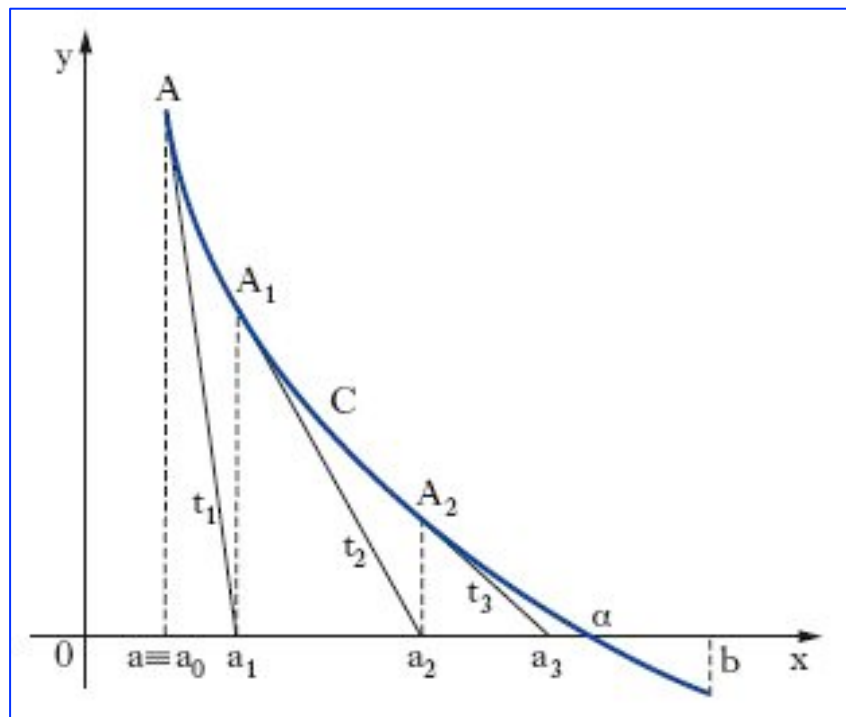


DOCENTE: Vincenzo Pappalardo
MATERIA: Matematica

Analisi numerica



RISOLUZIONE APPROSSIMATA DI UN'EQUAZIONE

➤ INTRODUZIONE

Quando è possibile trovare con un metodo algebrico le soluzioni di un'equazione, si dice anche che esiste un metodo di **risoluzione esatta** dell'equazione.

Per esempio, sappiamo che esiste la risoluzione esatta per le equazioni algebriche dal primo al quarto grado. Tuttavia, la risoluzione esatta di un'equazione non è sempre possibile. Per esempio, ci sono equazioni algebriche di grado superiore al quarto per le quali non esiste un procedimento di risoluzione esatta.

Anche per le equazioni trascendenti non esistono formule risolutive e soltanto alcune di esse si possono risolvere mediante un numero finito di operazioni elementari. È dunque importante lo studio dei procedimenti di **risoluzione approssimata**, o **numerica**.

Ogni equazione a una incognita può essere scritta nella forma:

$$f(x) = 0.$$

Trovare le radici, ossia le soluzioni, dell'equazione equivale a ricercare gli **zeri** della funzione $y = f(x)$, ossia le intersezioni del grafico con l'asse delle ascisse.

I metodi di risoluzione numerica di un'equazione si basano sulla costruzione di una successione di numeri reali che converga alla soluzione esatta. I termini della successione sono **valori approssimati** della soluzione e, mediante *iterazioni* successive, possiamo ottenere un valore approssimato vicino quanto vogliamo alla soluzione.

La ricerca delle soluzioni approssimate è composta da due fasi:

1. la **separazione delle radici**, ossia la determinazione di intervalli che contengono *soltanto una* radice;
2. il **calcolo di un valore approssimato** con la **precisione** voluta.

● Studieremo la risoluzione numerica soltanto per le equazioni in cui f ha per dominio un *intervallo* (limitato o illimitato), è *continua* ed è derivabile almeno due volte.

Quindi, salvo avviso contrario, in questo paragrafo supponiamo che le funzioni soddisfino queste condizioni.

■ La separazione delle radici

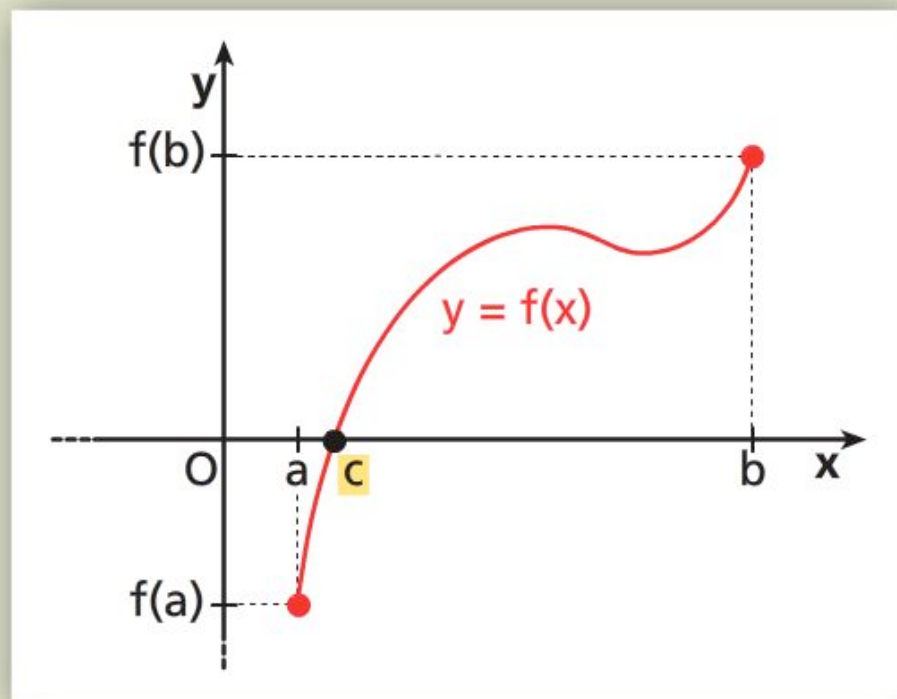
Per separare una radice dell'equazione $f(x) = 0$ dobbiamo essere certi che esista almeno un intervallo $[a; b]$ in cui la f abbia *soltanto uno* zero. A questo scopo richiamiamo alcune proprietà delle funzioni continue.

TEOREMA

Teorema di esistenza degli zeri

Se f è una funzione continua nell'intervallo $[a; b]$ limitato e chiuso e negli estremi assume valori di segno opposto, cioè se $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste *almeno* un punto c interno ad $[a; b]$ in cui la funzione si annulla, ossia:

$$\exists c \in]a; b[\quad \text{tale che} \quad f(c) = 0.$$



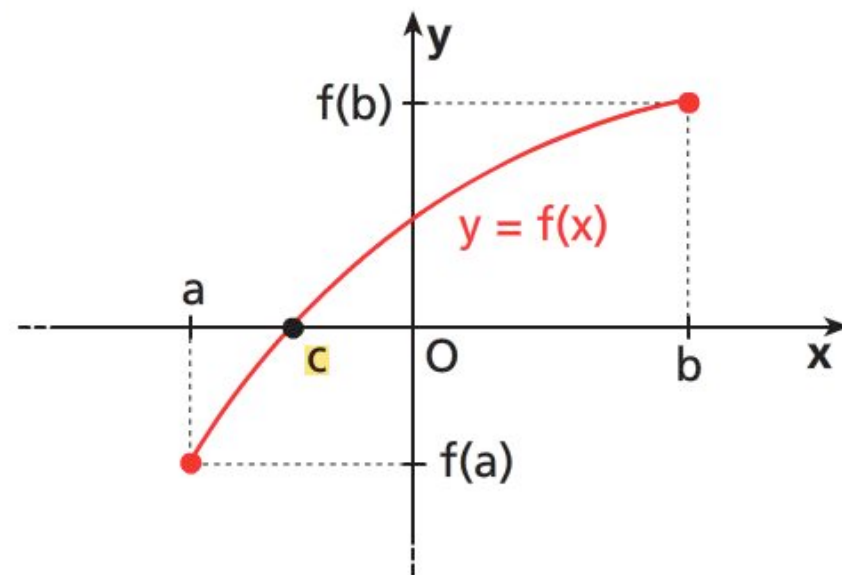
Questo teorema assicura l'esistenza di almeno una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$ nell'intervallo $[a; b]$, ma non ne garantisce l'unicità. Vediamo allora due *condizioni sufficienti* per l'unicità della soluzione.

TEOREMA

Primo teorema di unicità dello zero

Se f è una funzione continua nell'intervallo $[a; b]$ limitato e chiuso, derivabile con derivata prima diversa da 0 nei suoi punti interni e, inoltre, $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste *un solo* punto c interno ad $[a; b]$ in cui la funzione si annulla, ossia:

$$\exists! c \in]a; b[\quad \text{tale che} \quad f(c) = 0.$$



$$f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) \neq 0 \\ \Rightarrow \exists! c \in]a; b[\mid f(c) = 0$$

DIMOSTRAZIONE

Per il teorema di esistenza degli zeri esiste almeno un punto $c \in]a; b[$ tale che $f(c) = 0$.

Supponiamo, per *assurdo*, che esista almeno un altro punto $c' \in]a; b[$, per esempio maggiore di c , in cui la funzione si annulla. Se applichiamo alla funzione il teorema di Rolle nell'intervallo $[c; c']$, deduciamo che esiste almeno un punto $m \in]c; c'[$ in cui:

$$f'(m) = 0.$$

Ma ciò è contrario alla seconda ipotesi dell'enunciato, quindi la funzione data ammette, nell'intervallo $[a; b]$, soltanto uno zero.

● In particolare, il teorema è valido se $f'(x) < 0$ oppure $f'(x) > 0$, quindi se la funzione è monotona.

ESEMPIO

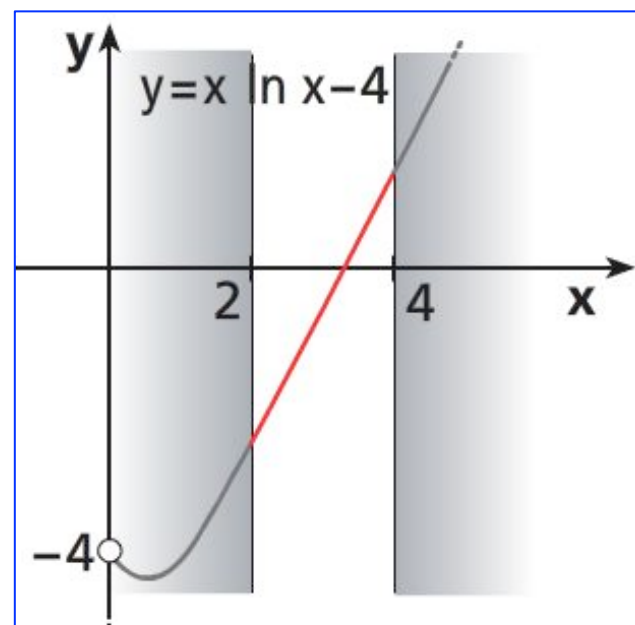
Consideriamo la funzione $f(x) = x \ln x - 4$ con $x \in [2; 4]$.

Essa è continua nell'intervallo considerato, perché è data dal prodotto di funzioni continue. La sua derivata prima è:

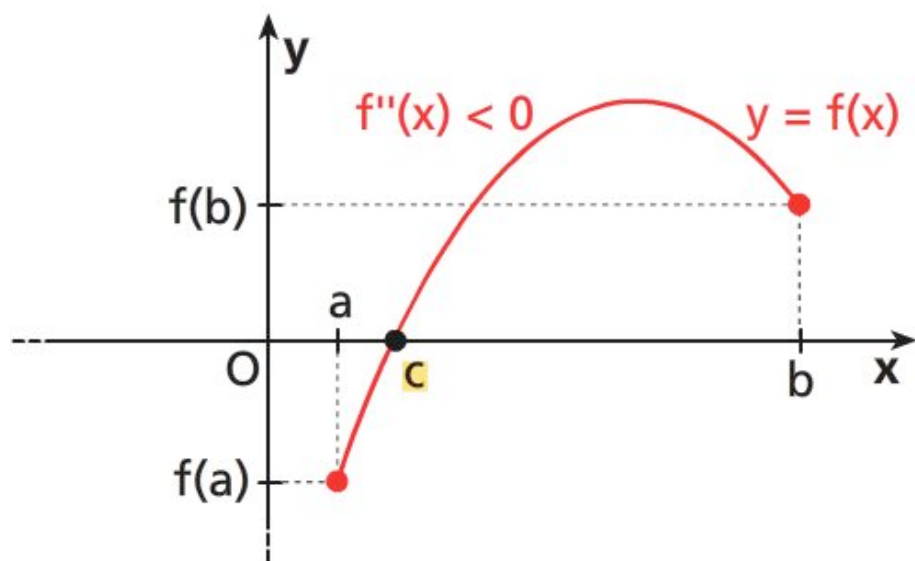
$$f'(x) = \ln x + 1 \neq 0 \text{ se } \ln x \neq -1 \rightarrow x \neq \frac{1}{e}, \text{ quindi } f'(x) \neq 0 \forall x \in]2; 4[.$$

Infine $f(2) = 2 \ln 2 - 4 < 0$ e $f(4) = 4 \ln 4 - 4 > 0$.

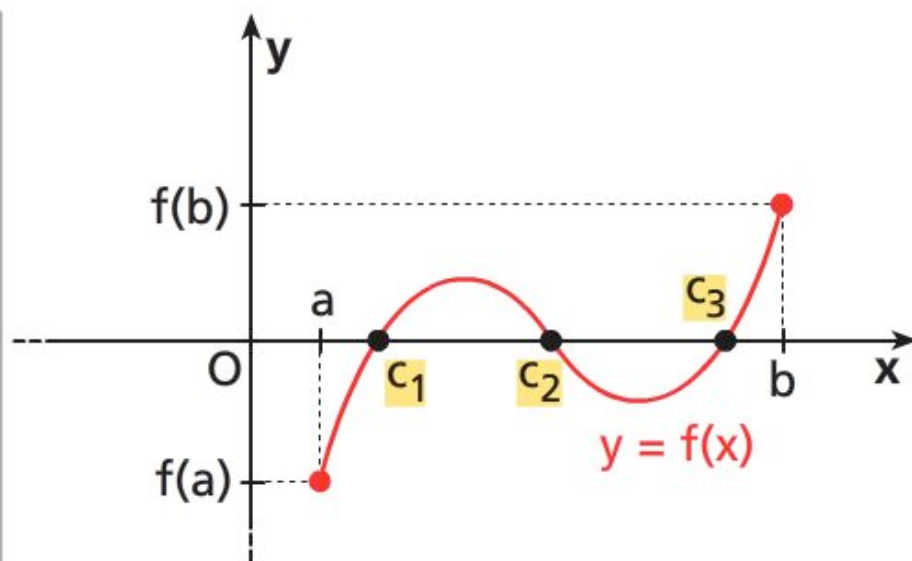
La funzione verifica tutte le ipotesi del teorema e quindi si annulla soltanto una volta in $[2; 4]$.



