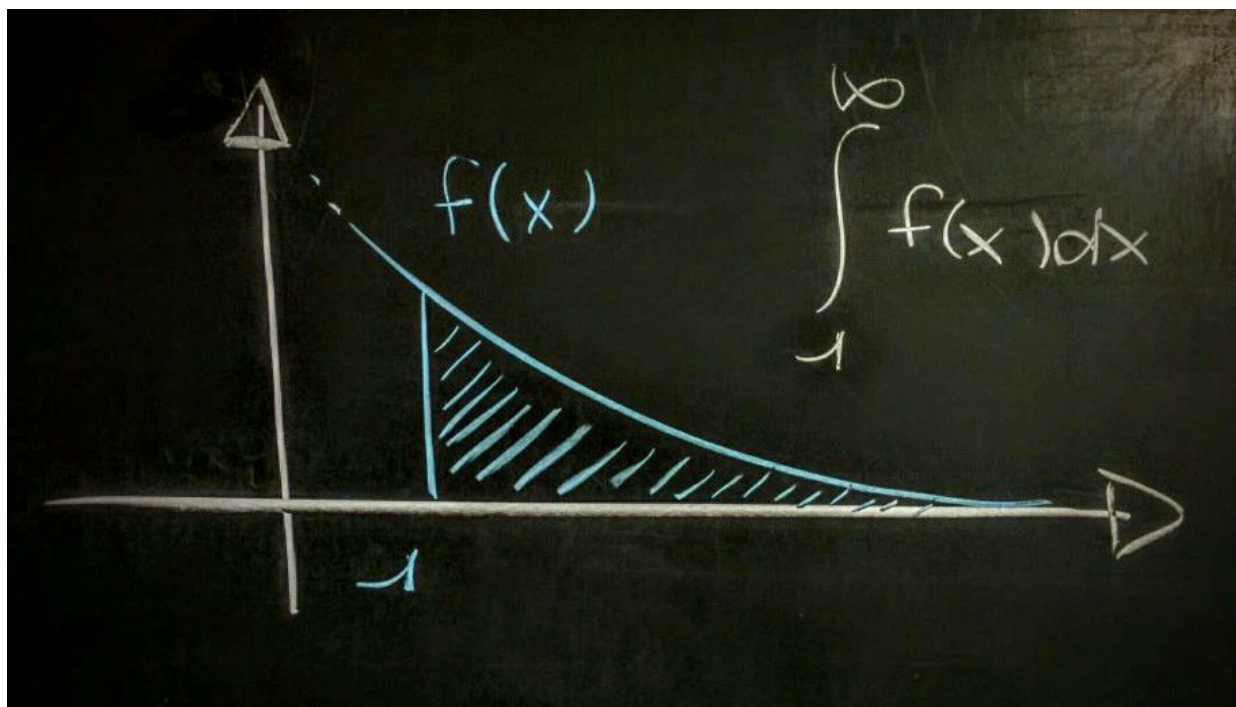


DOCENTE: Vincenzo Pappalardo
MATERIA: Matematica

Integrali impropri



Nei precedenti paragrafi abbiamo calcolato gli integrali definiti di funzioni continue in intervalli limitati e chiusi $[a; b]$. In questo paragrafo vedremo come il concetto di integrale possa essere ampliato considerando funzioni con un numero finito di punti di discontinuità in un intervallo limitato oppure considerando intervalli illimitati.

■ L'integrale di una funzione con un numero finito di punti di discontinuità in $[a; b]$

