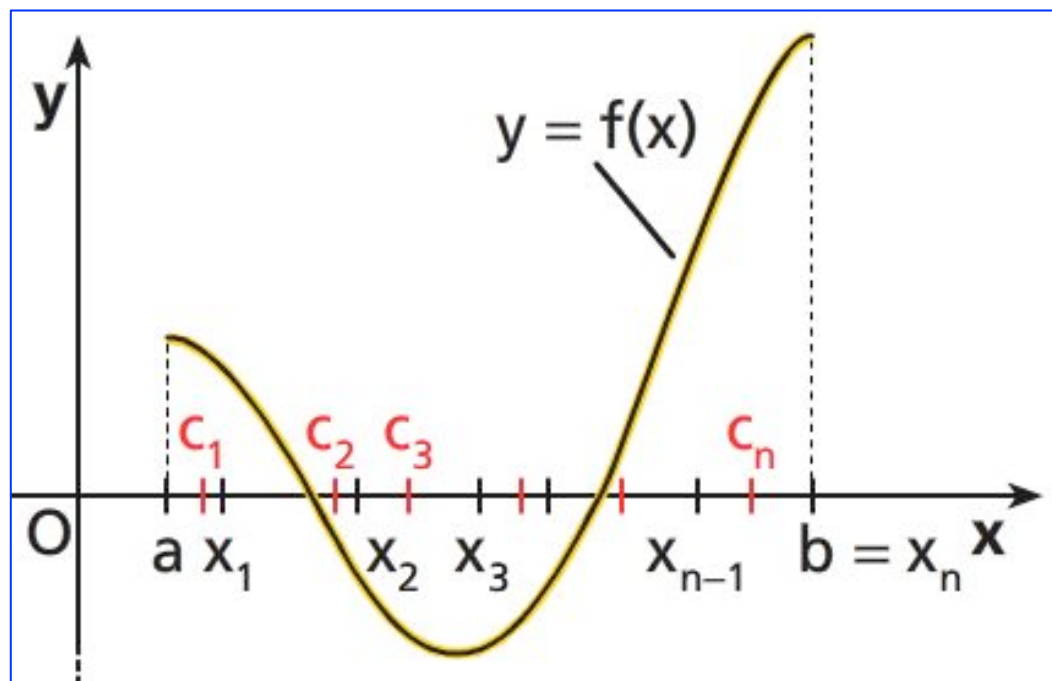
- Se $f(x)$ cambia segno in $[a; b]$, allora $\int_a^b f(x)$ può essere positivo, negativo o nullo.

Per calcolare l'area compresa tra il grafico di $f(x)$ e l'asse x occorre suddividere l'intervallo $[a; b]$ in sottointervalli in ognuno dei quali la funzione ha lo stesso segno (figura c). Riprenderemo l'argomento a pagina 2013.

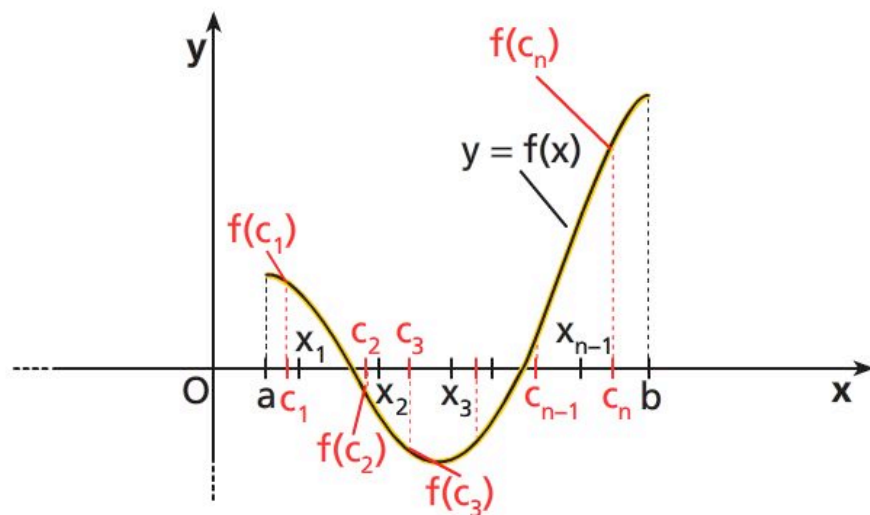


□ Definizione generale di integrale definito

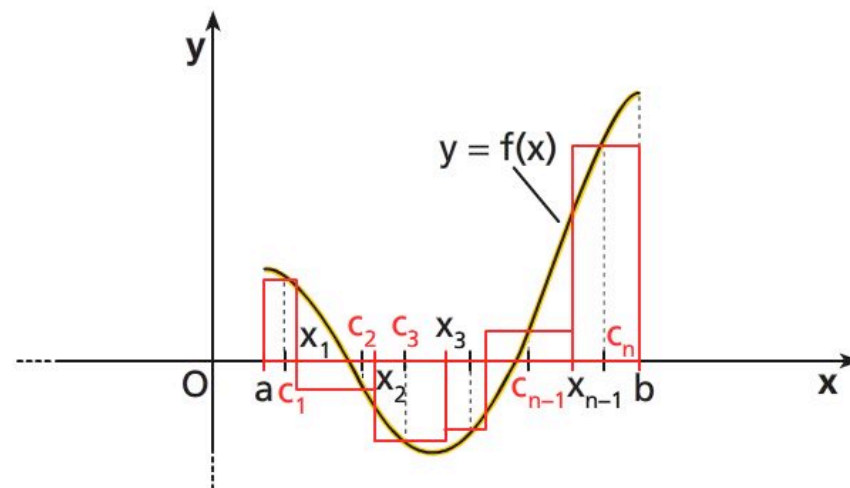
Nella definizione di integrale definito non è necessario, come abbiamo ipotizzato finora, considerare dei sottointervalli di $[a; b]$ tutti della stessa ampiezza e neppure prendere per $f(x)$ i valori minimi e massimi negli intervalli.



◀ **Figura 6** Dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in n parti di ampiezza qualsiasi e scegliamo in ciascuna di esse un punto qualsiasi.



a. Consideriamo il valore della funzione per ognuno dei punti c_i scelti.



b. Per ciascun intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ consideriamo il rettangolo di altezza $f(c_i)$.

Scriviamo poi la somma $\bar{S}$ data da:

$$\bar{S} = f(c_1) \cdot \Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + f(c_3) \cdot \Delta x_3 + \dots + f(c_n) \cdot \Delta x_n$$

Fra le ampiezze degli intervalli indichiamo quella massima con $\Delta x_{\max}$: se $\Delta x_{\max} \rightarrow 0$, anche tutte le altre ampiezze tendono a 0.

Si può dimostrare che se $\Delta x_{\max}$ tende a 0, tutte le somme $\bar{S}$, ottenute scegliendo in qualsiasi modo la suddivisione dell'intervallo e i punti all'interno dei diversi intervalli, tendono a uno stesso valore S .

Diamo allora la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Integrale definito

Data una funzione $f(x)$, continua in $[a; b]$, si chiama integrale definito esteso all'intervallo $[a; b]$ il valore del limite per $\Delta x_{\max}$ che tende a 0 della somma $\bar{S}$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_{\max} \rightarrow 0} \bar{S}.$$

Per convenzione si pone:

DEFINIZIONE

- $\int_a^a f(x) dx = 0;$
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{se } a > b.$

Se per una funzione esiste l'integrale definito in un intervallo $[a; b]$, si dice che la **funzione è integrabile in $[a; b]$** .

● Tutte le funzioni continue sono integrabili.

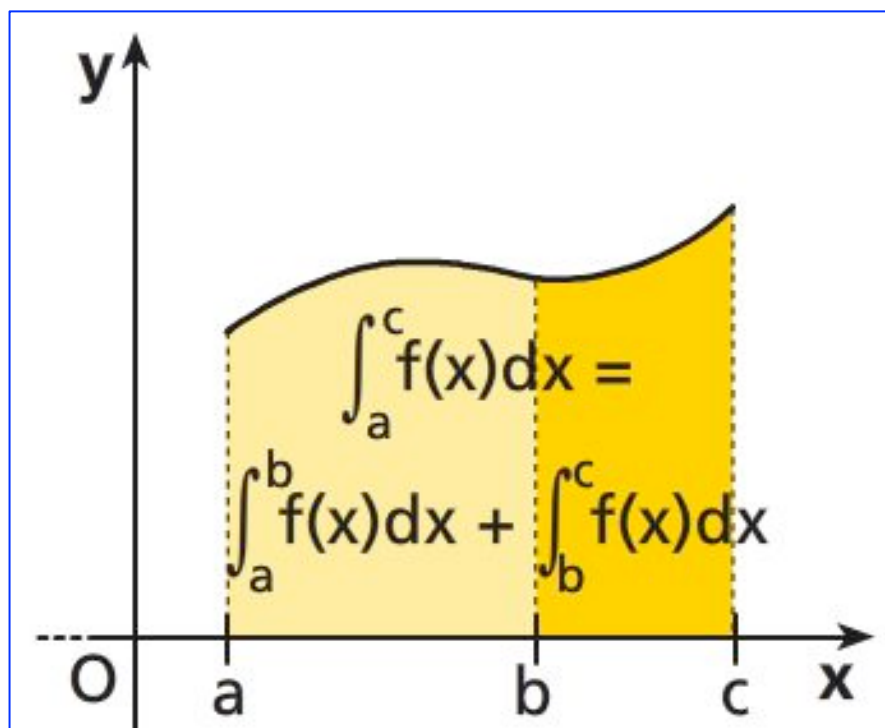
■ Le proprietà dell'integrale definito

■ PROPRIETÀ

Additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione

Se $f(x)$ è continua in un intervallo e a, b, c sono punti qualunque di tale intervallo, si ha:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$



Interpretazione
geometrica nel caso
che $f(x) > 0$ e $a < b < c$

■ PROPRIETA

Integrale della somma di funzioni

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue in $[a; b]$, allora è continua anche la loro somma $f(x) + g(x)$, e risulta:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

■ PROPRIETA

Integrale del prodotto di una costante per una funzione

Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a; b]$, allora è continua anche la funzione $k \cdot f(x)$, con $k \in \mathbb{R}$, e risulta:

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

■ PROPRIETÀ

Confronto tra gli integrali di due funzioni

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni continue e tali che $f(x) \leq g(x)$ in ogni punto dell'intervallo $[a; b]$, allora l'integrale da a a b di $f(x)$ è minore o uguale all'integrale di $g(x)$:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

■ PROPRIETÀ

Integrale del valore assoluto di una funzione

Se $f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo $[a; b]$, allora il valore assoluto dell'integrale da a a b della $f(x)$ è minore o uguale all'integrale del valore assoluto della $f(x)$:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

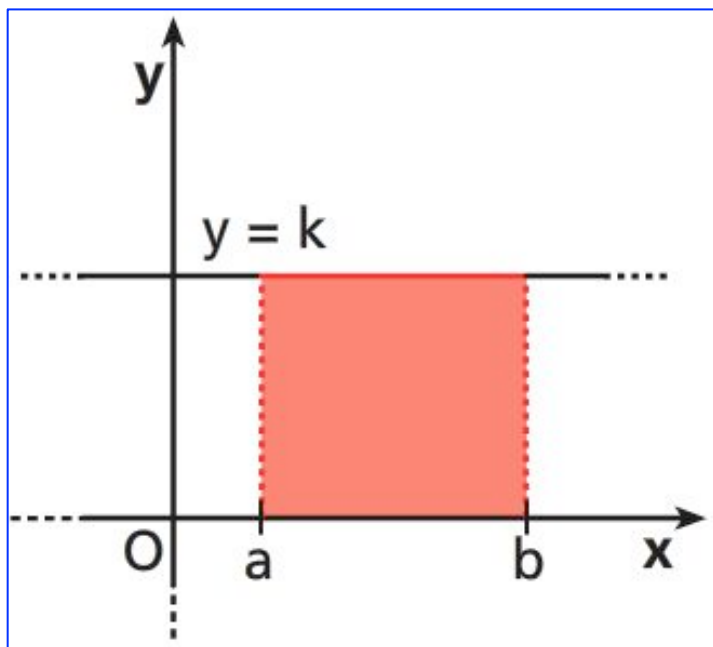
PROPRIETA

Integrale di una funzione costante

Se una funzione $f(x)$ è costante nell'intervallo $[a; b]$, cioè $f(x) = k$, allora l'integrale da a a b della $f(x)$ è uguale al prodotto di k per $(b - a)$:

$$\int_a^b k \, dx = k(b - a).$$

La proprietà dell'integrale di una funzione costante è valida per qualunque valore di k . Se $k > 0$, il trapezoide è un rettangolo di base $b - a$ e altezza k .



▲ **Figura 8** Se $k > 0$, l'integrale $\int_a^b k \, dx$ rappresenta l'area del rettangolo, che è $k(b - a)$.

