

STUDIO DI FUNZIONI

1. CLASSIFICAZIONE

Indicare se è algebrica o trascendente, razionale o irrazionale, intera o fratta

2. DOMINIO

Trovare l'insieme dei valori che si possono attribuire alla variabile indipendente x affinché la funzione $y = f(x)$ assuma valori reali e non perda significato. Il calcolo del dominio va condotto tenendo presente il dominio delle funzioni elementari.

3. SIMMETRIE E PERIODICITA'

- ❖ $f(-x) = f(x)$ Pari
- ❖ $f(-x) = -f(x)$ Dispari
- ❖ $f(x) = f(x + 2\pi)$ Periodica

4. INTERSEZIONE CON GLI ASSI

- ❖ Intersezione con l'asse X: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$
- ❖ Intersezione con l'asse Y: $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$

5. SEGNO DELLA FUNZIONE

- ❖ Impostando $f(x) > 0$ si determinano gli intervalli in cui la $f(x)$ è positiva o negativa

6. COMPORTAMENTO AGLI ESTREMI DEL CAMPO E ASINTOTI

Si studia come la funzione si comporta agli estremi del dominio e quindi si determinano gli asintoti:

- ❖ se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ asintoto verticale di equazione $x = x_0$
 - ❖ se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k$ asintoto orizzontale di equazione $y = k$
 - ❖ se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$
- dove: $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$

7. PUNTI DI DISCONTINUITA'

Si consideri un punto $x = x_0$ di una funzione $f(x)$ e sia $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$:

- ❖ se $L = f(x_0)$, la funzione è continua in x_0
- ❖ se $L \neq f(x_0)$, la funzione è discontinua in x_0

In particolare:

- ❖ se $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L_2$ con $L_1 \neq L_2$ allora x_0 = punto di discontinuità di 1^a specie.

- ❖ se nel punto $x = x_0$ non esiste almeno uno dei due limiti (destro o sinistro), oppure uno di essi è infinito, allora x_0 = punto di discontinuità di 2^a specie.
- ❖ se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ e $f(x_0)$ non esiste oppure $f(x_0) \neq L$ allora x_0 = punto di discontinuità di 3^a specie. La discontinuità di 3^a specie si dice anche eliminabile, in quanto l'eliminazione della discontinuità si può ottenere assumendo come valore della funzione nel punto x_0 il limite L , cioè: $f(x_0) = L$.