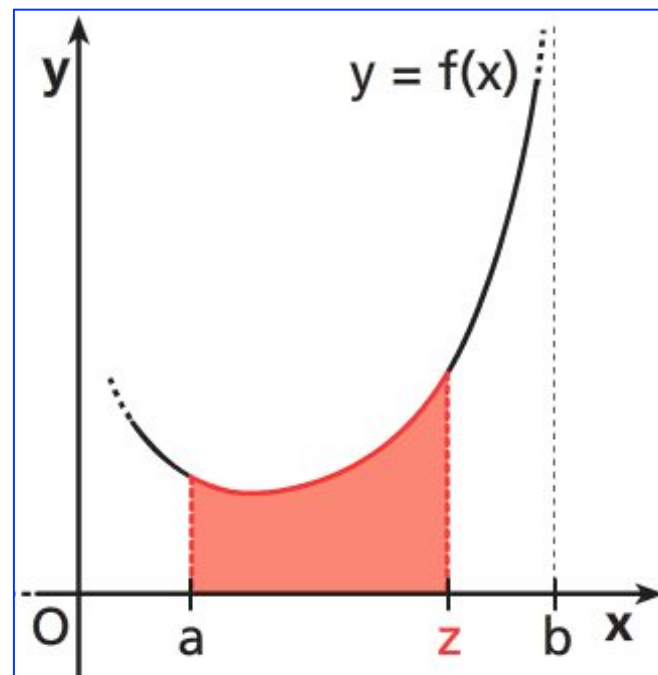
Consideriamo per primo il caso in cui la funzione $f(x)$ sia continua in tutti i punti dell'intervallo $[a; b[$ ma non in b .

Consideriamo un punto z interno all'intervallo $[a; b[$: la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo $[a; z]$, quindi esiste l'integrale $\int_a^z f(x) dx$, il cui valore è un numero reale.

Questo vale per tutti i punti z dell'intervallo $[a; b[$, perciò possiamo costruire la funzione integrale

$$F(z) = \int_a^z f(x) dx,$$

definita in $[a; b[$.

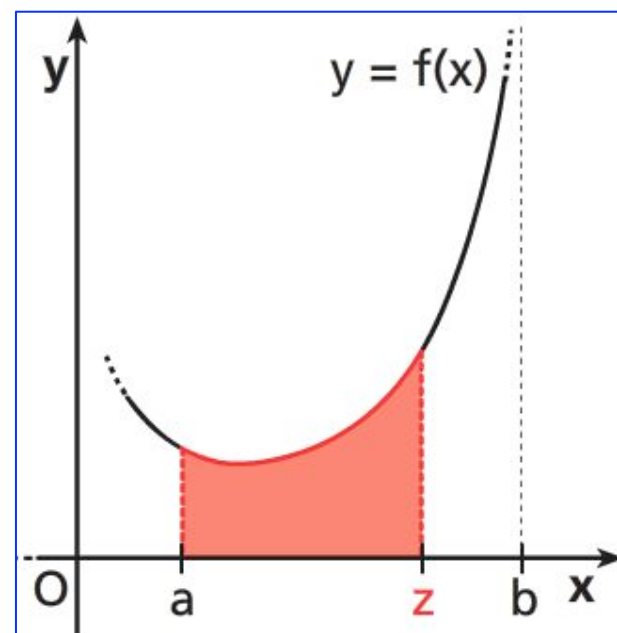


Se esiste finito il limite di $F(z)$ quando z tende a b da sinistra, cioè se esiste

$$\lim_{z \rightarrow b^-} F(z),$$

allora si dice che la funzione $f(x)$ è **integrabile in senso improprio** in $[a; b]$ e si definisce:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{z \rightarrow b^-} \int_a^z f(x) dx$$



L'integrale $\int_a^b f(x) dx$ è detto **integrale improprio** della funzione $f(x)$ in $[a; b]$ e si dice anche che tale integrale è **convergente**.

Se il limite considerato non esiste oppure è infinito, si dice che la funzione non è integrabile in senso improprio in $[a; b]$ o anche che l'integrale è rispettivamente **indeterminato** oppure **divergente**.