Il teorema della media

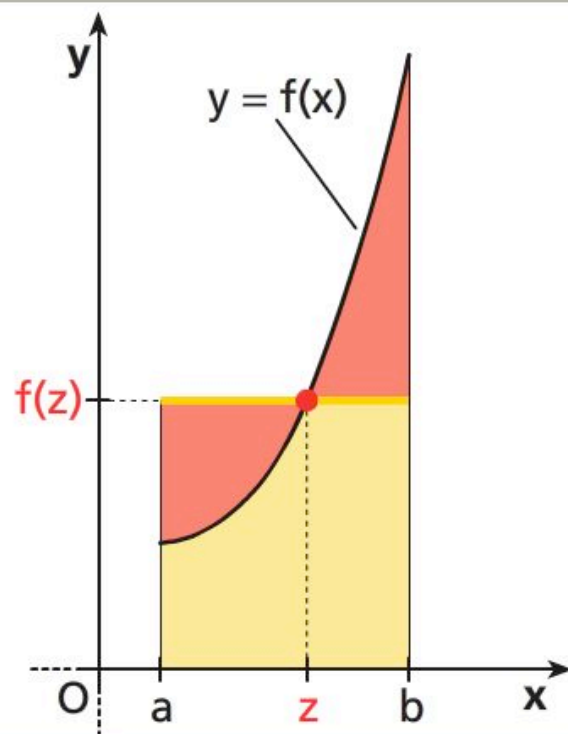
TEOREMA

Teorema della media

Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo $[a; b]$, esiste almeno un punto z dell'intervallo tale che:

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(z),$$

con $z \in [a; b]$.



● Geometricamente, se la funzione è positiva in $[a; b]$, il teorema della media

esprime l'equivalenza fra un trapezoide, la cui area misura $\int_a^b f(x) dx$, e un rettangolo, aventi uguale base $b - a$. L'altezza

del rettangolo è data dal valore di f in un particolare punto z dell'intervallo $[a; b]$:

$$f(z) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}.$$

DIMOSTRAZIONE

Poiché la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo $[a; b]$, allora per il teorema di Weierstrass la funzione assume in $[a; b]$ il suo valore massimo M e il suo valore minimo m . Quindi, per ogni x appartenente ad $[a; b]$, deve valere la disuguaglianza:

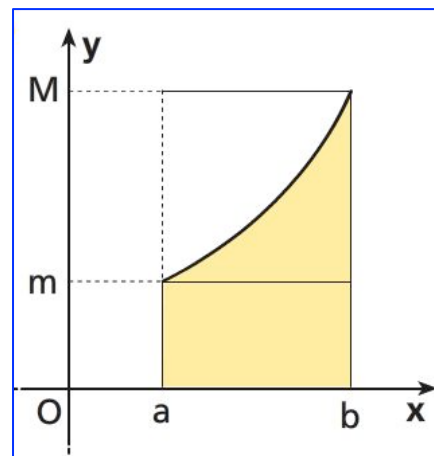
$$m \leq f(x) \leq M.$$

Per le proprietà degli integrali, vale anche la disuguaglianza:

$$\int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx.$$

Applicando la proprietà dell'integrale di una funzione costante, possiamo scrivere:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b - a).$$



L'area del trapezoide è compresa tra l'area del rettangolo minimo e l'area del rettangolo massimo di base $b - a$.

Dividiamo tutti i membri della disuguaglianza per $(b - a)$:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \leq M.$$

Per il teorema dei valori intermedi, la funzione deve assumere almeno una volta tutti i valori compresi fra il suo massimo e il suo minimo, quindi deve esistere un punto z appartenente ad $[a; b]$ tale che:

$$f(z) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}.$$

Pertanto esiste almeno un punto z appartenente ad $[a; b]$ tale che:

$$\int_a^b f(x) dx = f(z) (b - a).$$

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

La funzione integrale

Il calcolo dell'integrale definito risulta molto laborioso se applichiamo la definizione.

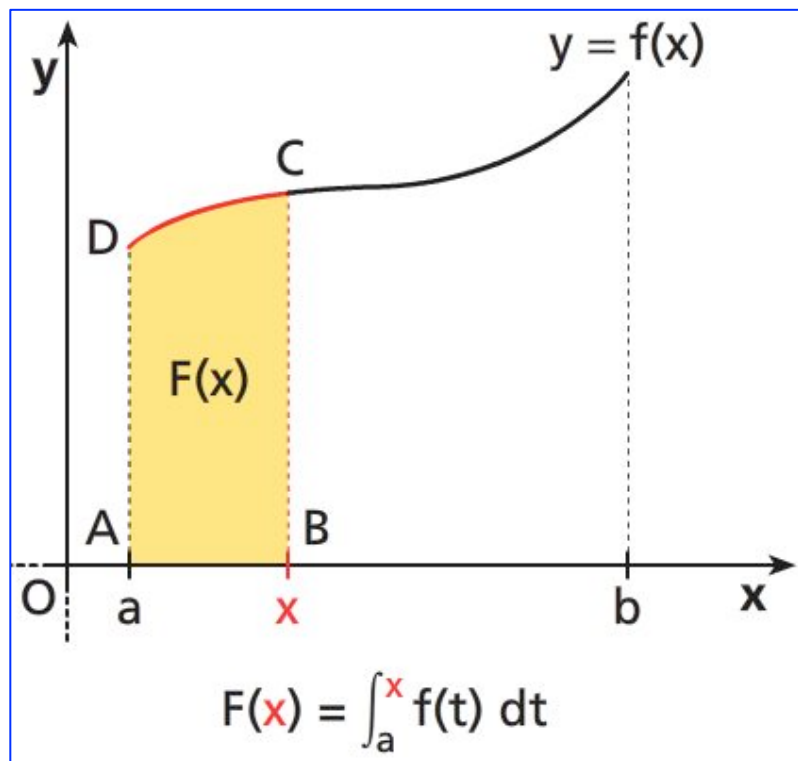
In questo paragrafo faremo vedere che è possibile calcolare rapidamente l'integrale definito di una funzione utilizzando gli integrali indefiniti.

Sia f una funzione continua nell'intervallo $[a; b]$. Consideriamo un punto qualsiasi x di $[a; b]$.

Definiamo **funzione integrale** di f in $[a; b]$ la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

che associa a ogni $x \in [a; b]$ il numero reale $\int_a^x f(t) dt$, dove la variabile indipendente x coincide con l'estremo superiore di integrazione. Per non creare confusione fra variabili, la funzione integranda viene indicata con $f(t)$, dove t diventa la variabile di integrazione.



● Se la funzione $f(t)$ è positiva in $[a; b]$, la funzione integrale $F(x)$ rappresenta l'area del trapezoide $ABCD$ (figura 9). Tale area dipende dal valore di x , variabile nell'intervallo $[a; b]$. Dalla definizione di $F(x)$ otteniamo le seguenti relazioni:

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0, \quad F(b) = \int_a^b f(t) dt.$$

Il teorema fondamentale del calcolo integrale

TEOREMA

Teorema fondamentale del calcolo integrale

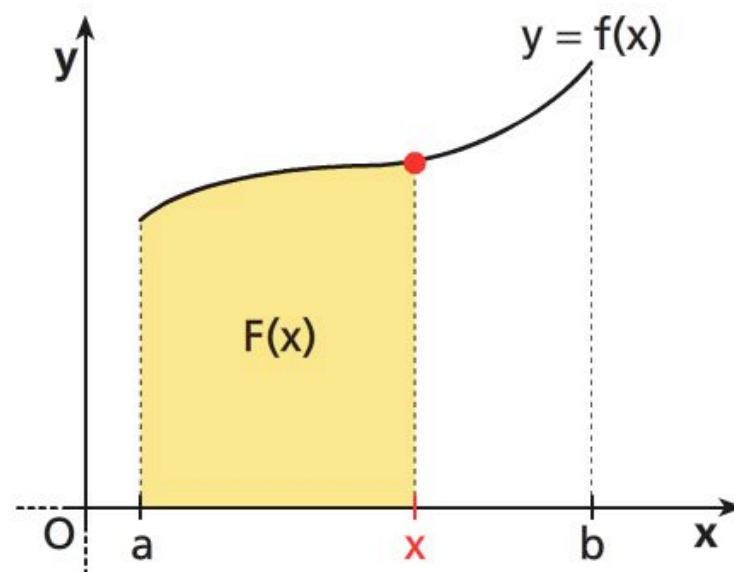
Se una funzione $f(x)$ è continua in $[a; b]$, allora esiste la derivata della sua funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

per ogni punto x dell'intervallo $[a; b]$ ed è uguale a $f(x)$, cioè:

$$F'(x) = f(x),$$

ovvero $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$.



$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

DIMOSTRAZIONE

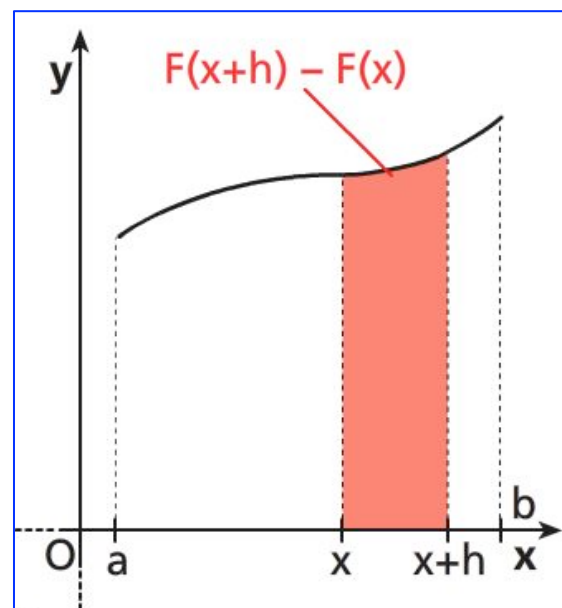
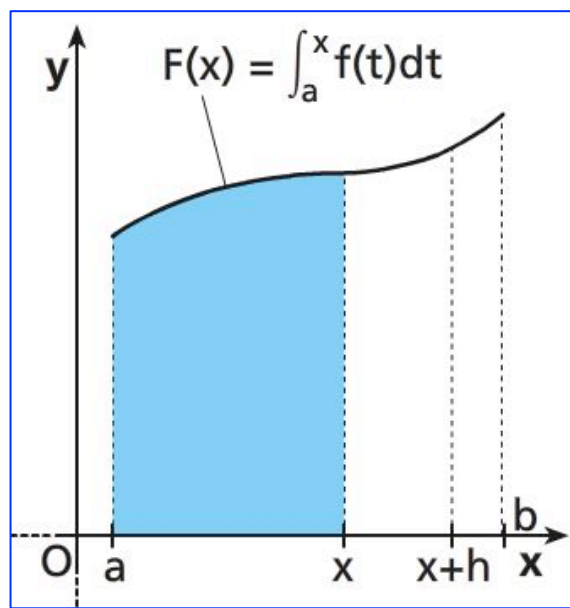
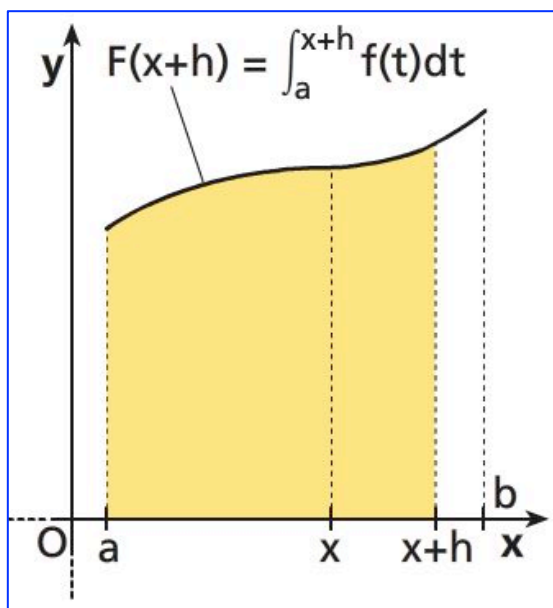
Dimostriamo che esiste la derivata di $F(x)$ e calcoliamo tale derivata applicando la definizione.

Incrementiamo la variabile x di un valore $h \neq 0$ tale che $a < x + h < b$ e calcoliamo la differenza $F(x + h) - F(x)$ utilizzando l'espressione della funzione integrale (figura):

$$F(x + h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt.$$

Applichiamo la proprietà di additività dell'integrale:

$$F(x + h) - F(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt.$$



Applichiamo la proprietà di additività dell'integrale:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Per il teorema della media, il valore dell'integrale è uguale al prodotto dell'ampiezza h dell'intervallo di integrazione per il valore $f(z)$, dove z è un particolare punto dell'intervallo $[x; x+h]$, nel caso in cui sia $h > 0$, oppure dell'intervallo $[x+h; x]$, se $h < 0$; pertanto possiamo scrivere:

$$F(x+h) - F(x) = h \cdot f(z).$$

Dividiamo i due membri per h :

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(z).$$

Analizziamo il comportamento di $f(z)$ al tendere a 0 di h . Sia $h > 0$; poiché z è compreso fra x e $x + h$ (figura b), se h tende a 0 (da destra), allora z tende a x (da destra) e $\lim_{h \rightarrow 0^+} f(z) = \lim_{z \rightarrow x^+} f(z) = f(x)$ perché f è continua per ipotesi.

