

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo
MATERIA: Matematica

FUNZIONI verso l'Esame di Stato



ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2002
Sessione ordinaria

- 9** In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}.$$

Tale luogo è costituito da:

- A un punto;
- B due punti;
- C infiniti punti;
- D nessun punto.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

soluzione

- 9** La condizione di realtà delle radici richiede che il campo di esistenza della funzione soddisfi il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Il campo di esistenza contiene solo -1 e 1 e pertanto il luogo è formato da due punti: la risposta esatta è quindi B.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO • 2003

4 Il dominio della funzione $f(x) = \ln\{\sqrt{x+1} - (x-1)\}$ è l'insieme degli x reali tali che:

- A) $-1 < x \leq 3$; B) $-1 \leq x < 3$; C) $0 < x \leq 3$; D) $0 \leq x < 3$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata.

soluzione

4 Il dominio della funzione $f(x) = \ln\{\sqrt{x+1} - (x-1)\}$ si ottiene ponendo l'argomento del logaritmo maggiore di zero, quindi $\sqrt{x+1} - (x-1) > 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} > (x-1)$. La disequazione è verificata per:

$$\begin{cases} x-1 < 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+1 > x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 1 \\ 0 < x < 3 \end{cases}$$

quindi le soluzioni sono: $-1 \leq x < 1 \cup 1 \leq x < 3 \Rightarrow -1 \leq x < 3$, ovvero la risposta B è esatta.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione straordinaria

3 Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln(1 - 2x + \sqrt{x})$.

soluzione

3 Considerata $f(x) = \ln(1 - 2x + \sqrt{x})$, si tratta di una funzione logaritmica. Per l'esistenza della radice, deve essere $x \geq 0$. Inoltre, la condizione di esistenza del logaritmo impone che il suo argomento sia positivo, ovvero che $1 - 2x + \sqrt{x} > 0$. È necessario quindi risolvere la disequazione irrazionale $\sqrt{x} > 2x - 1$. Essa è equivalente all'unione dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x > (2x - 1)^2 \end{cases}.$$

Risolvendoli, si trova:

$$\text{I sistema: } \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2};$$

$$\text{Il sistema: } \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x > 4x^2 + 1 - 4x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 5x + 1 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} < x < 1 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1.$$

L'insieme delle soluzioni della disequazione è l'unione dei due intervalli, perciò $0 \leq x < 1$.

Il campo di esistenza della funzione $f(x) = \ln(1 - 2x + \sqrt{x})$ è C.E.: $0 \leq x < 1$.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione suppletiva

9 Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln(2x - \sqrt{4x - 1})$.

soluzione

9 Il campo di esistenza della funzione $f(x) = \ln(2x - \sqrt{4x - 1})$ è l'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 4x - 1 \geq 0 & \rightarrow \text{condizione di esistenza della radice} \\ 2x - \sqrt{4x - 1} > 0 & \rightarrow \text{condizione di esistenza del logaritmo} \end{cases}$$

Dalla prima disequazione si ottiene $x \geq \frac{1}{4}$. Elevando al quadrato ambo i membri della seconda disequazione scritta nella forma: $2x > \sqrt{4x - 1}$, si ottiene $4x^2 > 4x - 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$.

Il dominio della funzione assegnata è pertanto: $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$.

SIMULAZIONE DI PROVA D'ESAME

CORSO DI ORDINAMENTO

7 Dimostra che la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

è biiettiva nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Determina il campo di esistenza, il codominio e l'espressione analitica della funzione inversa.

7 La funzione data è continua (il denominatore non ha radici reali ed è positivo $\forall x \in \mathbb{R}$) e derivabile su $\mathbb{R}$.
Dallo studio della sua derivata prima

$$f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$$

[soluzione](#)

otteniamo:

$$x < -\frac{1}{2} \rightarrow f'(x) > 0 \text{ e } f \text{ crescente;}$$

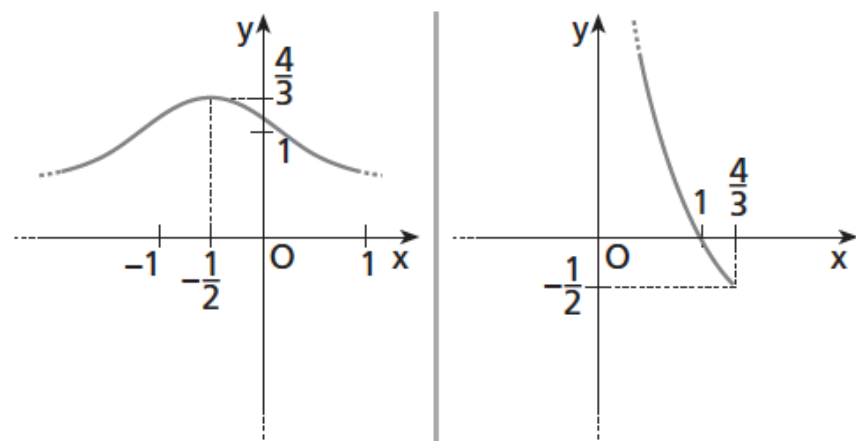
$$x > -\frac{1}{2} \rightarrow f'(x) < 0 \text{ e } f \text{ decrescente;}$$

$$x = -\frac{1}{2} \rightarrow f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ e } M\left(-\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right) \text{ max rel. e ass.}$$

Questo intervallo è anche il codominio della funzione inversa.

Poiché in tale intervallo la f è strettamente positiva e $\frac{4}{3}$ è il massimo assoluto, l'intervallo $\left]0; \frac{4}{3}\right]$ è il co-
dominio di f e quindi il dominio della sua inversa f^{-1} (figura 12.b).

Poiché in tale intervallo la f è strettamente positiva e $\frac{4}{3}$ è il massimo assoluto, l'intervallo $\left]0; \frac{4}{3}\right]$ è il co-
dominio di f e quindi il dominio della sua inversa f^{-1} (figura 12.b).



a. La funzione f . b. La funzione inversa di f . ◀ **Figura 12.**

Per determinare l'espressione analitica di f^{-1} poniamo $y=f(x)$ e risolviamo l'equazione ottenuta rispetto alla variabile x :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x^2 + x + 1} \\ x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[; y \in \left]0; \frac{4}{3}\right] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} yx^2 + yx + y - 1 = 0 \\ \dots; \dots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{y} - 3} \\ \dots; \dots \end{cases}.$$

Scegliamo la soluzione con «+», compatibile con la condizione $x \geq -\frac{1}{2}$ e scambiamo le due variabili per ottenere l'espressione analitica di f^{-1} :

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{x} - 3}.$$

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione suppletiva

- 8** È vero o falso che le due funzioni $\ln(x^2 - 4)$ e $\ln(x + 2) + \ln(x - 2)$ hanno lo stesso grafico? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.

soluzione

- 8** La funzione $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ è definita per $x^2 - 4 > 0$ cioè il suo campo di esistenza è $x < -2 \vee x > 2$. La funzione $g(x) = \ln(x + 2) + \ln(x - 2)$ è definita per $x + 2 > 0 \wedge x - 2 > 0$ ovvero per $x > 2$. Pertanto le funzioni f e g non possono avere lo stesso grafico perché hanno campi di esistenza differenti. Si osserva che nella parte comune dei rispettivi campi, cioè per $x > 2$, la funzione g può essere espressa, secondo le proprietà dei logaritmi, come $g(x) = \ln(x + 2)(x - 2) = \ln(x^2 - 4)$. Dunque le funzioni e i loro grafici non sono uguali nei loro campi di esistenza ma coincidono nell'intervallo $]2; +\infty[$.

SIMULAZIONE DI PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO

2 L'equazione $|x^2 - 1| + |4 - y^2| = 0$ nel piano cartesiano determina:

- a) due rami di iperbole.
- b) l'unione di un ramo di iperbole con un arco di circonferenza.
- c) due punti soltanto.
- d) l'insieme vuoto.
- e) quattro punti soltanto.

Soltanto una delle alternative proposte è giusta.
Rispondi dando adeguata motivazione.

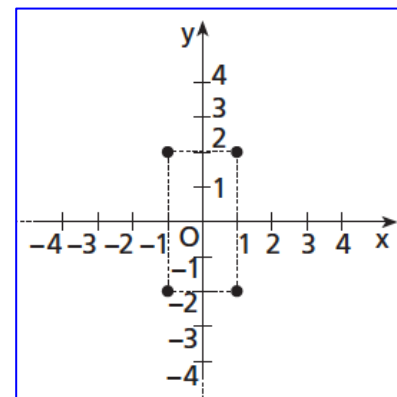
soluzione

2 La funzione valore assoluto per definizione è non negativa quindi l'equazione $|x^2 - 1| + |4 - y^2| = 0$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} |x^2 - 1| = 0 \\ |4 - y^2| = 0 \end{cases}$$

Le sue soluzioni sono:

$$\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 2 \end{cases} \quad \text{ossia i quattro punti } (1; \pm 2), (-1; \pm 2).$$



ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2002
Sessione ordinaria

5 Cosa si intende per *funzione periodica*? Qual è il *periodo* di $f(x) = -\operatorname{sen}\frac{\pi x}{3}$? Quale quello di $\operatorname{sen} 2x$?

soluzione

5 Una funzione reale di variabile reale $y=f(x)$ si dice periodica di periodo T , con $T>0$, se, per qualsiasi numero k intero, si ha: $f(x)=f(x+kT)$ per ogni x del dominio di f .

Si determina il periodo di $f(x) = -\operatorname{sen}\frac{\pi x}{3}$, considerando la definizione di periodo stesso:

$$-\operatorname{sen}\frac{\pi x}{3} = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{3} + \frac{\pi}{3}kT\right).$$

Poiché il periodo del seno è 2π , deve valere $\frac{\pi}{3}T = 2\pi$ cioè $T=6$.

Allo stesso modo si calcola il periodo di $\operatorname{sen} 2x$:

$$\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}(2x + 2kT).$$

Quindi $2T = 2\pi \rightarrow T = \pi$.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2004
Sessione straordinaria

3 Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln(1 - 2x + \sqrt{x})$.

3 Considerata $f(x) = \ln(1 - 2x + \sqrt{x})$, si tratta di una funzione logaritmica. Per l'esistenza della radice, deve essere $x \geq 0$. Inoltre, la condizione di esistenza del logaritmo impone che il suo argomento sia positivo, ovvero che $1 - 2x + \sqrt{x} > 0$. È necessario quindi risolvere la disequazione irrazionale $\sqrt{x} > 2x - 1$. Essa è equivalente all'unione dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x > (2x - 1)^2 \end{cases}.$$

Risolvendoli, si trova:

soluzione

$$\text{I sistema: } \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2};$$

$$\text{II sistema: } \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x > 4x^2 + 1 - 4x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 5x + 1 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} < x < 1 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1.$$

L'insieme delle soluzioni della disequazione è l'unione dei due intervalli, perciò $0 \leq x < 1$.

Il campo di esistenza della funzione $f(x) = \ln(1 - 2x + \sqrt{x})$ è C.E.: $0 \leq x < 1$.

SIMULAZIONE DELLA PROVA D'ESAME DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE P.N.I.

3 Per quali valori del parametro reale k l'equazione $|\ln x - 1| + |e^x + k| = 0$ ammette soluzioni reali?

- a) Per nessun valore di k .
- b) Soltanto per $k = -e$.
- c) Soltanto per $k = -e^2$.
- d) Per $k < 0$.
- e) Soltanto per $k = -e^e$.

Soltanto una delle alternative proposte è giusta.
Rispondi dando adeguata motivazione.

[soluzione](#)

3 La funzione valore assoluto per definizione è non negativa quindi l'equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x - 1 = 0, \text{ dove abbiamo esplicitato anche il campo di esistenza del logaritmo.} \\ e^x + k = 0 \end{cases}$$

Risolvendo otteniamo:

$$\begin{cases} x = e \\ e^e + k = 0 \end{cases} \rightarrow k = -e^e.$$

La risposta corretta è e).

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica

LIMITI verso l'Esame di Stato



ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2001
Sessione ordinaria

9

Il limite della funzione $\frac{\sin x - \cos x}{x}$, quando x tende a $+\infty$,

A) è uguale a 0;

B) è uguale ad 1;

C) è un valore diverso dai due precedenti;

D) non è determinato.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

risposta

9

Si tratta di calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x - \cos x}{x}$. La funzione al numeratore, $\sin x - \cos x$, non ammette limite per $x \rightarrow +\infty$ ma è comunque limitata se si tiene conto che $-1 \leq \sin x \leq 1$ e $-1 \leq \cos x \leq 1$. Si può scrivere:

$$-2 \leq \sin x - \cos x \leq 2 \text{ e pertanto } -\frac{2}{x} \leq \frac{\sin x - \cos x}{x} \leq \frac{2}{x}.$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{x} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$, per il teorema del confronto risulta $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x - \cos x}{x} = 0$ e la risposta esatta è A).

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione suppletiva

1 La funzione $f(x) = \frac{3x - 2 \sin x}{2x - 3 \sin x}$ è, per $x \rightarrow +\infty$, una forma indeterminata di tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Il limite della funzione, per $x \rightarrow +\infty$:

A) non esiste; B) è $\frac{3}{2}$; C) è $\frac{2}{3}$; D) è un valore diverso da $\frac{3}{2}$ e $\frac{2}{3}$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

risposta

1 La funzione $\sin x$ è limitata ($-1 \leq \sin x \leq 1$) quindi i contributi di $2 \sin x$ al numeratore e di $3 \sin x$ al denominatore sono trascurabili per $x \rightarrow +\infty$. Per ogni x positivo possiamo scrivere: $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$, e siccome $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\pm \frac{1}{x} \right) = 0$, per il teorema del confronto anche $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2 \sin x}{2x - 3 \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 - \frac{2 \sin x}{x} \right)}{x \left(2 - \frac{3 \sin x}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2 \sin x}{x}}{2 - \frac{3 \sin x}{x}} = \frac{3}{2}.$$

La risposta esatta è la B).

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione straordinaria

6 Dimostrare che il limite di $\cos x$, per x tendente a 0, è 1, esplicitando ciò che si ammette.

risposta

6 Considerata la funzione goniometrica $y = \cos x$, se si ammette che essa è continua su tutto il campo reale, allora vale la definizione di funzione continua e risulta:

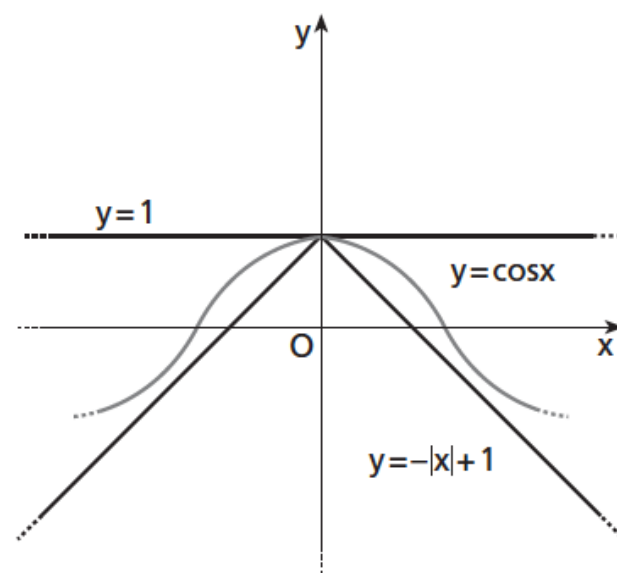
$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos(0) = 1.$$

Diversamente, si può dimostrare che $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, confrontando i grafici delle funzioni $y = -|x| + 1$, $y = \cos x$ e $y = 1$, rappresentati nella figura 8.

Da essa si osserva che è verificata la disuguaglianza:

$$-|x| + 1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ammesso che $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x| + 1) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, vale il teorema del confronto, pertanto $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.