ESEMPIO

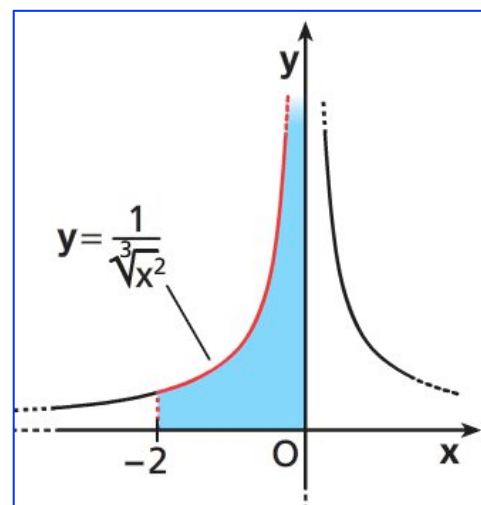
Calcoliamo, se possibile, l'integrale improprio della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ nell'intervallo $[-2; 0]$. Osserviamo che la funzione tende a $+\infty$ per $x \rightarrow 0^-$. Determiniamo la funzione $F(z)$:

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{-2}^z \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \left[\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} \right]_{-2}^z = \left[\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \right]_{-2}^z = [3\sqrt[3]{x}]_{-2}^z = \\ &= 3\sqrt[3]{z} + 3\sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

Calcoliamo $\lim_{z \rightarrow 0^-} F(z)$:

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} (3\sqrt[3]{z} + 3\sqrt[3]{2}) = 3\sqrt[3]{2}.$$

● La regione colorata non è limitata, ma la sua area è finita.



La funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ è integrabile in senso improprio nell'intervallo $[-2; 0]$ e vale:

$$\int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 3\sqrt[3]{2}.$$

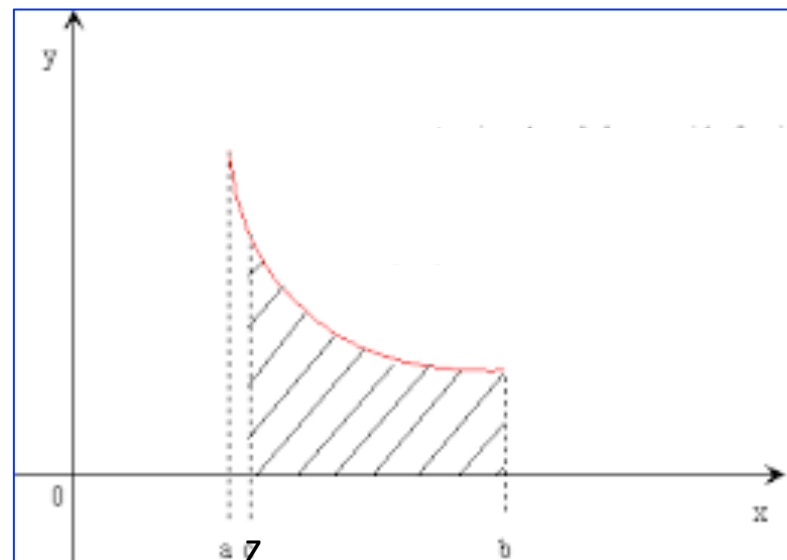
Se la funzione $f(x)$ è continua in tutti i punti dell'intervallo $]a; b]$, ma non in a , possiamo definire l'integrale $\int_a^b f(x) dx$ in modo analogo.

Considerato $z \in]a; b]$, se esiste finito il limite della funzione $F(z) = \int_z^b f(x) dx$ quando z tende ad a da destra, cioè se esiste