Se invece $f'(x) = 0$ in un punto di $]a; b[$, ossia $f(x)$ non è monotona, l'equazione $f(x) = 0$ ammette ancora un'unica radice in $[a; b]$ se la concavità è rivolta verso l'alto in ogni punto di $[a; b]$, oppure rivolta verso il basso, ossia se $f''(x)$ ha segno costante in $[a; b]$.



a. Le condizioni $f(a) \cdot f(b) < 0$ e $f''(x) < 0 \forall x \in [a; b]$ assicurano l'esistenza di uno zero soltanto.



b. Se $f''(x)$ cambia di segno, la funzione può avere più di uno zero anche se $f(a) \cdot f(b) < 0$.

TEOREMA

Secondo teorema di unicità dello zero

Se f è una funzione continua nell'intervallo $[a; b]$, derivabile due volte nei suoi punti interni, e se $f(a) \cdot f(b) < 0$ e $f''(x) > 0$, oppure $f''(x) < 0$, $\forall x \in]a; b[$, allora esiste *un solo* punto c interno ad $[a; b]$ in cui la funzione si annulla, ossia:

$$\exists! c \in]a; b[\quad \text{tale che} \quad f(c) = 0.$$

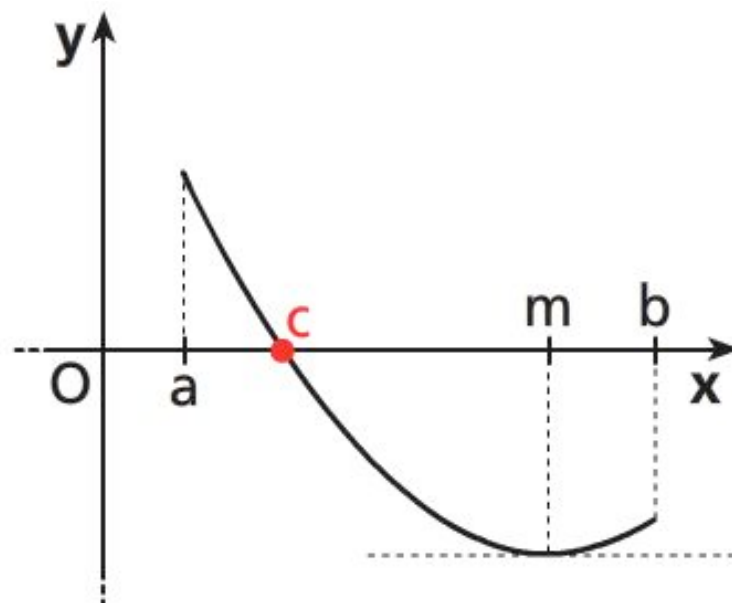
DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo il teorema supponendo $f(a) > 0, f(b) < 0, f''(x) > 0$. Negli altri casi la dimostrazione è simile.

Poiché la derivata seconda è positiva, la derivata prima è una funzione strettamente crescente nell'intervallo $]a; b[$. Si possono presentare tre casi.

1. $f'(x) > 0 \forall x \in]a; b[$; f è allora crescente, ma questo va contro l'ipotesi $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$; questa possibilità è quindi da escludere.
2. $f'(x) < 0 \forall x \in]a; b[$; f è allora decrescente e per il primo teorema di unicità f ha soltanto una radice in $]a; b[$.
3. f' si annulla in un punto m interno all'intervallo. Poiché f' è crescente avremo $f'(x) < 0$ nei punti dell'intervallo $]a; m[$ e $f'(x) > 0$ nei punti dell'intervallo $]m; b[$. Pertanto la funzione data f è decrescente in $[a; m]$, crescente in $[m; b]$. Poiché $f(b) < 0$, sarà anche $f(m) < 0$, perciò, per il primo teorema di unicità, nell'intervallo aperto $]a; m[$, e quindi in $]a; b[$, esiste soltanto un punto c tale che $f(c) = 0$.

● Sono verificate le ipotesi del primo teorema di unicità: $f(a) > 0$, $f(m) < 0$, $f(x)$ continua in $[a; m]$, $f(x)$ derivabile nei punti interni, con $f'(x) \neq 0$ in $]a; m[$.



ESEMPIO

Verifichiamo che, nell'intervallo $[0; 2]$, la funzione $y = x^5 - 3x - 1$ presenta soltanto uno zero.

La funzione è continua in tutto l'intervallo e ammette derivata prima e seconda in tutti i suoi punti:

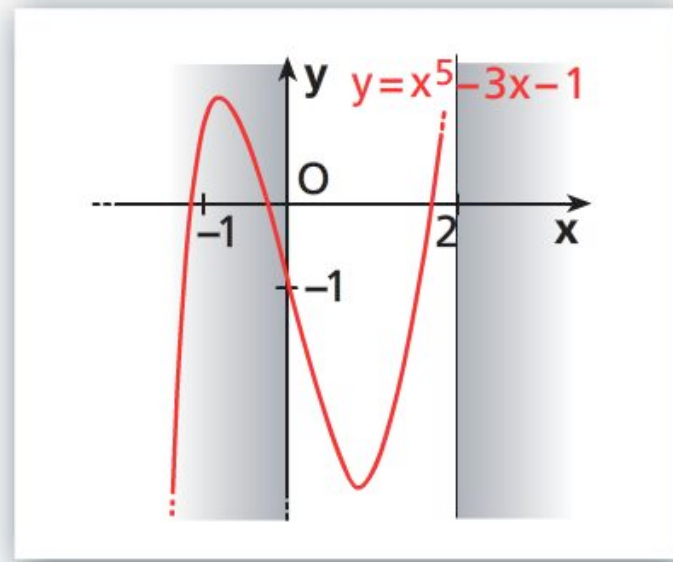
$$y' = 5x^4 - 3, \quad y'' = 20x^3.$$

Inoltre risulta:

$$y'' > 0 \quad \forall x \in]0; 2[,$$

$$y(0) = -1 < 0 \text{ e } y(2) = 25 > 0.$$

Per il secondo teorema di unicità la funzione y si annulla una sola volta nell'intervallo $[0; 2]$.



La separazione delle radici di una funzione può essere facilitata da uno studio grafico preventivo. Attraverso il grafico possiamo renderci conto del numero di radici contenute in un intervallo e quindi individuare gli intervalli in cui la funzione soddisfa uno dei teoremi di unicità.

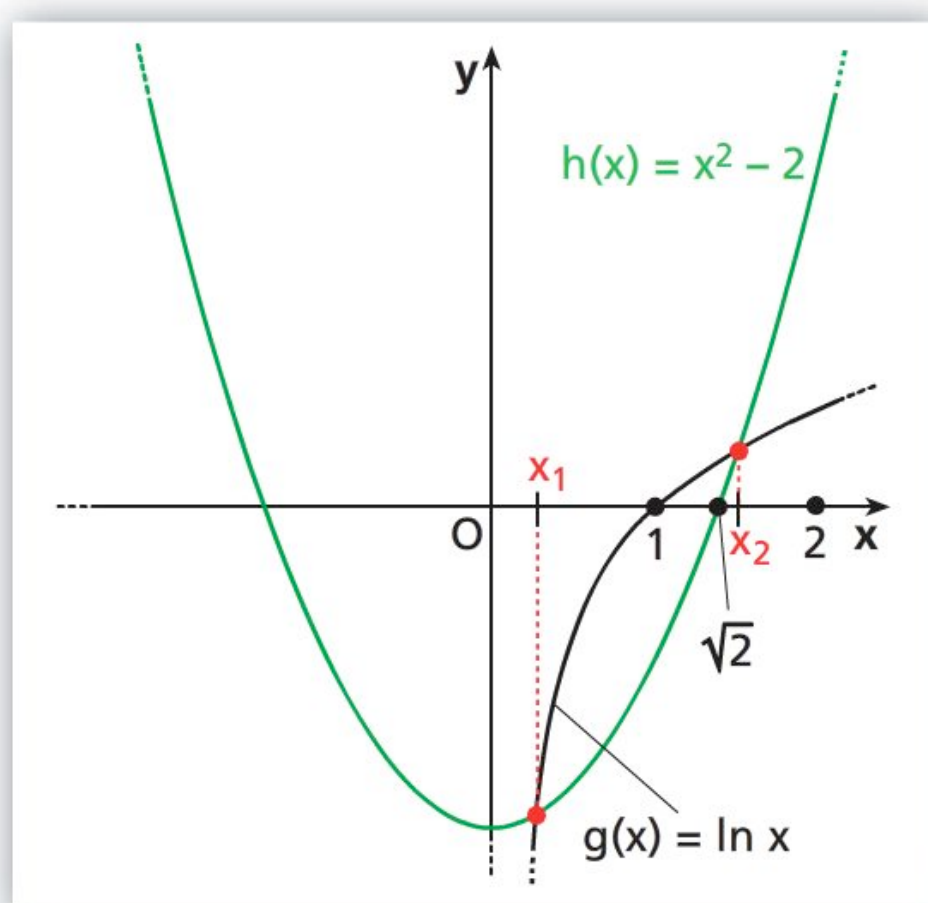
ESEMPIO

Separiamo le radici dell'equazione $\ln x - x^2 + 2 = 0$.

Scriviamo l'equazione nella forma $\ln x = x^2 - 2$ e confrontiamo i grafici delle funzioni $g(x) = \ln x$ e $h(x) = x^2 - 2$.

Le intersezioni delle due curve rappresentano gli zeri della funzione $f(x) = \ln x - x^2 + 2$, cioè le soluzioni dell'equazione data. Dal grafico (figura 10) vediamo che g e h hanno due punti di intersezione, quindi l'equazione ha due soluzioni, x_1 e x_2 . Possiamo notare che x_1 appartiene all'intervallo $[0; 1]$, mentre x_2 a $[\sqrt{2}; 2]$ e lo verifichiamo applicando i teoremi di esistenza e unicità.

Osserviamo però che la funzione $f(x)$ non è definita in $x = 0$, quindi consideriamo l'intervallo $[0,1; 1]$.



In tale intervallo $f(x)$ è continua, negli estremi assume valori di segno opposto, cioè $f(0,1) \cdot f(1) < 0$, pertanto, per il teorema degli zeri, ammette almeno una soluzione.

Calcoliamo la derivata di $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2x = \frac{1 - 2x^2}{x}.$$

Tale derivata non si annulla mai nei punti interni di $[0,1; 1]$, quindi, per il primo teorema di unicità, la soluzione è unica.

In modo analogo si procede per x_2 .

Il metodo di bisezione

Vediamo ora in che modo calcolare un valore approssimato di una radice.

Consideriamo l'equazione

$$x^3 - x + 1 = 0.$$

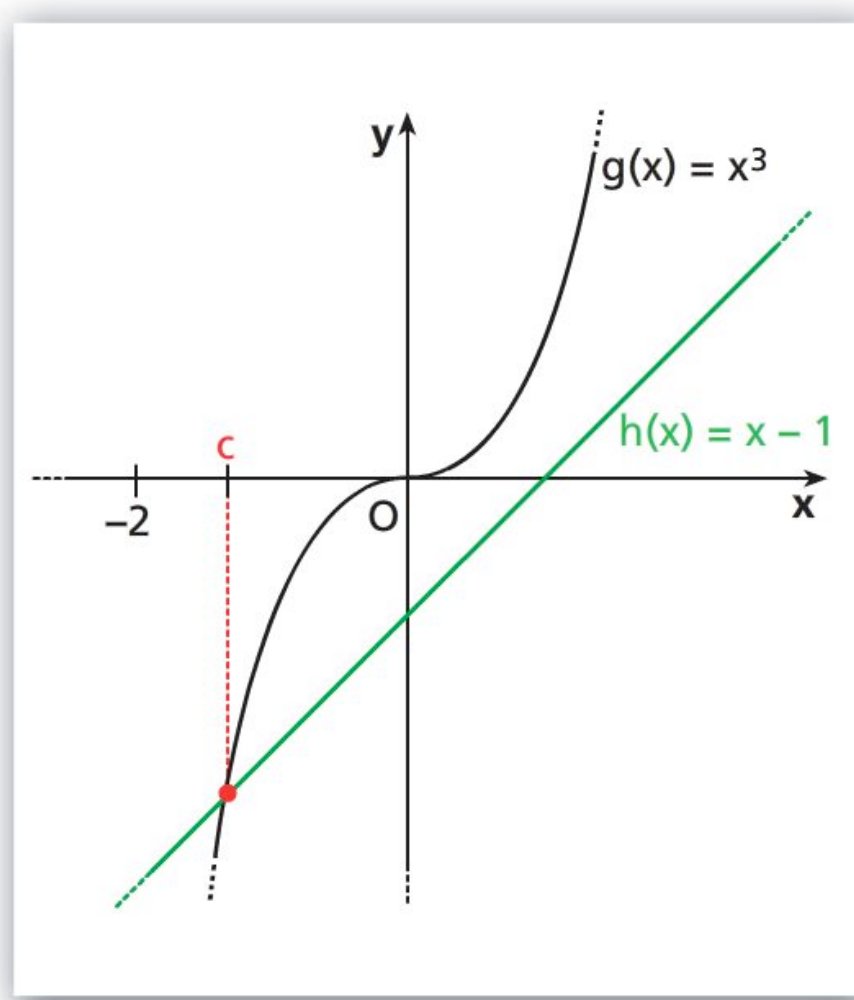
Cerchiamo eventuali soluzioni con un'approssimazione inferiore a 0,3.