▲ **Figura 8.**

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione suppletiva

4 Si consideri la seguente equazione in x :

$$(k-2)x^2 - (2k-1)x + (k+1) = 0, \text{ dove } k \text{ è un parametro reale diverso da } 2.$$

Indicate con x' e x'' le sue radici, calcolare i limiti di $x' + x''$ quando k tende a 2, a $+\infty$ e a $-\infty$.

risposta

4 Affinché l'equazione di secondo grado $(k-2)x^2 - (2k-1)x + (k+1) = 0$ ammetta soluzioni reali è necessario che il discriminante sia maggiore o uguale a zero:

$$\Delta = (2k-1)^2 - 4(k-2)(k+1) \geq 0 \quad \rightarrow \quad 4k^2 + 1 - 4k - 4k^2 + 4k + 8 \geq 0 \quad \rightarrow \quad 9 \geq 0.$$

Tale condizione è quindi verificata per qualsiasi $k \in \mathbb{R}$.

Poiché in una equazione di secondo grado, $ax^2 + bx + c = 0$, la somma delle radici vale $x' + x'' = -\frac{b}{a}$, risulta:

$$x' + x'' = \frac{2k-1}{k-2}, \quad k \neq 2.$$

I limiti richiesti valgono: $\lim_{k \rightarrow 2^+} \frac{2k-1}{k-2} = +\infty$, e quindi $\lim_{k \rightarrow 2} \frac{2k-1}{k-2}$ non esiste, $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{2k-1}{k-2} = 2$.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione suppletiva

5 Il limite della funzione $(1-x)^{\frac{1}{x}}$ per $x \rightarrow 0$:

- A) è uguale a 1;
- B) è uguale a $+\infty$;
- C) non esiste;
- D) è uguale a e ;
- E) è uguale a $\frac{1}{e}$,

con e la base dei logaritmi naturali.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornirne una spiegazione esauriente.

risposta

5 Considerato il limite $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$, si tratta di una forma indeterminata 1^∞ . Si pone $y = -\frac{1}{x}$, per cui $x = -\frac{1}{y}$ e per $x \rightarrow 0^\pm$ risulta $y \rightarrow \mp \infty$. Sostituendo nel limite precedente si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \mp \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow \mp \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y}.$$

Applicando il limite notevole $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, ne consegue che $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$.

La risposta esatta è pertanto la E).

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2001
Sessione ordinaria

- 1** Indicata con $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, si sa che $f(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow a$, essendo l ed a numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che $f(a) = l$ e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

risposta

- 1** Se esiste finito il limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, ciò è insufficiente per affermare che l'immagine della funzione nel punto $x = a$ vale $f(a) = l$. Infatti, nelle ipotesi, non è noto che il punto a appartenga al dominio della funzione. Tale punto potrebbe essere soltanto un punto di accumulazione del dominio.

È il caso, per esempio, della funzione $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. Essa non è definita nel punto $x = 2$ ma esiste il limite

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$. Il punto in questione è di discontinuità di terza specie.

Diversamente, qualora il valore appartenga al dominio della funzione f , può essere che $f(a) \neq l$.

Per esempio, la funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$ ammette limite $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ ma ciò è diverso dall'imma-

gine $f(2) = 1$.

Si tratta ancora di un punto di discontinuità di terza specie.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2002
Sessione ordinaria

6 Si consideri la funzione:

$$f(x) = (2x - 1)^7(4 - 2x)^5.$$

Stabilire se ammette massimo o minimo assoluti nell'intervallo $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

risposta

6 La funzione f , essendo riconducibile a un polinomio, è continua nel campo reale e in particolare nell'intervallo chiuso $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Vale allora il teorema di Weierstrass, per il quale la funzione ammette il massimo e il minimo assoluto.

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004**

- 5** Di una funzione $g(x)$, non costante, si sa che: $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$ e $g(2) = 4$. Trovate una espressione di $g(x)$.

risposta

- 5** Le funzioni che soddisfano le condizioni indicate dal quesito sono infinite ma tutte devono presentare un punto di discontinuità di terza specie in $x = 2$; un esempio di $g(x)$ è il seguente:

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{per } x \neq 2 \\ 4 & \text{per } x = 2 \end{cases}$$

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2006**

- 8 La funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo $I = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi \right]$, eppure non esiste alcun $x \in I$ tale che $f(x) = 0$. È così? Perché?

risposta

- 8 La funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ non è continua nell'intervallo I perché non è definita per $x = \frac{\pi}{2}$ (in cui presenta una discontinuità di seconda specie). Quindi non è applicabile il teorema di esistenza degli zeri, in cui un'ipotesi essenziale è la continuità della funzione in ogni punto dell'intervallo chiuso e limitato. Pertanto non c'è contraddizione.

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica

LIMITI SUCCESSIONI verso l'Esame di Stato



ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO • 2003

7 Considerati i primi n numeri naturali a partire da 1:

$$1, 2, 3, \dots, n-1, n,$$

moltiplicarli combinandoli due a due in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a:

$$\text{A) } \frac{1}{4} n^2(n+1)^2; \quad \text{B) } \frac{1}{3} n(n^2-1); \quad \text{C) } \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(3n+1); \quad \text{D) } \frac{1}{24} n(n^2-1)(3n+2).$$

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta operata.

soluzione

7 In generale risulta:

$$(1+2+\dots+n)^2 = 1^2+2^2+\dots+n^2+2(1\cdot 2+1\cdot 3+\dots+1\cdot n+2\cdot 3+\dots+2\cdot n+\dots+(n-1)\cdot n) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + 2\left(\sum_{k \neq b} bk\right) \Rightarrow \sum_{k \neq b} bk = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 - \sum_{k=1}^n k^2 \right].$$

Valgono le seguenti relazioni, che si dimostrano facilmente per induzione:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ e } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Si ha infine: $\sum_{k \neq b} bk = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right] = \frac{1}{24} n(n^2-1)(3n+2)$. La risposta D è quella esatta.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione straordinaria

8 Calcolare il valore della seguente somma:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots 100^2.$$

soluzione

8 Considerata la successione $a_n = n^2$, si dimostra per induzione che la somma dei primi n termini vale:

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Infatti, per $n=1$, $S_1 = 1^2 = 1$ e $\frac{1}{6}(1+1)(2+1) = 1$, pertanto l'espressione sopra è vera; ora, posto

$S_n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$, è necessario dimostrare che $S_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]$.

Considerati i primi termini della successione:

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = S_1 + 2 \cdot 2 = S_1 + 2^2$$

$$S_3 = S_2 + 3 \cdot 3 = S_2 + 3^2$$

...

ricaviamo che:

$$S_{n+1} = S_n + (n + 1)^2.$$

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n + 1)^2 = \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1) + (n + 1)^2 = \frac{1}{6} (n + 1)(2n^2 + n + 6n + 6) = \\ &= \frac{1}{6} (n + 1)(2n^2 + 3n + 4n + 6) = \frac{1}{6} (n + 1)[n(2n + 3) + 2(2n + 3)] = \frac{1}{6} (n + 1)(n + 2)(2n + 3) = \\ &= \frac{1}{6} (n + 1)(n + 2)[2(n + 1) + 1] \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

La somma $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots 100^2$ è uguale a S_{100} e quindi:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots 100^2 = \frac{1}{6} \cdot 100 \cdot 101 \cdot 201 = 338\,350.$$

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione suppletiva

2 Determinare il più grande valore di n per cui l'espressione numerica $\sum_{k=5}^n k$ non supera 10 000.

soluzione

2 L'espressione $\sum_{k=5}^n k$ rappresenta la somma di $(n-5)+1 = n-4$ termini consecutivi della progressione aritmetica di ragione 1: $a_n = a_{n-1} + 1$, con $a_0 = 0$. Quindi la somma $\sum_{k=5}^n k$ si può esprimere come la media aritmetica del primo e ultimo termine moltiplicata per il numero dei termini:

$$\sum_{k=5}^n k = \frac{a_5 + a_n}{2} (n-4) = \frac{5+n}{2} (n-4) = \frac{1}{2} (n^2 + n - 20).$$

Imponendo la condizione $\frac{1}{2} (n^2 + n - 20) \leq 10\,000$, si ottiene la disequazione di secondo grado $n^2 + n - 20\,020 \leq 0$ che in $\mathbb{R}$ è verificata per $\frac{-1 - \sqrt{80\,081}}{2} \leq n \leq \frac{-1 + \sqrt{80\,081}}{2}$. Poiché n è un numero naturale e $\frac{-1 + \sqrt{80\,081}}{2} \approx 140,993$, si conclude che il più grande valore di n che soddisfa il quesito è $n = 140$.

Infatti $\sum_{k=5}^{140} k = 9860$ e $\sum_{k=5}^{141} k = 10\,001$.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione straordinaria

- 5** Determinare il più grande valore dell'intero n per cui l'espressione $\sum_{k=0}^n 3^k$ non supera 10 000.

soluzione

- 5** L'espressione $\sum_{k=0}^n 3^k$ può essere scritta come $1 + \sum_{k=1}^n 3^k$. Il secondo addendo rappresenta la somma S_n dei primi n termini della progressione geometrica di ragione $q=3$, con primo termine $a_1=3$. Per il teorema sulla somma parziale di una progressione geometrica, tale somma vale $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ e quindi si può scrivere:

$$\sum_{k=0}^n 3^k = 1 + \sum_{k=1}^n 3^k = 1 + 3 \frac{3^n - 1}{3 - 1} = 1 + \frac{3}{2} \cdot 3^n - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2}.$$

Affinché tale sommatoria non superi 10 000 deve valere:

$$\frac{3}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \leq 10\,000 \quad \rightarrow \quad 3^{n+1} \leq 20\,001.$$

Passando ai logaritmi naturali otteniamo:

$$\ln 3^{n+1} \leq \ln 20\,001$$

$$(n+1)\ln 3 \leq \ln 20\,001$$

$$n+1 \leq \frac{\ln 20\,001}{\ln 3} \simeq 9,015$$

$$n \leq 9,015 - 1 \quad \rightarrow \quad n \leq 8,015$$

Essendo n un numero naturale, si conclude che il valore cercato è $n = 8$.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO • 2006

- 1** Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64^a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.

soluzione

- 1** Si tratta di calcolare la somma dei primi 64 termini della progressione geometrica $a_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, con ragione $q = 2$. Poiché la somma vale:

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

risulta:

$$s_{64} = 1 \cdot \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1 \approx 1,84 \cdot 10^{19},$$

dove s_{64} rappresenta il numero dei chicchi.

Si calcola il peso m , tenendo conto che 1000 chicchi pesano circa 38 g.

$$m \approx 1,84 \cdot 10^{16} \cdot 38 \text{ g} = 69,92 \cdot 10^{16} \text{ g} = 69,92 \cdot 10^{10} \text{ t}.$$

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2002
Sessione ordinaria

4 Calcolare:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

soluzione

4 Si tratta di calcolare il limite della successione $\frac{3^n}{n!}$. Per $n \rightarrow +\infty$, si ha la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Si scriva per esteso l'espressione $\frac{3^n}{n!}$:

$$\frac{3^n}{n!} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n} = \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{3}{n-1} \cdot \frac{3}{n}.$$

Si associno i fattori nel seguente modo:

$$\left(\frac{3}{1} \cdot \frac{3}{2} \right) \cdot \left(\frac{3}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{3}{n-1} \right) \cdot \left(\frac{3}{n} \right).$$

Per $n \rightarrow +\infty$, cioè per n grande, il primo fattore è costante, il secondo fattore è minore di 1. Si può scrivere allora la seguente disuguaglianza:

$$0 \leq \frac{3^n}{n!} = \left(\frac{9}{2} \right) \cdot \left(\frac{3}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{3}{n-1} \right) \cdot \left(\frac{3}{n} \right) \leq \frac{9}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{n} \rightarrow 0 \leq \frac{3^n}{n!} \leq \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{n}.$$

Poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{27}{2n} = 0$, per il teorema del confronto vale: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005
Sessione straordinaria

- 5** Enunciare il principio d'induzione matematica e applicarlo alla dimostrazione della seguente relazione:

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2,$$

la quale esprime una proprietà dei numeri naturali conosciuta come «*teorema di Nicomaco*» (da Nicomaco di Gerasa, filosofo e matematico ellenico, vissuto intorno all'anno 100 d.C.).

soluzione

- 5** Il principio d'induzione matematica si può formulare nel seguente modo. Data una proposizione $P(n)$ il cui enunciato dipenda da n , con $n \geq 1$ naturale, se:

- P è vera per $n = 1$;
- supposta P vera per n , è vera anche per $n + 1$,

allora essa è vera per qualsiasi $n \geq 1$.

Si consideri ora la relazione $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2$. Se $n = 1$, i due membri diventano rispettivamente $\sum_{i=1}^1 i^3 = 1$ e

$\left(\sum_{i=1}^1 i \right)^2 = 1$. Essi sono uguali e si deduce che la proposizione è vera per $n = 1$. Supposta vera la relazione

$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2$, bisogna dimostrare che vale $\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n+1} i \right)^2$.

Si consideri la somma $\sum_{i=1}^{n+1} i^3$. Essa può essere scritta come:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^n i^3 + (n+1)^3 = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2 + (n+1)^3.$$

Poiché $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ per il teorema sulla somma di n termini di una progressione aritmetica, risulta $\left(\sum_{i=1}^n i \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ e l'espressione sopra diventa:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2.$$

Applicando nuovamente il teorema poc'anzi ricordato, vale $\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2 = \left(\sum_{i=1}^{n+1} i \right)^2$, pertanto risulta:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n+1} i \right)^2, \text{ come si voleva dimostrare.}$$

In conclusione, la proposizione $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2$ è vera per il principio di induzione.

SIMULAZIONE DELLA PROVA D'ESAME DI LICEO SCIENTIFICO CORSO SPERIMENTALE P.N.I.

9 È data la seguente successione definita per ricorrenza:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 3n - 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- a) Dimostra che è crescente.
b) Dimostra che $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq n^2$.

soluzione

9 Determiniamo i primi elementi della successione:

n	1	2	3	4	5
a_n	1	3	8	16	27

- a) $a_{n+1} - a_n = 3n - 1 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, dunque la successione è crescente.
b) Dimostriamo per induzione.

$P(1) = \langle a_1 \geq 1^2 \rangle$ è vera perché $1 = 1^2$.

Per $n > 1$, supposta vera $P(n) = \langle a_n \geq n^2 \rangle$, abbiamo:

$$a_{n+1} = a_n + 3n - 1 \geq n^2 + 3n - 1 = n^2 + 2n + 1 - 1 + n - 1 = (n+1)^2 + n - 2 \geq (n+1)^2;$$

dunque $P(n+1)$ risulta vera e la tesi è dimostrata.

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica

DERIVATE

verso l'Esame di Stato



ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2002
Sessione ordinaria

8 Verificare che la funzione $3x + \ln x$ è strettamente crescente. Detta g la funzione inversa, calcolare $g'(3)$.

soluzione

8 La funzione $f(x) = 3x + \ln x$ è definita e continua nell'intervallo $]0; +\infty[$. La sua derivata prima vale $f'(x) = 3 + \frac{1}{x}$. Poiché $f'(x) > 0$ nel dominio, la funzione è strettamente crescente.

Pertanto si tratta di una funzione biunivoca per la quale esiste la funzione inversa g .

Per il teorema sulla derivata della funzione inversa risulta: $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ con $y_0 = f(x_0)$.