Con ragionamento analogo, se $h < 0$, si deduce che $\lim_{h \rightarrow 0^-} f(z) = \lim_{z \rightarrow x^-} f(z) = f(x)$.
Dunque:

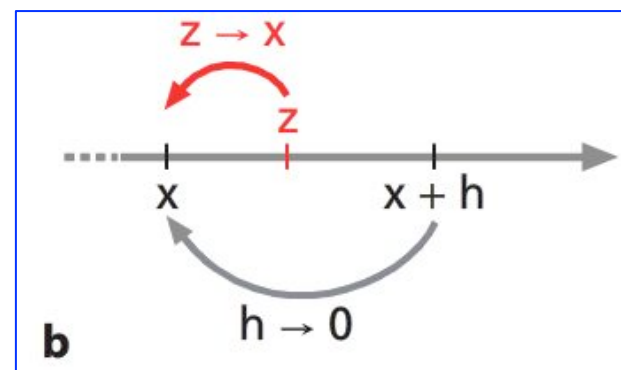
$$\lim_{h \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow x} f(z) = f(x).$$

Possiamo pertanto concludere che esiste anche il limite, per h tendente a 0, dell'espressione al primo membro, cioè del rapporto incrementale della F nel punto x , e:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(z) = f(x).$$

La funzione F è quindi, per definizione, derivabile e risulta:

$$F'(x) = f(x).$$



Per il teorema ora dimostrato, una funzione f continua in $[a; b]$ ammette come primitiva fondamentale la funzione integrale $F(x)$, con x variabile nell'intervallo $[a; b]$. Pertanto, l'integrale indefinito di f , inteso come la totalità delle sue primitive, si esprime come:

$$\int f(x) dx = \int_a^x f(t) dt + c,$$

dove c è una qualunque costante reale.

● La funzione integrale $F(x)$, essendo derivabile, è continua.

● La derivata di $F(x)$ coincide con il valore che la funzione integranda $f(t)$ assume nell'estremo variabile x di integrazione, ossia

$$D \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

Il calcolo dell'integrale definito

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale possiamo ottenere la formula del calcolo dell'integrale definito.

Sia $\varphi(x)$ una primitiva qualsiasi di $f(x)$.

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale sappiamo che la funzione integrale $F(x)$ è una *particolare* primitiva della funzione f . Pertanto $\varphi(x)$ risulta della forma:

$$\varphi(x) = F(x) + c = \int_a^x f(t) dt + c,$$

dove c è una costante reale arbitraria.

- Calcoliamo $\varphi(a)$ (sostituiamo all'estremo di integrazione x il valore a):

$$\varphi(a) = \int_a^a f(t) dt + c = 0 + c = c.$$

● Per definizione:

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

- Calcoliamo $\varphi(b)$ (sostituiamo all'estremo di integrazione x il valore b):

$$\varphi(b) = \int_a^b f(t) dt + c. \text{ Poiché } \varphi(a) = c, \text{ otteniamo:}$$

$$\varphi(b) = \int_a^b f(t) dt + \varphi(a).$$

Portiamo al primo membro $\varphi(a)$,

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b f(t) dt,$$

e scriviamo l'uguaglianza da destra a sinistra:

$$\int_a^b f(t) dt = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Poiché non ci sono più ambiguità di variabili, possiamo riutilizzare la variabile x e scrivere:

$$\int_a^b f(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

● Questa formula è detta anche formula di **Leibniz-Newton**.

L'integrale definito di una funzione continua $f(x)$ è uguale alla differenza tra i valori assunti da una qualunque primitiva $\varphi(x)$ di $f(x)$ rispettivamente nell'estremo superiore di integrazione e nell'estremo inferiore.

Poiché non ci sono più ambiguità di variabili, possiamo riutilizzare la variabile x e scrivere:

Formula di Leibnitz-Newton

$$\int_a^b f(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

L'integrale definito di una funzione continua $f(x)$ è uguale alla differenza tra i valori assunti da una qualunque primitiva $\varphi(x)$ di $f(x)$ rispettivamente nell'estremo superiore di integrazione e nell'estremo inferiore.

● Di solito nella totalità delle primitive si sceglie quella corrispondente al valore di $c = 0$.

La formula trovata permette di ricondurre il calcolo di un integrale definito a quello di un integrale indefinito. Si supera in tal modo la difficoltà del calcolo del limite della successione s_n , che, in generale, non è facile da determinare.

ESEMPIO

Calcoliamo $\int_2^3 2x \, dx$.

Utilizziamo l'integrale indefinito per determinare le primitive di $2x$:

$$\int 2x \, dx = x^2 + c.$$

Scegliamo la primitiva con $c = 0$, ossia x^2 :

$$\int_2^3 2x \, dx = [x^2]_2^3.$$

Sostituiamo a x prima il valore 3 e poi il valore 2, ottenendo:

$$[x^2]_2^3 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5.$$

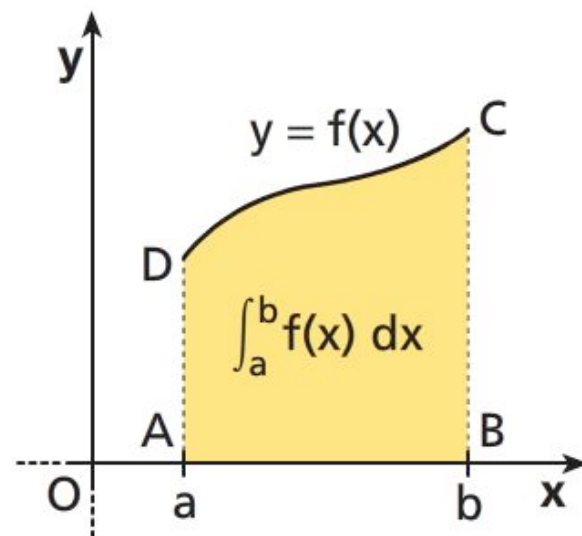
● Verifica che il risultato non cambia se scegliamo come primitiva, per esempio, $x^2 + 3$.

CALCOLO AREE SUPERFICIE PIANE

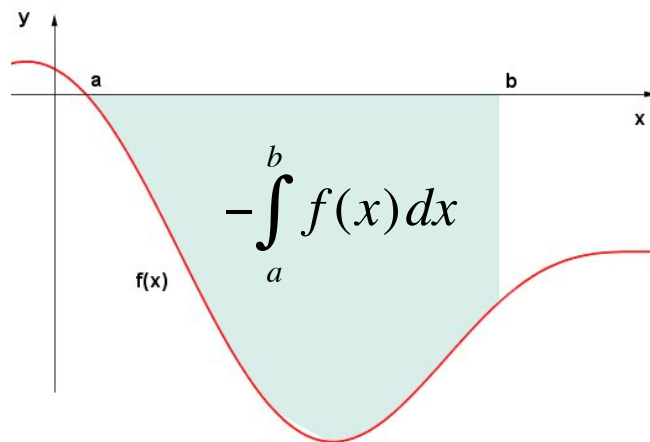
■ Area compresa tra una curva e l'asse x

Abbiamo visto che:

- Se $f(x) > 0$ in $[a; b]$, allora $\int_a^b f(x) dx > 0$

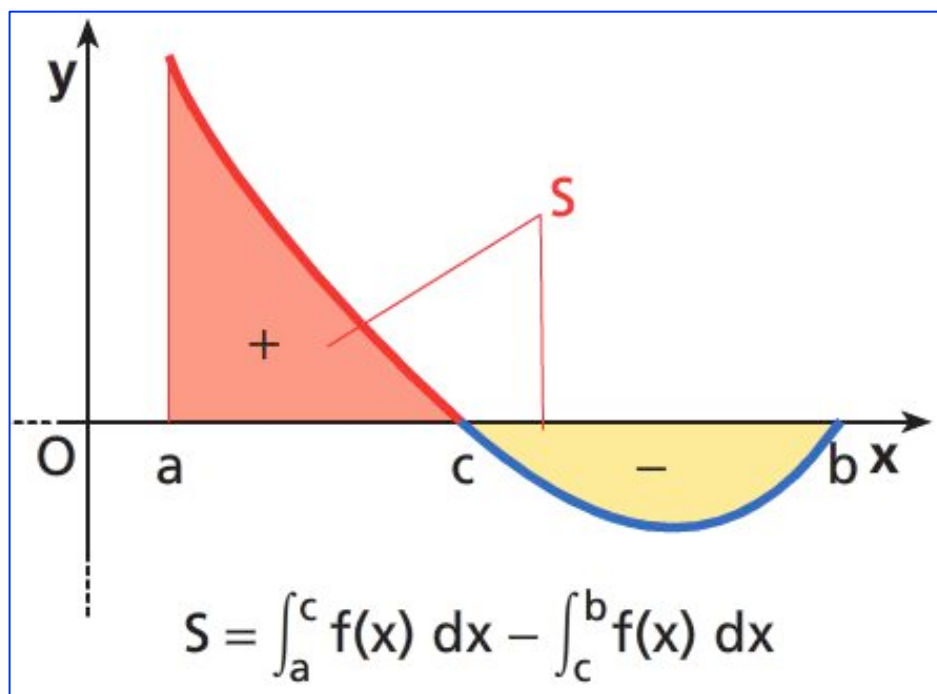


- Se $f(x) < 0$ in $[a; b]$, allora $\int_a^b f(x) dx < 0$.



Se $f(x)$ cambia segno nell'intervallo $[a; b]$, per determinare l'area compresa tra il suo grafico e l'asse x occorre suddividere l'intervallo $[a; b]$ in sottointervalli tali che in

ciascuno di essi la funzione mantenga lo stesso segno. Si calcolano poi gli integrali nei diversi intervalli e si sommano algebricamente i risultati.



ESEMPIO

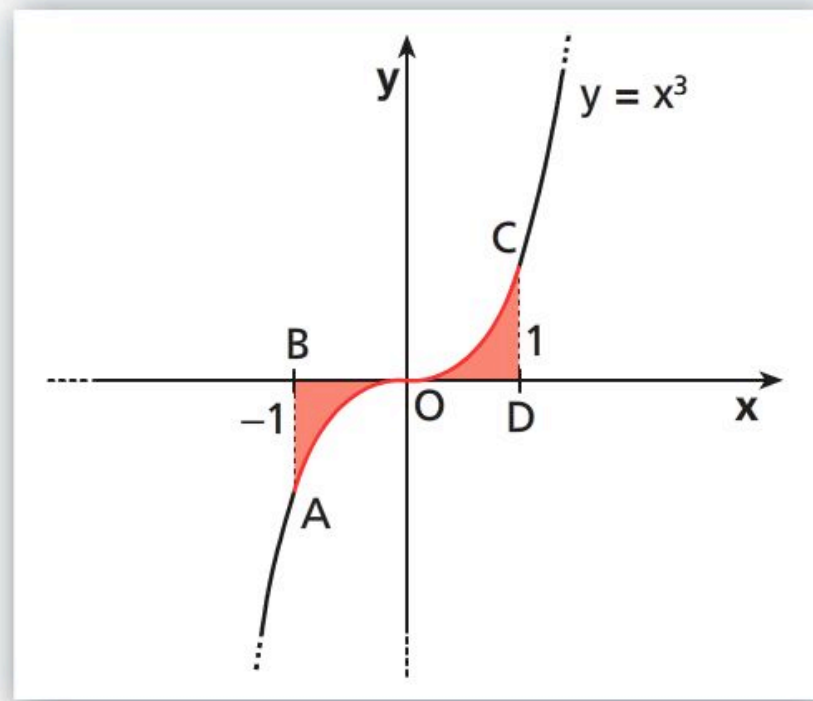
Calcoliamo l'area della superficie compresa tra il grafico della funzione $y = x^3$ e l'asse x nell'intervallo $[-1; 1]$.

Si ha:

$$S = -\int_{-1}^0 x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx =$$

$$= -\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= -\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$



● Per calcolare l'area è sempre opportuno tracciare il grafico della funzione.

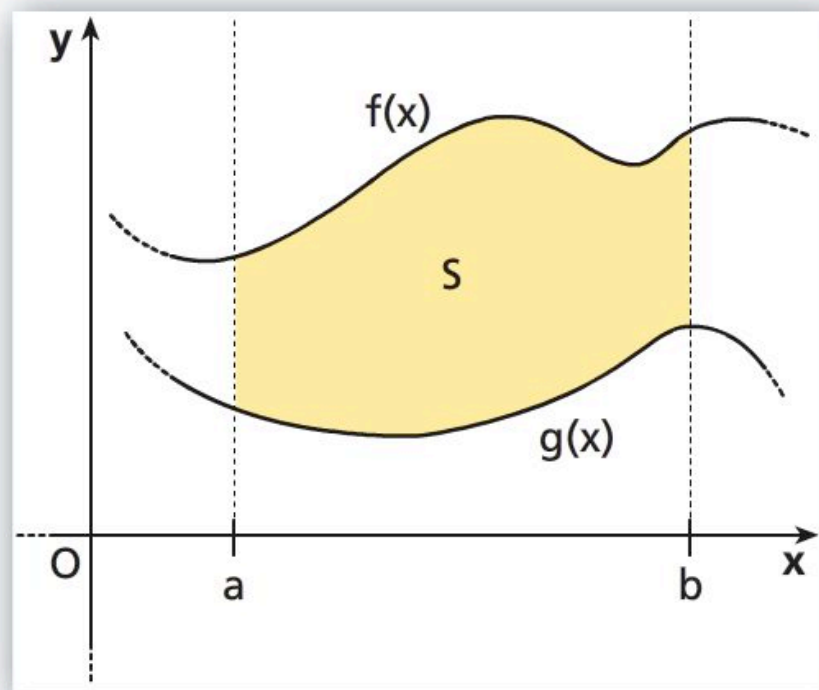
■ Area compresa tra due curve

Consideriamo due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ continue, entrambe positive e con $f(x) \geq g(x)$ nell'intervallo $[a; b]$. L'area S della superficie racchiusa dai loro grafici nell'intervallo $[a; b]$ si può ottenere facendo la differenza tra l'area del trapezoide individuato da $f(x)$ e l'area del trapezoide individuato da $g(x)$, cioè:

$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

Applicando la proprietà dell'integrale definito della somma di funzioni si ha:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