8. MASSIMI E MINIMI RELATIVI, FLESSI ORIZZONTALI, PUNTI ANGOLOSI E CUSPIDI

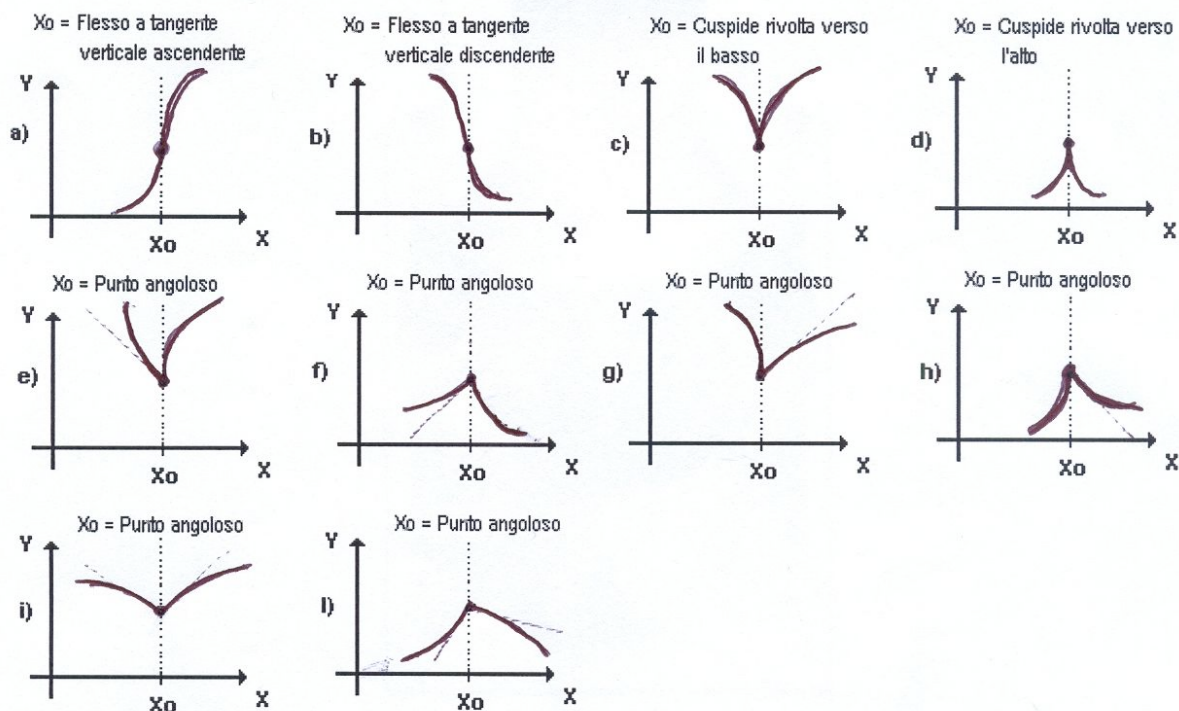
La ricerca di tali punti si effettua attraverso lo studio della derivata prima di $f(x)$. La sequenza operativa è:

1. si calcola la derivata di $f(x)$
2. si determinano gli eventuali punti in cui la $f'(x)$ non è definita (cuspidi, punti angolosi, flessi a tangente verticale):

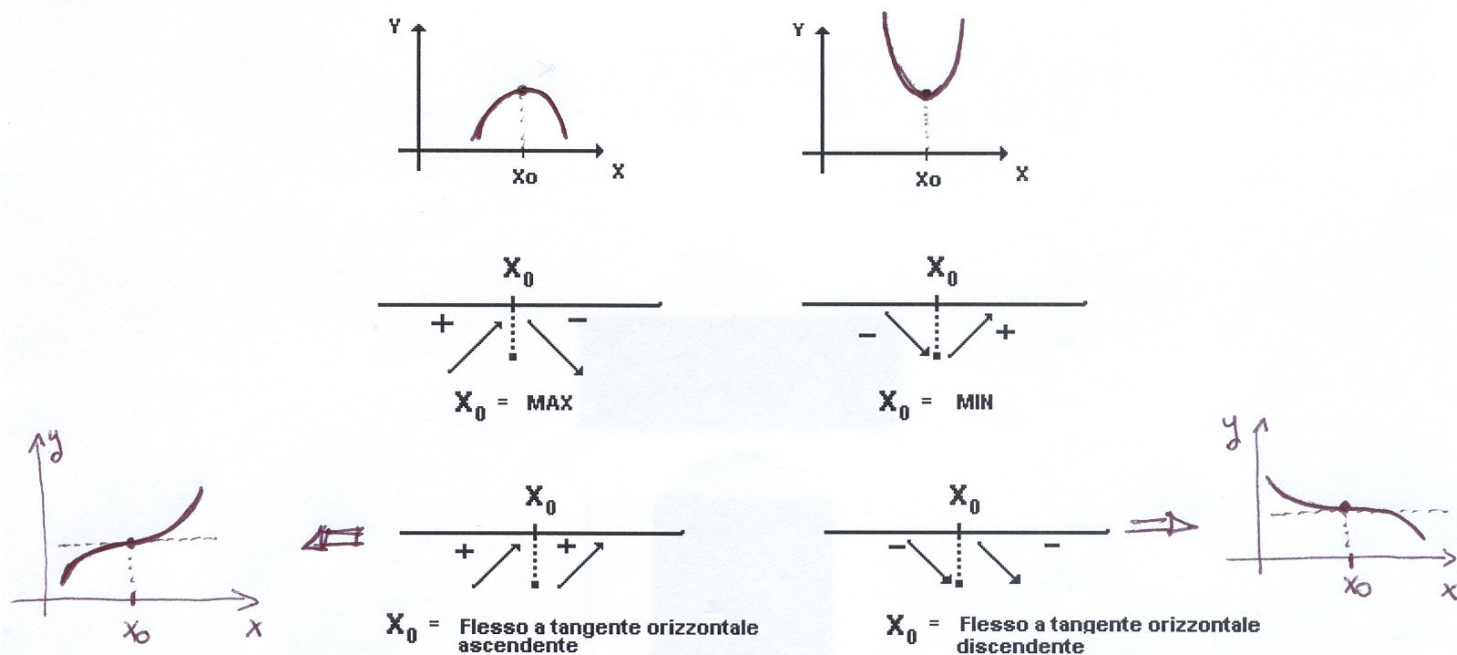
a) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = +\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = -\infty$ c) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \pm\infty$ d) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \mp\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) < 0$ f) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) > 0$ g) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) > 0$
 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = -\infty$ h) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) < 0$
 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = +\infty$

i) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) > 0$
 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) < 0$ l) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) < 0$
 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) > 0$



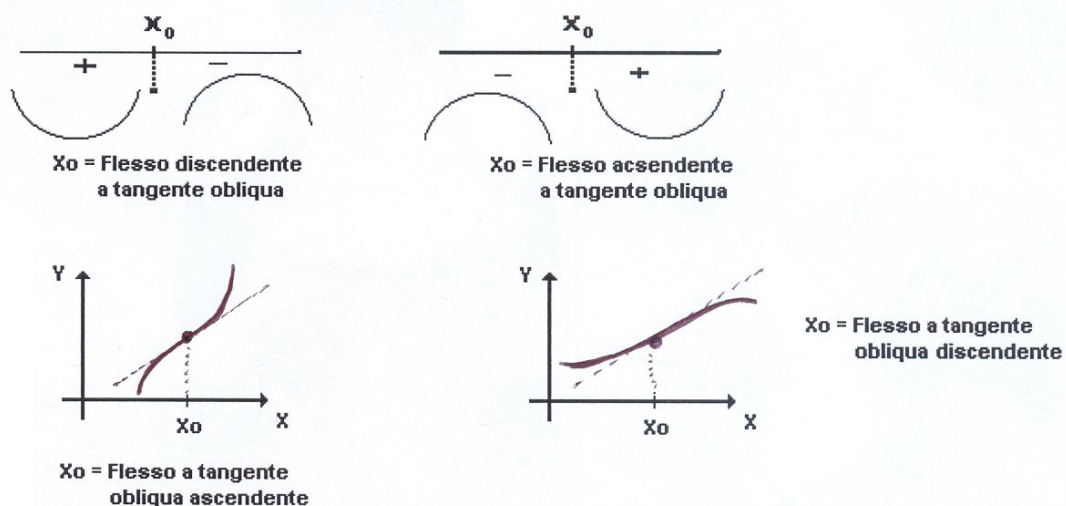
3. si impone $f'(x) > 0$ e si determinano gli intervalli in cui la $f(x)$ è crescente o decrescente:



9. CONCAVITA' E FLESSI OBLIQUI

La ricerca si effettua attraverso lo studio della derivata seconda $f''(x)$. La sequenza operativa è:

- si calcola la $f''(x)$
- si impone $f''(x) > 0$ e si determinano gli intervalli in cui la $f(x)$ volge la concavità verso l'alto o verso il basso:



10. GRAFICO DELLA FUNZIONE

Il grafico deve essere costruito gradualmente nel corso dello studio della $f(x)$. In questo modo in ogni fase dello studio si potranno confrontare i risultati del calcolo con quelli del grafico, scoprendo ogni eventuale incongruenza. Questo fatto costituisce un momento di verifica continuo, atto ad evidenziare gli errori ed a correggerli nel momento stesso in cui vengono commessi.