Se $y_0 = 3$, x_0 soddisfa l'equazione $3x_0 + \ln x_0 = 3$. Quest'ultima è un'equazione trascendente. Si osserva che $x_0 = 1$ è una sua soluzione che è unica per la stretta monotonia della funzione corrispondente. Si ricava

$$\text{che allora che } g'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{4}.$$

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2004
Sessione straordinaria

- 5** Si consideri la seguente implicazione: «Se la funzione reale di variabile reale $f(x)$ è derivabile nel punto a allora è continua in a ». Come noto, essa enuncia un importante teorema di analisi matematica. Enunciare le implicazioni inversa, contronominale e contraria dell'implicazione considerata e dire di ciascuna di esse se si tratta di un teorema. Quando non lo è fornire un esempio che chiarisca la situazione.

soluzione

- 5** Date due proposizioni p e q , si chiama implicazione il connettivo logico $p \rightarrow q$ che si esprime nella forma linguistica «se è vera l'ipotesi p allora è vera la tesi q ». Sono definite rispettivamente implicazione contraria, contronominale e inversa le implicazioni seguenti: non $p \rightarrow$ non q , non $q \rightarrow$ non p , $q \rightarrow p$. Considerata l'implicazione diretta «Se la funzione reale di variabile reale $f(x)$ è derivabile nel punto a allora è continua in a », l'implicazione contraria è: «Se la funzione reale di variabile reale $f(x)$ non è derivabile nel punto a allora non è continua in a ». Tale implicazione non è un teorema poiché la non derivabilità non implica la non continuità della funzione. Per esempio, considerata la funzione reale $f(x) = |x|$, essa non è derivabile

nel punto $x=0$ ma in esso è continua. Si enuncia l'implicazione contronominale della implicazione diretta nel seguente modo: «Se la funzione reale di variabile reale $f(x)$ non è continua nel punto a allora non è derivabile in a ». Si tratta in questo caso di un teorema: la continuità della funzione è una condizione necessaria per la derivabilità. In ultimo, l'implicazione inversa è: «Se la funzione reale di variabile reale $f(x)$ è continua nel punto a allora è derivabile in a ». Tale implicazione non è un teorema. Basti pensare nuovamente alla funzione $f(x) = |x|$: tale funzione è continua nel punto $x=0$ ma in esso non è derivabile.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005

2 Si dia una definizione di retta tangente ad una curva. Successivamente, si dimostri che la curva $y = x \operatorname{sen} x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $\operatorname{sen} x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $\operatorname{sen} x = -1$.

8 Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche $x = e^t + 2$ e $y = e^{-t} + 3$ nel suo punto di coordinate (3; 4).

soluzione

2 La retta tangente a una curva si può definire come la posizione limite della secante, cioè, detto P il punto di tangenza, $\lim_{Q \rightarrow P} r_{P,Q}$ (con Q appartenente alla curva) dove $r_{P,Q}$ è la retta passante per i punti P e Q . La generica retta tangente a una funzione $y = f(x)$ in un suo punto $(t, f(t))$ è $y - f(t) = f'(t)(x - t)$, quindi in questo caso, tenendo conto che $Dx \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x + x \cos x$, si ha: $y - t \operatorname{sen} t = (\operatorname{sen} t + t \cos t)(x - t)$. Se $\operatorname{sen} t = 1$ allora $\cos t = 0$, quindi, sostituendo, si ha, $y - t = x - t$, da cui $y = x$, come richiesto. Si ha $\cos t = 0$ anche se $\operatorname{sen} t = -1$, quindi, sostituendo, si trova $y + t = -x + t$, quindi $y = -x$.

8 Ricavando e^t dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ottiene $y = \frac{1}{x-2} + 3$. Questa equazione rappresenta effettivamente una curva che passa per il punto (3; 4).

Poiché $y'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$, allora il coefficiente angolare della retta tangente in (3; 4) è $-\frac{1}{(3-2)^2} = -1$. La retta tangente è quindi $y - 4 = -(x - 3)$, cioè $y = -x + 7$.

SIMULAZIONE DELLA PROVA D'ESAME DI LICEO SCIENTIFICO CORSO SPERIMENTALE P.N.I.

5 Sia data la funzione

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ (con A sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}$) derivabile $\forall x \in A$.

Discuti la verità della seguente proposizione dando esauriente motivazione e riferendo almeno un esempio:

«condizione necessaria e sufficiente affinché f sia crescente (decrescente) su A è che risulti

$f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\forall x \in A$ ».

soluzione

5

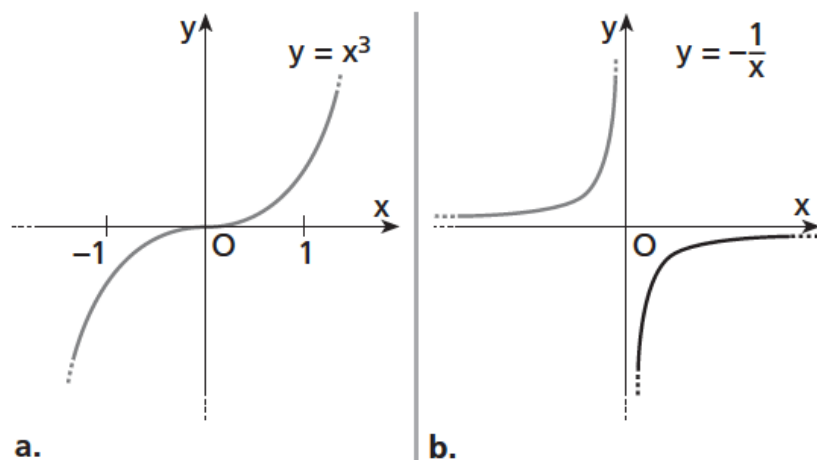
Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice crescente su A se $f(x_1) < f(x_2) \forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$.

La funzione f , derivabile in A , può essere crescente su A e avere derivata nulla in qualche punto. Per esempio la funzione $f(x) = x^3$, $x \in [-1; 1]$, è crescente sull'intervallo $[-1; 1]$ ma $f'(0) = 0$. Pertanto la condizione $f'(x) > 0 \forall x \in A$ non è necessaria.

Se la derivata di f è positiva $\forall x \in A$ può tuttavia accadere che $f(x_1) > f(x_2)$ per qualche $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$.

Per esempio la funzione $f(x) = -\frac{1}{x}$, $x \in (\mathbb{R} - \{0\})$, è derivabile in tutto il dominio però $f(-1) > f(1)$ pur essendo $-1 < 1$. Questa funzione è crescente nei due sottoinsiemi disgiunti $\mathbb{R}^-$ ed $\mathbb{R}^+$ ma non su $(\mathbb{R} - \{0\})$. Pertanto la condizione $f'(x) > 0 \forall x \in A$ non è sufficiente.

La proposizione è dunque falsa.



◀ **Figura 8.**

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione straordinaria

5 Dimostrare il seguente teorema: «Condizione sufficiente ma non necessaria affinché la funzione reale di variabile reale $f(x)$ sia continua nel punto a è che sia derivabile in a ».

5 Si vuole dimostrare che, data una funzione reale di variabile reale $f(x)$, se essa è derivabile nel punto $x=a$, allora è in esso continua. Per definizione di derivata di una funzione nel punto $x=a$, esiste ed è finito il limite del rapporto incrementale: $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{f(a+b) - f(a)}{b} = f'(a)$. Si consideri l'identità

$f(a+b) = f(a) + \frac{f(a+b) - f(a)}{b} \cdot b$. Si calcoli il limite per $b \rightarrow 0$ del secondo membro:

$$\lim_{b \rightarrow 0} \left[f(a) + \frac{f(a+b) - f(a)}{b} \cdot b \right] = \lim_{b \rightarrow 0} f(a) + \lim_{b \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+b) - f(a)}{b} \cdot b \right] = f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a).$$

Poiché i membri dell'identità sono uguali, si può dedurre che esiste il limite $\lim_{b \rightarrow 0} f(a+b)$ e vale:

$$\lim_{b \rightarrow 0} f(a+b) = f(a).$$

Posto $a+b=x$, se $b \rightarrow 0$ si ha che $x \rightarrow a$.

Sostituendo nella precedente espressione:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

pertanto la funzione è continua nel punto $x=a$.

In generale non vale il viceversa, cioè non è detto che una funzione continua in un punto è in esso derivabile. Per esempio, la funzione $f(x) = |x|$ è continua nel punto $x=0$ ma non è derivabile; infatti $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = |0| = 0$ ma $f'_-(0) = -1$, mentre $f'_+(0) = 1$.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO • 2004

- 6** Verificate che le due funzioni $f(x) = 3\log x$ e $g(x) = \log(2x)^3$ hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?

soluzione

- 6** In base alle proprietà dei logaritmi si può trasformare $g(x)$ come segue:

$$g(x) = \log(2x)^3 = 3\log(2x) = 3\log 2 + 3\log x = 3\log 2 + f(x)$$

Pertanto $g(x)$ e $f(x)$ differiscono solamente per la costante $3\log 2$ e avranno quindi la stessa derivata:

$$g'(x) = f'(x) = \frac{3}{x}.$$

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione straordinaria

7 Determinare il dominio di derivabilità della funzione $f(x) = |x^2 - 1|$

soluzione

7 La funzione $f(x) = |x^2 - 1|$ ha campo di esistenza reale e può essere scritta come:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{per } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ -x^2 + 1 & \text{per } -1 < x < 1 \end{cases}.$$

Essa è continua nei punti $x = -1$ e $x = 1$, poiché $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$, ed è quindi continua su tutto $\mathbb{R}$.

Si calcola ora la derivata di $f(x)$ per $x \neq \pm 1$ con le regole di derivazione:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{per } x < -1 \vee x > 1 \\ -2x & \text{per } -1 < x < 1 \end{cases}.$$

Si osserva che nei punti $x = -1$ e $x = 1$, i limiti sinistri e destri della funzione $f'(x)$ non coincidono. Infatti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) &= -2 & \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) &= 2; \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) &= -2 & \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) &= 2. \end{aligned}$$

Si può allora concludere che la funzione $f(x) = |x^2 - 1|$ è derivabile in $\mathbb{R}$ escluso nei punti $x = -1$ e $x = 1$.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO • 2005

- 10** Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$ è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

soluzione

- 10** Il campo di esistenza della funzione è $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Calcoliamo la derivata:

$$\begin{aligned} D \left[\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right] &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1 + \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}} \cdot \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{2(x+1)^2}{2(1+x^2)(x+1)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0. \end{aligned}$$

Avendo derivata nulla la funzione è costante, nei tratti in cui è definita. Per trovare le costanti basta sostituire un valore qualsiasi alla x per ognuno degli intervalli di esistenza, per esempio 0 e -2 .

$$\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg}(-1) = 0 - \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arctg}(-2) - \operatorname{arctg}(3) = -\frac{3}{4}\pi.$$

SIMULAZIONE DI PROVA D'ESAME

CORSO DI ORDINAMENTO

9 Dimostra la seguente proposizione:

«Se f è una funzione strettamente positiva, derivabile in tutto il suo dominio e tale che, $f'(x) = f(x) - [f(x)]^2$, allora la funzione reciproca $f_1(x) = \frac{1}{f(x)}$ soddisfa la seguente relazione:

$$f_1'(x) + f_1(x) = 1.$$

Se eliminiamo l'ipotesi «strettamente positiva» la proposizione è ancora vera?

soluzione

9 Dalle ipotesi su f deduciamo immediatamente che f_1 esiste per tutti i punti del dominio di f ; inoltre:

$$f_1'(x) = -\frac{1}{[f(x)]^2} f'(x).$$

Pertanto, poiché per ipotesi è $f'(x) = f(x) - [f(x)]^2$, si ha:

$$f_1'(x) + f_1(x) = -\frac{f(x) - [f(x)]^2}{[f(x)]^2} + \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{f(x)} + 1 + \frac{1}{f(x)} = 1 \quad \text{c.v.d.}$$

Se eliminiamo l'ipotesi «strettamente positiva» la proposizione non è vera perché la funzione f_1 non esiste per quegli x tali che $f(x) = 0$. Naturalmente la proposizione rimane valida se la funzione data è strettamente negativa.

SIMULAZIONE DI PROVA D'ESAME

CORSO DI ORDINAMENTO

9 Dimostra la seguente proposizione:

«Se f è una funzione strettamente positiva, derivabile in tutto il suo dominio e tale che, $f'(x) = f(x) - [f(x)]^2$, allora la funzione reciproca $f_1(x) = \frac{1}{f(x)}$ soddisfa la seguente relazione:

$$f_1'(x) + f_1(x) = 1.$$

Se eliminiamo l'ipotesi «strettamente positiva» la proposizione è ancora vera?

soluzione

9 Dalle ipotesi su f deduciamo immediatamente che f_1 esiste per tutti i punti del dominio di f ; inoltre:

$$f_1'(x) = -\frac{1}{[f(x)]^2} f'(x).$$

Pertanto, poiché per ipotesi è $f'(x) = f(x) - [f(x)]^2$, si ha:

$$f_1'(x) + f_1(x) = -\frac{f(x) - [f(x)]^2}{[f(x)]^2} + \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{f(x)} + 1 + \frac{1}{f(x)} = 1 \quad \text{c.v.d.}$$

Se eliminiamo l'ipotesi «strettamente positiva» la proposizione non è vera perché la funzione f_1 non esiste per quegli x tali che $f(x) = 0$. Naturalmente la proposizione rimane valida se la funzione data è strettamente negativa.

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica

Massimi, minimi, flessi

Verso l'Esame di Stato

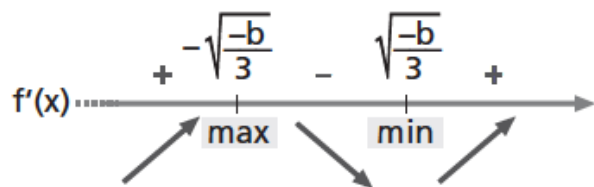


**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2003**

6 Si vuole che l'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ abbia tre radici reali. Qual è un possibile valore di b ?

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2003

- 6** L'equazione possiede tre radici reali se la funzione $x^3 + bx - 7 = 0$, continua e derivabile ovunque, interseca tre volte l'asse delle ascisse. La cubica deve possedere un massimo e un minimo relativo e questi devono avere segno discorde. La derivata prima $f'(x) = 3x^2 + b$ possiede due radici distinte, $x = \pm \sqrt{\frac{-b}{3}}$, se $b < 0$. $f'(x) = 3x^2 + b > 0$, se $x < -\sqrt{\frac{-b}{3}}$ o $x > \sqrt{\frac{-b}{3}}$. Lo schema in figura 8 mostra che per $x = -\sqrt{\frac{-b}{3}}$ si ha un massimo e per $x = \sqrt{\frac{-b}{3}}$ si ha un minimo.



◀ **Figura 8.**

$$f\left(\sqrt{\frac{-b}{3}}\right) < 0 \Rightarrow \frac{2b\sqrt{-b}}{3\sqrt{3}} - 7 < 0, \forall b < 0. \text{ Poiché } f(0) = -7, \text{ il minimo è sempre negativo.}$$

$$\text{Invece: } f\left(-\sqrt{\frac{-b}{3}}\right) > 0 \Rightarrow \frac{b\sqrt{-b}}{3\sqrt{3}} - \frac{b\sqrt{-b}}{\sqrt{3}} - 7 > 0 \Rightarrow -b^3 > \frac{49 \cdot 27}{4} \Rightarrow b < \sqrt[3]{\frac{-1323}{4}} \cong -6,92.$$

Quindi $b = -7$, per esempio soddisfa già la condizione richiesta.

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2004**

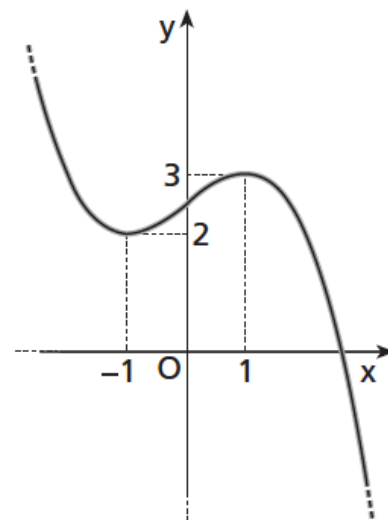
6 Dare un esempio di funzione $f(x)$ con un massimo relativo in $(1, 3)$ e un minimo relativo in $(-1, 2)$.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2004

6 Si consideri una cubica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. La derivata è $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. La derivata si deve annullare per $x = \pm 1$. Imponendo il passaggio per i punti $(-1; 2)$ e $(1; 3)$, si ottiene:

$$\begin{cases} f'(-1) = 3a - 2b + c = 0 \\ f'(1) = 3a + 2b + c = 0 \\ f(-1) = -a + b - c + d = 2 \\ f(1) = a + b + c + d = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 0 \\ c = \frac{3}{4} \\ d = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}.$$

La funzione è rappresentata in figura 12.