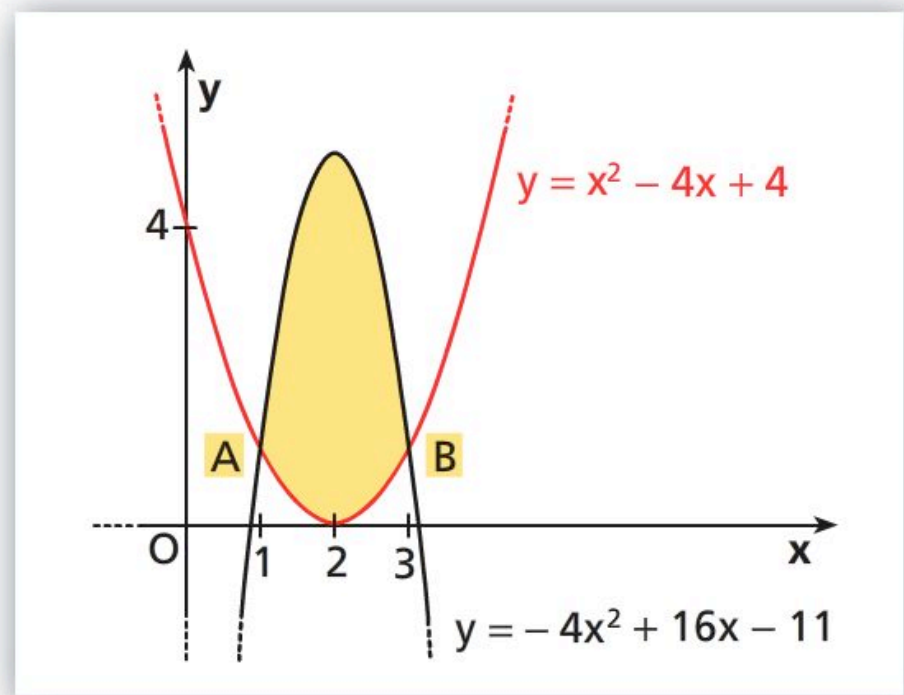


ESEMPIO

Calcoliamo l'area della superficie racchiusa dalle due parabole di equazioni $y = x^2 - 4x + 4$ e $y = -4x^2 + 16x - 11$ (figura 13).

Le due parabole si intersecano nei punti $A(1; 1)$ e $B(3; 1)$.

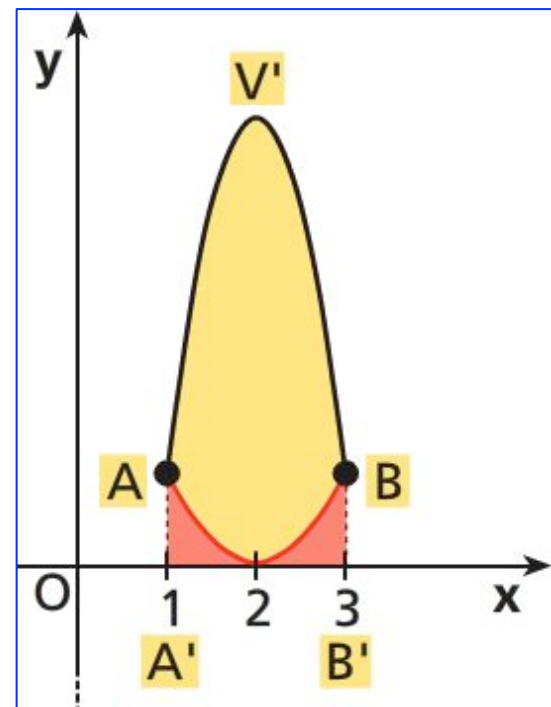
L'area S cercata è quindi data dalla differenza fra l'area del trapezoide $A'AV'B B'$ e l'area del trapezoide $AA'B'B$ (figura a sinistra).



► Figura 13

$$S = \text{Area}(A'AV'B'B') - \text{Area}(AA'B'B) =$$

$$= \int_1^3 (-4x^2 + 16x - 11) dx - \int_1^3 (x^2 - 4x + 4) dx$$

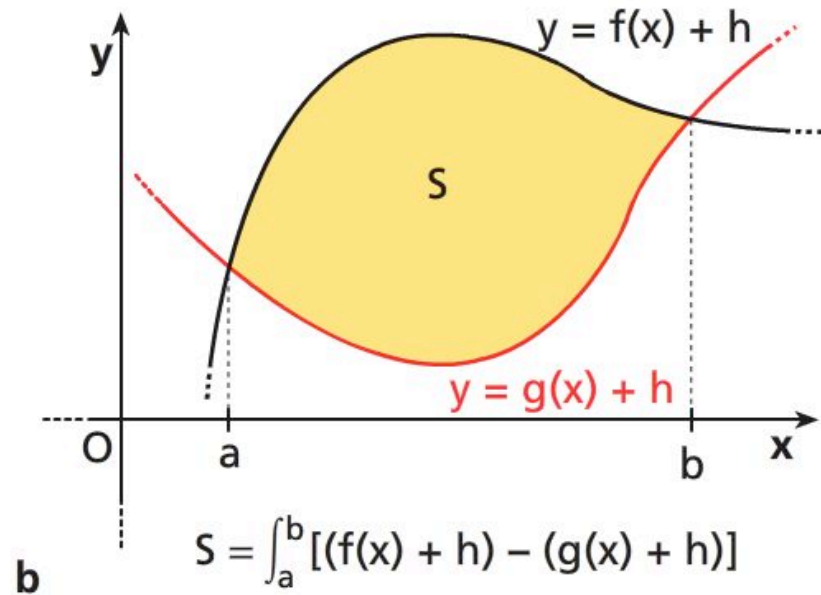
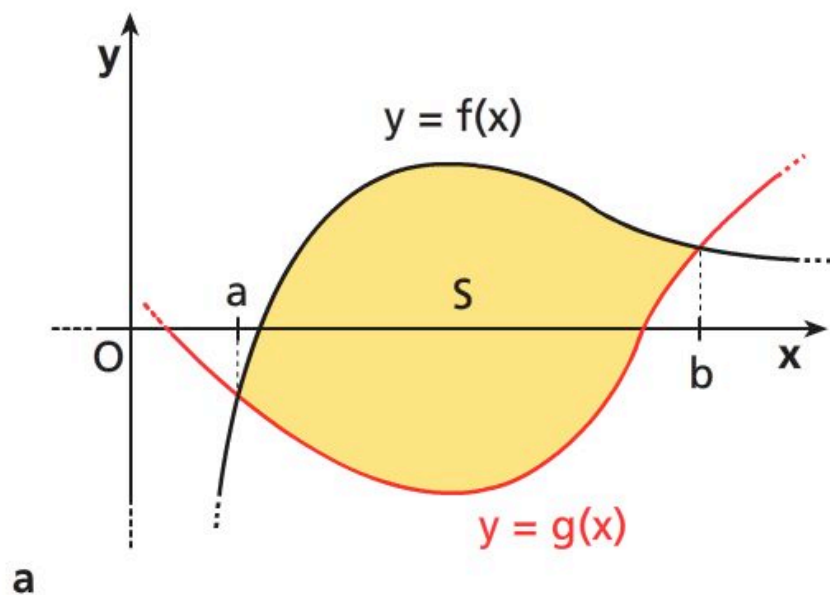


$$S = \int_1^3 (-4x^2 + 16x - 11 - x^2 + 4x - 4) dx =$$

$$= \int_1^3 (-5x^2 + 20x - 15) dx = \left[-\frac{5x^3}{3} + \frac{20x^2}{2} - 15x \right]_1^3 =$$

$$= -\cancel{45} + \cancel{90} - \cancel{45} + \frac{5}{3} - 10 + 15 = \frac{20}{3}.$$

La formula resta valida anche se una o entrambe le funzioni sono negative. Infatti se la superficie non si trova tutta al di sopra dell'asse x , si può effettuare una traslazione in modo che essa sia tutta al di sopra dell'asse x .



Allora:

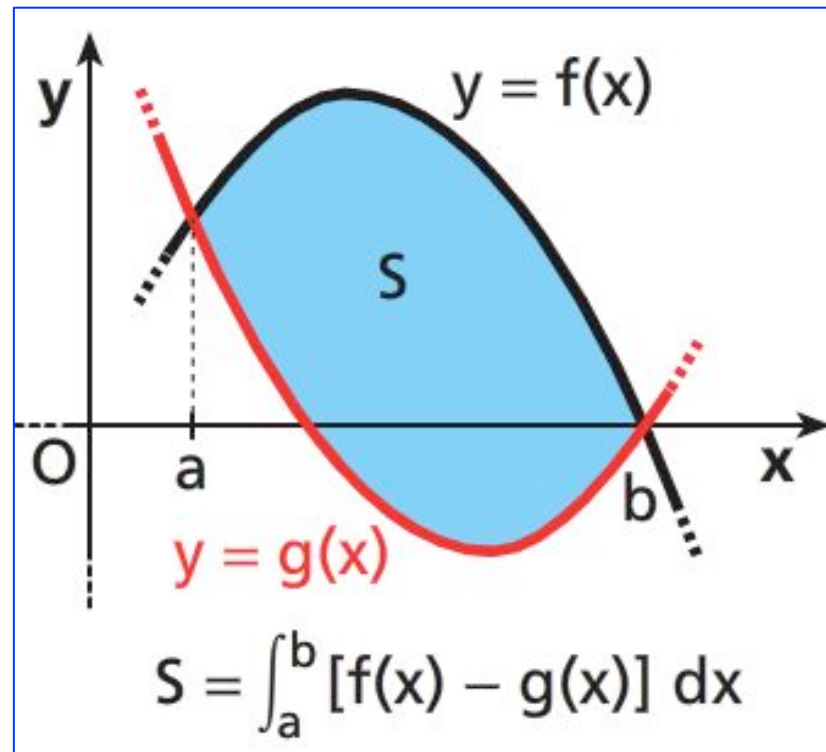
$$S = \int_a^b [(f(x) + h) - (g(x) + h)] dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Quindi in generale vale la seguente regola.

REGOLA

Area della superficie delimitata da due funzioni

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue definite nello stesso intervallo $[a; b]$, con $f(x) \geq g(x)$, per ogni x in $[a; b]$, i cui grafici racchiudano una superficie; allora l'area S della superficie è data da: $S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.

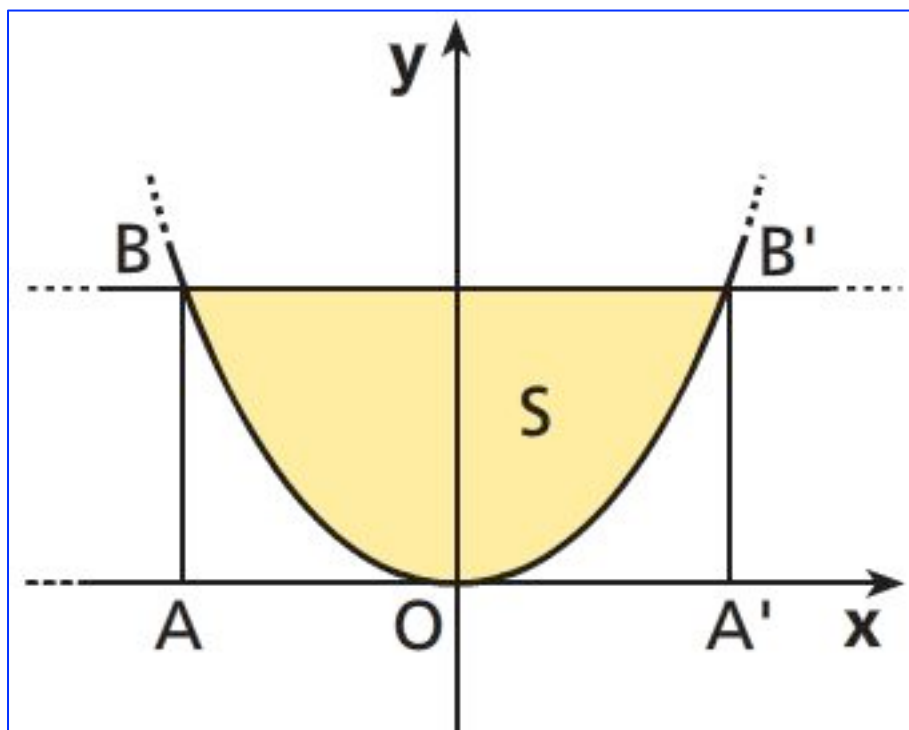


Area del segmento parabolico

TEOREMA

Teorema di Archimede

L'area del segmento parabolico è uguale ai $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo a esso circoscritto.



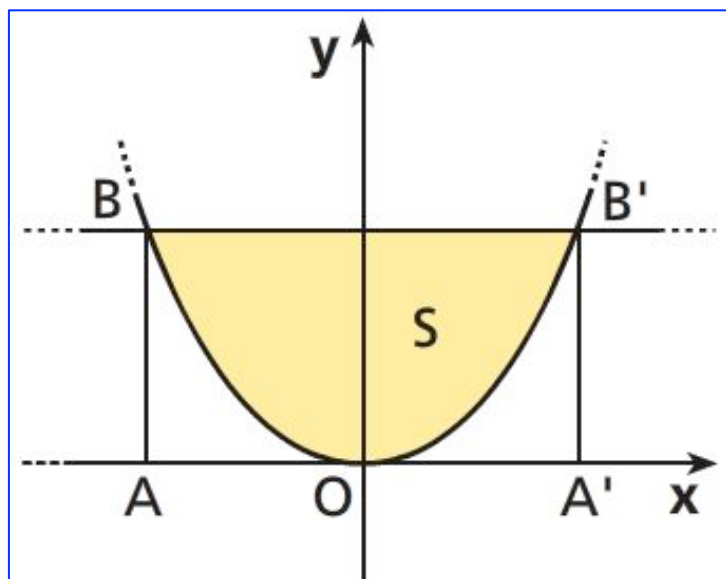
$$S = \frac{2}{3} A_{(AA'B'B)}$$

Consideriamo per esempio la parabola di equazione $y = ax^2$, con $a > 0$. Il segmento parabolico è la zona colorata S della figura a lato.