Separiamo le radici dell'equazione

$$x^3 = x - 1.$$

Scriviamo l'equazione nella forma $x^3 = x - 1$ e rappresentiamo i grafici di $g(x) = x^3$ e $h(x) = x - 1$.

Le due curve si intersecano in un solo punto di ascissa c , appartenente all'intervallo $[-2; 0]$, che rappresenta l'unica so-

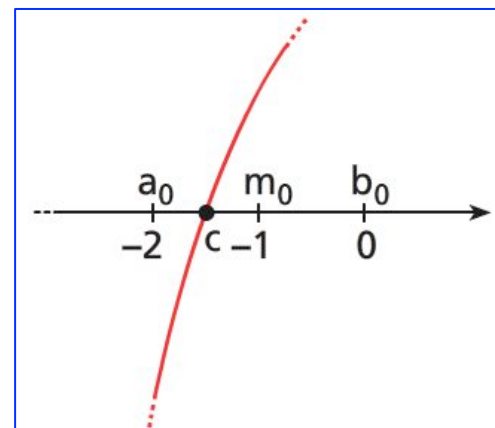


luzione dell'equazione $x^3 - x + 1 = 0$, come si può confermare con i teoremi di esistenza e unicità. Infatti in $[-2; 0]$ la funzione $f(x) = x^3 - x + 1$ è continua e $f(-2)f(0) = (-5)(1) < 0$. È inoltre derivabile con $f'(x) = 3x^2 - 1 > 0, \forall x \in [-2; 0[$. Consideriamo l'intervallo

$$[a_0; b_0] = [-2; 0].$$

Il punto medio dell'intervallo è $m_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = -1$: esso è un valore approssimato della soluzione c .

● Il caso in cui $f(a_0) > 0$ e $f(b_0) < 0$ si risolve in modo simile.



Il grado di approssimazione corrisponde alla quantità $|m_0 - c|$, che non possiamo determinare ma che è certamente minore di $\frac{b_0 - a_0}{2}$. Assumiamo il numero positivo $\varepsilon_0 = \frac{b_0 - a_0}{2}$ come stima del grado di approssimazione.

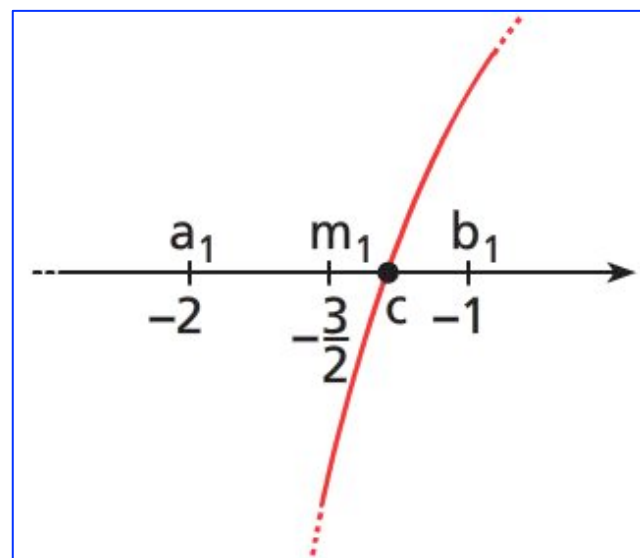
Poiché $\varepsilon_0 = 1 > 0,3$, ricerchiamo un'approssimazione migliore.

Dato che $f(-1) = 1 > 0$, per il teorema degli zeri la soluzione esatta è contenuta nell'intervallo $[a_1; b_1] = [-2; -1]$. Procedendo come prima otteniamo il seguente valore approssimato per la soluzione

$$m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = -\frac{3}{2} = -1,5,$$

a cui corrisponde un'approssimazione $\varepsilon_1 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Anche in questo caso $\varepsilon_1 > 0,3$, quindi proseguiamo la ricerca.

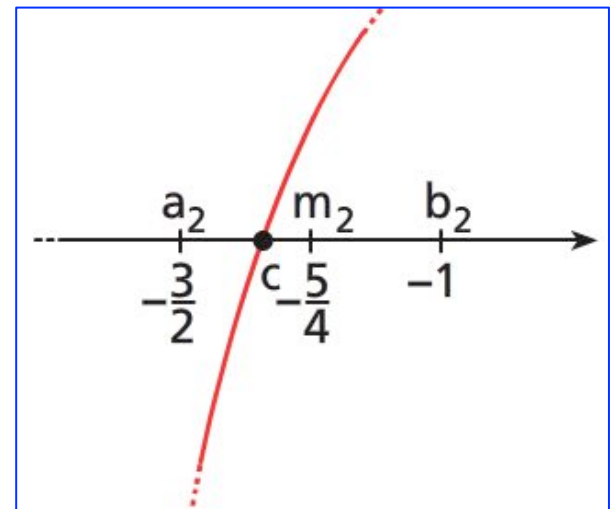


Poiché $f(-1,5) = -0,875 < 0$, la soluzione esatta è compresa nell'intervallo $[a_2; b_2] = [-1,5; -1]$. Ripetendo il procedimento, otteniamo il seguente valore approssimato:

$$m_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = -\frac{5}{4} = -1,25, \quad \text{con} \quad \varepsilon_2 = \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

● Gli intervalli che si ottengono nelle iterazioni successive hanno ampiezza $\varepsilon_n = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$ e ognuno di essi contiene la soluzione esatta.

Poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$, la successione delle soluzioni approssimate tende alla soluzione esatta. ε_n è anche l'approssimazione raggiunta con l' n -esima iterazione.



In questo caso $\varepsilon_2 < 0,3$, pertanto terminiamo il calcolo perché abbiamo ottenuto un'approssimazione inferiore a quella richiesta.

Diciamo che il valore approssimato della soluzione è $-1,25$ con un'approssimazione di $0,25$.

➤ In generale

Riassumiamo in modo più generale il procedimento appena illustrato.

Data l'equazione $f(x) = 0$, cerchiamo un intervallo $[a_0; b_0]$ tale che $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ (per esempio $f(a_0) < 0$ e $f(b_0) > 0$) e in cui la funzione f si annulla soltanto una volta.

Successivamente eseguiamo i seguenti passi.

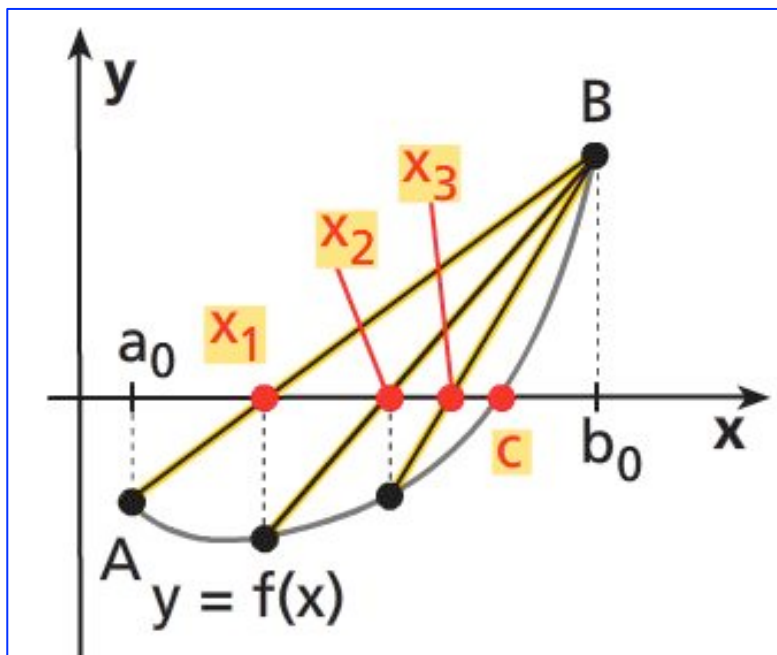
1. Determiniamo il punto medio dell'intervallo $[a_0; b_0]$, $m_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$, poi calcoliamo $f(m_0)$.
2. Se $f(m_0) = 0$, allora m_0 è la soluzione cercata e il procedimento è concluso.
3. Se invece $f(m_0) \neq 0$, allora m_0 è un valore approssimato della soluzione a meno della quantità $\varepsilon_0 = \frac{b_0 - a_0}{2}$.
4. Se l'approssimazione ε_0 è minore o uguale a quella voluta, il calcolo è terminato; in caso contrario proseguiamo.
5. Scegliamo il semintervallo contenente la radice ponendo:
$$\begin{array}{lll} a_1 = m_0, & b_1 = b_0 & \text{se } f(m_0) < 0; \\ a_1 = a_0, & b_1 = m_0 & \text{se } f(m_0) > 0. \end{array}$$
6. Ritorniamo al punto 1 e ripetiamo il procedimento per l'intervallo $[a_1; b_1]$.

Il metodo delle secanti

Consideriamo l'equazione:

$$f(x) = 0$$

e supponiamo che ammetta *una sola* radice c nell'intervallo $[a_0; b_0]$, quindi $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ (per esempio supponiamo $f(a_0) < 0$ e $f(b_0) > 0$).



● Il caso in cui $f(a_0) > 0$ e $f(b_0) < 0$ si risolve in modo simile.

Determiniamo una successione di approssimazioni della soluzione c . Ogni approssimazione viene calcolata sostituendo al grafico di $f(x)$ una retta secante, di cui cerchiamo l'intersezione con l'asse x .

Siano A e B i punti del grafico della funzione $y = f(x)$ di ascissa a_0 e b_0 .

Tracciamo la corda AB , indicando con x_1 il suo punto di intersezione con l'asse delle ascisse.

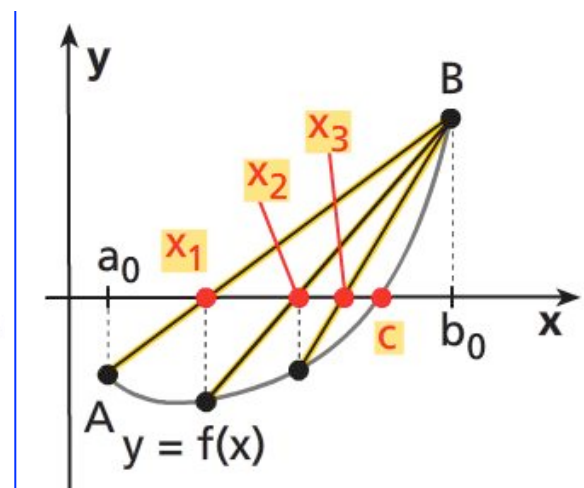
L'ascissa x_1 può essere considerata una prima approssimazione della soluzione c . Per calcolare x_1 determiniamo la retta AB utilizzando la formula della retta per due punti,

$$\frac{y - f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = \frac{x - a_0}{b_0 - a_0}$$

e calcoliamo la sua intersezione x_1 con l'asse x ponendo $y = 0$.

Si ottiene:

$$x_1 = a_0 - \frac{(b_0 - a_0) f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$$



Ora eseguiamo i seguenti passi.

1. Calcoliamo $f(x_1)$.
2. Se $f(x_1) = 0$, allora x_1 è la soluzione esatta dell'equazione.
3. Se $f(x_1) \neq 0$, proseguiamo ponendo:

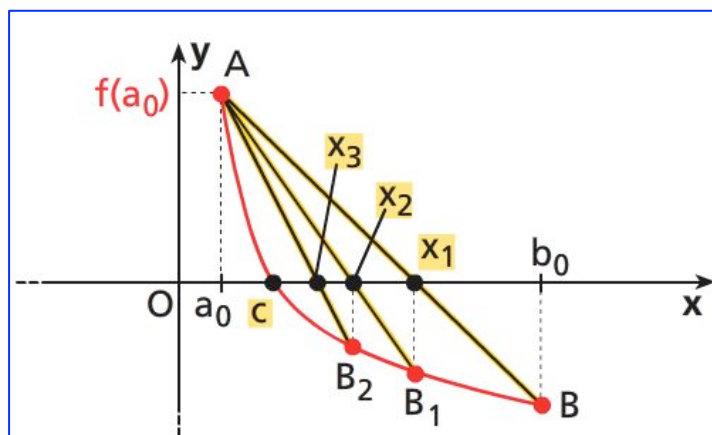
$$a_1 = x_1, \quad b_1 = b_0 \quad \text{se } f(x_1) < 0, \quad \text{perché } c \in]x_1; b_0[;$$

$$a_1 = a_0, \quad b_1 = x_1 \quad \text{se } f(x_1) > 0, \quad \text{perché } c \in]a_0; x_1[.$$

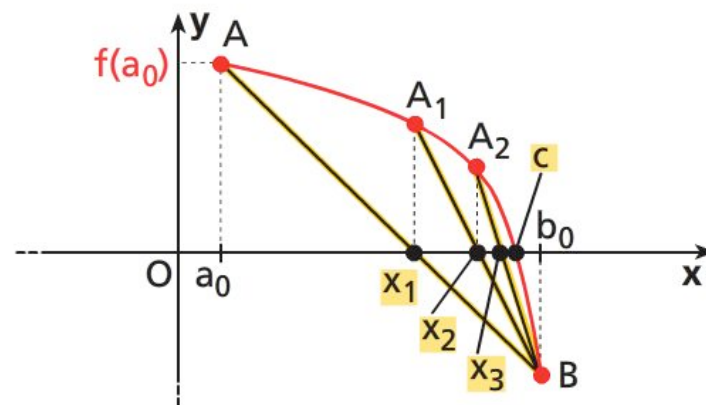
4. Tracciamo la retta che congiunge i punti $(a_1; f(a_1))$ e $(b_1; f(b_1))$. Indichiamo con x_2 il punto di intersezione con l'asse delle ascisse e ripetiamo il procedimento dall'inizio applicandolo all'intervallo $[a_1; b_1]$.

Otteniamo la successione $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, che contiene valori approssimati della soluzione c dell'equazione. Arresteremo la ricerca quando la differenza $|x_n - x_{n-1}|$ fra due soluzioni approssimate successive è minore della precisione ε che ci siamo prefissati.