► **Figura 12.**

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2006**

- 10** La funzione $f(x) = a \sin x + b \cos x$ ha un estremo relativo per $x = \frac{4\pi}{3}$ ed è $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$. Si trovino a e b e si dica qual è il periodo di $f(x)$.

10 La derivata prima della funzione è:

$$f'(x) = a \cos x - b \sin x$$

che deve annullarsi per $x = \frac{4}{3}\pi$ per la condizione necessaria di estremo relativo, per cui:

$$f'\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0.$$

Inoltre per $x = \frac{2}{3}\pi$ la funzione deve valere 1:

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b = 1.$$

Mettendo a sistema entrambe le condizioni trovate, risulta:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3}b \\ 3b - b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 1 \end{cases}$$

La funzione diventa quindi:

$$f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x.$$

Con il metodo dell'angolo aggiunto, si può scrivere:

$$f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

che ha come periodo $T = 2\pi$.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione suppletiva

6 Fornire un esempio di funzione reale di variabile reale $f(x)$ avente le seguenti caratteristiche:

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 0, \quad f''(1) < 0.$$

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione suppletiva

- 6** Le caratteristiche $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$, $f''(1) < 0$ sono condizioni sufficienti per affermare che la funzione f ha un massimo nel punto $x = 1$ per il teorema delle derivate successive. Un esempio di funzione con tale proprietà è una parabola di vertice $V(1; 1)$ e concavità rivolta verso il basso. Imponiamo all'equazione di una generica parabola $f(x) = ax^2 + bx + c$ tali condizioni:

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f'(1) = 0 \\ f''(1) < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 2a + b = 0 \\ 2a < 0 \end{cases}.$$

Posto, per esempio, $a = -1$, il sistema diventa:

$$\begin{cases} c = 0 \\ b = 2 \\ a = -1 \end{cases}.$$

La funzione cercata ha equazione $f(x) = -x^2 + 2x$.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2001
Sessione ordinaria

8 Considerata la funzione:

$$f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x,$$

dove a è un parametro reale non nullo, determinare i valori di a per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2001
Sessione ordinaria

- 8** La funzione polinomiale $f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x$ è continua e derivabile nel campo reale. Essa ha degli estremanti solo se la sua derivata prima, $f'(x) = 3ax^2 + 4ax - 3$, non ha segno costante. Ciò avviene se il discriminante di $f'(x)$ risulta strettamente maggiore di zero, cioè:

$$\frac{\Delta}{4} = 4a^2 + 9a > 0 \rightarrow a < -\frac{9}{4} \vee a > 0.$$

Si può concludere che per $a < -\frac{9}{4} \vee a > 0$ la funzione f ha estremanti, mentre per $-\frac{9}{4} \leq a < 0$ non ne ha.

Si noti che nel caso limite $a = -\frac{9}{4}$ la derivata prima diventa:

$$f'(x) = \frac{27}{4}x^2 - 9x - 3 = -3\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

Essa si annulla nel punto $x = -\frac{3}{2}$ ed è negativa per ogni altro valore di x . In tal caso la funzione non ha estremanti e ha in $x = -\frac{3}{2}$ un punto di flesso orizzontale.

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica

Problemi di massimo e minimo

Verso l'Esame di Stato



ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2001
Sessione ordinaria

7 Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha:

- A) area massima e perimetro massimo;
- B) area massima e perimetro minimo;
- C) area minima e perimetro massimo;
- D) area minima e perimetro minimo.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2001
Sessione ordinaria

7 Osservando la figura 10 si nota che un triangolo inscritto nella semicirconferenza ha area massima quando è massima l'altezza CH . Ciò si realizza quando quest'ultima coincide con il raggio r della semicirconferenza e il triangolo è isoscele (ABC').

Posto $x = \widehat{BAC}$, con $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, si trova il perimetro $f(x)$ del triangolo ABC :

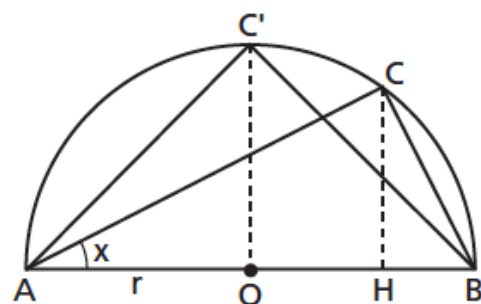
$$f(x) = 2r + 2r \cos x + 2r \sin x.$$

Si valutano i massimi e i minimi della funzione discutendo il segno della derivata prima $f'(x)$:

$$f'(x) = 2r(-\sin x + \cos x) > 0.$$

Risolvendo la disequazione risulta che f è crescente per $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$, decrescente per $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ e ha massimo nel punto $x = \frac{\pi}{4}$.

Se $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$; il triangolo ABC è isoscele. Pertanto il triangolo isoscele inscritto ha area e perimetro massimo e la risposta esatta è A).



▲ **Figura 10.**

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005**

- 2** Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 *litri*, quali devono essere le sue dimensioni in *centimetri*, affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO 2005

2 Detti V il volume del cilindro, r il suo raggio di base e h la sua altezza si sa che $V = \pi r^2 h$, quindi $h = \frac{V}{\pi r^2}$. La superficie $S(r)$ risulta invece

$$2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = 2\left(\frac{V}{r} + \pi r^2\right).$$

Affinché sia minima la quantità di materiale utilizzato per realizzare la lattina, deve essere minima la superficie.

Calcoliamo la derivata prima di $S(r)$. Si ha

$D(S(r)) = 2\left(2\pi r - \frac{V}{r^2}\right)$ che si annulla per $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Dal segno della derivata si deduce che è un punto di minimo. Sostituendo $V = 400 \text{ cm}^3$ si ottiene $r \simeq 4 \text{ cm}$ e quindi $h \simeq 8 \text{ cm}$.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO • 2005

- 4** Si dimostri che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO 2005

- 4** Detti a e b i lati del rettangolo e $2p$ il perimetro, si ha che $b = p - a$, quindi l'area $A(a)$ del rettangolo è data da $a(p - a) = ap - a^2$. La funzione $A(a)$ è quindi rappresentata da un arco di parabola. Il coefficiente del termine di secondo grado è negativo, e quindi ha un massimo in $p/2$, da cui si ricava $b = a$. Il rettangolo richiesto è quindi il quadrato.

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2006**

- 3** Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di 50 cm^2 , margini superiore e inferiore di 4 cm e margini laterali di 2 cm. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO • 2006

3 Nella figura 13 è rappresentato il foglio di carta $ABCD$ con area di stampa $A'B'C'D'$.

Posto $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$, risulta:

$$\overline{A'B'} = x - 8,$$

$$\overline{B'C'} = y - 4.$$

Imponiamo che l'area di stampa sia 50 cm^2 ; risulta allora:

$$(x-8)(y-4) = 50 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4x+18}{x-8}.$$

Pertanto la superficie del foglio vale:

$$\text{Area}(ABCD) = xy = \frac{4x^2 + 18x}{x-8}.$$

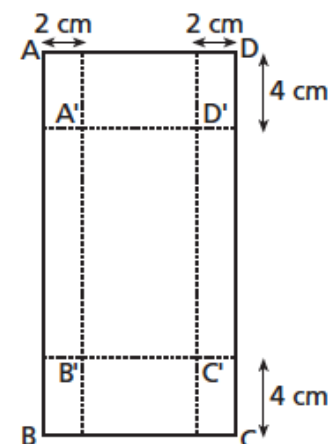
Tale area è funzione di x . La funzione da minimizzare è quindi:

$$A(x) = \frac{4x^2 + 18x}{x-8}.$$

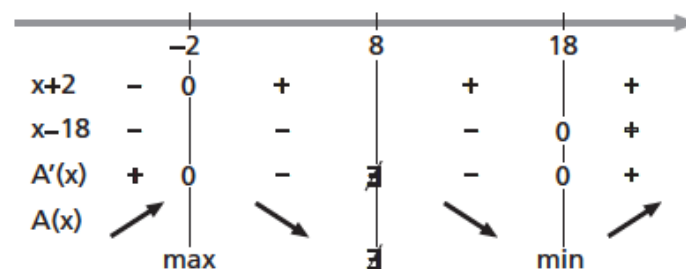
Calcoliamo la derivata prima e studiamo il suo segno.

$$A'(x) = \frac{(18+8x)(x-8) - (18+4x^2)}{(x-8)^2} = \frac{4(x+2)(x-18)}{(x-8)^2}.$$

Dalla figura 14, risulta che l'area è minima per $x=18$ e in tal caso vale $y=9$.
Il foglio di carta di superficie minima ha dimensioni 18 cm e 9 cm.



► **Figura 13.**



▲ **Figura 14.**

Studio funzioni

Verso l'Esame di Stato

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica



ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2001
Sessione ordinaria

■ **PROBLEMA 1**

Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali x, y :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a},$$

dove a è un parametro reale positivo.

- a) Esprimere y in funzione di x e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
- b) Determinare per quali valori di a la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta t di equazione $x + y = 4$.
- c) Scrivere l'equazione della circonferenza k che ha il centro nel punto di coordinate $(1; 1)$ e intercetta sulla retta t una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.
- d) Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla retta t .
- e) Determinare per quale valore del parametro a il grafico, di cui al precedente punto a), risulta tangente alla circonferenza k .

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME

CORSO DI ORDINAMENTO • 2001

Sessione ordinaria

PROBLEMA 1

a) Posto $x \neq 0$ e $y \neq 0$, la relazione $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$ diventa

$ay + ax = xy$ da cui $y = \frac{ax}{x-a}$. La funzione da studiare è

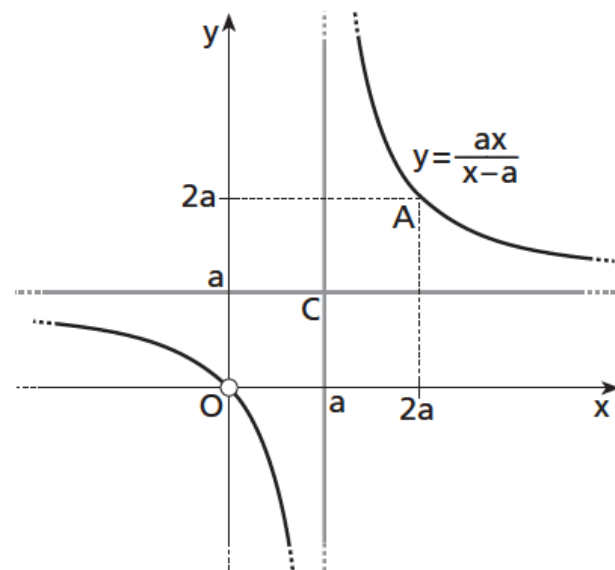
$y = \frac{ax}{x-a}$ con dominio $x \neq 0 \wedge x \neq a$. Si tratta di una funzione

omografica il cui grafico è un'iperbole equilatera con asintoti $x = a$ e $y = a$, centro di simmetria $C(a; a)$ e vertici $A(2a; 2a)$,

$O(0; 0)$. In quest'ultimo punto la funzione non è però definita e

presenta una discontinuità di terza specie con $x \rightarrow 0 \frac{ax}{x-a}$. Si

può tracciare il grafico (figura 1) nel quale il valore di a è stato scelto in maniera arbitraria.



▲ Figura 1.

f ax

b) Si valuta la posizione reciproca tra la funzione e la retta discutendo il sistema $\begin{cases} y = \frac{ax}{x-a} \\ x + y = 4 \end{cases}$.

L'equazione risolvente è $x^2 - 4x + 4a = 0$; essa ammette soluzioni reali se e solo se il discriminante è positivo o nullo. Poiché $\frac{\Delta}{4} = 4 - 4a$, risulta $4 - 4a \geq 0$ per $a \leq 1$.

Pertanto la retta t è secante per $a < 1$, è tangente per $a = 1$.

c) La circonferenza k ha centro $C'(1; 1)$ noto e raggio incognito. Si tracci la perpendicolare $C'H$ alla retta t (figura 2). Per un teorema della geometria euclidea, tale perpendicolare divide a metà la corda BD che la circonferenza stacca sulla retta. La distanza del punto $C'(1; 1)$ dalla retta $x + y = 4$ vale:

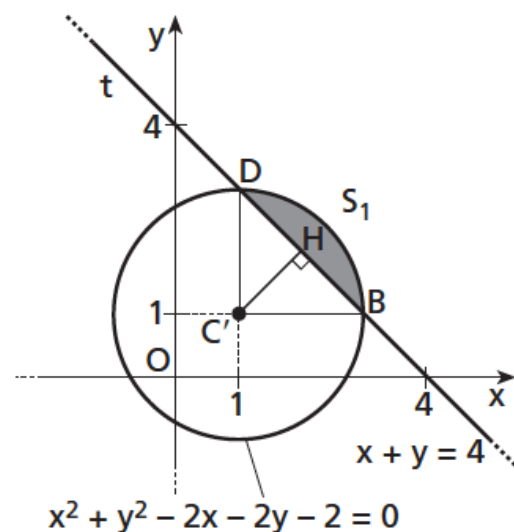
$$\overline{C'H} = \frac{|1 + 1 - 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \sqrt{2},$$

$$\text{mentre } \overline{HB} = \frac{\overline{BD}}{2} \rightarrow \overline{HB} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo $BC'H$, risulta $\overline{C'B} = 2$. Esso è il raggio cercato.