Se i punti A e A' hanno rispettivamente ascisse $-k$ e k , allora i punti B e B' hanno ordinate ak^2 e il rettangolo $AA'B'B$ ha area $2k \cdot (ak^2) = 2ak^3$. Poiché la retta BB' ha equazione $y = ak^2$, l'area del segmento parabolico S si calcola con l'integrale:

$$\begin{aligned} \int_{-k}^k (ak^2 - ax^2) dx &= \left[ak^2 x - a \frac{x^3}{3} \right]_{-k}^k = \\ &= ak^3 - a \frac{k^3}{3} - \left(-ak^3 + a \frac{k^3}{3} \right) = \frac{4}{3} ak^3 = \frac{2}{3} (2ak^3). \end{aligned}$$

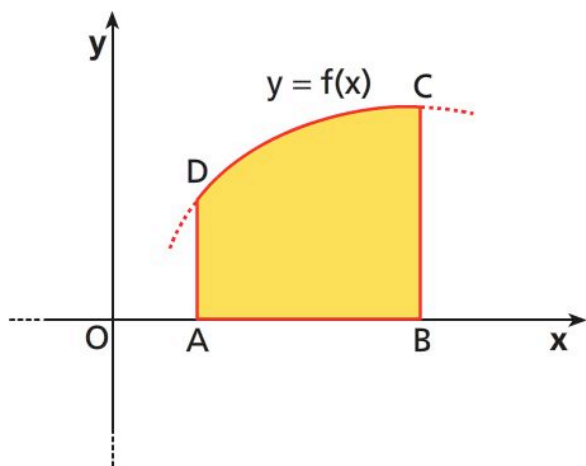
Dunque l'area del segmento parabolico è $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo $AA'B'B$.



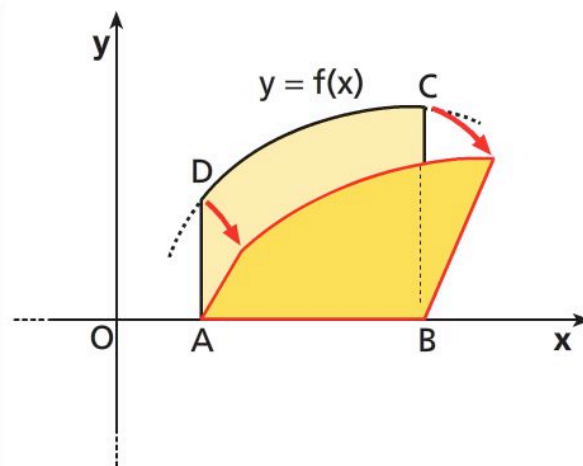
CALCOLO VOLUMI

I volumi dei solidi di rotazione

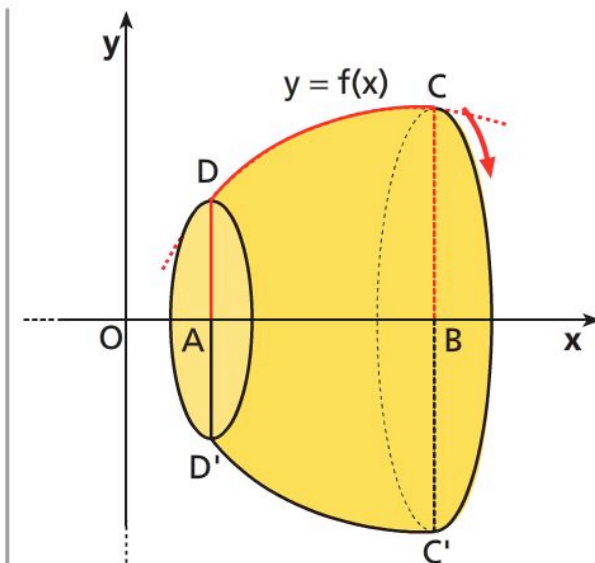
Consideriamo la funzione $y = f(x)$, continua nell'intervallo $[a; b]$ e non negativa, e il trapezoide esteso all'intervallo $[a; b]$. Se facciamo ruotare il trapezoide attorno all'asse x di un giro completo (ossia di 360°), otteniamo un solido di rotazione.



È dato il trapezoide $ABCD$.



b. Ruotiamo il trapezoide attorno all'asse x (il lato AB rimane fisso).



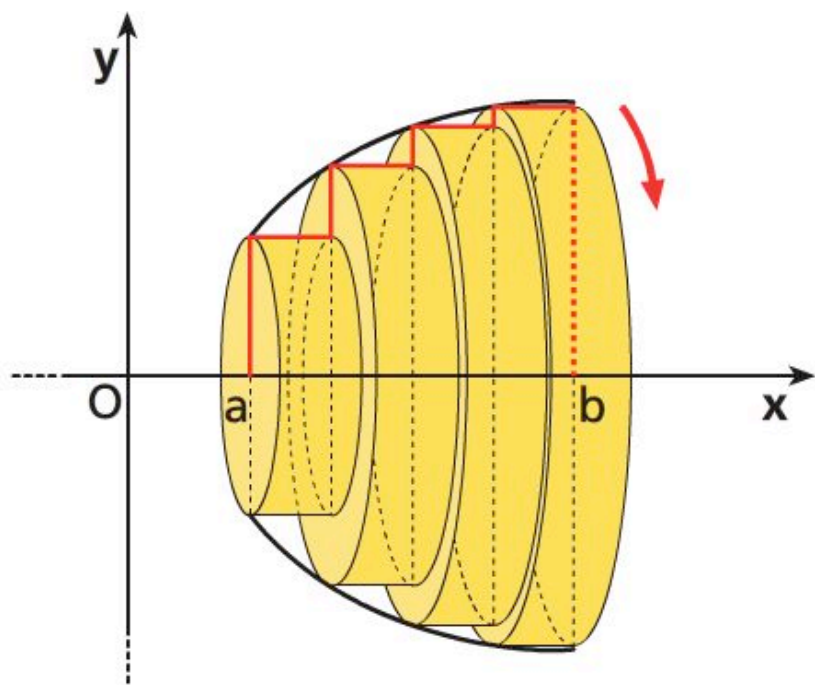
c. Abbiamo ottenuto il solido generato dalla rotazione di 360° del trapezoide attorno all'asse x .

Calcoliamo il volume di tale solido.

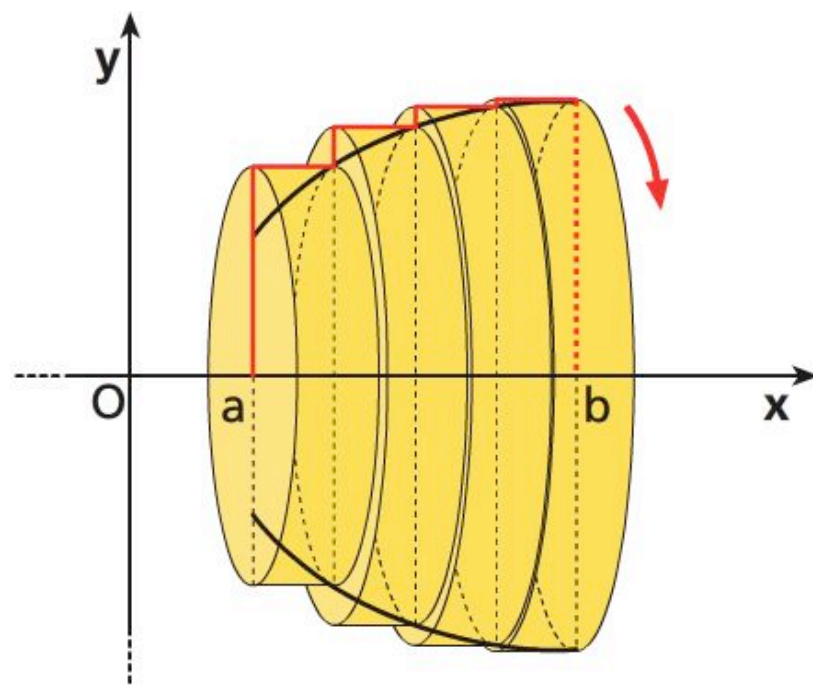
Dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in n parti uguali, ognuna di lunghezza $h = \frac{b-a}{n}$.

In ogni intervallo consideriamo il minimo m_i e il massimo M_i di $f(x)$ e disegniamo i rettangoli inscritti e circoscritti al trapezoide di altezze m_i e M_i .

Nella rotazione completa intorno all'asse delle x ogni rettangolo descrive un cilindro circolare retto di altezza h e raggio di base m_i o M_i (figura 16).



a. Ogni cilindro per difetto ha per base un cerchio di raggio m_i e per altezza h .



b. Ogni cilindro per eccesso ha per base un cerchio di raggio M_i e per altezza h .

La somma dei volumi degli n cilindri con base il cerchio di raggio m_i approssima per difetto il volume del solido di rotazione iniziale, e la somma dei volumi degli n cilindri con base il cerchio di raggio M_i approssima per eccesso il volume dello stesso solido.

Poiché la formula del volume del cilindro circolare di raggio r e altezza h è $\pi r^2 h$, il volume v_n dei cilindri approssimanti il solido per difetto e il volume V_n dei cilindri approssimanti per eccesso sono:

$$v_n = \pi m_1^2 h + \pi m_2^2 h + \pi m_3^2 h + \dots + \pi m_n^2 h;$$

$$V_n = \pi M_1^2 h + \pi M_2^2 h + \pi M_3^2 h + \dots + \pi M_n^2 h.$$

Si può dimostrare che, quando $n \rightarrow +\infty$, le due successioni tendono allo stesso limite e tale limite è uguale al prodotto di π per l'integrale definito da a a b del quadrato di $f(x)$, ossia:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx.$$

DEFINIZIONE

Volume di un solido di rotazione

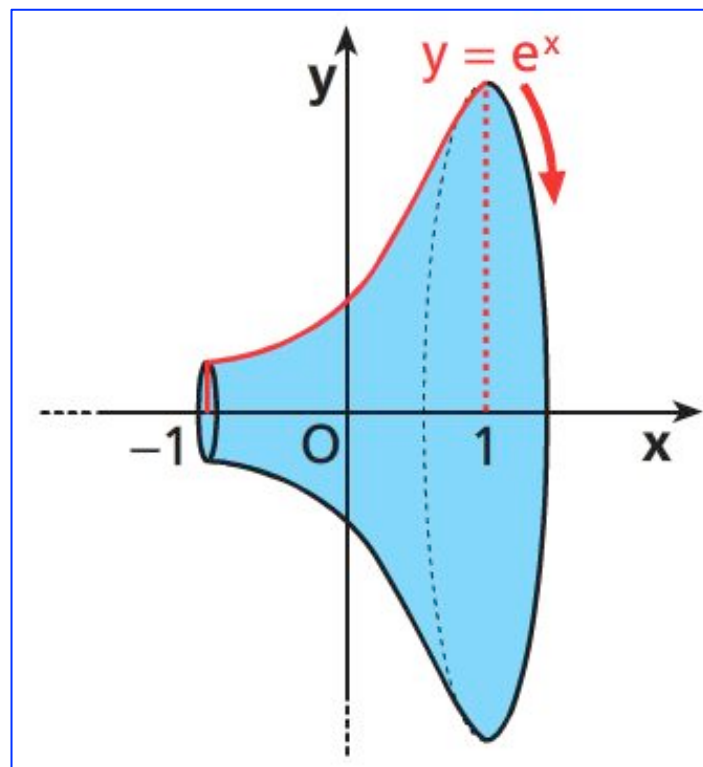
Dato il trapezoide esteso all'intervallo $[a; b]$, delimitato dal grafico della funzione $y = f(x)$ (positiva o nulla), dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$, si chiama volume del solido che si ottiene ruotando il trapezoide intorno all'asse x di un giro completo il numero espresso dal seguente integrale:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx.$$

ESEMPIO

1. Calcoliamo il volume V del solido ottenuto dalla rotazione completa attorno all'asse x della regione di piano delimitata dal grafico della funzione $y = e^x$, con x appartenente all'intervallo $[-1; 1]$.

$$V = \pi \cdot \int_{-1}^1 (e^x)^2 dx = \pi \cdot \int_{-1}^1 e^{2x} dx = \pi \cdot \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_{-1}^1 = \pi \cdot \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^{-2}}{2} \right).$$

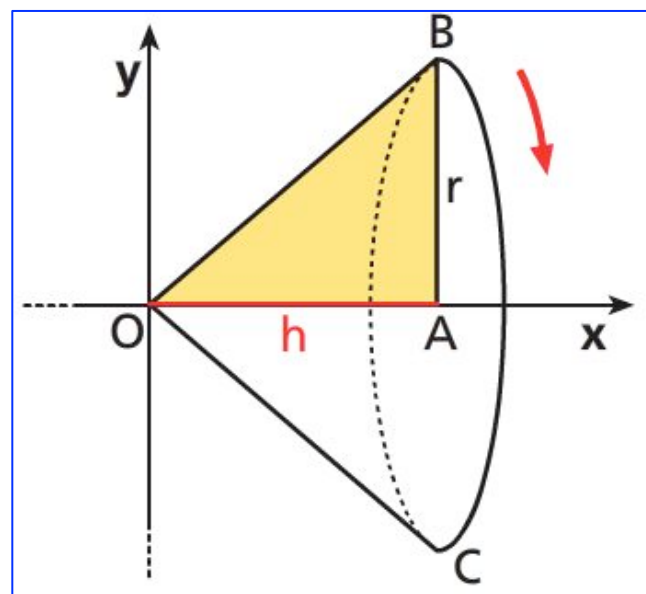


Volume del cono

Consideriamo il cono ottenuto dalla rotazione del triangolo OAB attorno a OA . Se r è il raggio della base e h è l'altezza del cono, allora i punti A e B hanno coordinate $A(h; 0)$ e $B(h; r)$.