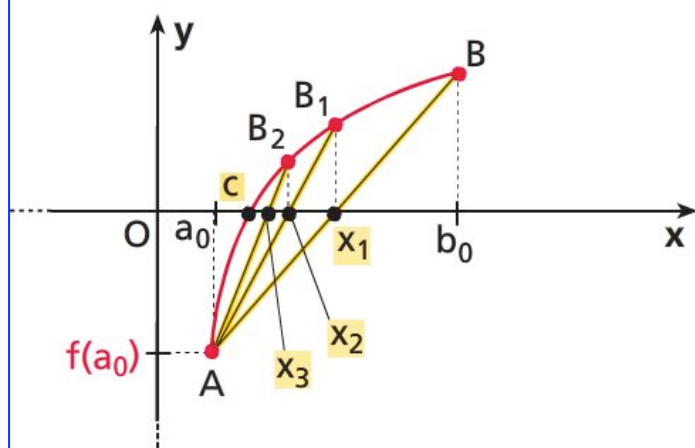
Se la funzione $y = f(x)$ mantiene costante il segno della derivata seconda, cioè la concavità, il metodo diventa più semplice, perché la successione $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ è monotona. Si possono presentare i casi della figura 12.



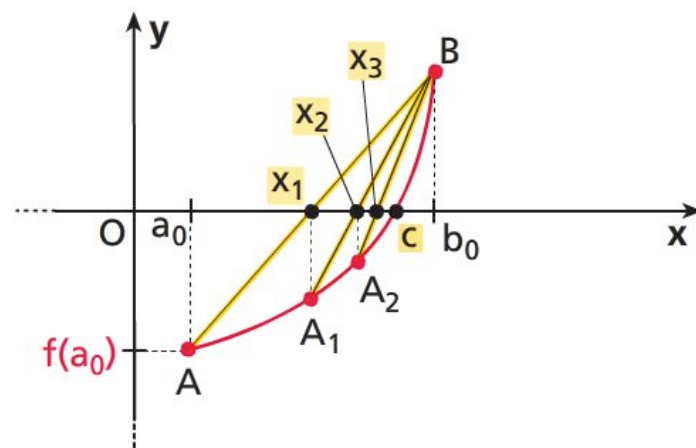
a. $f''(x) > 0$ e $f(a_0) > 0$.



b. $f''(x) < 0$ e $f(a_0) > 0$.



c. $f''(x) < 0$ e $f(a_0) < 0$.



d. $f''(x) > 0$ e $f(a_0) < 0$.

Si dimostrano le seguenti **formule di ricorrenza**.

Se la concavità e il valore della funzione in a_0 sono concordi, ossia $f(a_0) \cdot f''(x) > 0$:

$$\begin{cases} x_0 = b_0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{a_0 - x_n}{f(a_0) - f(x_n)} \cdot f(x_n) \end{cases}$$

Se la concavità e il valore della funzione in a_0 sono discordi, ossia $f(a_0) \cdot f''(x) < 0$:

$$\begin{cases} x_0 = a_0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{b_0 - x_n}{f(b_0) - f(x_n)} \cdot f(x_n) \end{cases}$$

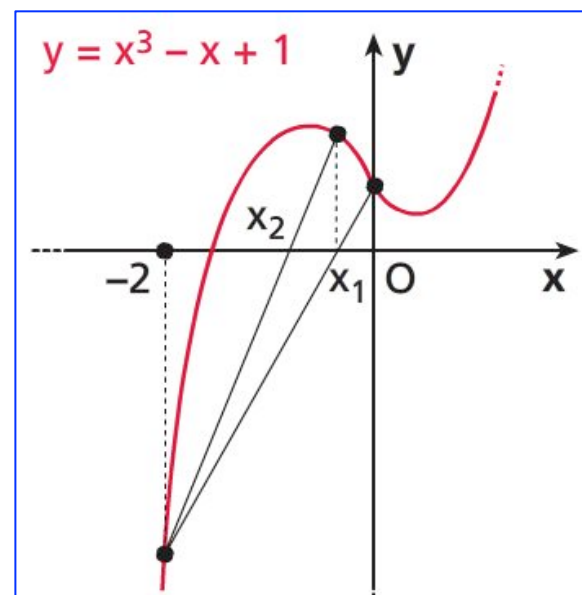
Quando la successione $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ è decrescente, i suoi numeri sono approssimazioni per eccesso della radice c ; quando invece è crescente, i suoi elementi sono valori approssimati per difetto.

● Queste formule di ricorrenza sono valide quando la concavità della funzione non cambia nell'intervallo $[a_0; b_0]$, cioè quando il segno di $f''(x)$ è costante su $[a_0; b_0]$.

ESEMPIO

Esaminiamo ancora l'equazione $x^3 - x + 1 = 0$ che ha la soluzione nell'intervallo $[a_0; b_0] = [-2; 0]$. Poniamo $f(x) = x^3 - x + 1$ e calcoliamo $f(-2) = -5$, $f(0) = 1$, $f'(x) = 3x^2 - 1$, $f''(x) = 6x$. Essendo $f''(x) < 0$ per ogni $x \in [-2; 0[$ possiamo applicare il metodo delle secanti e, poiché risulta $f(a_0) \cdot f''(x) = -5 \cdot 6x > 0$, per calcolare i valori approssimati della soluzione utilizziamo la prima formula di ricorrenza:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{-2 - x_n}{-5 - f(x_n)} \cdot f(x_n) = x_n - \frac{2 + x_n}{5 + f(x_n)} \cdot f(x_n) \end{cases}$$



Se $n = 0$, è $x_1 = x_0 - \frac{2 + x_0}{5 + f(x_0)} \cdot f(x_0)$ e quindi $x_1 = -0,3333$. Applichiamo di nuovo la formula, costruiamo la tabella e vediamo che i valori approssimati della soluzione sono decrescenti. Inoltre, dall'undicesimo in poi comincia a essere stabile la cifra dei millesimi. Pertanto la soluzione approssimata, a meno di 10^{-3} , è $-1,324$.

x_1	$-0,3333333$	x_5	$-1,2422589$	x_9	$-1,3218915$
x_2	$-0,6764706$	x_6	$-1,2885322$	x_{10}	$-1,3235181$
x_3	$-0,9606186$	x_7	$-1,3091422$	x_{11}	$-1,3242089$
x_4	$-1,1444253$	x_8	$-1,3180706$	x_{12}	$-1,3245021$

➤ osservazione

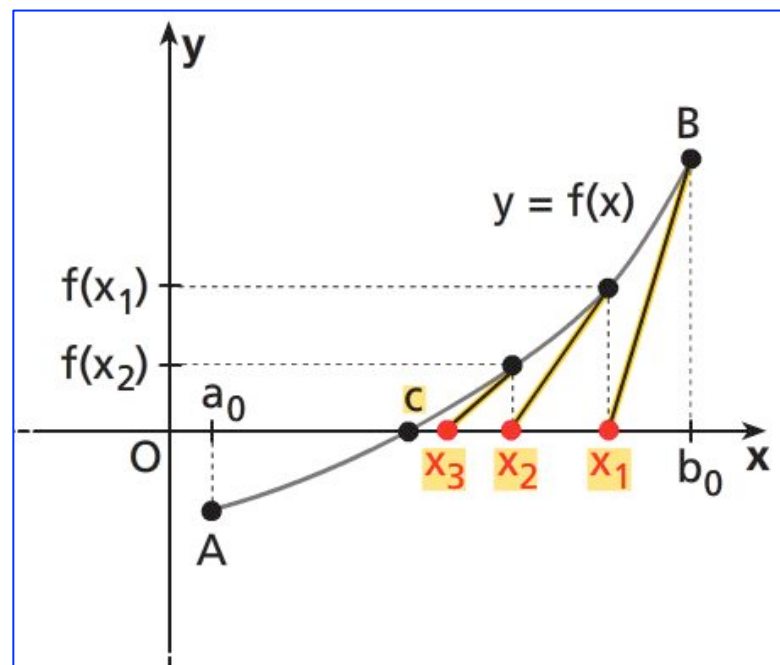
Mentre il metodo di bisezione è semplice e intuitivo, ma richiede numerose iterazioni per ottenere una buona precisione, con il metodo delle secanti, invece, possiamo ottenere una precisione migliore con un minor numero di iterazioni.

■ Il metodo delle tangenti

Anche questo metodo si applica quando, in un intervallo $[a_0; b_0]$, la derivata seconda della funzione f è continua e mantiene costante il suo segno.

Cominciamo determinando la retta tangente al grafico della funzione $y = f(x)$ nell'estremo la cui ordinata è concorde con $f''(x)$.

Ogni approssimazione viene calcolata sostituendo al grafico di $f(x)$ una retta tangente, di cui cerchiamo l'intersezione con l'asse x .



Nell'esempio in figura abbiamo:

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in [a_0; b_0] \quad \text{e} \quad f(b_0) > 0.$$

L'equazione della tangente in B è:

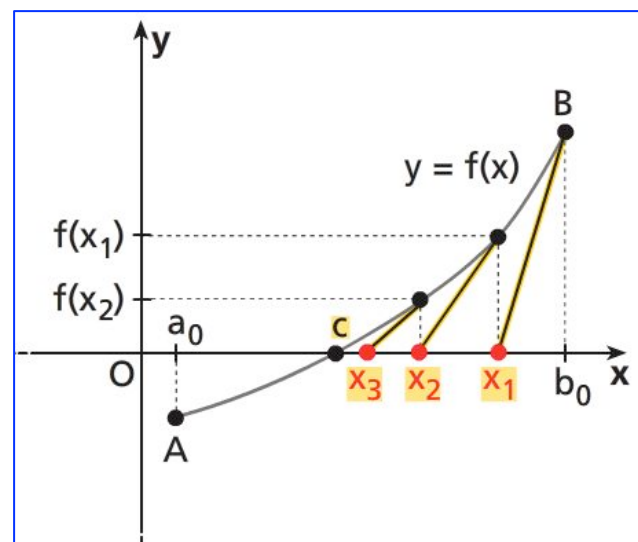
$$y - f(b_0) = f'(b_0) \cdot (x - b_0).$$

Tale tangente interseca l'asse delle x nel punto di ascissa:

$$x_1 = b_0 - \frac{f(b_0)}{f'(b_0)}.$$

x_1 è un valore approssimato della radice c .

● x_1 non coincide con c perché sta sulla tangente e la concavità della curva non cambia.



Adesso calcoliamo $f(x_1)$ e determiniamo la tangente alla funzione nel punto $(x_1; f(x_1))$:

$$y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1).$$

Determiniamo nuovamente il punto di intersezione della tangente con l'asse delle x :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Reiterando il procedimento, otteniamo la seguente **formula di ricorrenza**:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

● Se la successione $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ converge, allora $|x_n - x_{n-1}|$ tende a 0 per n tendente a $+\infty$.

La successione $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ è monotona (in questo caso decrescente) e converge a c . I suoi termini sono valori approssimati (in questo caso per eccesso) di c . Il procedimento sarà arrestato quando la differenza $|x_n - x_{n-1}|$ è minore della precisione richiesta (in pratica, quando comincia a stabilizzarsi la cifra decimale da noi stabilita).

La formula di ricorrenza vale in generale e si applica quando $f''(x)$ è continua e ha segno costante in $[a_0; b_0]$ e il punto di partenza della successione approssimante è l'estremo dell'intervallo in cui la funzione ha lo stesso segno della derivata seconda.

ESEMPIO

Analizziamo di nuovo l'equazione $x^3 - x + 1 = 0$ nell'intervallo $[a_0; b_0] = [-2; 0]$.

Il punto di partenza è il primo estremo della curva, cioè $(-2; -5)$, perché:

$$f(-2) = -5 < 0 \quad \text{e} \quad f''(x) = 6x < 0, \quad \forall x \in [-2; 0[.$$

Utilizzando la formula di ricorrenza, compiliamo una tabella.

n	x_n	$f(x_n) = x_n^3 - x_n + 1$	$f'(x_n) = 3x_n^2 - 1$
0	-2	-5	11
1	-1,545454545	-1,145755071	6,165289256
2	-1,359614916	-0,153704934	4,545658159
3	-1,325801345	-0,004624917	4,273247619
4	-1,324719049	$-4,65772 \cdot 10^{-6}$	4,26464168
5	-1,324717957	$-4,74043 \cdot 10^{-12}$	4,264632999
6	-1,324717957	$-2,22044 \cdot 10^{-16}$	4,264632999

Osserviamo che i valori approssimati della soluzione sono crescenti. Inoltre, dal sesto in poi sono stabili otto cifre decimali. Avendo usato 9 cifre decimali, nulla si può dire sull'ultima cifra. Pertanto, la soluzione approssimata a meno di 10^{-8} è $-1,32471795$.

➤ **osservazione**

Il metodo di Newton è molto efficiente se $f'(x_n)$ è grande (in valore assoluto); lo è poco se $f'(x_n)$ è piccola, cioè se f interseca l'asse delle ascisse con una pendenza piccola. In ogni caso, la convergenza è più rapida con il metodo delle tangenti che con il metodo delle secanti. Tuttavia, poiché richiede due valutazioni di funzione (una per la funzione f stessa e una per la sua derivata), il metodo delle tangenti «costa» il doppio del metodo delle secanti.

Uno svantaggio del metodo di Newton è quello di dover calcolare la derivata della funzione f . Quando f è definita da una formula semplice, questo non è un problema, ma nelle applicazioni reali può diventarlo. Il metodo delle secanti risolve questo problema. Le iterazioni del metodo delle secanti si ottengono, infatti, dalle iterazioni del metodo di Newton, in cui alla retta tangente sia stata sostituita la retta secante.

Si può dimostrare che, se il metodo delle secanti fornisce un valore della soluzione approssimato per difetto, il metodo delle tangenti ne fornisce uno per eccesso, e viceversa. Per questo l'uso congiunto dei due metodi permette di fare una valutazione sicura dell'errore. Per esempio, se a è un'approssimazione per difetto e b la è per eccesso, l'errore non supera $|b - a|$.

Il metodo iterativo o del punto unito

Si può dimostrare che un'equazione $f(x) = 0$ può essere trasformata in un'altra equivalente del tipo:

$$x = g(x).$$

● Per esempio, l'equazione

$$\sin x - x \ln x = 0$$

si può scrivere:

$$x = \frac{\sin x}{\ln x}.$$

Se α è soluzione dell'equazione, allora $g(\alpha) = \alpha$. Il numero α è detto **punto unito** di g perché coincide con la propria immagine. Da qui il nome del metodo.