$$\lim_{z \rightarrow a^+} F(z),$$

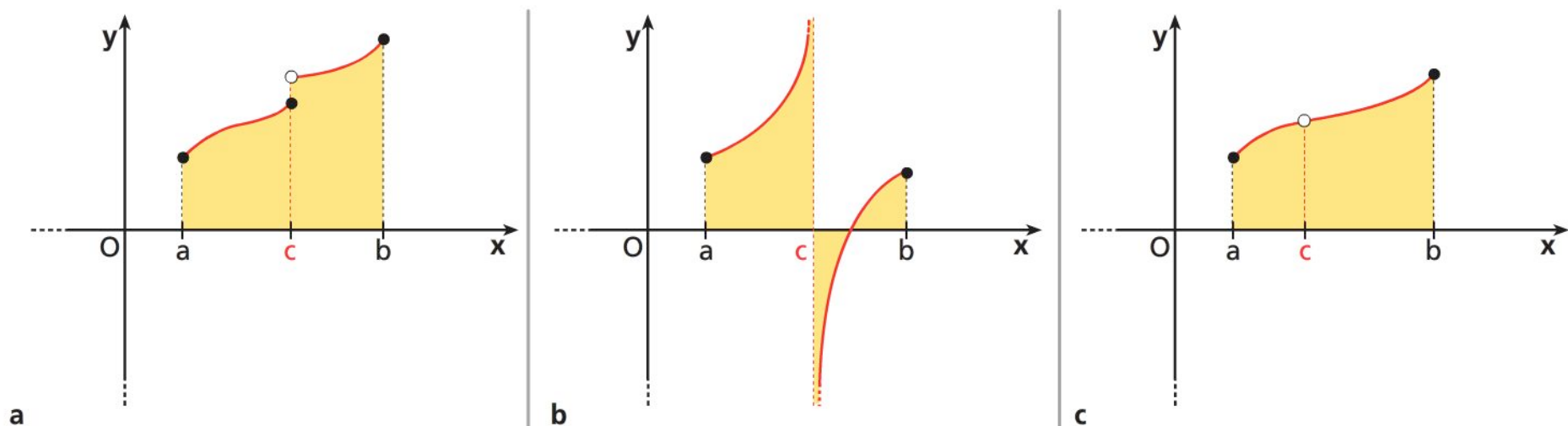
allora si dice che la funzione $f(x)$ è **integrabile in senso improprio in $[a; b]$** e si definisce:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{z \rightarrow a^+} \int_z^b f(x) dx$$



Se la funzione ha un punto di discontinuità in un punto c interno all'intervallo $[a; b]$, l'integrale $\int_a^b f(x) dx$ può essere definito, in senso improprio, come la somma degli integrali $\int_a^c f(x) dx$ e $\int_c^b f(x) dx$, se tali integrali esistono, in base alle definizioni precedenti:

L'integrale improprio può essere utilizzato con tutte le specie di discontinuità.



$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x) dx + \lim_{z \rightarrow c^+} \int_z^b f(x) dx.$$

■ L'integrale di una funzione in un intervallo illimitato

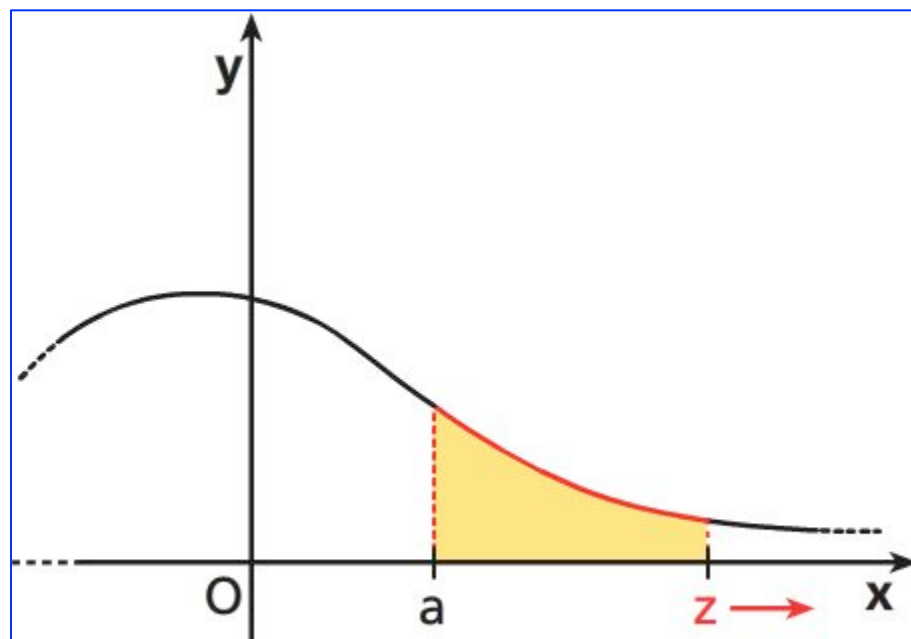
Consideriamo una funzione $f(x)$ continua in tutti i punti di $[a; +\infty[$.