Il triangolo OAB è il trapezoide delimitato dal grafico della retta OB che ha equazione $y = \frac{r}{h} \cdot x$. Allora, applicando la definizione, il volume del cono è dato da:

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{r}{h} \cdot x \right)^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \int_0^h x^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

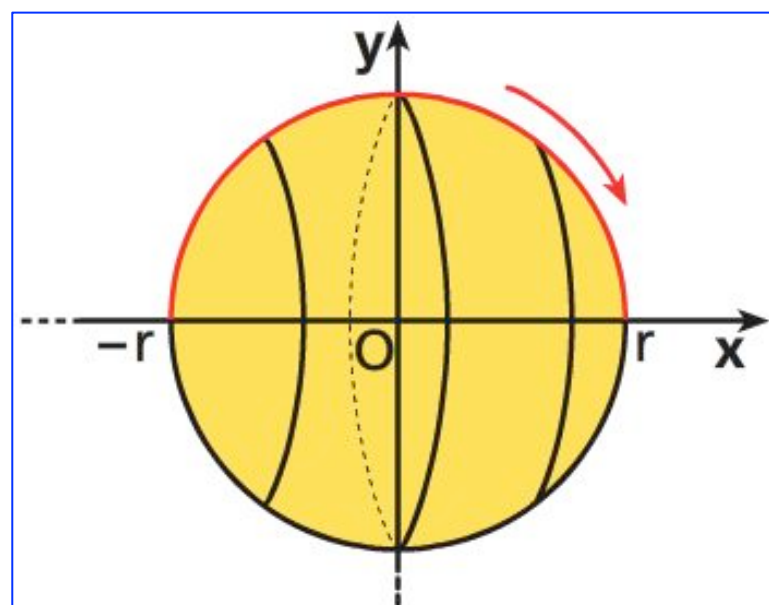


Volume della sfera

L'equazione della semicirconferenza segnata in rosso nella figura a lato è $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Quindi, il volume della sfera è:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \cdot \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \cdot \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \\ &= \pi \cdot \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$



I volumi dei solidi

Dato il solido T della figura, consideriamo due piani paralleli α e β che delimitano T , perpendicolari all'asse x e che lo intersecano in a e b .

Dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in n parti uguali di lunghezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e per

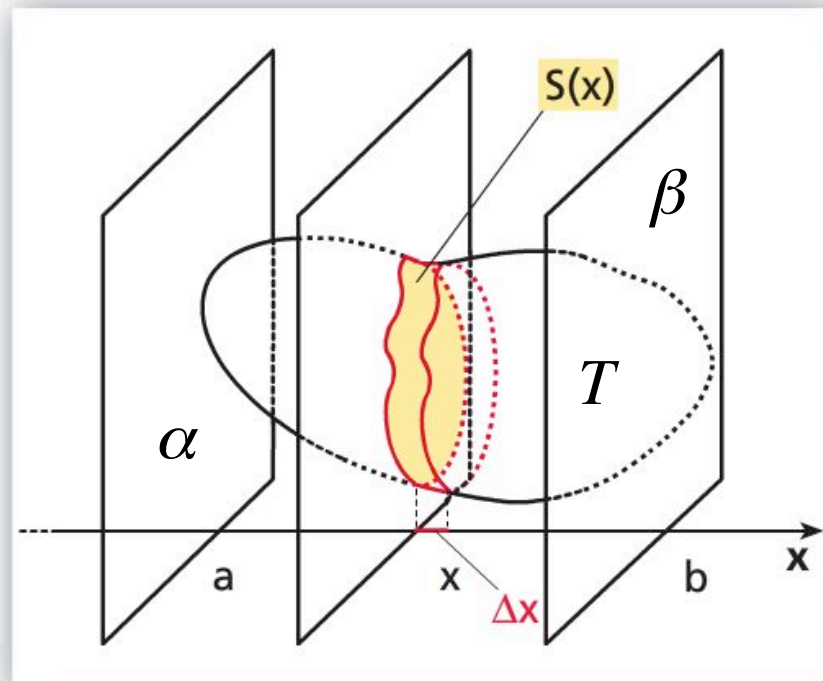
ognuno dei punti di suddivisione conduciamo un piano parallelo ad α e a β .

Ogni piano, intersecando il solido, determina una sezione di area generica.

Con un procedimento simile a quello seguito per i solidi di rotazione possiamo dimostrare che il volume V del solido si ottiene con l'integrale:

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

● Per poter utilizzare questa formula nel calcolo di V , deve essere nota la funzione $S(x)$ che esprime l'area della generica sezione del solido al variare di x .



ESEMPIO

Volume della piramide

Calcoliamo il volume della piramide retta di altezza h e area di base B .

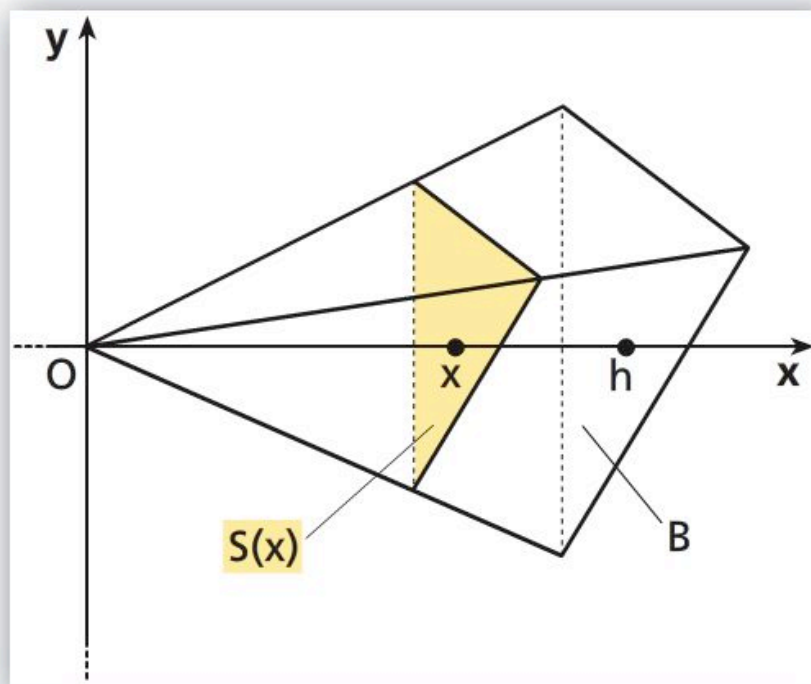
Detta $S(x)$ l'area di una generica sezione a distanza x dal vertice O e parallela alla base, vale la proporzione:

$$S(x) : x^2 = B : h^2 \rightarrow S(x) = \frac{B}{h^2} x^2.$$

Sostituiamo nella formula del volume:

$$V = \int_0^h \frac{B}{h^2} x^2 dx = \left[\frac{B}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{Bh}{3}.$$

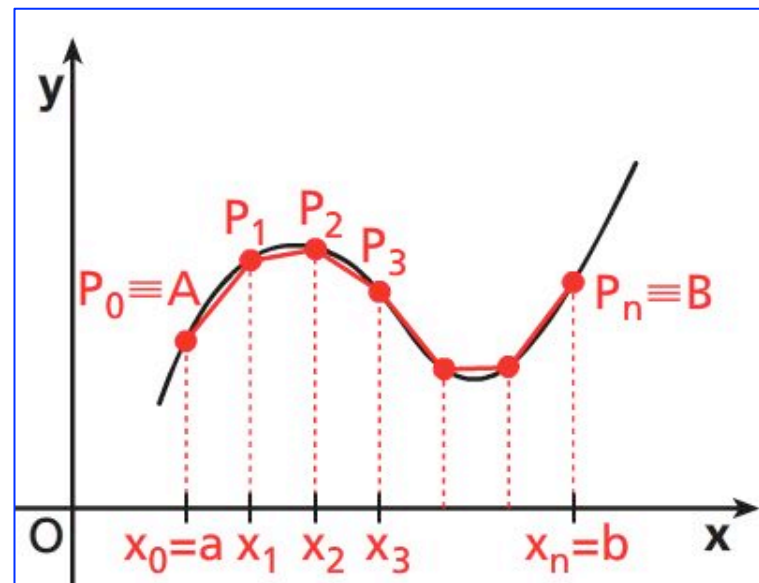
Ritroviamo la formula già nota del volume della piramide.



CALCOLO LUNGHEZZA ARCO DI CURVA

■ La lunghezza di un arco di curva

Consideriamo una funzione $f(x)$ derivabile con derivata continua nell'intervallo $[a;b]$:



Consideriamo l'arco $\widehat{AB}$ della curva e la poligonale che ha per vertici i punti $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$, con P_0 coincidente con A e P_n coincidente con B . La lunghezza l_n della poligonale inscritta nella curva può essere calcolata sommando le distanze fra i punti $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$:

$$l_n = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \dots + \overline{P_{n-1}P_n}.$$

Poiché i punti $P_0, P_1, \dots, P_n$ hanno coordinate

$$P_0(x_0; f(x_0)), P_1(x_1; f(x_1)), \dots, P_n(x_n; f(x_n)),$$

allora per ogni $i = 1, 2, 3, \dots, n$ la lunghezza del segmento $P_{i-1}P_i$ risulta:

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}.$$

● Applichiamo la formula della distanza fra due punti.

Essendo la funzione derivabile in $[a; b]$, applichiamo il teorema di Lagrange in ogni intervallo $[x_{i-1}; x_i]$ per $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\exists c_i \in]x_{i-1}; x_i[\text{ tale che } f'(c_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}},$$

cioè

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

● Il teorema di Lagrange afferma che, se $f(x)$ è continua in $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$, esiste almeno un punto interno c di $[a; b]$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Allora la lunghezza del segmento $P_{i-1}P_i$ risulta:

$$\begin{aligned}\overline{P_{i-1}P_i} &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)]^2(x_i - x_{i-1})^2} = \\ &= (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}.\end{aligned}$$

Se indichiamo con Δx_i l'espressione $x_i - x_{i-1}$, la lunghezza della poligonale è:

$$l_n = \Delta x_1 \sqrt{1 + [f'(c_1)]^2} + \Delta x_2 \sqrt{1 + [f'(c_2)]^2} + \dots + \Delta x_n \sqrt{1 + [f'(c_n)]^2}.$$

Essa dipende dal numero n di suddivisioni e dai punti scelti per la suddivisione. Tanto minore è l'ampiezza degli intervalli $[x_{i-1}; x_i]$, tanto meglio la poligonale approssima la curva.

Essendo per ipotesi $f'(x)$ continua, quando la massima ampiezza degli intervalli $\Delta x_{\max}$ tende a zero, tutte le lunghezze l_n , ottenute scegliendo in qualsiasi modo la suddivisione dell'intervallo $[a; b]$, tendono all'integrale definito della funzione $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ esteso all'intervallo $[a; b]$:

$$l = \lim_{\Delta x_{\max} \rightarrow 0} l_n = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

● Infatti è verificata la definizione generale di integrale definito per la funzione $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$.

DEFINIZIONE

Lunghezza di una curva

Data la funzione $y = f(x)$ derivabile con derivata continua nell'intervallo $[a; b]$, si chiama lunghezza della curva che rappresenta il grafico della funzione, limitata dalle rette di equazioni $x = a$ e $x = b$, il numero espresso dal seguente integrale:

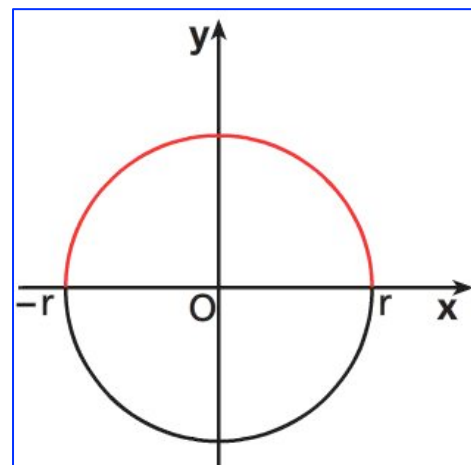
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx.$$

ESEMPIO

Calcoliamo la lunghezza della circonferenza di raggio r .

Poiché la semicirconferenza i cui punti hanno ordinata positiva ha equazione $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, con x appartenente all'intervallo $[-r; r]$, la sua derivata è:

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$



Allora, applicando la formula della lunghezza di una curva, otteniamo:

$$\begin{aligned} l &= \int_{-r}^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \, dx = \int_{-r}^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, dx = r \int_{-r}^r \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} \, dx = \\ &= r \cdot \left[\arcsen \frac{x}{r} \right]_{-r}^r = r \cdot \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = \pi r. \end{aligned}$$

Ritroviamo dunque per la lunghezza della circonferenza il valore $2\pi r$.