L'equazione della circonferenza k è:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4 \text{ ovvero } x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0.$$



▲ **Figura 2.**

d) Ponendo a sistema l'equazione della circonferenza k e la retta t si trovano le coordinate dei punti B e D :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0 \\ x + y = 4 \end{cases} \rightarrow B \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} ; D \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Valutando le coordinate dei punti C' , B e D si osserva che i segmenti $C'B$ e $C'D$ sono rispettivamente paralleli agli assi cartesiani e quindi tra loro perpendicolari. Pertanto il settore circolare delimitato dall'angolo $\widehat{BC'D}$ è la quarta parte del cerchio corrispondente alla circonferenza. Indicata con S_1 l'area del minore dei segmenti circolari in cui la retta t divide la circonferenza k , essa si ottiene per differenza

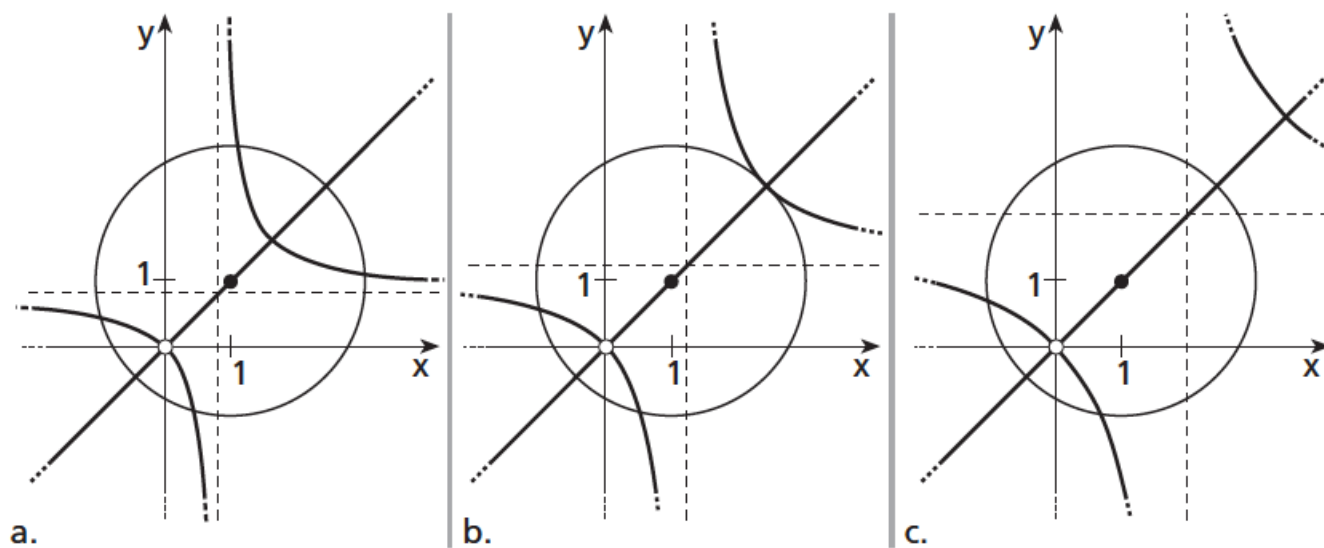
tra l'area del settore e l'area del triangolo $C'BD$.

$$S_1 = \frac{\pi(2)^2}{4} - \frac{2 \cdot 2}{2} = \pi - 2.$$

L'area S_2 del restante segmento circolare si ricava per differenza tra l'area del cerchio e S_1 :

$$S_2 = \pi(2)^2 - (\pi - 2) = 3\pi + 2.$$

e) La risoluzione è compiuta per via geometrica poiché la discussione algebrica della tangenza tra circonferenza e iperbole porterebbe a un sistema di quarto grado difficilmente risolvibile per via elementare. Nella figura 3 sono rappresentate le possibili posizioni dell'iperbole parametrica rispetto alla circonferenza.



◀ Figura 3.

Si osserva che entrambe le curve sono simmetriche rispetto alla bisettrice del I e III quadrante: nella circonferenza il centro si trova sulla bisettrice che è pertanto diametro e quindi asse di simmetria della circonferenza; nell'iperbole la retta $x=y$ costituisce l'asse trasverso dell'iperbole stessa e pertanto è asse di simmetria. Ne consegue che i punti di intersezione tra le due curve sono a due a due simmetrici rispetto all'asse di simmetria $y=x$. Nel caso della tangenza due di questi punti devono coincidere e quindi trovarsi sulla bisettrice. Si trova il punto di tangenza T (figura 3b) risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0 \\ y = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ y = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \text{ (non accettabile)} \vee \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ y = 1 + \sqrt{2} \end{cases}.$$

Si impone all'iperbole $x = \frac{ax}{x-a}$ il passaggio per il punto $T(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$:

$$1 + \sqrt{2} = \frac{a(1 + \sqrt{2})}{1 + \sqrt{2} - a} \rightarrow (1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2} - a) = a(1 + \sqrt{2}) \rightarrow a = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

L'iperbole è tangente alla circonferenza k per $a = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO • 2003

PROBLEMA 2

È assegnata la funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+m+|m|}$, dove m è un parametro reale.

- a) Determinare il suo dominio di derivabilità.
- b) Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x=1$.
- c) Studiare la funzione $f(x)$ corrispondente al valore di m così trovato e disegnarne il grafico γ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver stabilito quanti sono esattamente i flessi di γ ed aver fornito una spiegazione esauriente di ciò.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO • 2003

PROBLEMA 2

a) La funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x^2 + m + |m|}$, dove m è un parametro reale si può scrivere come:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x^2 + 2m}, & \text{per } m > 0 \\ \frac{2x+1}{x^2}, & \text{per } m \leq 0 \end{cases}, f(x) \text{ è derivabile } \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & \text{per } m > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, & \text{per } m \leq 0 \end{cases}.$$

b) Per $m \leq 0$ risulta: $f'(x) = \frac{2x^2 - 2x(2x+1)}{x^4} \Rightarrow f'(1) = -4 \neq 0$.

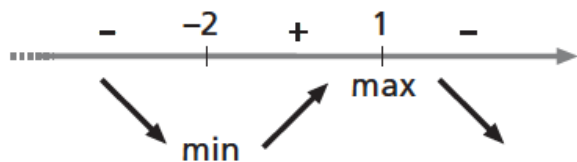
Per $m > 0$ risulta: $f'(x) = \frac{2(x^2 + 2m) - 2x(2x+1)}{(x^2 + 2m)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{4(m-1)}{(1+2m)^2} = 0 \Rightarrow m = 1$.

c) La funzione da studiare è: $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Le intersezioni con gli assi sono: $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ con l'asse delle ascisse, $B\left(0; \frac{1}{2}\right)$ con l'asse delle ordinate.

Si ha inoltre: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$. Il grafico ha l'asintoto orizzontale $y=0$.

La derivata prima risulta: $f'(x) = \frac{2(x^2+2) - (2x+1) \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-2(x^2+x-2)}{(x^2+2)^2} = \frac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$,

$f'(x) \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 1$, quindi (vedi anche figura 5) si ha un minimo nel punto $m\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ ed un massimo nel punto $M(1; 1)$.

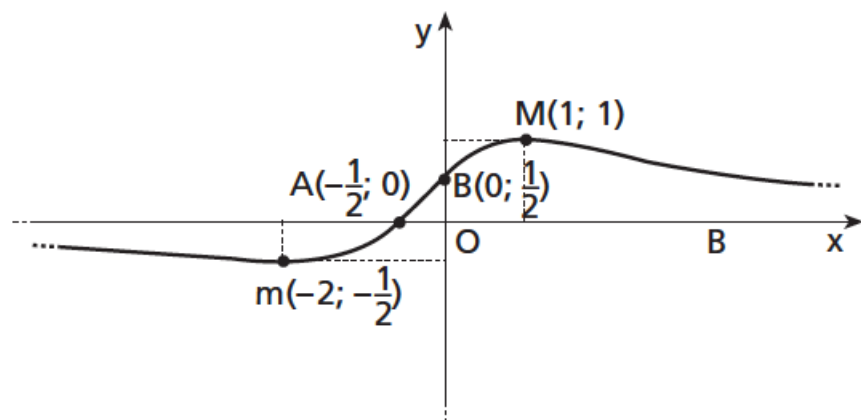


◀ **Figura 5.**

Studiando la derivata seconda si ottiene:

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{(2x+1)(x^2+2) - 2(x^2+x-2) \cdot 2x}{(x^2+2)^3} = \frac{2(2x^3+3x^2-12x-2)}{(x^2+2)^3},$$

$f''(x) \geq 0 \Rightarrow 2x^3 + 3x^2 - 12x - 2 \geq 0$, l'equazione non si scompone con la regola di Ruffini, ma si osserva che, per il teorema fondamentale dell'algebra, ha al massimo tre radici, quindi tre flessi. I risultati ottenuti in precedenza per i limiti negli estremi del dominio ed i valori dei punti di massimo e di minimo permettono di determinare che i flessi devono essere almeno tre. In definitiva i flessi sono proprio tre. In conclusione si può tracciare il grafico della funzione (figura 6).



◀ **Figura 6.**

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione straordinaria

PROBLEMA 2

In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{1 + a \sin x}{\cos x},$$

dove a è un parametro reale.

- a) Dimostrare che si tratta di curve periodiche con periodo 2π , che hanno in comune infiniti punti dei quali si chiedono le coordinate.
- b) Tra le curve assegnate determinare quelle che hanno come tangente orizzontale la retta di equazione $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- c) Controllato che due curve soddisfano alla condizione precedente, dimostrare che sono l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse y e disegnarle nell'intervallo $-\pi \leq x \leq \pi$, dopo aver spiegato, in particolare, perché nessuna di esse presenta punti di flesso.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione straordinaria

PROBLEMA 2

a) Posto $f_a(x) = \frac{1 + a \sin x}{\cos x}$, essa può essere scritta come $f_a(x) = \frac{1}{\cos x} + a \tan x$. La periodicità della funzione coseno è 2π , cosicché $\frac{1}{\cos x}$ è periodica di periodo $T_1 = 2\pi$; $\tan x$ ha periodicità π per cui il periodo di $a \tan x$ è $T_2 = \pi$. La funzione f_a è somma di funzioni periodiche: essa è allora periodica di periodo $T = \text{m.c.m.}(T_1, T_2)$ cioè $T = 2\pi$.

Presi due valori arbitrari di a , a_1 e a_2 con $a_1 \neq a_2$, e le corrispondenti funzioni f_{a_1} e f_{a_2} , i loro punti comuni soddisfano l'equazione $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x)$, cioè:

$$\frac{1}{\cos x} + a_1 \tan x = \frac{1}{\cos x} + a_2 \tan x \quad \rightarrow \quad (a_1 - a_2) \tan x = 0 \quad \rightarrow \quad \tan x = 0 \quad \rightarrow \quad x = k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Le coordinate di tali punti sono: $(2k\pi; 1)$ e $((2k+1)\pi; -1)$.

Vista l'arbitrarietà di a_1 e a_2 si può concludere che le curve $f_a(x) = \frac{1 + a \sin x}{\cos x}$ hanno in comune infiniti punti di coordinate $(2k\pi; 1)$ e $((2k+1)\pi; -1)$.

b) La funzione $y = \frac{1 + a \operatorname{sen} x}{\cos x}$ ha campo di esistenza C.E.: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ e derivata prima:

$$y' = \frac{a \cos^2 x + \operatorname{sen} x (1 + a \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x + a}{\cos^2 x}. \text{ La curva ha tangente orizzontale nei punti in cui la}$$

derivata prima si annulla, ossia per $\operatorname{sen} x = -a$. Condizione necessaria per l'esistenza di tali punti è quindi: $|a| < 1$. La loro ordinata si trova sostituendo $\operatorname{sen} x = -a$ nell'equazione della funzione e perciò

vale: $y = \frac{1 - a^2}{\pm \sqrt{1 - a^2}}$. Imponendo per ipotesi $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e tenendo conto che $|a| < 1$, risulta:

$$\frac{1 - a^2}{\sqrt{1 - a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad \sqrt{1 - a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad 1 - a^2 = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad a = \pm \frac{1}{2}.$$

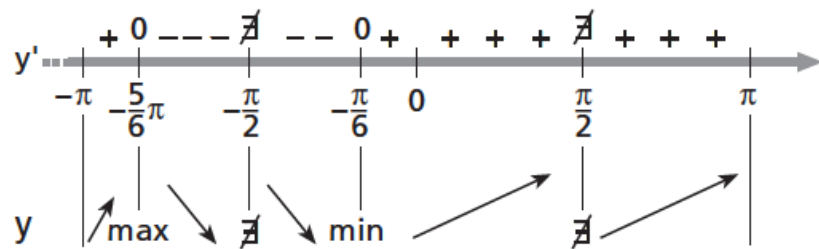
Tali valori sono entrambi accettabili; pertanto le curve che hanno come tangente orizzontale la retta di

equazione $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sono: $y = \frac{1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x}{\cos x}$, cioè $y = \frac{2 + \operatorname{sen} x}{2 \cos x}$, e $y = \frac{1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x}{\cos x}$, ovvero

$$y = \frac{2 - \operatorname{sen} x}{2 \cos x}.$$

c) Considerata la funzione $y = \frac{2 + \sin x}{2 \cos x}$, si applica la simmetria rispetto all'asse y : $\begin{cases} X = -x \\ Y = y \end{cases}$. La funzione trasformata è $Y = \frac{2 + \sin(-X)}{2 \cos(-X)}$ ovvero $Y = \frac{2 - \sin X}{2 \cos X}$. Essa coincide con la funzione $y = \frac{2 - \sin x}{2 \cos x}$ nello stesso sistema di assi cartesiani. Pertanto si conclude che le funzioni $y = \frac{2 + \sin x}{2 \cos x}$ e $y = \frac{2 - \sin x}{2 \cos x}$ sono l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse delle ordinate.

Per rappresentare i loro grafici nell'intervallo $-\pi \leq x \leq \pi$, è sufficiente compiere lo studio di una sola di esse, per esempio $y = \frac{2 + \sin x}{2 \cos x}$. Il suo campo di esistenza è C.E.: $x \neq \pm \frac{\pi}{2}$. Essa non è né pari né dispari. Non ha intersezioni con l'asse x poiché il numeratore della funzione, $2 + \sin x$, non si può mai annullare ed è sempre positivo; l'intersezione con l'asse y è $(0; 1)$. La funzione è positiva per $\cos x > 0$ cioè per $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; è negativa per $-\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{2} < x \leq \pi$. I limiti agli estremi del campo di esistenza sono: $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \frac{2 + \sin x}{2 \cos x} = \pm \infty$ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2 + \sin x}{2 \cos x} = \mp \infty$; pertanto la curva ha asintoti verticali $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$. Nei punti $x = -\pi$ e $x = \pi$ il grafico ha coordinate $A(-\pi; -1)$ e $B(\pi; -1)$. La funzione derivata è $y' = \frac{2 \sin x + 1}{2 \cos^2 x}$. Essa si annulla nei punti $x = -\frac{5}{6}\pi$ e $x = -\frac{\pi}{6}$. Nella figura 3 è riportata la tabella del suo segno.



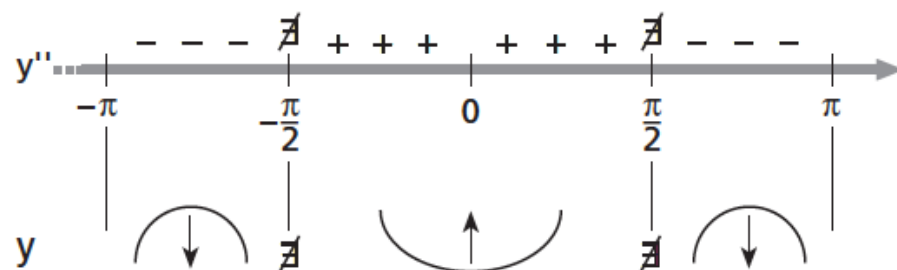
◀ Figura 3.