Comunque si scelga un punto z interno all'intervallo $[a; +\infty[$, esiste l'integrale

$\int_a^z f(x) dx$ il cui valore è un numero reale, quindi possiamo costruire anche in questo caso la funzione integrale:

$$F(z) = \int_a^z f(x) dx,$$

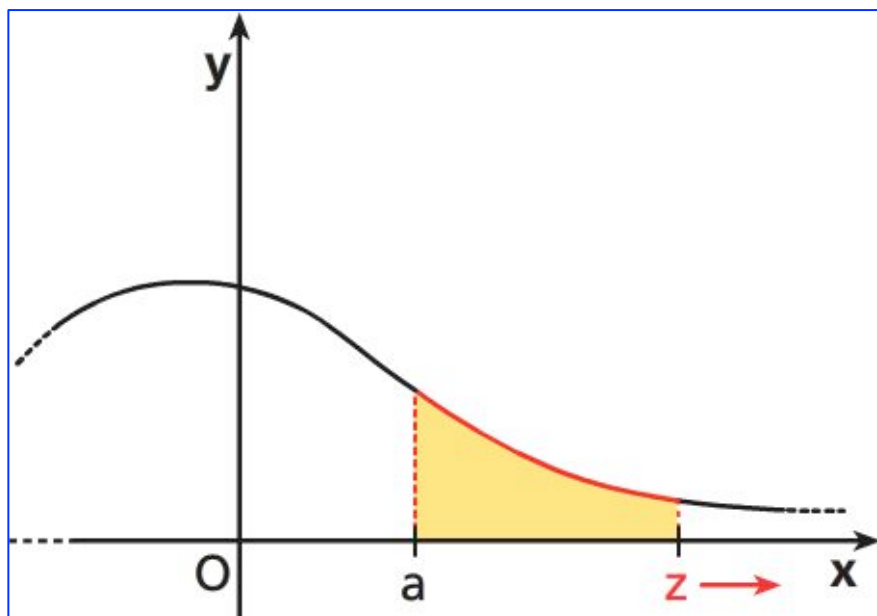
definita in $[a; +\infty[$.



Se esiste finito il limite della funzione $F(z)$ quando z tende a $+\infty$, cioè se esiste

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} F(z),$$

allora si dice che la funzione $f(x)$ è **integrabile in senso improprio** in $[a; +\infty[$ e si definisce:



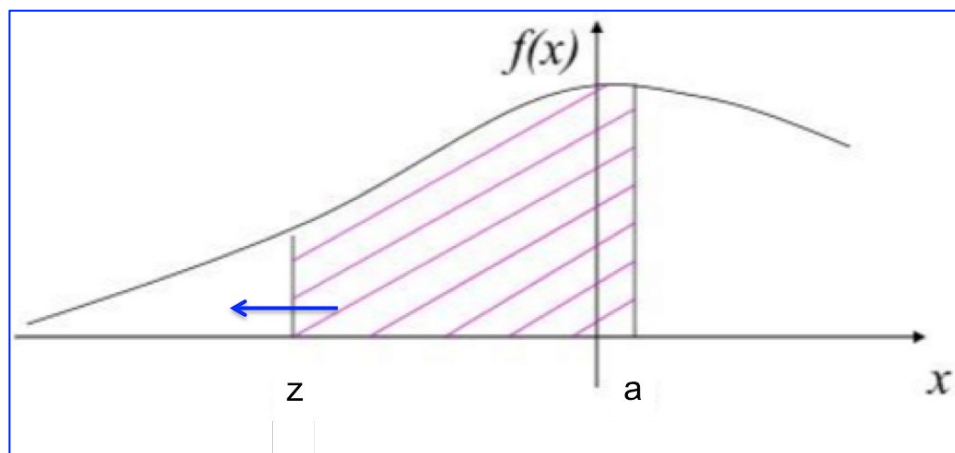
$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_a^z f(x) dx$$

◀ **Figura 21** Significato geometrico dell'integrale improprio nell'intervallo $[a; +\infty[$ nel caso di una funzione positiva. La regione compresa tra il grafico di $f(x)$ e l'asse x , tra a e $+\infty$, non è limitata, ma la sua area è finita.