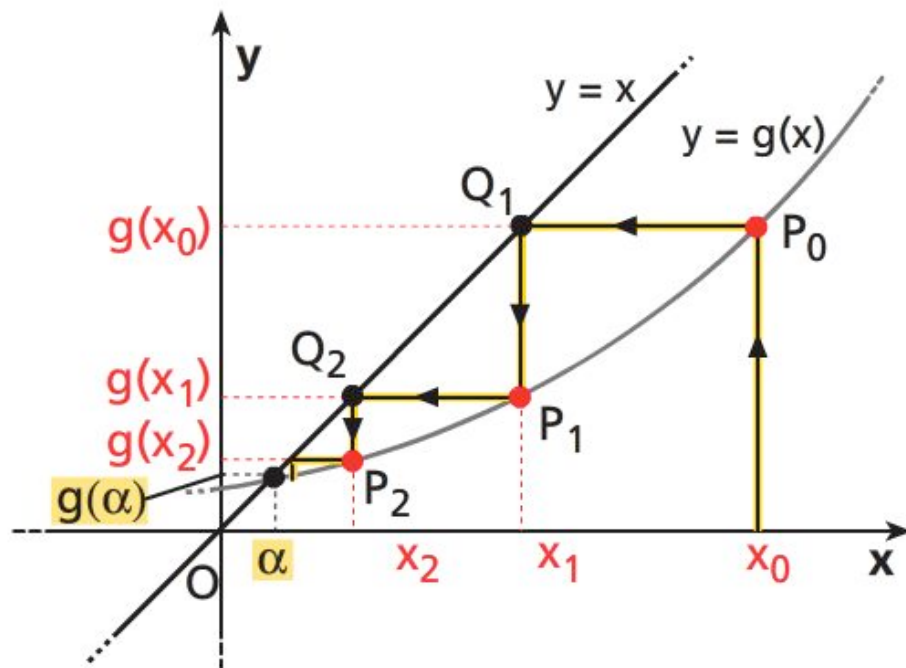
L'equazione $x = g(x)$ può essere trasformata nel sistema equivalente:

$$\begin{cases} y = x \\ y = g(x) \end{cases}$$

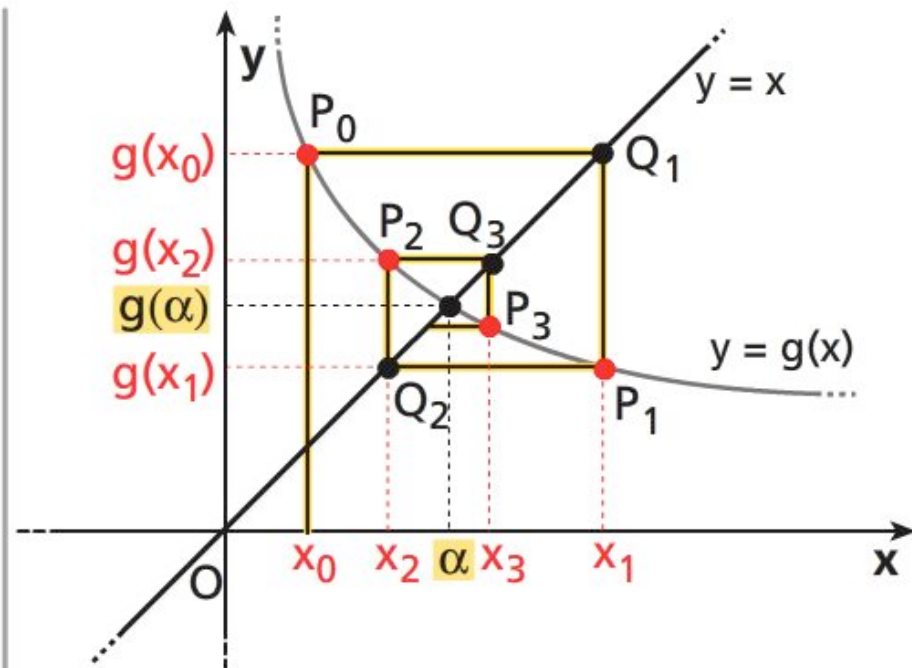
In questo modo la ricerca delle soluzioni dell'equazione data coincide con la determinazione dei punti di intersezione della funzione g con la bisettrice del primo e terzo quadrante del piano cartesiano.

L'idea su cui si basa questo metodo è quella di individuare un percorso a spezzata che si avvicini indefinitamente a uno di tali punti. Si procede nel seguente modo.

1. Scegliamo un'approssimazione iniziale x_0 sull'asse delle x .
2. Da qui mandiamo la retta parallela all'asse delle y , di equazione $x = x_0$, fino a incontrare il grafico della funzione $y = g(x)$ nel punto $P_0(x_0; g(x_0))$.
3. Da P_0 tracciamo la retta parallela all'asse delle x , di equazione $y = g(x_0)$, fino a intersecare la bisettrice nel punto $Q_1(x_1; g(x_0))$: poiché $x = y$, allora $x_1 = g(x_0)$.
4. Da Q_1 tracciamo la retta di equazione $x = x_1$ fino a intersecare la curva $y = g(x)$ nel punto $P_1(x_1; g(x_1))$.
5. Ritorniamo al punto 3 e ripetiamo il procedimento a partire da P_1 .



a. La successione $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ è monotona.



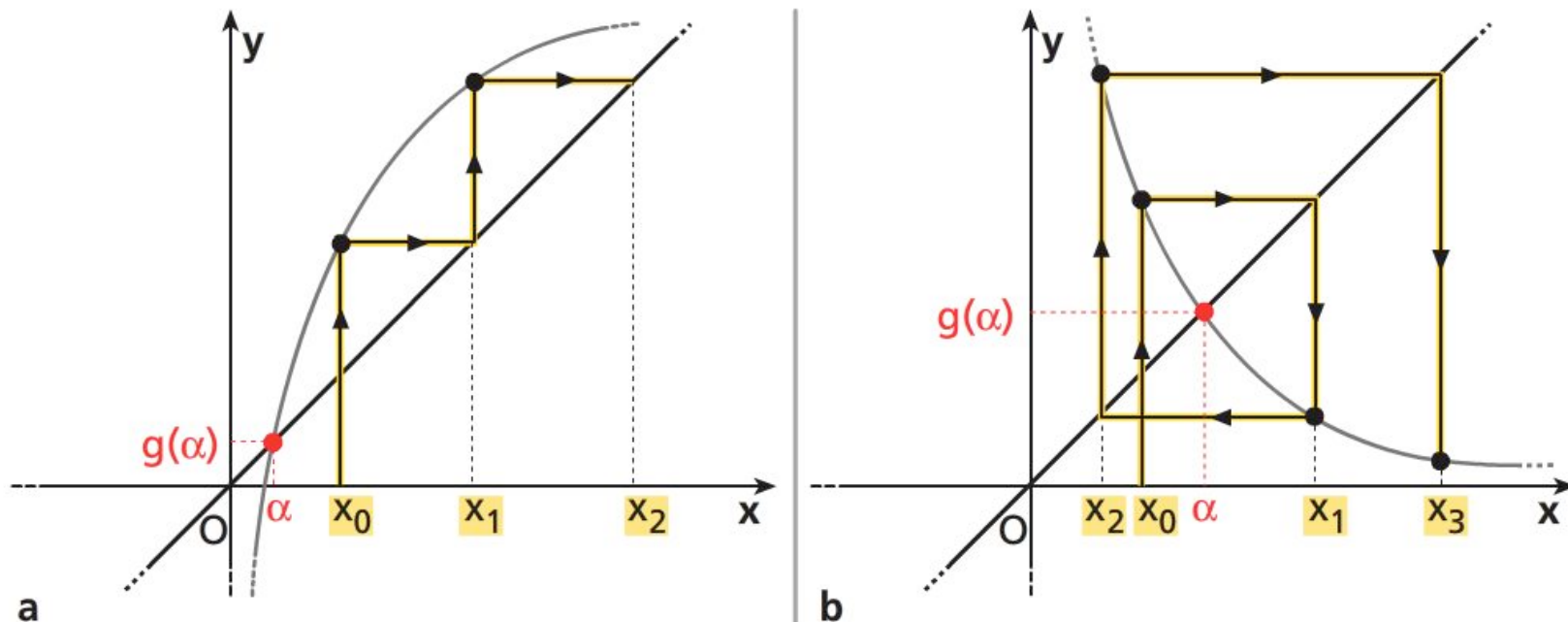
b. La successione $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ non è monotona.

Ripetendo le iterazioni otteniamo la seguente successione di numeri:

$$x_1 = g(x_0), \quad x_2 = g(x_1), \quad \dots, \quad x_n = g(x_{n-1}), \quad \dots$$

Se questa successione è convergente, il suo limite è soluzione dell'equazione data. A volte la successione è monotona (figura 14a), a volte è oscillante attorno al limite (figura 14b).

- Nella figura 15 sono riportati due esempi di non convergenza. Se li confrontiamo con quelli precedenti, vediamo che la crescita (caso *a*) o la decrescenza (caso *b*) della funzione g è più marcata.



◀ **Figura 15** La successione $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ non converge.

È possibile dimostrare la seguente **condizione sufficiente di convergenza**.

TEOREMA

Data un'equazione della forma $x = g(x)$, se è possibile determinare un intervallo $[a; b]$ in cui g è derivabile, ed esiste un numero m , con $0 < m < 1$, tale che $|g'(x)| \leq m \quad \forall x \in [a; b]$, allora:

- a) la successione $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, ..., $x_n = g(x_{n-1})$, ... converge qualunque sia il punto iniziale $x_0 \in [a; b]$;
- b) il limite $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ è l'unica soluzione dell'equazione data, nell'intervallo $[a; b]$.

● La verifica delle condizioni di convergenza è laboriosa, mentre risulta più agevole l'applicazione del metodo.

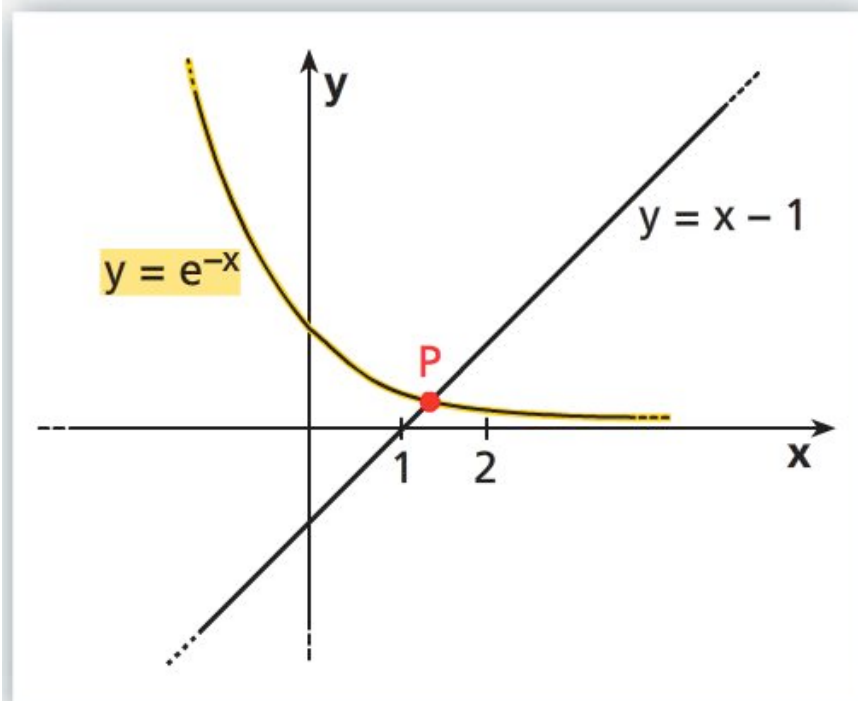
Per questo, in genere, non si controllano le condizioni, ma si applica il metodo, verificando empiricamente la convergenza.

ESEMPIO

Determiniamo un valore approssimato, a meno di 10^{-3} , della radice della seguente equazione:

$$e^{-x} - x + 1 = 0.$$

Per separare la radice scriviamo l'equazione nella forma $e^{-x} = x - 1$ e disegniamo i grafici delle funzioni $y = e^{-x}$ e $y = x - 1$.



Per applicare il metodo del punto unito, scriviamo l'equazione nella forma:

$$x = e^{-x} + 1.$$

► **Figura 16** I grafici delle funzioni $y = e^{-x}$ e $y = x - 1$ si intersecano in un unico punto P la cui ascissa è contenuta nell'intervallo $[1; 2]$.

Osserviamo che la funzione $g(x) = e^{-x} + 1$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e inoltre $|g'(x)| = e^{-x} \leq \frac{1}{e} < 1, \forall x \in [1; 2]$; pertanto, nell'intervallo $[1; 2]$, il procedimento di iterazione determina una successione convergente.

Scegliamo $x_0 = 1$ come primo valore approssimato e calcoliamo i successivi con la formula:

$$x_n = 1 + e^{-x_{n-1}}.$$

n	$1 + e^{-x_{n-1}}$	x_n
0		1
1	1,3679	1,3679
2	1,2546	1,2546
3	1,2852	1,2852
4	1,2766	1,2766
5	1,2790	1,2790
6	1,2783	1,2783
7	1,2785	1,2785

La tabella mostra che dalla sesta iterazione in poi i valori approssimati della soluzione differiscono meno di 10^{-3} . Dunque la soluzione approssimata, a meno di 10^{-3} , è 1,278.

Esercizi di riepilogo

ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo graficamente l'equazione $x^3 - 4x - \ln x = 0$.