La funzione y ha un massimo nel punto $x = -\frac{5}{6}\pi$ e un minimo per $x = -\frac{\pi}{6}$. Le corrispondenti coordinate sul grafico valgono $M\left(-\frac{5}{6}\pi; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $N\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

La derivata seconda della funzione è

$$y'' = \frac{\sin^2 x + \sin x + 1}{\cos^3 x}.$$

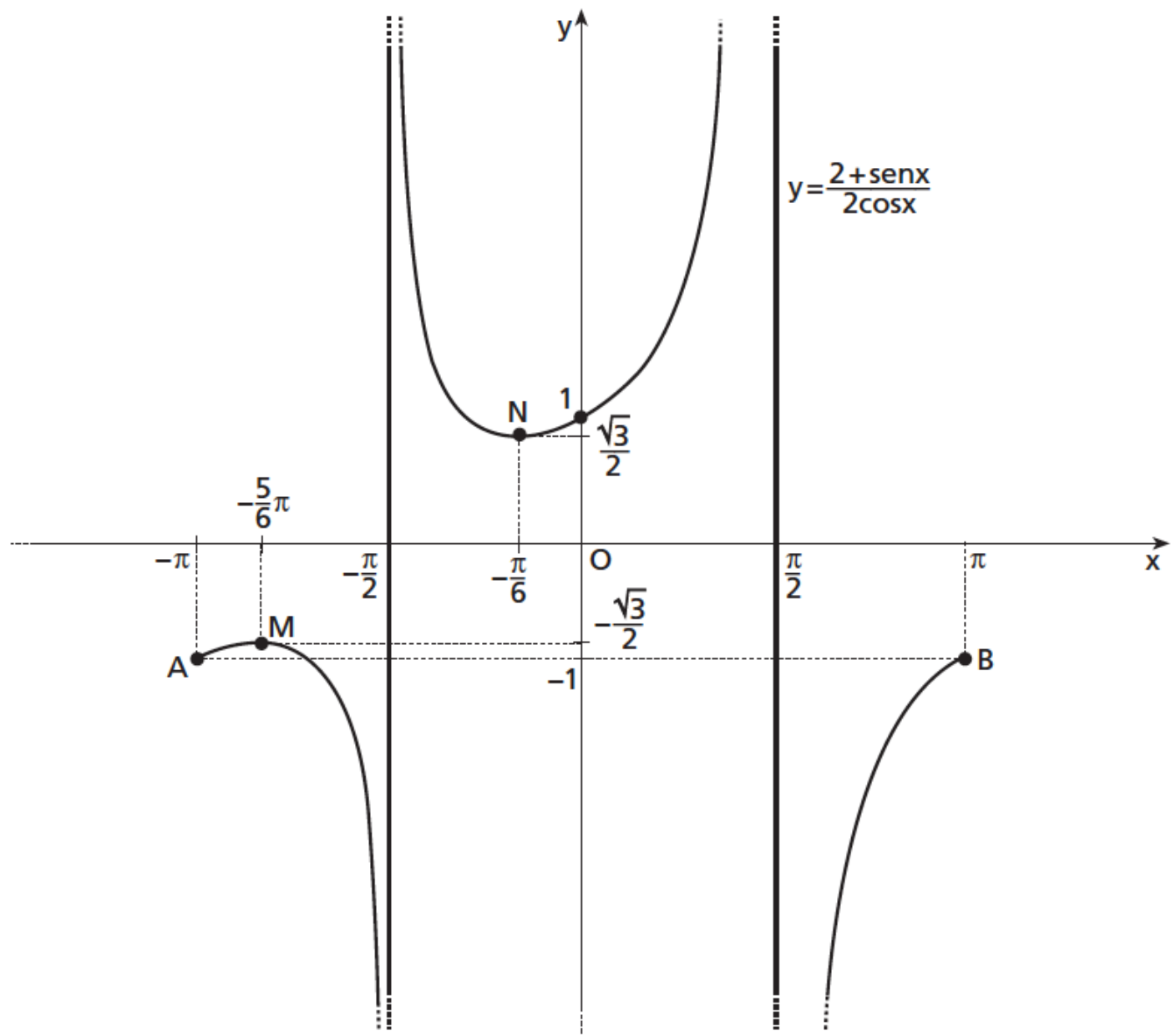
La tabella del suo segno è indicata nella figura 4.



► **Figura 4.** y

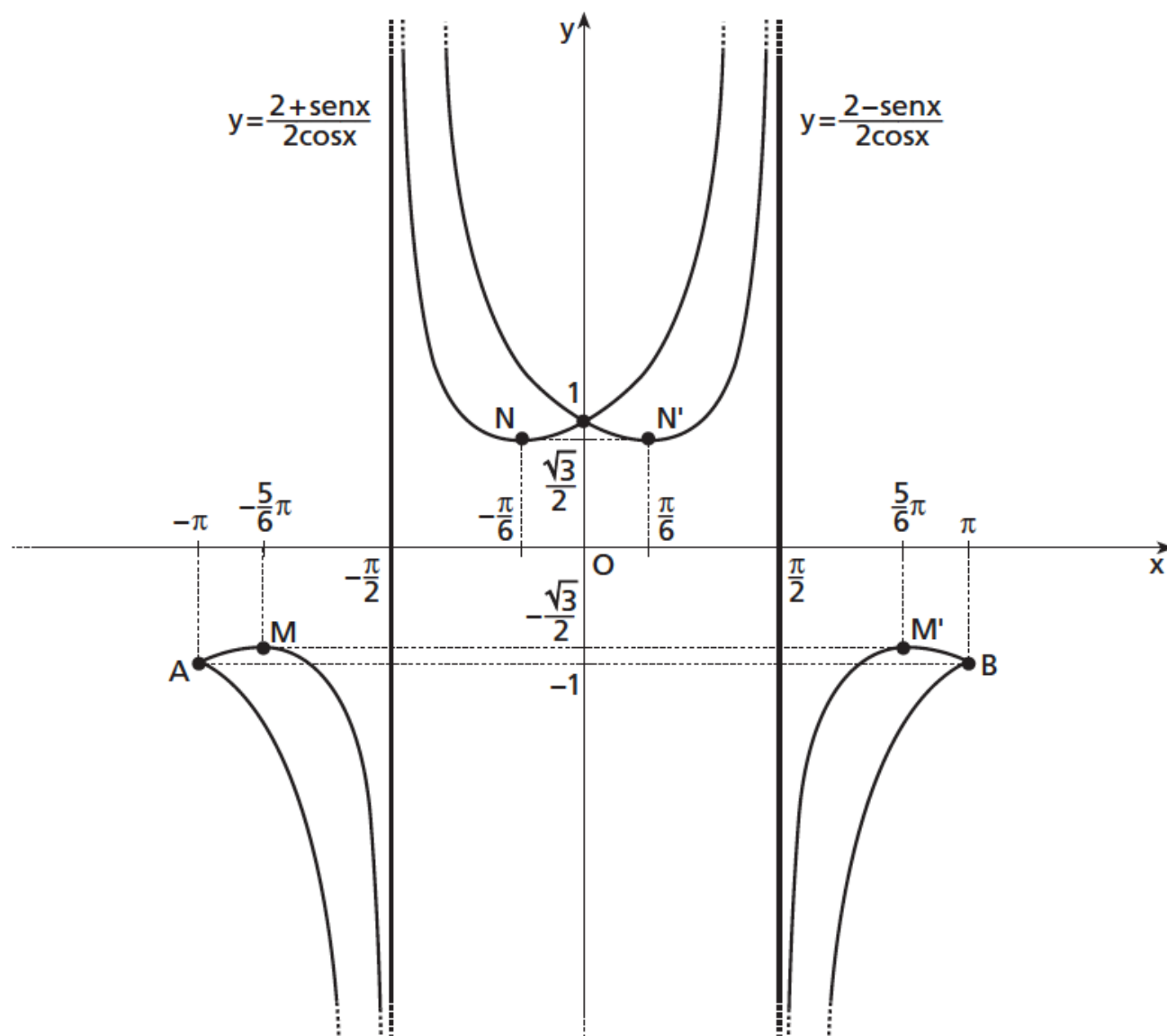
Si osserva che la derivata seconda non si annulla mai: non è quindi soddisfatta la condizione necessaria per l'esistenza di punti di flesso.

Il grafico della funzione $y = \frac{2 + \sin x}{2 \cos x}$ è rappresentato nella figura 5.



◀ **Figura 5.**

Sfruttando la proprietà di simmetria tra le funzioni $y = \frac{2 + \sin x}{2 \cos x}$ e $y = \frac{2 - \sin x}{2 \cos x}$ rispetto all'asse y , è quindi ora possibile tracciare il grafico della seconda funzione (figura 6).



◀ Figura 6.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione suppletiva

■ **PROBLEMA 1**

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva K di equazione:

(1)
$$y = \frac{2x(6-x)}{2+x}.$$

- a) Disegnarne l'andamento, indicando con A il suo punto di massimo relativo.
- b) Calcolare quanti punti, aventi le coordinate del tipo $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, dove a, b sono numeri interi, appartengono alla regione piana (contorno compreso) delimitata dall'asse x e dalla curva K .
- c) Fra i triangoli isosceli aventi il vertice propriamente detto in A e la base sull'asse x , determinare quello il cui perimetro è 16.

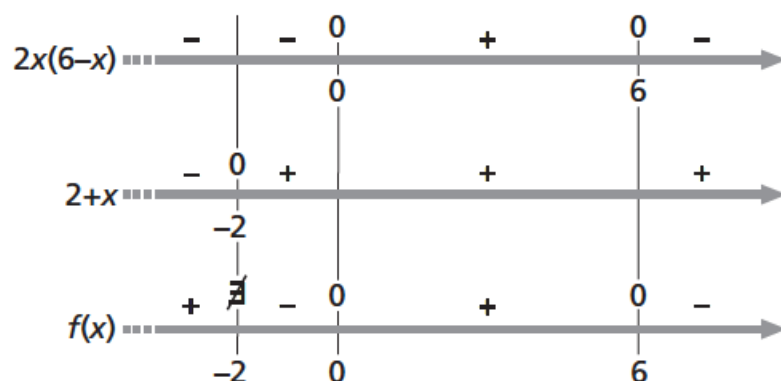
SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME

CORSO DI ORDINAMENTO • 2004

Sessione suppletiva

PROBLEMA 1

- a) Il campo di esistenza della funzione $f(x) = \frac{2x(6-x)}{2+x}$ è l'intervallo $]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$ e si ottiene imponendo che il denominatore di f non sia nullo. Lo schema di figura 1 mostra il segno di f : la funzione si annulla in $x=0$ e in $x=6$, è positiva per $x < -2$ e per $0 < x < 6$, negativa per $-2 < x < 0$ e per $x > 6$.



▲ Figura 1.

Calcoliamo i limiti. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f = +\infty.$$

Quindi la retta $x = -2$ è asintoto verticale.

Quindi la retta $y = -2x + 16$ è asintoto obliquo.

Cerchiamo eventuali asintoti obliqui di equazione $y = mx + q$, con $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$.
Si ha:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2(6-x)}{2+x} = -2$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{2x(6-x)}{2+x} + 2x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{16x}{2+x} = 16.$$

La retta $y = -2x + 16$ è asintoto obliquo di f .

La derivata prima $f'(x) = \frac{(12-4x)(2+x) - 12x + 2x^2}{(2+x)^2} = \frac{-2(x^2 + 4x - 12)}{(2+x)^2}$ ha campo di esistenza

uguale a quello di f e si annulla per $x = -6$ e $x = 2$. Essendo il denominatore sempre positivo, il segno di f' è concorde con il segno del numeratore. Si ha:

per $-6 < x < 2$, $f'(x) > 0$ e la funzione f è crescente;
per $x < -6$ e $x > 2$, $f'(x) < 0$ la funzione f è decrescente.

Quindi $x = -6$ è punto di minimo relativo e $x = 2$ è punto di massimo relativo. I corrispondenti valori di f sono $f(-6) = 36$ e $f(2) = 4$. Le coordinate del punto A sono dunque $A(2, 4)$.

La derivata seconda $f''(x) = \frac{-64}{(x+2)^3}$ non si annulla in nessun punto del suo campo di esistenza, è positiva per $x < -2$, negativa per $x > -2$. Si conclude che la funzione f non ha flessi, ha concavità rivolta verso l'alto per $x < -2$ e concavità rivolta verso il basso per $x > -2$.

Il grafico riportato in figura 2 mostra che la curva K è un'iperbole non equilatera di asintoti $x = -2$ e $y = -2x + 16$.

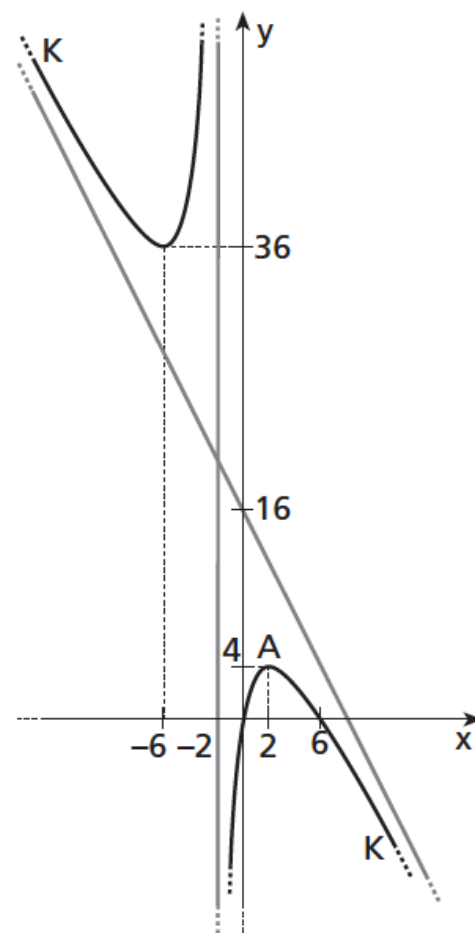
b) La domanda richiede un conteggio diretto dei punti. Dalle ipotesi

$$0 \leq \frac{a}{2} \leq 6 \text{ e } 0 \leq \frac{b}{2} \leq f(x) \text{ (} a \text{ e } b \text{ numeri interi) si ricava: } 0 \leq a \leq 12 \text{ e}$$

$0 \leq b \leq 2f(x)$. Quindi i possibili valori che le ascisse dei punti possono assumere sono 13 e sono: $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots, \frac{11}{2}, 6$. Fissato $x = \frac{a}{2}$,

i punti da conteggiare lungo la verticale per x sono tutti i punti $\left(\frac{a}{2}, b\right)$ che soddisfano la condizione $0 \leq b \leq 2f\left(\frac{a}{2}\right)$; essi sono $1 + \text{int}\left(2f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$,

dove il simbolo int indica la funzione parte intera. Ricordiamo che dato z numero reale, $\text{int}(z)$ è il più grande numero intero minore o uguale a z . Memorizziamo i punti di ciascuna linea verticale nella seguente tabella.



► **Figura 2.**

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$2f(x)$	0	4,4	6,6	7,7	8	7,7	7,2	6,3	5,3	4,1	2,8	1,4	0
$1 + \text{int}\left(2f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$	1	5	7	8	9	8	8	7	6	5	3	2	1

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione straordinaria

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

[1] $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$.

- a) Dimostrare che, nel punto in cui secano l'asse y , hanno tangente parallela all'asse x .
- b) Trovare quale relazione deve sussistere fra i coefficienti a , b affinché la curva [1] volga la concavità verso le y positive in tutto il suo dominio.
- c) Determinare i coefficienti a , b , c in modo che la corrispondente curva [1] abbia, nel punto in cui secca l'asse y , un flesso e la relativa tangente inflessionale la sechi ulteriormente nel punto di coordinate $(2; 2)$.
- d) Indicata con K la curva trovata, stabilire com'è situata rispetto all'asse x , fornendo una esauriente spiegazione della risposta.
- e) Dopo aver verificato che la curva K presenta un secondo flesso, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da K e dalle due tangenti inflessionali.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione straordinaria

PROBLEMA 2

a) Le curve di equazione $y=f(x)=x^4+ax^3+bx^2+c$ sono funzioni polinomiali continue e derivabili nell'insieme dei numeri reali. Le derivate prime hanno forma: $y'=4x^3+3ax^2+2bx$ e, per definizione di derivata, esse si annullano nei punti in cui la tangente è parallela all'asse x . Pertanto, ponendo $y'=0$, si ottiene $4x^3+3ax^2+2bx=0$ che ha soluzioni $x=0$ e $x=\frac{-3a\pm\sqrt{9a^2-32b}}{8}$. Si conclude che nel punto $x=0$, in cui ogni curva secca l'asse y , le curve [1] hanno tangente parallela all'asse x .

b) Data una funzione con derivata prima e seconda continue in un intervallo, condizione sufficiente affinché essa rivolga la concavità verso l'alto in un punto x_0 , interno all'intervallo, è che la derivata seconda in quel punto sia positiva. Se $y=x^4+ax^3+bx^2+c$, la derivata prima è $y'=4x^3+3ax^2+2bx$ e la derivata seconda ha espressione: $y''=12x^2+6ax+2b$. Posto $y''>0$, risulta:

$$12x^2+6ax+2b>0 \quad \rightarrow \quad 6x^2+3ax+b>0.$$

L'equazione associata, $6x^2+3ax+b=0$, ammette soluzioni reali $x=\frac{-3a\pm\sqrt{9a^2-24b}}{12}$, con $\Delta=9a^2-24b\geq 0$.