CALCOLO AREA SUPERFICIE DI ROTAZIONE

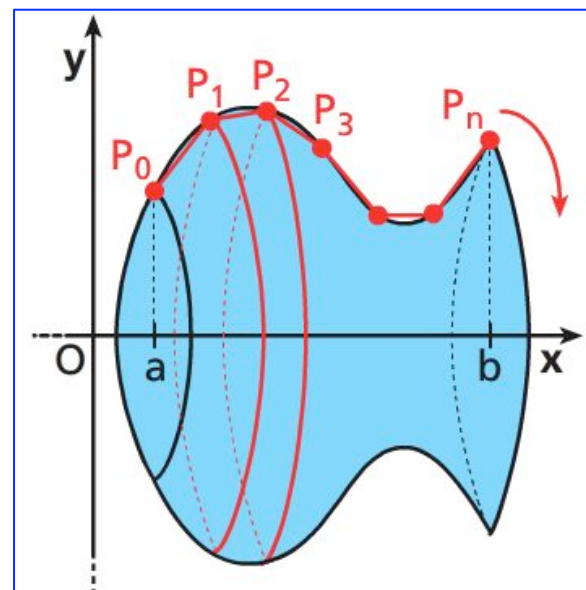
L'area di una superficie di rotazione

Se la curva di equazione $y = f(x)$ viene fatta ruotare con una rotazione completa attorno all'asse x , si ottiene una superficie di rotazione.

Dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in n parti e consideriamo la poligonale inscritta nella curva, che ha per vertici i punti $P_0, P_1, \dots, P_n$ (come nella figura a lato). Nella rotazione completa attorno all'asse x , ogni segmento $P_{i-1}P_i$ della poligonale descrive un tronco di cono che ha come apotema $P_{i-1}P_i$ e come basi due cerchi rispettivamente di raggio $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$. La somma delle aree delle superfici laterali di questi tronchi di cono approssima l'area della superficie di rotazione.

Con procedimento analogo a quello adottato per la lunghezza di una curva si dimostra la seguente formula:

$$S = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$



DEFINIZIONE

Area di una superficie di rotazione

Data la funzione $y = f(x)$ derivabile nell'intervallo $[a; b]$, si chiama area della superficie che si ottiene ruotando in una rotazione completa il grafico della funzione, limitato dalle rette di equazione $x = a$ e $x = b$, il numero espresso dal seguente integrale:

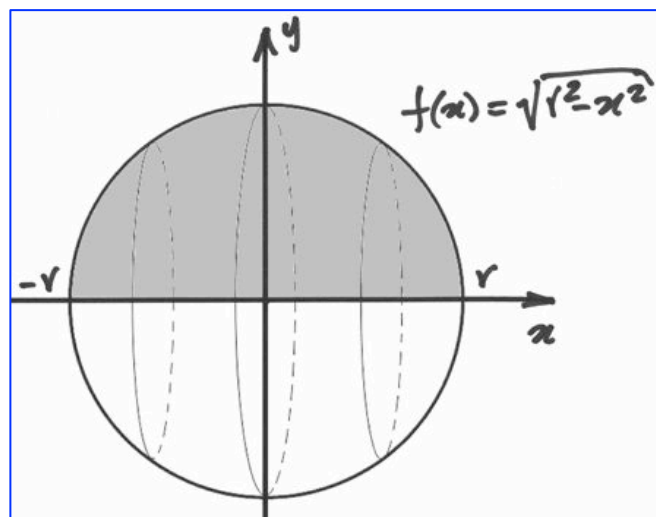
$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

ESEMPIO

Calcoliamo l'area della superficie della sfera di raggio r , ottenuta dalla rotazione completa della semicirconferenza di equazione $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ attorno all'asse x .

Calcoliamo l'area della superficie sferica utilizzando la definizione:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right)^2} dx = \\ &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \\ &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-r}^r r dx = \\ &= 2\pi r \int_{-r}^r dx = 2\pi r [x]_{-r}^r = 4\pi r^2. \end{aligned}$$



Esercizi

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo l'integrale definito $\int_1^2 (3x^2 + x) dx$.

Utilizziamo la formula fondamentale:

$$\int_a^b f(x) dx = [\varphi(x)]_a^b = \varphi(b) - \varphi(a),$$

dove $\varphi(x)$ è una qualunque primitiva di $f(x)$.
Determiniamo le primitive $\varphi(x)$ di $3x^2 + x$:

$$\int (3x^2 + x) dx = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c.$$

Una primitiva è dunque $\varphi(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2$.

Pertanto si ha:

$$\int_1^2 (3x^2 + x) dx = \left[x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2.$$

Sostituiamo alla variabile x dentro la parentesi quadra prima 2 e poi 1 e calcoliamo la differenza:

$$\left[x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 = (8 + 2) - \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{17}{2}.$$

Quindi $\int_1^2 (3x^2 + x) dx = \frac{17}{2}$.

ESERCIZIO GUIDA

Il metodo di sostituzione.

Calcoliamo l'integrale definito $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}} dx$.

Calcoliamo l'integrale definito per sostituzione, cambiando anche gli estremi di integrazione.

Poniamo $t = 1 + \sin x$.

Calcoliamo il differenziale di t : $dt = D[1 + \sin x] dx = \cos x dx$.

Determiniamo il valore della variabile t in corrispondenza dei valori che la x assume negli estremi di integrazione:

$$x = 0 \rightarrow t = 1 + \sin 0 = 1; \quad x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1 + \sin \frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2.$$

Riscriviamo opportunamente l'integrale dato e sostituiamo le espressioni ricavate in precedenza:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \sin x}} \cdot \cos x dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = [2\sqrt{t}]_1^2 = 2\sqrt{2} - 2.$$

Osservazione. In alternativa avremmo potuto calcolare per sostituzione l'integrale *indefinito*

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}} dx = 2\sqrt{1 + \sin x} + c$$

e poi utilizzare tale risultato per il calcolo dell'integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}} dx = [2\sqrt{1 + \sin x}]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{1 + \sin \frac{\pi}{2}} - 2\sqrt{1 + \sin 0} = 2\sqrt{2} - 2.$$

In questo modo si evita di calcolare gli estremi di integrazione per la variabile t .

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo l'integrale $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$, sapendo che $\int_0^1 f(x) dx = 4$.

Poniamo $\frac{x}{2} = t$; allora: $x = 2t \rightarrow dx = 2dt$.

Per $x = 0 \rightarrow t = 0$; per $x = 2 \rightarrow t = 1$.

Sostituiamo e integriamo:

$$\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_0^1 2f(t) dt = 2 \int_0^1 f(t) dt = 2 \cdot 4 = 8.$$

Essenzialmente abbiamo applicato la formula: $\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$.

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo il valor medio della funzione $y = \sqrt{x}$ nell'intervallo $[0; 9]$, calcoliamo inoltre il punto z in cui la funzione assume tale valore. Interpretiamo geometricamente il risultato.

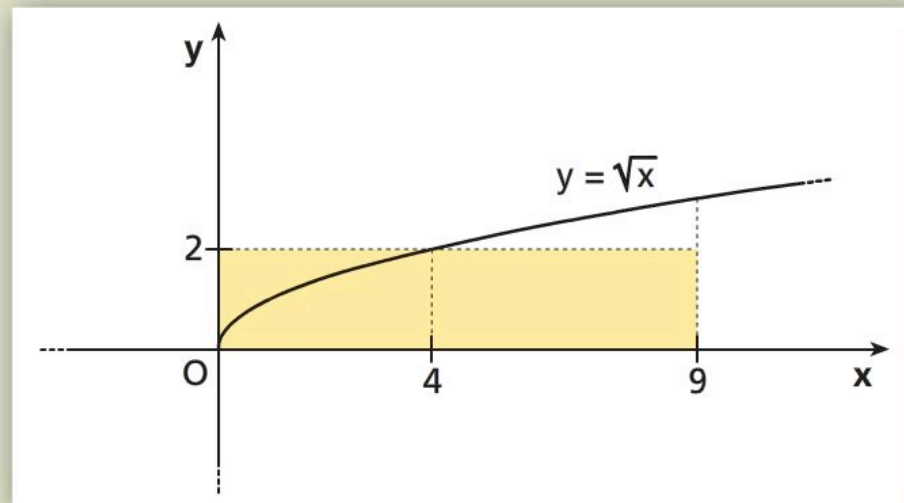
Verificato che la funzione è continua nell'intervallo dato, per calcolare il valor medio $f(z)$ della funzione utilizziamo il teorema della media:

$$f(z) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{Quindi: } f(z) = \frac{1}{9-0} \int_0^9 \sqrt{x} dx.$$

Eseguiamo il calcolo:

$$f(z) = \frac{1}{9} \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x} \right]_0^9 = \frac{1}{9} (18 - 0) = 2.$$



Poiché $f(z) = \sqrt{z} = 2$, possiamo ricavare il valore di z , punto in cui la funzione vale 2:

$$z = 2^2 = 4.$$

Riportiamo i risultati ottenuti in un diagramma cartesiano.

L'area del rettangolo giallo è uguale a quella del trapezoide relativo all'intervallo $[0; 9]$.

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo la derivata prima delle funzioni: a) $G(x) = \int_0^x \cos t \, dt$; b) $G(x) = \int_2^{x^2} \frac{\ln t}{t} \, dt$.

a) Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, se $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$, allora $F'(x) = f(x)$.

Quindi se $G(x) = \int_0^x \cos t \, dt$, allora $G'(x) = \cos x$.

b) La funzione $G(x)$ si ottiene dalla composizione di due funzioni:

$$G(x) = F(x^2) = F(z), \quad \text{con } F(z) = \int_2^z \frac{\ln t}{t} \, dt \text{ e } x^2 = z.$$

$F(z)$ è la funzione integrale della funzione $\frac{\ln t}{t}$ e quindi, per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$F'(z) = \frac{\ln z}{z}.$$

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte, otteniamo:

$$G'(x) = F'(x^2) \cdot 2x = \frac{\ln x^2}{x^2} \cdot 2x = 2 \frac{\ln x^2}{x}.$$

Osservazione. In generale possiamo dire che la derivata della funzione

$$G(x) = \int_{x_0}^{f(x)} g(t) \, dt \quad \text{è} \quad G'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x).$$

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'area S della superficie delimitata dall'asse x e dal grafico della funzione $y = x^2 - 9$ definita sull'intervallo $[0; 2]$.

Osserviamo che il grafico della funzione è una parabola di vertice $V(0; -9)$ con la concavità rivolta verso l'alto e che incontra l'asse x nei punti di ascissa ± 3 .

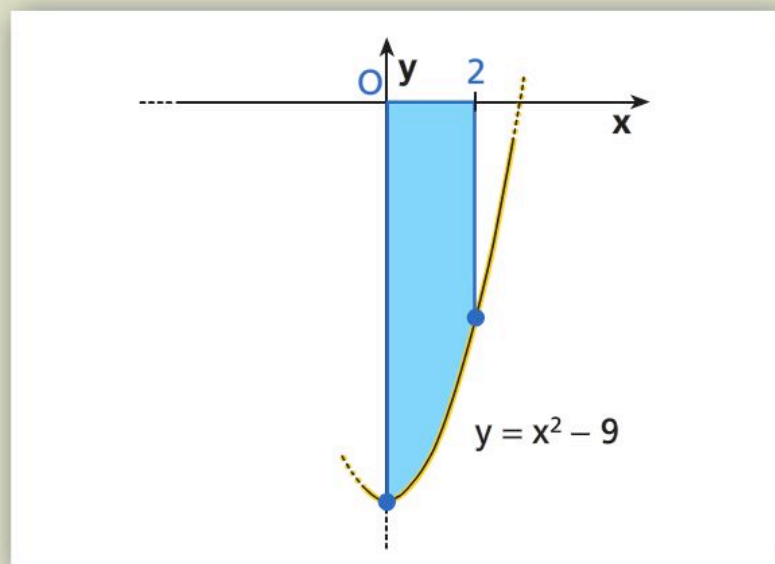
Disegniamo il grafico ed evidenziamo la superficie considerata.

Calcoliamo l'integrale definito esteso da 0 a 2:

$$\int_0^2 (x^2 - 9) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 9x \right]_0^2 = \frac{8}{3} - 18 - 0 = -\frac{46}{3}.$$

Poiché la funzione è negativa in tutto l'intervallo, allora per ottenere l'area S dobbiamo far precedere l'integrale definito da un segno meno, ossia:

$$S = -\int_0^2 (x^2 - 9) dx = -\left(-\frac{46}{3}\right) = \frac{46}{3}.$$



ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'area S della superficie delimitata dall'asse x e dal grafico della funzione $y = -x^2 + 4$ definita sull'intervallo $[-1; 3]$.

Il grafico della funzione è una parabola di vertice $V(0; 4)$ che ha la concavità rivolta verso il basso e incontra l'asse x nei punti di ascissa ± 2 . Disegniamo tale grafico ed evidenziamo la superficie considerata.

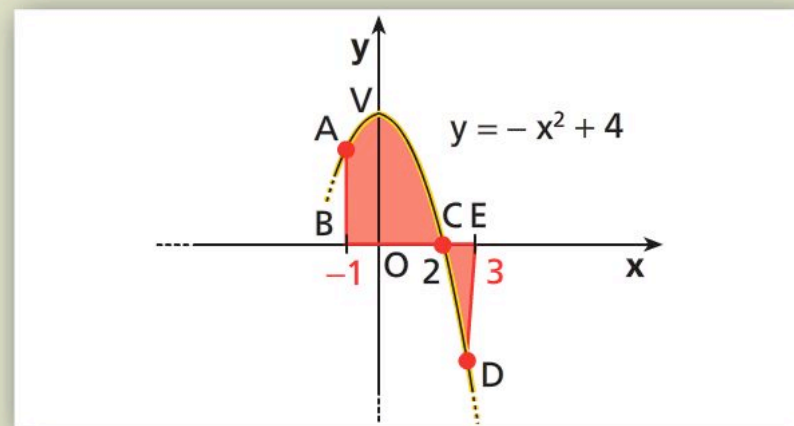
Per calcolare l'area scomponiamo la superficie in due superfici: $ABCV$, delimitata dall'arco di curva CVA , in cui la funzione assume valori positivi, e CDE , delimitata dall'arco di curva CD , in cui la funzione assume valori negativi.