Scriviamo l'equazione nella forma:

$$x^3 - 4x = \ln x.$$

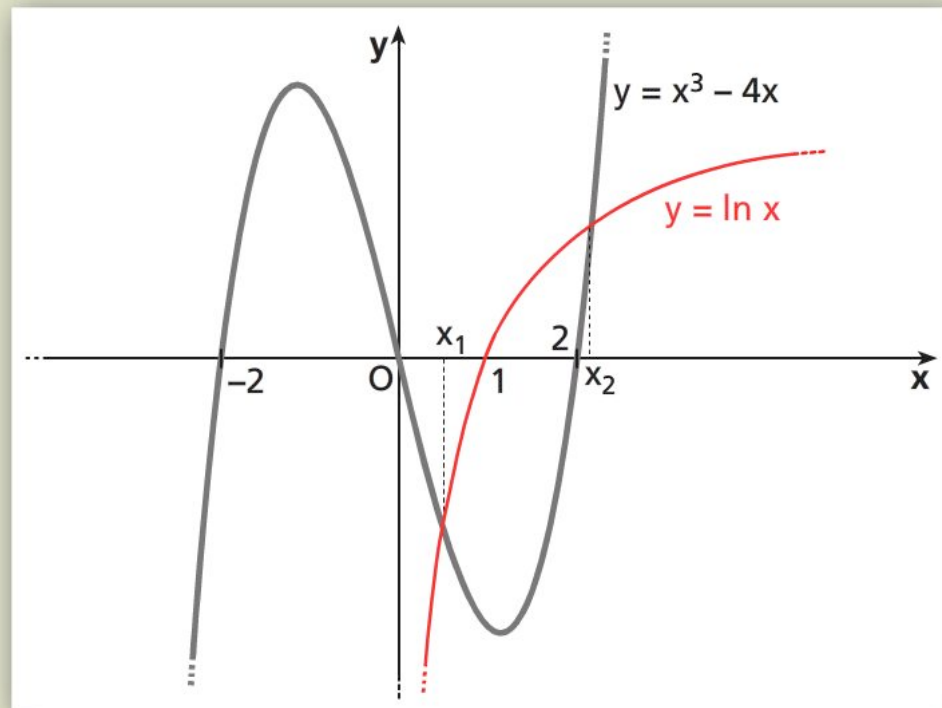
Osserviamo che l'equazione può ammettere soluzioni solo per $x > 0$.

Disegniamo nello stesso piano cartesiano le funzioni $y = x^3 - 4x$ e $y = \ln x$.

Le ascisse dei loro punti di intersezione sono le soluzioni dell'equazione.

Dal grafico si osserva che $x_1 < 1$ e $x_2 > 2$. Per ottenere una migliore approssimazione è necessario ingrandire il grafico. Ciò si può ottenere in modo soddisfacente se si ha a disposizione un programma informatico come Derive che disegna il grafico delle funzioni.

In tal caso si osserva che $0,3 < x_1 < 0,4$ e $2 < x_2 < 2,1$.



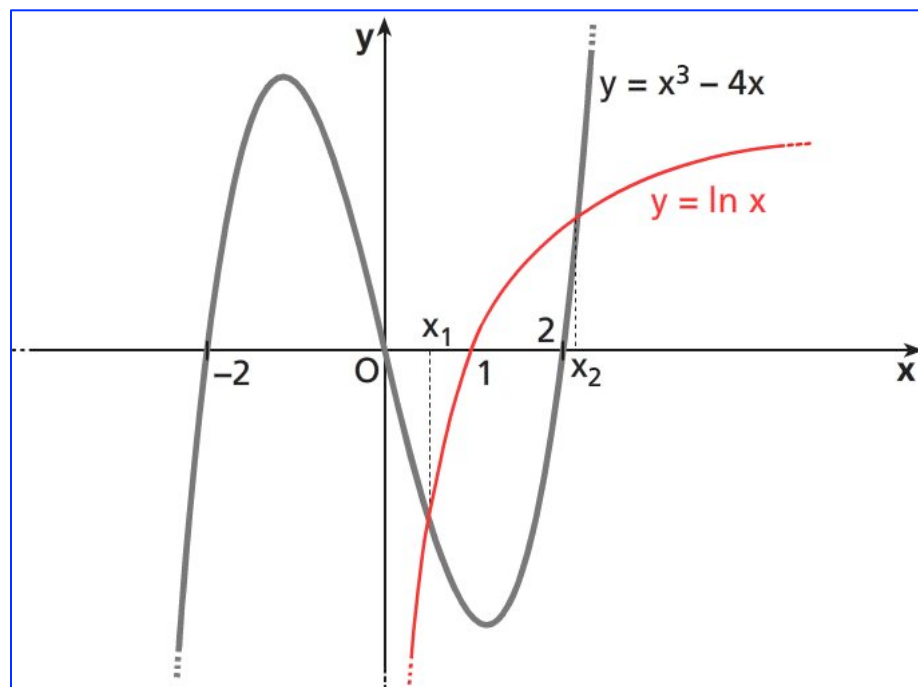
ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo graficamente la disequazione $x^3 - 4x - \ln x \geq 0$.

Scritta la disequazione nella forma

$$x^3 - 4x \geq \ln x$$

e considerate le funzioni $y = x^3 - 4x$ e $y = \ln x$, osservando i loro grafici, disegnati nell'esercizio guida precedente, dobbiamo considerare gli intervalli in cui la prima funzione si «trova sopra» la seconda, quindi possiamo affermare che la disequazione ammette soluzioni per $0 < x \leq x_1 \vee x \geq x_2$.



$$\underline{f(x) = \frac{e^x - 2}{x}}$$

1) DOMINIO: $D = \mathbb{R} - \{0\}$

2) SIMMETRIE: $f(-x) \begin{cases} \neq f(x) & \text{NO PARI} \\ \neq -f(x) & \text{NO DISPARI} \end{cases}$

3) INT. CON GLI ASSI:

$$x=0 \notin D \quad \begin{cases} f(x)=0 \\ e^x=2 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=\ln 2 \end{cases} \rightarrow \underline{(\ln 2, 0) \in f(x)}$$

4) SEGNO :

$$f(x) > 0 \quad N > 0 \rightarrow e^x - 2 > 0 \rightarrow x > \ln 2$$

$$D > 0 \rightarrow x > 0$$

		0		$\ln 2$	
N	-		-		+
D	-		+		+
$f(x)$	+	0	-	0	+

5) LIMITI :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \text{PER CONFRONTO TRA INFINITI}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-2}{-\infty} = 0^+ \rightarrow \underline{y=0} \text{ ASINTOTO ORIZZONTALE}$$

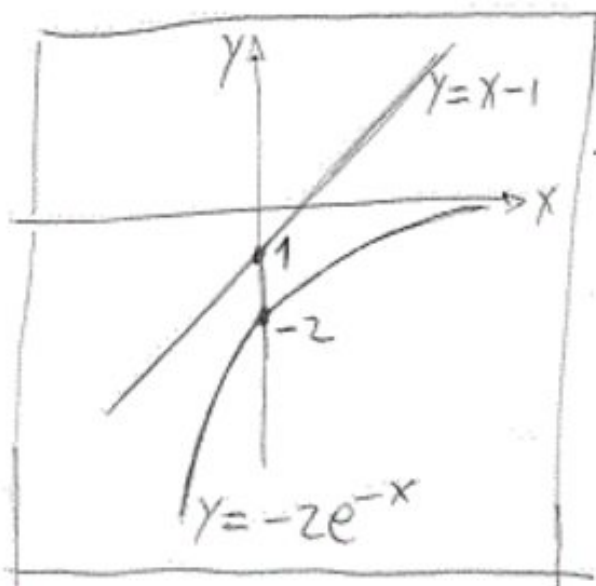
$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \frac{-1}{0^\pm} = \mp \infty \rightarrow \underline{x=0} \text{ ASINTOTO VERTICALE}$$

6) DERIVATE:

$$f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 2}{x^2}$$

$$\underline{f'(x) \geq 0 \rightarrow xe^x - e^x + 2 \geq 0 \rightarrow e^x(x-1) \geq -2 \rightarrow}$$

$$\rightarrow x-1 \geq -\frac{2}{e^x} \rightarrow \boxed{x-1 \geq -2e^{-x}}$$



$$\rightarrow \underline{\forall x \in \mathbb{R}}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{x} \\ f'(x) + \\ f(x) \nearrow \end{array}$$

NO MAX

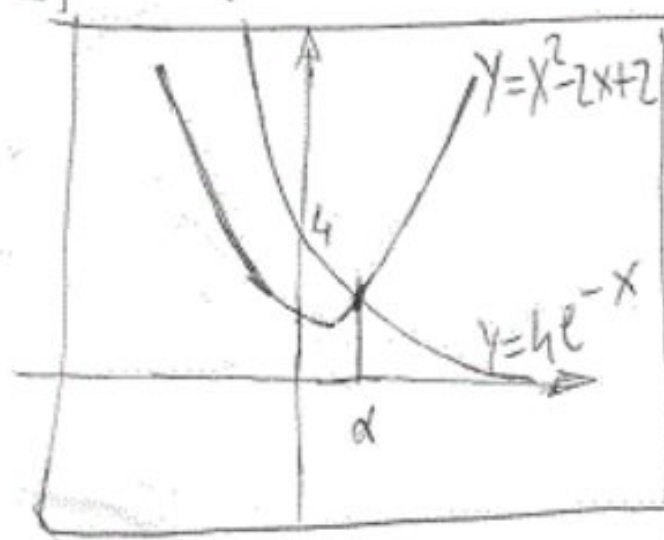
NO MIN

$$\varphi''(x) = \frac{x^2(e^x + xe^x - e^x) - 2x(xe^x - e^x + 2)}{x^4}$$

$$\varphi''(x) \geq 0 \rightarrow x^3e^x - 2x^2e^x + 2xe^x - 4x \geq 0$$

$$x(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 4) \geq 0 \quad F_1) \underline{x \geq 0}$$

$$F_2) \underline{e^x(x^2 - 2x + 2) \geq 4 \rightarrow x^2 - 2x + 2 \geq 4e^{-x}}$$



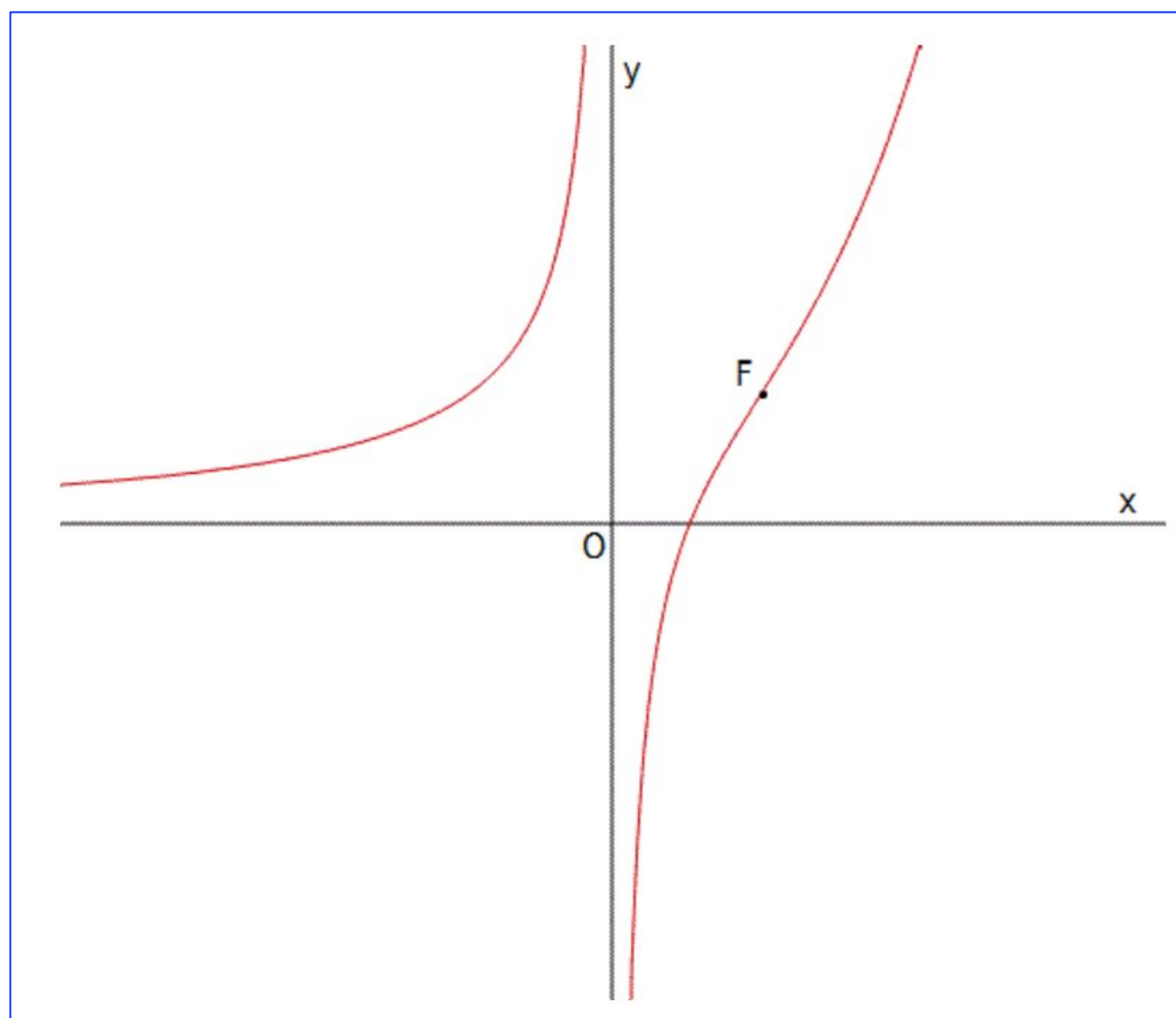
$$\rightarrow x \geq \alpha$$

(PER TENTATIVI)
 $\alpha \simeq 1,3$

	0	α
F_1	-	+
F_2	-	+
$\varphi''(x)$	+	+
$\varphi(x)$	∪	∩

PER $x = \alpha$

FLESSO



$$\underline{f(x) = x - \log x}$$

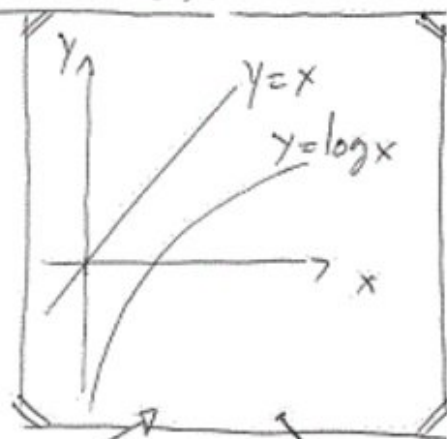
1) DOMINIO: $x > 0 \rightarrow \boxed{\mathbb{D} = \mathbb{R}^+}$

2) SIMMETRIE: (NO)

3) INTERSEZIONI CON GLI ASSI:

$$x = 0 \notin \mathbb{D}$$

$$y = 0 \rightarrow x = \log x$$



$\rightarrow \cancel{x}$

4) SEGNO:

$$\underline{f(x) \geq 0} \rightarrow x \geq \log x \rightarrow \boxed{\forall x \in \mathbb{D}}$$