Anche in questo caso si dice che l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ è **convergente**.

In modo del tutto analogo, se una funzione è continua in $] -\infty; a]$ e se esiste finito il limite $\lim_{z \rightarrow -\infty} \int_z^a f(x) dx$, diciamo che la funzione $f(x)$ è integrabile in senso improprio in $] -\infty; a]$ e definiamo:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{z \rightarrow -\infty} \int_z^a f(x) dx$$



L'integrale $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ si dice **convergente**

❑ Se i limiti considerati sono **infinito**, si dice che gli integrali:

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx \qquad \int_{-\infty}^a f(x) \, dx$$

sono **divergenti**.

❑ Se i limiti non **esistono**, si dice che gli integrali sono **indeterminati**.

In entrambi i casi si dice che la funzione $f(x)$ **non è integrabile in senso improprio** in $[a; +\infty]$ oppure in $[-\infty; a]$.

ESEMPIO

Calcoliamo, se esiste, l'integrale improprio della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}$ nell'intervallo $[1; +\infty[$.

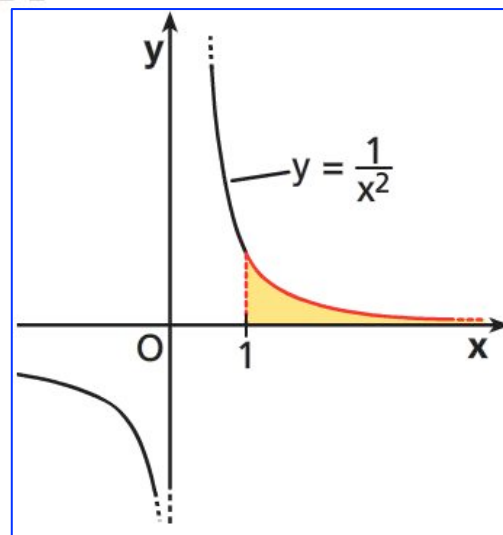
Determiniamo la funzione integrale $F(z)$, con z appartenente a $[1; +\infty[$:

$$F(z) = \int_1^z \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^z = -\frac{1}{z} + 1.$$

Calcoliamo $\lim_{z \rightarrow +\infty} F(z)$:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{z} + 1 \right) = 1.$$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ è integrabile in senso improprio in $[1; +\infty[$ e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$.



Esercizi

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo, se possibile, l'integrale della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$ nell'intervallo $[0; 3]$.

La funzione $f(x)$ è continua per $x \neq 2$, quindi è integrabile negli intervalli $[0; t]$, con $0 < t < 2$, e $[z; 3]$, con $2 < z < 3$.

Determiniamo una primitiva di $f(x)$:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx = \int (x-2)^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{x-2} + c.$$

Allora:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx + \lim_{z \rightarrow 2^+} \int_z^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx = \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^-} [3\sqrt[3]{x-2}]_0^t + \lim_{z \rightarrow 2^+} [3\sqrt[3]{x-2}]_z^3 = \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^-} (3\sqrt[3]{t-2} - 3\sqrt[3]{-2}) + \lim_{z \rightarrow 2^+} (3\sqrt[3]{1} - 3\sqrt[3]{z-2}) = -3\sqrt[3]{-2} + 3 = 3\sqrt[3]{2} + 3. \end{aligned}$$

La funzione è integrabile nell'intervallo $[0; 3]$ e risulta: $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx = 3(\sqrt[3]{2} + 1)$.

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+3)^2} dx$, se è convergente.

La funzione integranda è continua in tutti i punti dell'intervallo $[1; +\infty[$, perciò determiniamo la funzione integrale $F(z)$, con z appartenente a $[1; +\infty[$:

$$F(z) = \int_1^z \frac{1}{(x+3)^2} dx = \left[-\frac{1}{x+3} \right]_1^z = -\frac{1}{z+3} + \frac{1}{4}.$$

Calcoliamo $\lim_{z \rightarrow +\infty} F(z)$:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{z+3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}.$$

L'integrale è convergente e vale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+3)^2} dx = \frac{1}{4}$.