Calcoliamo due integrali e cambiamo segno al secondo:

$$S = \int_{-1}^2 (-x^2 + 4) dx - \int_2^3 (-x^2 + 4) dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-1}^2 - \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_2^3 =$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + 8 - \frac{1}{3} + 4 \right) - \left(-\frac{27}{3} + 12 + \frac{8}{3} - 8 \right) = -\frac{9}{3} + 12 + \frac{19}{3} - 4 = \frac{34}{3}.$$



ESERCIZIO GUIDA

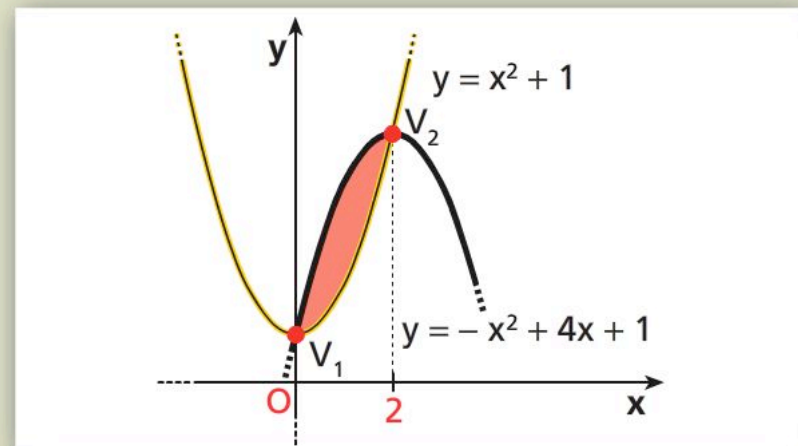
Determiniamo l'area della superficie racchiusa dalle parabole di equazioni:

$$y = x^2 + 1 \text{ e } y = -x^2 + 4x + 1.$$

Tracciamo le due parabole. La prima ha vertice nel punto $V_1(0; 1)$, asse di simmetria l'asse y e concavità rivolta verso l'alto. La seconda ha vertice nel punto $V_2(2; 5)$ e asse di simmetria la retta di equazione $x = 2$.

Le due parabole si intersecano nei punti $V_1(0; 1)$ e $V_2(2; 5)$, perciò gli estremi di integrazione sono 0 e 2.

Disegniamo le due parabole ed evidenziamo la superficie da esse racchiusa.



Sappiamo che l'area della superficie è data dall'integrale della differenza tra la funzione maggiore (la «più alta») e quella minore (la «più bassa»), perciò:

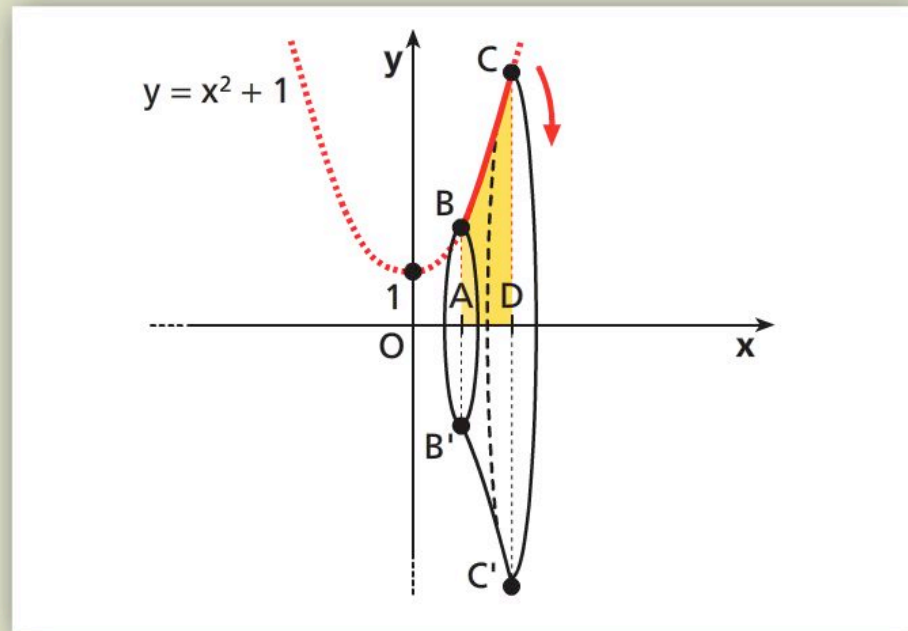
$$S = \int_0^2 [(-x^2 + 4x + 1) - (x^2 + 1)] dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 = -\frac{16}{3} + 8 = \frac{8}{3}.$$

ESERCIZIO GUIDA

Consideriamo la parabola di equazione $y = x^2 + 1$ e calcoliamo il volume del solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse x di un giro completo il trapezoide esteso all'intervallo $[1; 2]$.

Disegniamo la parabola ed evidenziamo il trapezoide $ABCD$.

Rappresentiamo poi il solido generato dalla rotazione completa intorno all'asse x del trapezoide $ABCD$.



Calcoliamo il volume di tale solido, applicando la formula $V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx$:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_1^2 (x^2 + 1)^2 dx = \pi \cdot \int_1^2 (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \pi \cdot \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right]_1^2 = \\ &= \pi \cdot \left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 1 - \frac{1}{5} - \frac{2}{3} \right) = \frac{178}{15} \pi. \end{aligned}$$

ESERCIZIO GUIDA

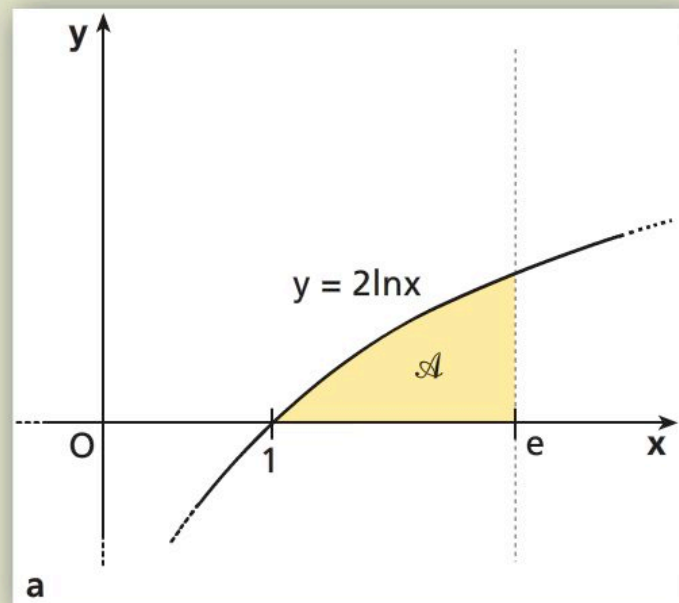
Consideriamo la regione finita $\mathcal{A}$ di piano delimitata dalla curva di equazione $y = 2 \ln x$, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = e$. Calcoliamo il volume del solido che ha come base $\mathcal{A}$ e le cui sezioni ottenute con piani perpendicolari all'asse x sono dei quadrati.

Tracciamo il grafico di $y = 2 \ln x$ ed evidenziamo la regione $\mathcal{A}$ (figura *a*).

Costruiamo il solido che ha come base $\mathcal{A}$ e avente come sezioni perpendicolari all'asse x dei quadrati (figura *b*).

Il volume V del solido è l'integrale definito tra 1 ed e della funzione che rappresenta l'area di un quadrato di lato $2 \ln x$, e cioè $4 \ln^2 x$:

$$V = \int_1^e 4 \ln^2 x \, dx.$$

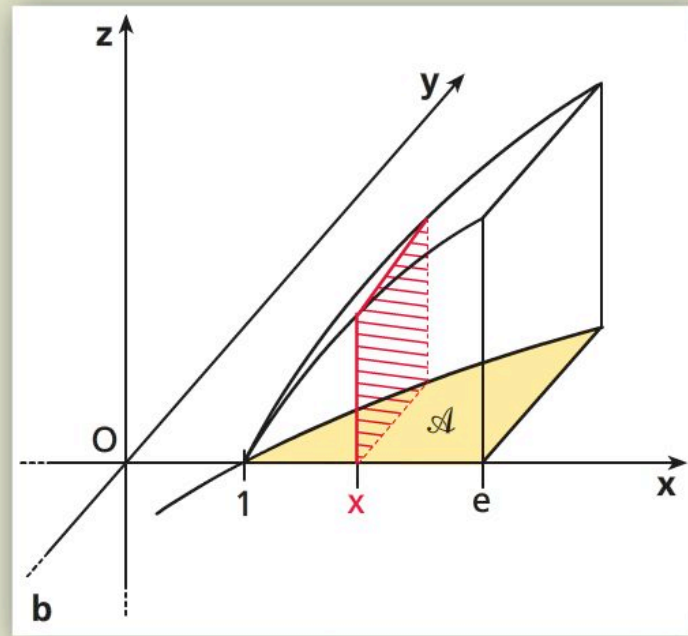


Calcoliamo per parti l'integrale $\int 4 \ln^2 x \, dx$:

$$\begin{aligned}\int 4 \ln^2 x \, dx &= 4x \ln^2 x - 4 \int 2x \frac{\ln x}{x} \, dx = \\ &= 4x \ln^2 x - 8 \left[x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \right] = \\ &= 4x \ln^2 x - 8x \ln x + 8x + c.\end{aligned}$$

Allora il volume del solido è:

$$\begin{aligned}V &= \left[4x \ln^2 x - 8x \ln x + 8x \right]_1^e = \\ &= 4e - 8e + 8e - (0 - 0 + 8) = 4e - 8.\end{aligned}$$



ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo la lunghezza del ramo di curva di equazione $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ compreso fra i punti di ascissa $x = 2$ e $x = 4$.

Determiniamo la derivata della funzione data:

$$D\left[\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}\right] = D\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x-1}.$$

Calcoliamo la lunghezza della curva utilizzando la formula $l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$, dove $a = 2$ e $b = 4$.

$$l = \int_2^4 \sqrt{1 + [\sqrt{x-1}]^2} dx = \int_2^4 \sqrt{1 + x - 1} dx = \int_2^4 \sqrt{x} dx = \int_2^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_2^4 = \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} \right]_2^4 = \frac{16}{3} - \frac{4}{3} \sqrt{2}.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo l'area della superficie ottenuta dalla rotazione completa attorno all'asse x del segmento appartenente alla retta di equazione $y = 2x$ avente estremi di ascissa $x = 0$ e $x = 2$.

Disegniamo la superficie.

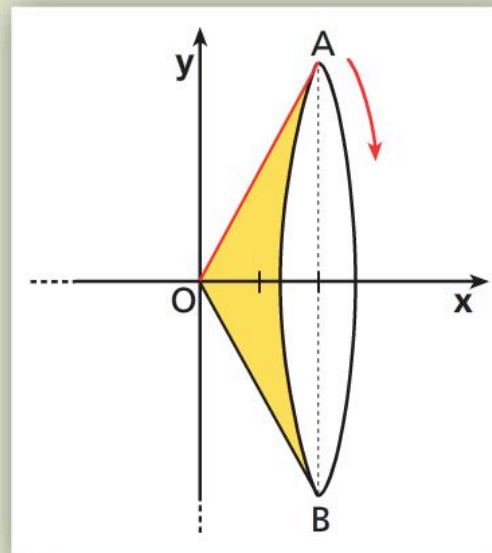
- Tracciamo il grafico della retta nell'intervallo considerato e il suo simmetrico rispetto all'asse x .
- Tracciamo, in prospettiva, la circonferenza di diametro AB . Si ottiene così la rappresentazione della superficie generata dalla rotazione completa intorno all'asse x del segmento OA .

Scriviamo la derivata della funzione data: $y' = 2$.

Calcoliamo l'area della superficie, applicando la formula

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx:$$

$$S = 2\pi \int_0^2 2x \cdot \sqrt{1 + 2^2} dx = 2\pi \int_0^2 2x \cdot \sqrt{5} dx = 2\pi [\sqrt{5} x^2]_0^2 = 8\pi\sqrt{5}.$$



Applicazioni alla fisica

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo lo spostamento compiuto, nell'intervallo di tempo compreso fra gli istanti $t_0 = 2$ s e $t_1 = 5$ s, da un punto materiale che si muove su una retta con una velocità $v(t)$, espressa in m/s, che è funzione del tempo t ed è definita dalla legge $v(t) = 2t^2 + 1$.

Essendo $v = s'(t)$, lo spostamento di un punto materiale nell'intervallo di tempo dall'istante t_0 all'istante t_1 è dato da $s = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$. Sostituiamo i dati:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = \int_2^5 (2t^2 + 1) dt = \left[\frac{2t^3}{3} + t \right]_2^5 = \frac{2 \cdot 125}{3} + 5 - \left(\frac{2 \cdot 8}{3} + 2 \right) = \frac{265 - 22}{3} = \frac{243}{3} = 81.$$

Lo spostamento compiuto dal punto materiale è perciò 81 m.