5) LIMITI:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 - (-\infty) = +\infty \rightarrow \underline{x=0} \text{ ASINTOTO VERTICALE}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\log x}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\log x}{x} = \underline{1 = m}$$

0 PER CONFRONTO TRA
INFINITI

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\log x = -\infty \rightarrow \underline{\text{NO ASINTOTI OBLIQUI}}$$

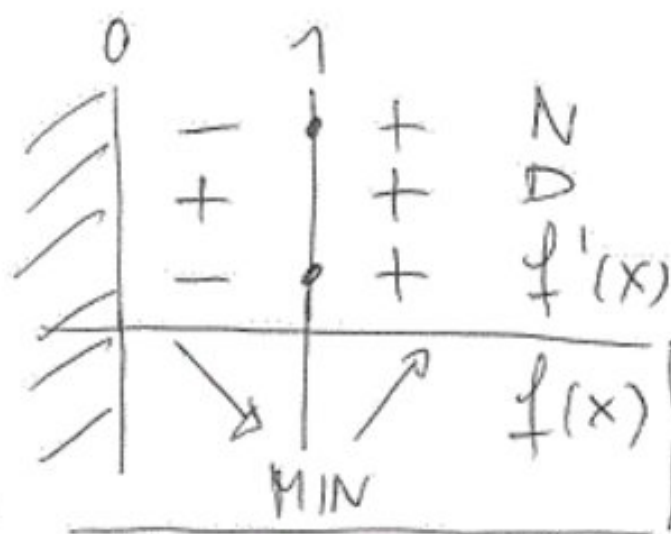
6) DERIVATE:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$\underline{f'(x) > 0} \rightarrow N > 0 \rightarrow x > 1$$

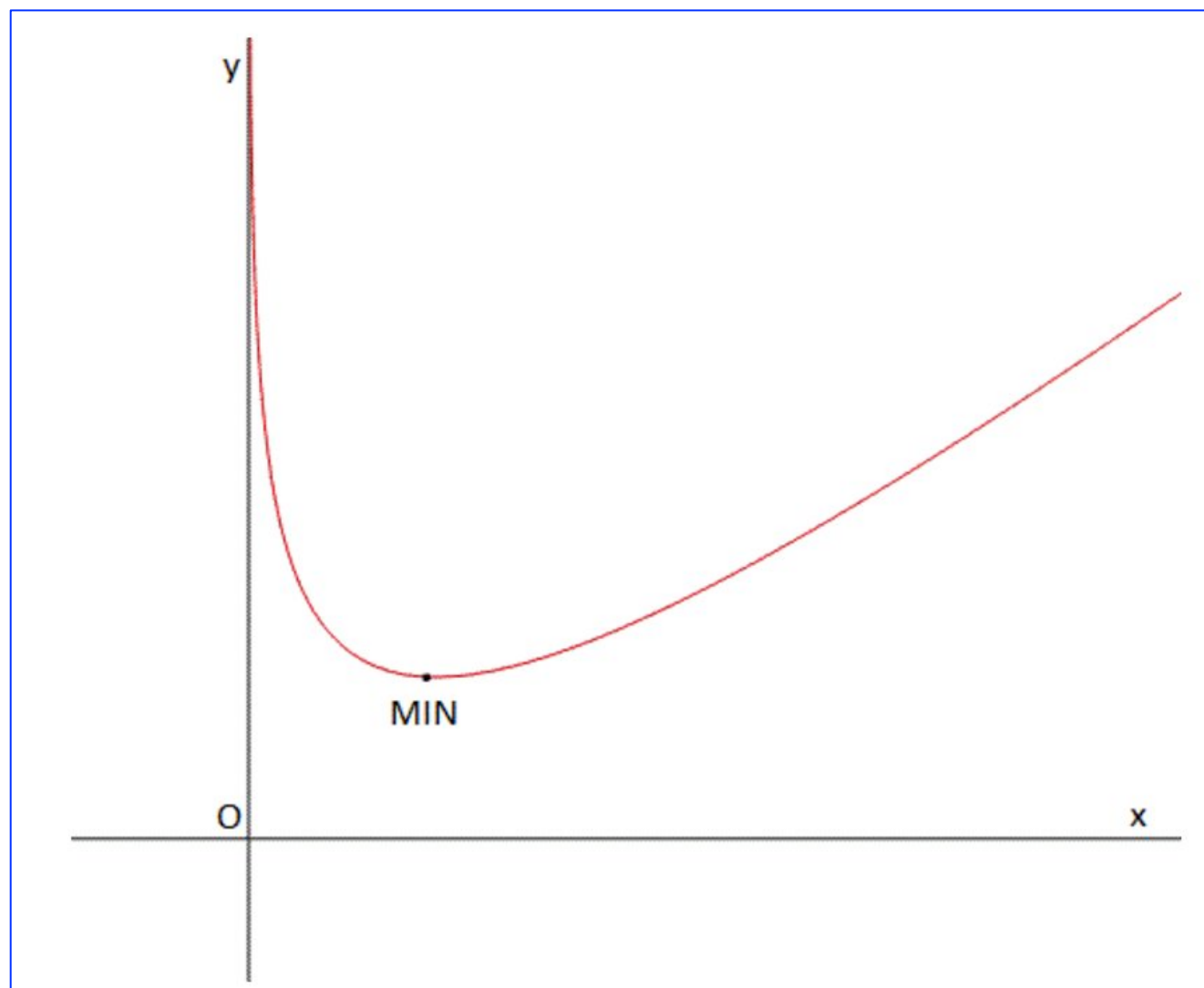
$$D > 0 \rightarrow x > 0$$

$$f(1) = 1 \quad \boxed{(1,1) \text{ MIN}}$$



$$f''(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow f'' > 0 \quad \forall x \in \mathbb{D}$$

$f \cup \forall x \in \mathbb{D} \rightarrow \text{NO FLESSI}$



$$\underline{f(x) = x + \log x}$$

1) DOMINIO : $x > 0 \rightarrow \boxed{\mathbb{D} = \mathbb{R}^+}$

2) SIMMETRIE : NO

3) INTERSEZIONI CON GLI ASSI :

$x = 0 \notin \mathbb{D}$

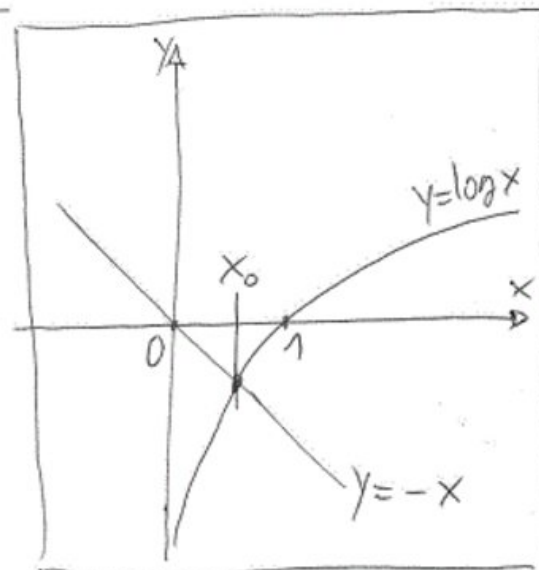
$y = 0 \rightarrow \underline{\log x = -x}$

PER TENTATIVI :

$x_0 = 0,5 \rightarrow -x = -0,5$
 $\log x = -0,69$

$x_0 = 0,6 \rightarrow -x = -0,6$
 $\log x = -0,51$

$x_0 = 0,55 \rightarrow -x = -0,55$
 $\log x = -0,60$



$\rightarrow \underline{x_0 \approx 0,56}$

4) SEGNO :

$f(x) > 0 \rightarrow \log x > -x \rightarrow \underline{x > x_0}$ (VEDI DISEGNO)

5) LIMITI:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \rightarrow \underline{x=0} \text{ ASINTOTO VERTICALE}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\log x}{x} = 1 = m$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty \rightarrow \begin{matrix} \text{NO ASINTOTA} \\ \text{OBLIQUA} \end{matrix}$$

6) DERIVATE:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

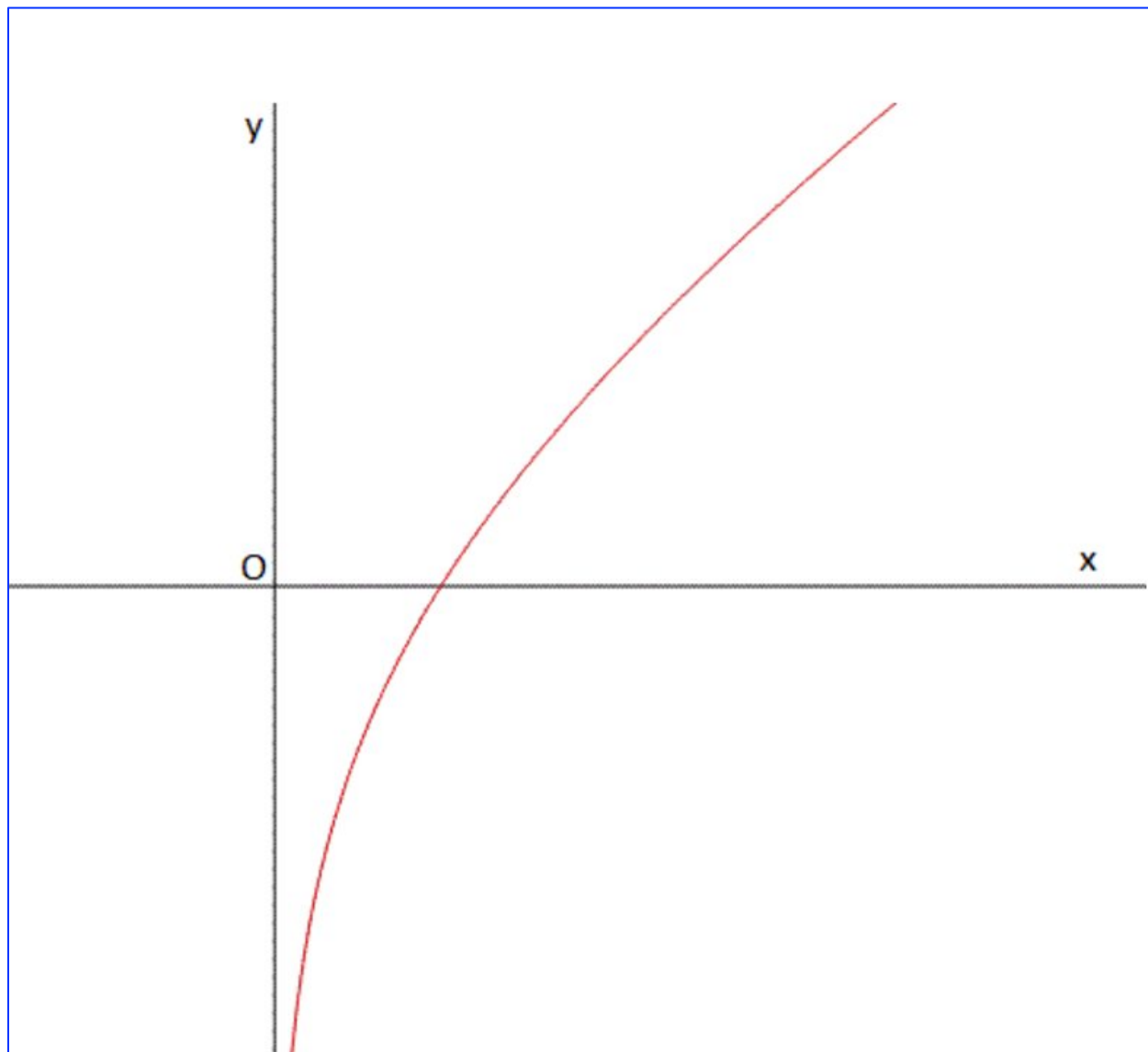
$$\underline{f'(x) > 0} \quad N > 0 \rightarrow x > -1$$

$$D > 0 \rightarrow x > 0$$

-1	0		
/		+	N
/		+	D
/		+	$f'(x)$
/		$\nearrow$	$f(x)$

(NO MIN, MAX)

$$f''(x) = \frac{x - x - 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{D} \quad \text{NO FLESS}$$



ESERCIZIO GUIDA

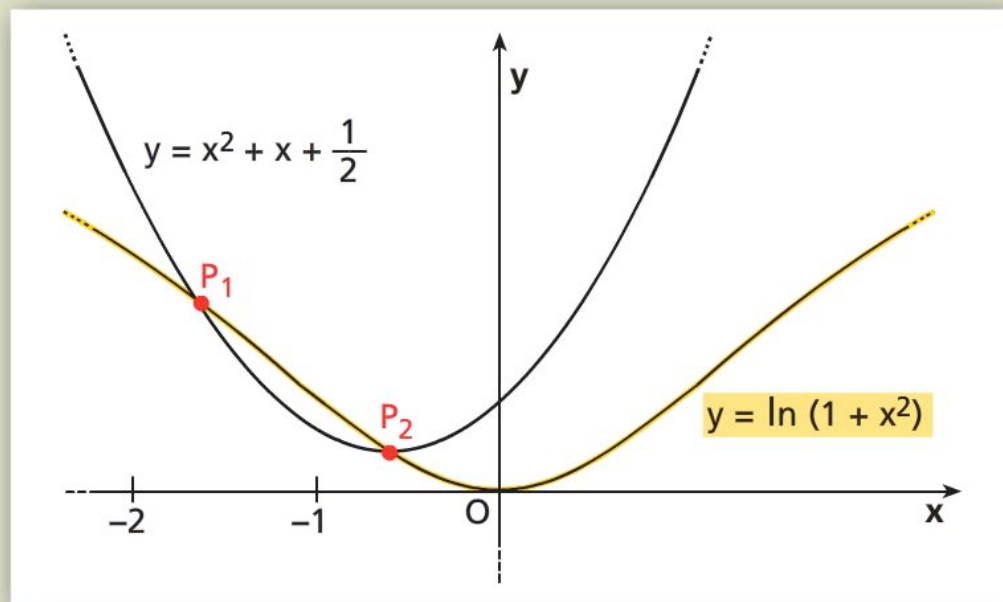
Data l'equazione $\ln(1 + x^2) - x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$, separiamo le sue radici.