Pertanto la disequazione è sempre verificata nel campo reale se il discriminante Δ è negativo. La funzione rivolge la concavità verso l'alto su tutto $\mathbb{R}$ se vale la seguente relazione tra a e b :

$$9a^2 - 24b < 0 \quad \rightarrow \quad 3a^2 - 8b < 0.$$

La condizione è sufficiente e può non contemplare altri casi in cui la funzione ha concavità verso l'alto su tutto il campo reale. È infatti necessario discutere il segno della derivata prima e della derivata seconda, in relazione al discriminante Δ .

Se $\Delta > 0$, cioè $3a^2 - 8b > 0$, la derivata seconda è negativa in un intervallo. In esso la funzione ha concavità rivolta verso il basso. Pertanto, per $3a^2 - 8b > 0$, la curva non mantiene la concavità verso l'alto nel suo campo di esistenza.

Se $\Delta = 0$, cioè $3a^2 = 8b$, la derivata seconda è positiva per $x \neq -\frac{a}{4}$ e nulla per $x = -\frac{a}{4}$. La derivata prima, $y' = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx$, diventa $y' = x\left(4x^2 + 3ax + \frac{3}{4}a^2\right)$: essa è negativa per $x < 0$, nulla per $x = 0$, positiva per $x > 0$. Pertanto la funzione ha un minimo in $x = 0$ e non possiede flessi: essa presenta concavità verso l'alto in $\mathbb{R}$.

In conclusione, la curva $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$ rivolge la concavità verso l'alto nel suo campo di esistenza $\mathbb{R}$ se a e b soddisfano la relazione: $3a^2 - 8b \leq 0$.

c) Nella soluzione del punto a) si è trovato che la curva parametrica ha tangente orizzontale nel punto $x=0$, ovvero nel punto del grafico di coordinate $(0; c)$. Affinché vi sia un flesso, è necessario che la derivata seconda $f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b$ si annulli per $x=0$ cioè $f''(0) = 0$. Risulta quindi:

$$f''(0) = 2b = 0 \quad \rightarrow \quad b = 0.$$

Se la tangente orizzontale inflessionale in $(0; c)$ interseca la curva in un ulteriore punto, $(2; 2)$, si deduce che $c = 2$.

Infine, poiché la curva passa per il punto $(2; 2)$ deve valere $2 = f(2)$, cioè:

$$2 = 2^4 + a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \quad \rightarrow \quad 8a + 4b + c = -14.$$

Si pongono a sistema le relazioni trovate:

$$\begin{cases} b=0 \\ c=2 \\ 8a+4b+c=-14 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} b=0 \\ c=2 \\ a=-2 \end{cases}$$

La curva ha equazione: $y = x^4 - 2x^3 + 2$.

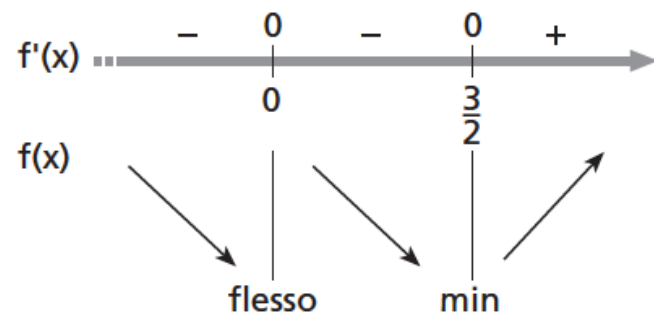
d) La curva K ha equazione $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2$ e si ha: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$. Per $x < 0$ la funzione è sempre positiva e in questa regione la curva è situata sopra l'asse x . Rimane da valutare l'andamento per $x \geq 0$. La derivata prima è $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3)$ e la tabella del suo segno è riportata nella figura 4.

Per $0 \leq x < \frac{3}{2}$ la funzione è decrescente, per $x > \frac{3}{2}$ la funzione è crescente e $x = \frac{3}{2}$ è minimo assoluto. Poiché il minimo

ha immagine $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 2 = \frac{5}{16}$ positiva, per

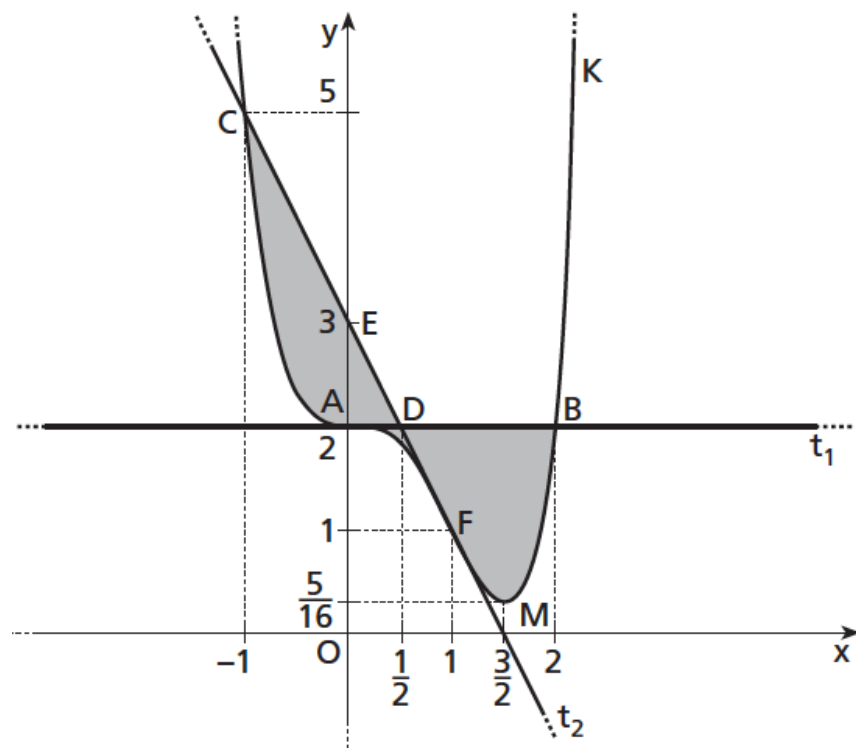
definizione di crescita e decrescenza e tenendo conto della continuità, la funzione è positiva nei due intervalli e quindi per $x \geq 0$.

In conclusione il grafico della funzione è situato sopra l'asse delle x .



▲ **Figura 4.**

e) Si studia la curva K di equazione $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2$ per rappresentarla in un sistema cartesiano. Il campo di esistenza è quello dei numeri reali. Per le dimostrazioni precedenti, essa interseca l'asse y nel punto $A(0; 2)$, dove ha un flesso orizzontale con tangente inflessionale di equazione $t_1: y = 2$; è sempre positiva ed ha un minimo di coordinate $M\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{16}\right)$. La derivata seconda vale $f''(x) = 12x^2 - 12x$, pertanto la funzione ha un ulteriore flesso nel punto $x = 1$, di coordinate $F(1; 1)$. La corrispondente tangente inflessionale ha equazione $t_2: y - 1 = f''(1)(x - 1)$ cioè $y = -2x + 3$. Essa interseca la curva anche nel punto $C(-1; 5)$. Le rette t_1 e t_2 si intersecano in un punto D di coordinate $D\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. Nella figura 5 è tracciata la curva, le tangenti inflessionali e la regione compresa tra esse.



◀ Figura 5.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO • 2005

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione f definita sull'intervallo $[0; +\infty[$ da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1 \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy , ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se f è *continua* e *derivabile* in 0
2. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo $[0; +\infty[$, un'unica radice reale.
3. Si disegni C e si determini l'equazione della retta r tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO 2005

PROBLEMA 2

1. Una funzione è continua in un punto x_0 se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. In questo caso, poiché la funzione ha come campo di esistenza $x \geq 0$, esaminiamo la continuità a destra di 0. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} x^2 (3 - 2 \log x) + 1 = 1 = f(0).$$

Infatti per il teorema di De L'Hopital si ha $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \log x = 0$. La funzione è continua in 0.

Una funzione è derivabile in un punto x_0 se esiste ed è finito

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + b) - f(x_0)}{b}.$$

In questo caso:

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{f(b) - f(0)}{b} = \lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} b^2 (3 - 2 \log b) + 1 - 1}{b} = \lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} b (3 - 2 \log b) = 0$$

quindi la funzione è derivabile in 0.

2. $Df(x) = \frac{1}{2}(2x(3 - 2\log x) - \frac{2}{x}x^2) = 2x(1 - \log x)$, quindi la funzione è crescente quando $\log x < 1$, cioè in $]0; e[$, mentre è decrescente in $]e; +\infty[$. In $x = e$ c'è un punto di massimo: $f(e) = \frac{1}{2}e^2 + 1 > 0$. Inoltre $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = [+ \infty \cdot (-\infty)] = -\infty$. In $]1; +\infty[$, quindi, la funzione deve attraversare l'asse x per il teorema di esistenza degli zeri. Inoltre, essendo la funzione decrescente in tale intervallo, il punto di intersezione tra la funzione e l'asse x è unico.

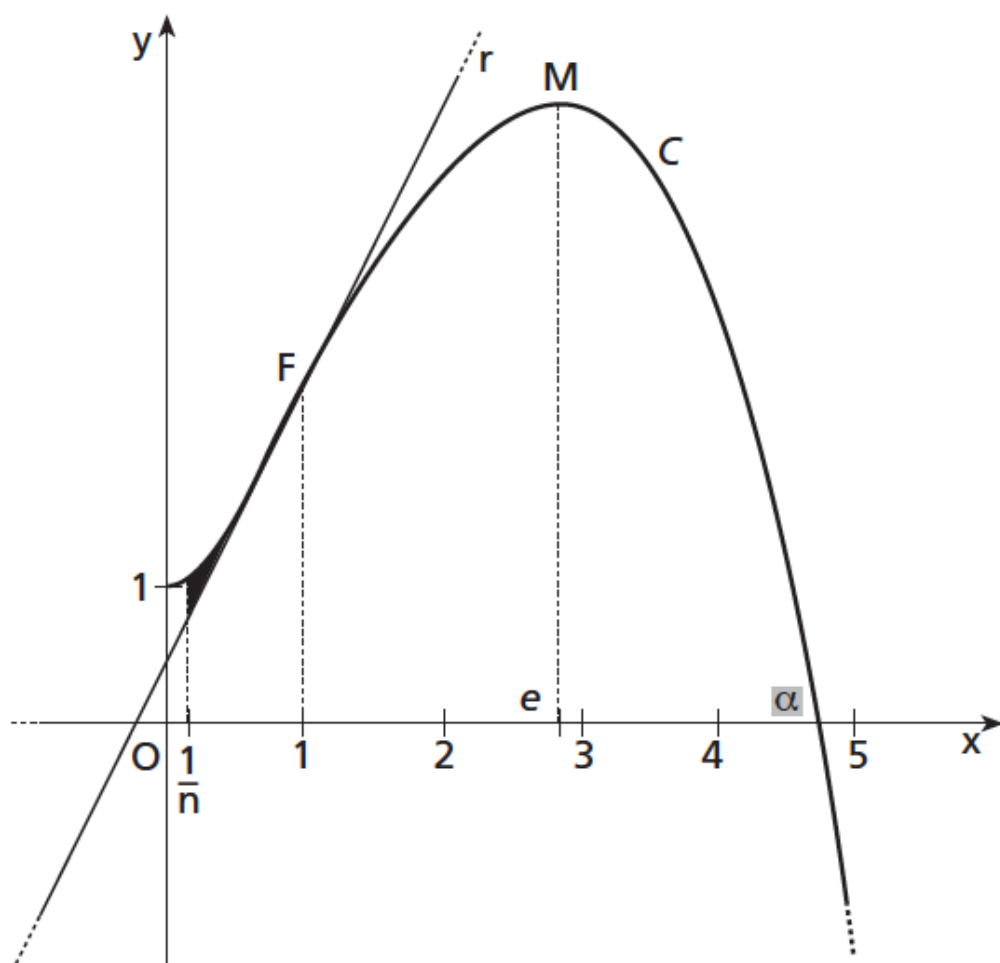
Per stimare il valore della soluzione si può procedere, per esempio, con il metodo di bisezione. Notiamo innanzitutto che $f(4) \simeq 2,82 > 0$, mentre $f(5) \simeq -1,74 < 0$.

a	$f(a)$	b	$f(b)$	$(a + b)/2$	$f[(a + b)/2]$
4	2,82	5	-1,74	4,5	0,92
4,5	0,92	5	-1,74	4,75	-0,31
4,5	0,92	4,75	-0,31	4,625	0,33

E così via fino alla precisione voluta (la soluzione è circa 4,6901).

3. Per disegnare C , oltre ad utilizzare gli elementi studiati nel punto 2, calcoliamo

$f''(x) = 2 \left[1 - \log x + x \left(-\frac{1}{x} \right) \right] = -2 \log x$. La concavità è rivolta verso l'alto quando $-2 \log x > 0$, cioè quando $x < 1$, mentre è rivolta verso l'alto per $x > 1$. In $x = 1$ c'è un punto di flesso obliquo ($f'(1) = 2$). La generica retta tangente alla curva $f(x)$ in un punto x_0 è $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Sostituendo $x_0 = 1$ si ottiene $y - \frac{5}{2} = 2(x - 1)$ quindi $y = 2x + \frac{1}{2}$ (tangente inflessionale).



DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica

Integrali

Verso l'Esame di Stato



ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2001
Sessione ordinaria

- 2** Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che $f(0) = 2$.
Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{2xe^x},$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2001
Sessione ordinaria

- 2** Partendo dal numeratore della frazione di cui è richiesto il calcolo del limite, poiché la funzione è continua in $\mathbb{R}$, si può applicare il teorema della media integrale alla funzione f nell'intervallo $[0; x]$:

$$\int_0^x f(t) dt = f(z) \cdot (x - 0) = x \cdot f(z), \text{ con } z \in [0; x].$$

$$\text{Pertanto } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{2xe^x} = \frac{x \cdot f(z)}{2xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(z)}{2e}.$$

Ora, essendo $z \in [0; x]$, se x tende a 0 anche z tenderà a 0 e $\lim_{x \rightarrow 0} f(z) = \lim_{x \rightarrow 0} f(z) = 2$ per l'ipotesi di continuità.

$$\text{Risulta quindi } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{2xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(z)}{2e^x} = \frac{2}{2e^0} = 1.$$

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2002
Sessione ordinaria

7 Calcolare la derivata, rispetto ad x , della funzione $f(x)$ tale che:

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t dt, \text{ con } x > 0.$$

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2002
Sessione ordinaria

7 Si consideri un valore $x_0 > 0$ tale che $x < x_0 < x + 1$. Per la proprietà dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione si può scrivere:

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t dt = \int_x^{x_0} \ln t dt + \int_{x_0}^{x+1} \ln t dt = - \int_{x_0}^x \ln t dt + \int_{x_0}^{x+1} \ln t dt.$$

Per definizione della funzione integrale $F(x) = \int_{x_0}^x \ln t dt$, risulta:

$$f(x) = F(x+1) - F(x).$$

Derivando membro a membro e alla luce del teorema fondamentale del calcolo integrale si trova:

$$f'(x) = F'(x+1) - F'(x) = \ln(x+1) - \ln x = \ln \frac{x+1}{x}.$$

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2002
Sessione ordinaria

10 La funzione reale di variabile reale $f(x)$, continua per ogni x , è tale che:

$$\int_0^2 f(x) dx = a, \quad \int_0^6 f(x) dx = b,$$

dove a, b sono numeri reali.