Scriviamo l'equazione nella forma

$$\ln(1 + x^2) = x^2 + x + \frac{1}{2}$$

e confrontiamo i grafici delle funzioni:

$$g(x) = \ln(1 + x^2) \text{ e } h(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}.$$



Le ascisse delle intersezioni delle due curve

sono gli zeri della funzione $f(x) = \ln(1 + x^2) - x^2 - x - \frac{1}{2}$, cioè le soluzioni dell'equazione data.

Dal grafico vediamo che g e h hanno due punti di intersezione, P_1 e P_2 , quindi l'equazione ha due soluzioni, x_1 e x_2 , che si trovano rispettivamente negli intervalli $[-2; -1]$ e $[-1; 0]$.

Lo confermiamo con i teoremi di esistenza e unicità. Nell'intervallo $[-1; 0]$ la funzione $f(x)$ è continua e si ha $f(-1) \cdot f(0) = \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$. È inoltre derivabile con derivata $f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} - 2x - 1$ che si annulla in -1 , pertanto è diversa da 0 nei punti interni a $[-1; 0]$, come richiede il primo teorema di unicità. In modo analogo, si procede per l'intervallo $[-2; -1]$.

ESERCIZIO GUIDA

Con il metodo di bisezione determiniamo la radice dell'equazione dell'esercizio 352, localizzata nell'intervallo $[-2; -1]$ con un'approssimazione inferiore a $\varepsilon = 0,1$.

Sappiamo che l'equazione

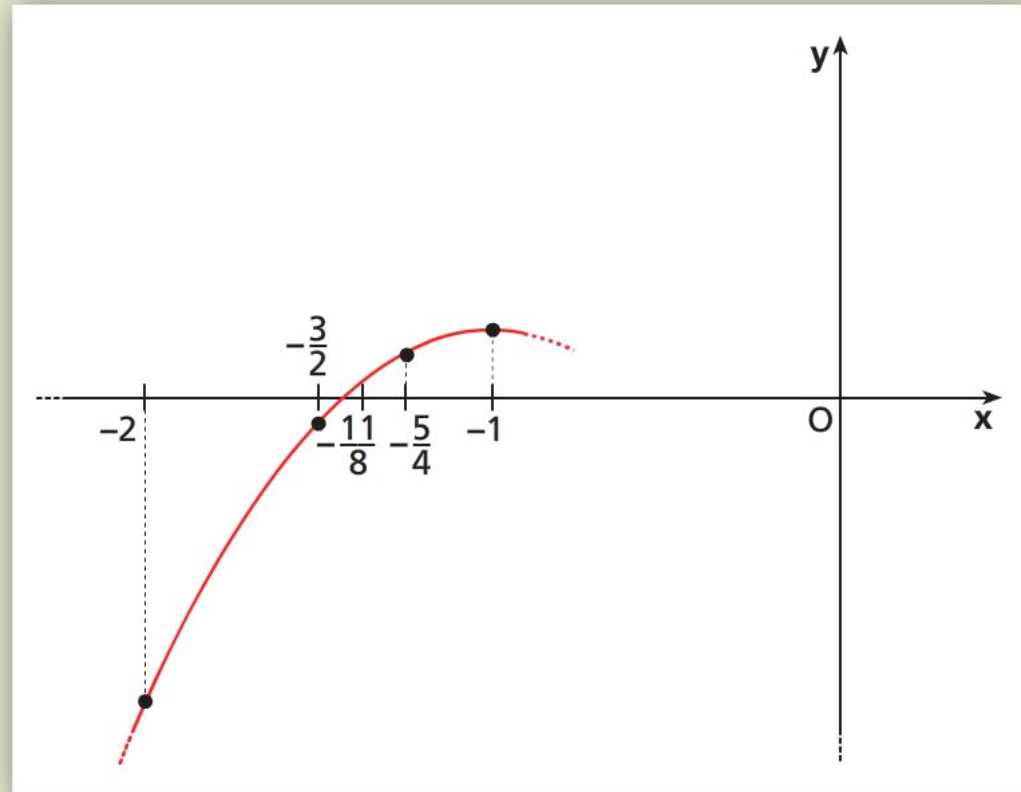
$$\ln(1 + x^2) - x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$$

ha due radici che appartengono agli intervalli $[-2; -1]$ e $[-1; 0]$. Cerchiamo lo zero della funzione $f(x) = \ln(1 + x^2) +$

$-x^2 - x - \frac{1}{2}$ in $[-2; -1]$:

$$f(-2) = \ln 5 - \frac{5}{2} < 0,$$

$$f(-1) = \ln 2 - \frac{1}{2} > 0.$$



Il punto medio dell'intervallo è $m_0 = -\frac{3}{2}$, il grado di approssimazione corrisponde alla distanza di m_0 dagli estremi dell'intervallo:

$$\varepsilon_0 = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Non essendo soddisfatto il grado di approssimazione richiesto, cerchiamo un'approssimazione migliore.

Dato che $f(m_0) = \ln \frac{13}{4} - \frac{5}{4} < 0$, la soluzione dell'equazione è compresa nell'intervallo $\left[-\frac{3}{2}; -1\right]$.

Procediamo come prima e otteniamo le iterazioni riportate nella tabella con le relative approssimazioni.

n	a_n	b_n	$m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	$\varepsilon_n = \frac{b_n - a_n}{2}$
0	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	0,5
1	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{5}{4}$	0,25
2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{11}{8}$	0,125
3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{11}{8}$	$-\frac{23}{16}$	0,0625

Osservando la tabella, possiamo concludere che $-\frac{23}{16}$ è un valore approssimato della radice. L'errore commesso è minore di $\varepsilon_3 = 0,0625$.

ESERCIZIO GUIDA

Con il metodo delle secanti determiniamo le prime tre cifre decimali delle radici dell'equazione:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 9 = 0.$$

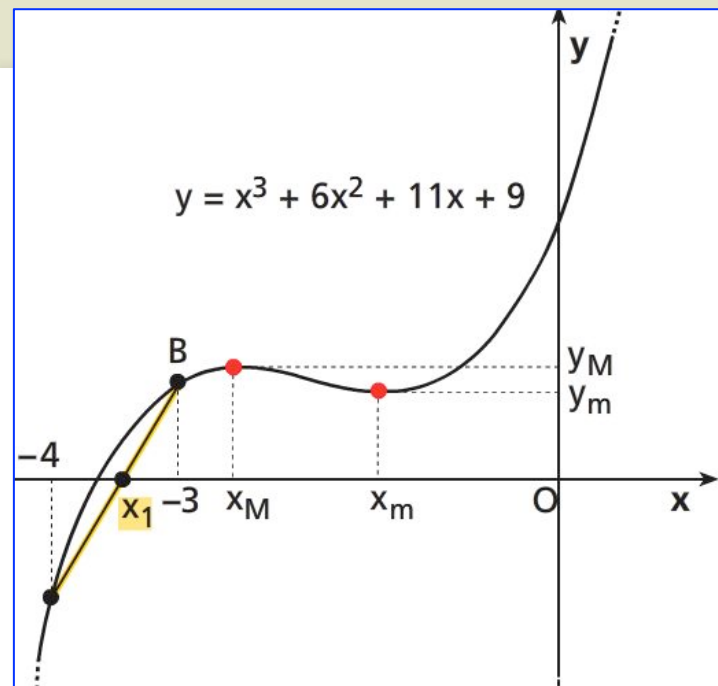
L'analisi dell'andamento della funzione $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 9$ mostra l'esistenza di un punto di massimo relativo in $x_M \simeq -2,57735$ e di un punto di minimo relativo in $x_m \simeq -1,42265$. Gli estremi relativi sono:

$$f(-2,57735) = 3,3849 \text{ (massimo)}, \quad f(-1,42265) = 2,6151 \text{ (minimo)}.$$

Quindi f ha un solo zero, che si trova nel semiasse negativo.

Essendo $f(-4) = -3$ e $f(-3) = 3$, localizziamo la radice di f in $[a_0; b_0] = [-4; -3]$. Osserviamo poi che in tale intervallo la derivata seconda di f ha segno negativo. Pertanto, essendo verificata la condizione

$$f(a_0)f''(x) = f(-4)f''(x) > 0,$$



si utilizza la formula di ricorrenza,

$$\begin{cases} x_0 = b_0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{a_0 - x_n}{f(a_0) - f(x_n)} \cdot f(x_n) \end{cases}$$

che nel nostro caso assume la forma:

$$x_0 = -3,$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{-4 - x_n}{-x_n^3 - 6x_n^2 - 11x_n - 12} \cdot (x_n^3 + 6x_n^2 + 11x_n + 9) = \\ &= -\frac{4x_n^2 + 8x_n + 9}{x_n^2 + 2x_n + 3}. \end{aligned}$$

Eseguiamo l'iterazione mettendo i risultati in tabella.

A partire da x_5 , comincia a essere stabile la cifra dei millesimi.

Possiamo dire che la soluzione dell'equazione $x^3 + 6x^2 + 11x + 9 = 0$ è $x = -3,671$.

Osserviamo che $f(-3,671) = 0,00516529$, quindi $-3,671$ non è la radice dell'equazione, ma ne rappresenta soltanto un valore approssimato.

n	x_n
0	-3
1	-3,5
2	-3,63636
3	-3,66482
4	-3,67038
5	-3,67145
6	-3,67165

ESERCIZIO GUIDA

Utilizzando il metodo delle tangenti, determiniamo le prime otto cifre decimali delle radici dell'equazione:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 9 = 0.$$

La radice dell'equazione è già stata localizzata nell'esercizio 378 all'interno dell'intervallo $[-4; -3]$. In tale intervallo, la derivata prima di $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 9$ è $f'(x) = 3x^2 + 12x + 11$, mentre $f''(x) = 6x + 12$ è negativa in $[-4; -3]$. Inoltre, poiché $f(-4) < 0$ applichiamo il metodo di Newton-Raphson utilizzando come ascissa iniziale $x_0 = -4$. Dunque abbiamo:

$$\begin{cases} x_0 = -4 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + 6x_n^2 + 11x_n + 9}{3x_n^2 + 12x_n + 11} = \frac{2x_n^3 + 6x_n^2 - 9}{3x_n^2 + 12x_n + 11} \end{cases}$$

Riportiamo i passi dell'iterazione in una tabella.

A partire da x_3 comincia a essere stabile la cifra dei millesimi, mentre a partire da x_4 si stabilizzano le prime otto cifre decimali. Avendo utilizzato nove decimali nell'iterazione, non possiamo ottenere informazioni sulla stabilità dell'ultima cifra decimale.

Osserviamo infine che

$$f(-3,67169988) = 1,22360433 \cdot 10^{-8}.$$

n	x_n
0	-4
1	-3,727272727
2	-3,673691174
3	-3,671702570
4	-3,671699882
5	-3,671699882
6	-3,671699882

ESERCIZIO GUIDA

Mediante il metodo del punto unito, cerchiamo una soluzione approssimata dell'equazione:

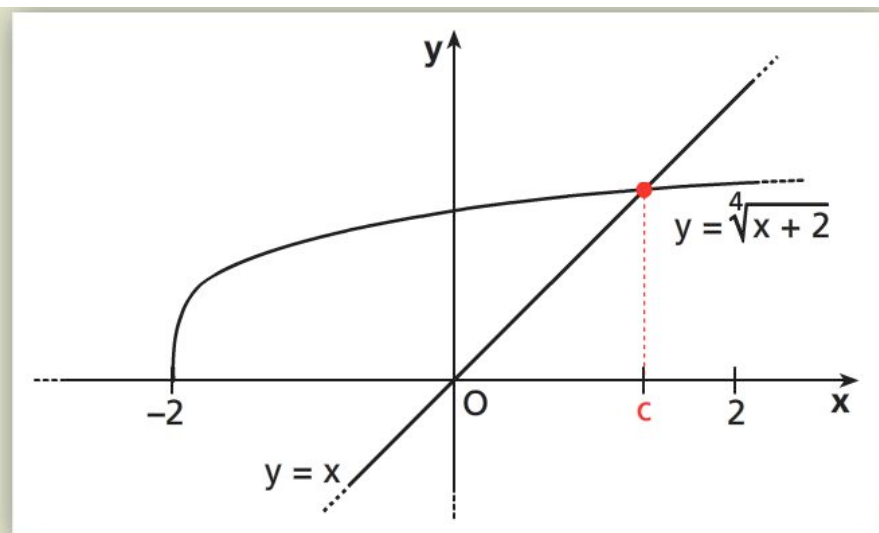
$$x = \sqrt[4]{x+2}.$$

Cominciamo separando le eventuali radici dell'equazione.

Tracciando il grafico delle funzioni

$$h(x) = x \text{ e } g(x) = \sqrt[4]{x+2},$$

si può osservare che l'equazione data ha una soluzione nell'intervallo $[0; 2]$.



n	x_n
0	0
1	1,18921
2	1,33635
3	1,35151
4	1,35304
5	1,35319
6	1,35321
7	1,35321

n	x_n
0	1
1	1,31607
2	1,34945
3	1,35283
4	1,35317
5	1,35321
6	1,35321
7	1,35321

Applicando i teoremi di esistenza e unicità, possiamo affermare che la radice dell'equazione è unica.

Essendo

$$|g'(x)| = g'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x+2)^3}},$$

possiamo concludere che $\forall x \in [0; 2]$ si ha

$$|g'(x)| \leq g'(0) = \frac{1}{4\sqrt[4]{2^3}} < 1. \text{ Allora possiamo applicare il me-}$$

todo del punto unito, determinando le iterate $x_{n+1} = g(x_n)$ a partire da un qualsiasi punto dell'intervallo $[0; 2]$. Scegliamo, per esempio, $x_0 = 0$. Otteniamo la tabella di iterazione a fianco.

A partire dalla settima iterazione ($n = 6$), vediamo che le prime quattro cifre decimali degli iterati divengono stazionarie. Abbiamo così individuato le prime quattro cifre della soluzione cercata. Avendo utilizzato cinque cifre decimali, nulla si può dire sulla stabilità della quinta cifra.

Se avessimo scelto di cominciare l'iterazione in un altro punto di $[0; 2]$, avremmo ottenuto lo stesso risultato. Per esempio, se fissiamo come punto iniziale $x_0 = 1$, abbiamo la tabella a lato.

L'iterazione si stabilizza questa volta sulla quarta cifra decimale a partire da $n = 5$. La ragione della maggiore rapidità dipende dal fatto che il punto iniziale dell'iterazione è, in questo caso, più vicino alla radice effettiva. Quindi possiamo concludere che una buona localizzazione accelera il processo iterativo.