Determinare, se esistono, i valori a, b per cui risulta:

$$\int_0^3 f(2x) dx = \ln 2 \quad \text{e} \quad \int_1^3 f(2x) dx = \ln 4.$$

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2002
Sessione ordinaria

10 Considerati gli integrali $\int_0^3 f(2x) dx = \ln 2$ e $\int_1^3 f(2x) dx = \ln 4$, si compia il cambiamento di variabile $2x = t$:

Se $x = \frac{t}{2}$, $dx = \frac{1}{2} dt$ quindi

$$\int_0^3 f(2x) dx = \ln 2 \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^6 f(t) dt = \ln 2 \rightarrow \int_0^6 f(t) dt = \ln 4;$$

$$\int_1^3 f(2x) dx = \ln 4 \rightarrow \frac{1}{2} \int_2^6 f(t) dt = \ln 4 \rightarrow \int_2^6 f(t) dt = \ln 16;$$

Sottraendo membro a membro le due uguaglianze, si ottiene: $\int_0^2 f(t) dt = -\ln 4$.

Ora, poiché $\int_0^2 f(x) dx = a$ e $\int_0^6 f(x) dx = b$, si conclude per confronto che $a = -\ln 4$ e $b = \ln 4$.

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2003**

- 6** La derivata della funzione $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$ è la funzione $f'(x) = 2xe^{-x^4}$. Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

**SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2003**

- 6** Posto $g(x) = x^2$ la funzione $f(x)$ è una funzione composta e risulta: $f(x) = \varphi(g(x)) = \int_0^{g(x)} e^{-t^2} dt$. La derivata risulta: $f'(x) = \varphi'(g(x)) \cdot g'(x)$.
Si ha: $g'(x) = 2x$, mentre, per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene: $\varphi'(g(x)) = e^{-(g(x))^2}$,
quindi $f'(x) = 2x \cdot e^{-(g(x))^2} \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot e^{-x^4}$.

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004**

9 Calcolate: $\int_0^1 \arcsen x \, dx$.

**SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004**

9 Questo integrale può essere calcolato con la formula di integrazione per parti prendendo come fattore finito $\arcsen x$ e come fattore differenziale $1 \cdot dx$; si ottiene così:

$$[x \cdot \arcsen x + \sqrt{1-x^2}]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione suppletiva

8 Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale continua su tutto l'asse reale. Si conosce il valore dell'integrale $\int_0^3 f(x) dx$. È allora possibile calcolare:

A) $\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) dx$; B) $\int_0^3 f(3x) dx$; C) $\int_0^1 f\left(\frac{x}{3}\right) dx$; D) $\int_0^1 f(3x) dx$.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione suppletiva

8

Sia $I = \int_0^3 f(x) dx$. Condizione necessaria affinché, noto I , sia possibile calcolare uno degli integrali dati, è che gli intervalli in cui varia l'argomento di f siano uguali. Questa considerazione ci porta ad escludere gli integrali $\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) dx$, $\int_0^3 f(3x) dx$ e $\int_0^1 f\left(\frac{x}{3}\right) dx$, essendo rispettivamente $[0; 1]$, $[0; 9]$, e $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ gli intervalli in cui varia l'argomento di f . L'argomento di f nell'integrale $\int_0^1 f(3x) dx$ è invece l'intervallo $[0; 3]$. Calcoliamo per sostituzione $\int_0^1 f(3x) dx$. Poniamo $t = 3x$, allora $x = \frac{1}{3}t \rightarrow dx = \frac{1}{3}dt$ e per $x = 0 \rightarrow t = 0$, per $x = 1 \rightarrow t = 3$. Quindi: $\int_0^1 f(3x) dx = \int_0^3 f(t) \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int_0^3 f(t) dt = \frac{1}{3} I$ e la risposta esatta è la D).

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione straordinaria

8 Sia $f(x)$ una funzione continua per ogni x reale tale che $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Dei seguenti integrali:

$$\int_0^1 f(2x) dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

se ne può calcolare uno solo in base alle informazioni fornite. Dire quale e spiegarne la ragione.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione straordinaria

8

Dato l'integrale $\int_0^1 f(2x)dx$, si considera la sostituzione $t = 2x$, ovvero $x = \frac{1}{2}t$, da cui si ricava il differenziale $dx = \frac{1}{2}dt$. Gli estremi di integrazione diventano: $t_1 = 2 \cdot 0 = 0$ e $t_2 = 2 \cdot 1 = 2$.

Sostituendo si trova:

$$\int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)dt.$$

Utilizzando il dato di partenza, $\int_0^2 f(x)dx = 4$, risulta:

$$\int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)dt = \frac{4}{2} = 2.$$

Si osserva che non si può calcolare l'integrale $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$ con le informazioni fornite, poiché se si compie la sostituzione $t = \frac{x}{2}$, con $dx = 2dt$, l'integrale diventa: $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt$ e quest'ultimo integrale non è noto.

SIMULAZIONE DI PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO

4 Determina la funzione $y=f(x)$ sapendo che:

$$y'' = -5e^{-x}, \quad y'(0) = 5, \quad y(1) = 5 - \frac{5}{e}.$$

SOLUZIONE DELLA SIMULAZIONE D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO

- 4 L'espressione generale della derivata prima della funzione incognita è data dall'integrale indefinito della sua derivata seconda:

$$y' = \int -5e^{-x} dx = 5e^{-x} + k_1.$$

La derivata prima della funzione richiesta è quella che soddisfa la condizione:

$$5e^{-0} + k_1 = 5 \rightarrow k_1 = 0 \quad \text{quindi} \quad y' = 5e^{-x}.$$

In modo simile determiniamo l'espressione generale della funzione incognita:

$$y = \int 5e^{-x} dx = -5e^{-x} + k_2.$$

In particolare, dovendo essere soddisfatta la condizione $y(1) = 5 - \frac{5}{e}$, avremo:

$$-5e^{-x} + k_2 = 5 - \frac{5}{e} \rightarrow k_2 = 5 \quad \text{quindi} \quad y = 5(1 - e^{-x}).$$

SIMULAZIONE DI PROVA D'ESAME

CORSO DI ORDINAMENTO

8 È data la funzione $f(x)$ continua su tutto $\mathbb{R}$ e della quale si sa che:

$$\int_0^1 f(x) dx = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Per quali valori reali di $k \neq 0$ è possibile calcolare l'integrale $\int_0^k f\left(\frac{x}{k}\right) dx$? Fornisci un esempio.

SOLUZIONE DELLA SIMULAZIONE D'ESAME

CORSO DI ORDINAMENTO

8 Calcoliamo l'integrale incognito col metodo della sostituzione:

$$\frac{x}{k} = t \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ t=0 \end{cases}, \begin{cases} x=k \\ t=1 \end{cases}, \quad dx = k dt, \quad \text{pertanto}$$

$$\int_0^k f\left(\frac{x}{k}\right) dx = k \int_0^1 f(t) dt = k\alpha, \quad \forall k \neq 0.$$

Un esempio semplice è il seguente:

$$\int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}; \quad k=3 \rightarrow \int_0^3 \left(\frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} \right) dx = \left[\frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{27} \right]_0^3 = \dots = \frac{1}{2} = 3 \int_0^1 (x - x^2) dx.$$

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2001
Sessione ordinaria**

5 Calcolare l'integrale $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

**SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2001
Sessione ordinaria**

5 Osservando che la derivata di $\ln x$ è $\frac{1}{x}$, si tratta di un integrale la cui primitiva è una funzione composta.

Risulta $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + c$.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2002
Sessione ordinaria

9 Trovare $f(4)$ sapendo che $\int_0^x f(t) dt = x \cos(\pi x)$.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2002
Sessione ordinaria

9 Per il teorema del calcolo integrale, posto $\int_0^x f(t) dt = F(x)$, risulta $f(x) = F'(x)$. Nel caso in questione $F(x) = x \cos(\pi x)$, pertanto si ha: $f(x) = D[x \cos(\pi x)] = \cos(\pi x) - \pi x \sin(\pi x)$.
Per $x = 4$, $f(4) = \cos 4\pi - 4\pi \sin 4\pi = 1 - 0 = 1$.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005
Sessione straordinaria

7

Calcolare la derivata, rispetto a x , della funzione: $\int_{-x}^{2x} \frac{dt}{\sin t}$.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005
Sessione straordinaria

7

Si considera inizialmente $x > 0$ per cui si può scrivere $-x < 0 \wedge 2x > 0$. La funzione integranda $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ non è continua nei punti $x = k\pi$, con k intero. Si prenda un punto x_0 , con $-x < x_0 < 2x$, e si applichino le proprietà dell'additività dell'integrale e dello scambio degli estremi d'integrazione:

$$\int_{-x}^{2x} \frac{1}{\sin t} dt = \int_{-x}^{x_0} \frac{1}{\sin t} dt + \int_{x_0}^{2x} \frac{1}{\sin t} dt = -\int_{x_0}^{-x} \frac{1}{\sin t} dt + \int_{x_0}^{2x} \frac{1}{\sin t} dt.$$

Considerata la funzione integrale $F(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{\sin t} dt$, con $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ continua nell'intervallo di integrazione $[x_0; x]$, risulta:

$$\int_{-x}^{2x} \frac{1}{\sin t} dt = F(2x) - F(-x).$$

Derivando membro a membro rispetto alla x e applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale si trova:

$$D\left[\int_{-x}^{2x} \frac{1}{\sin t} dt\right] = D[F(2x) - F(-x)] = 2 \frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x \cos x}.$$

Allo stesso modo si dimostra che per $x < 0$, la funzione derivata ha la stessa espressione:

$$D\left[\int_{-x}^{2x} \frac{1}{\sin t} dt\right] = \frac{1 - \cos x}{\sin x \cos x}.$$

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica

Calcolo aree

Verso l'Esame di Stato



ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO • 2003

PROBLEMA 2

È assegnata la funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x^2 + m + |m|}$, dove m è un parametro reale.

- a) Determinare il suo dominio di derivabilità.
- b) Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x=1$.
- c) Studiare la funzione $f(x)$ corrispondente al valore di m così trovato e disegnarne il grafico γ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver stabilito quanti sono esattamente i flessi di γ ed aver fornito una spiegazione esauriente di ciò.
- d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico γ , dall'asse x e dalla retta di equazione $x=1$.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2003

a) La funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+m+|m|}$, dove m è un parametro reale si può scrivere come:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x^2+2m}, & \text{per } m > 0 \\ \frac{2x+1}{x^2}, & \text{per } m \leq 0 \end{cases}, f(x) \text{ è derivabile } \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & \text{per } m > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, & \text{per } m \leq 0 \end{cases}.$$

b) Per $m \leq 0$ risulta: $f'(x) = \frac{2x^2 - 2x(2x+1)}{x^4} \Rightarrow f'(1) = -4 \neq 0$.

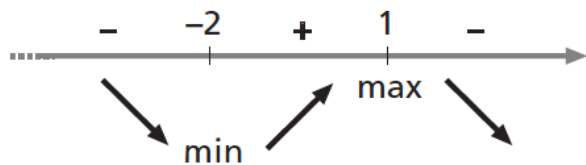
Per $m > 0$ risulta: $f'(x) = \frac{2(x^2+2m) - 2x(2x+1)}{(x^2+2m)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{4(m-1)}{(1+2m)^2} = 0 \Rightarrow m = 1$.

c) La funzione da studiare è: $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Le intersezioni con gli assi sono: $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ con l'asse delle ascisse, $B\left(0; \frac{1}{2}\right)$ con l'asse delle ordinate.

Si ha inoltre: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$. Il grafico ha l'asintoto orizzontale $y=0$.

$$\text{La derivata prima risulta: } f'(x) = \frac{2(x^2+2) - (2x+1) \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-2(x^2+x-2)}{(x^2+2)^2} = \frac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2},$$

$f'(x) \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 1$, quindi (vedi anche figura 5) si ha un minimo nel punto $m\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ ed un massimo nel punto $M(1; 1)$.

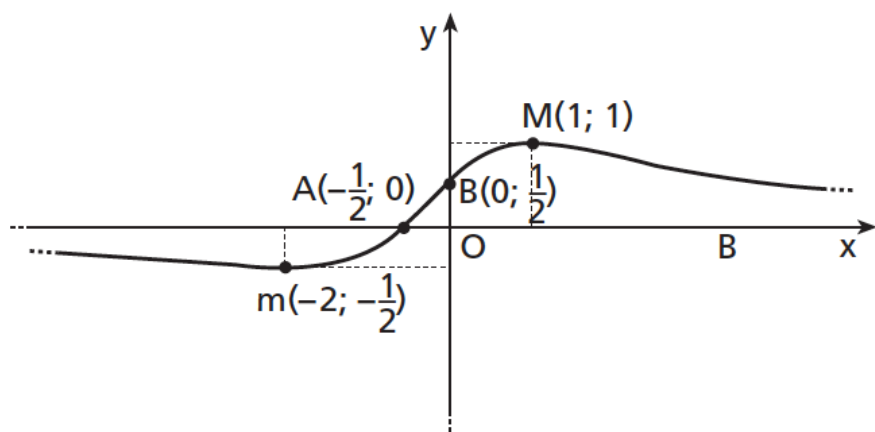


◀ **Figura 5.**

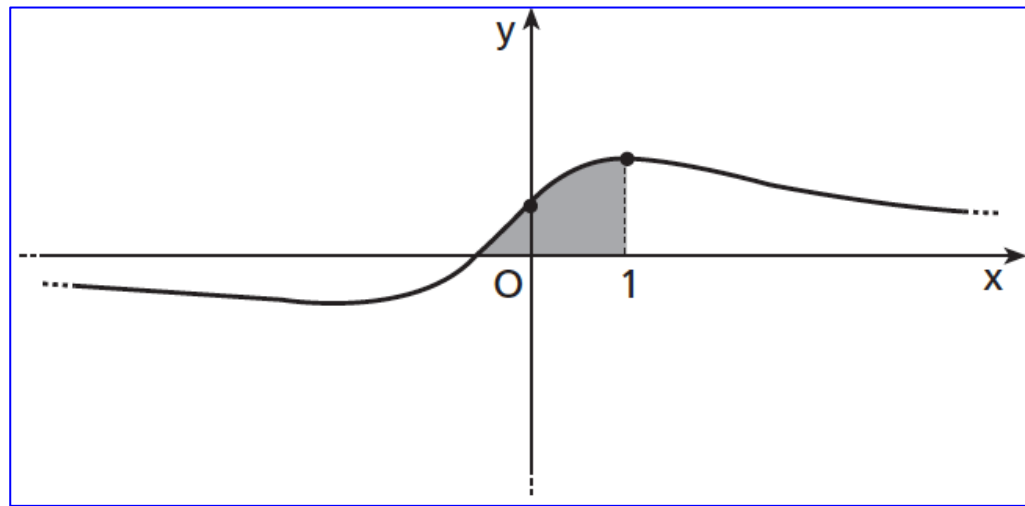
Studiando la derivata seconda si ottiene:

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{(2x+1)(x^2+2) - 2(x^2+x-2) \cdot 2x}{(x^2+2)^3} = \frac{2(2x^3+3x^2-12x-2)}{(x^2+2)^3},$$

$f''(x) \geq 0 \Rightarrow 2x^3 + 3x^2 - 12x - 2 \geq 0$, l'equazione non si scompone con la regola di Ruffini, ma si osserva che, per il teorema fondamentale dell'algebra, ha al massimo tre radici, quindi tre flessi. I risultati ottenuti in precedenza per i limiti negli estremi del dominio ed i valori dei punti di massimo e di minimo permettono di determinare che i flessi devono essere almeno tre. In definitiva i flessi sono proprio tre. In conclusione si può tracciare il grafico della funzione (figura 6).



◀ **Figura 6.**



d) L'area richiesta (figura 7) si ottiene dall'integrale:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{2x+1}{x^2+2} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{2x}{x^2+2} dx + \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2+2} dx = \\
 &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{2x}{x^2+2} dx + \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{2x}{x^2+2} dx + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx,
 \end{aligned}$$

ma $d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} dx$, allora

$$A = \left[\ln(x^2+2) \right]_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\arctg \frac{x}{\sqrt{2}} \right]_{-\frac{1}{2}}^1 = \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\arctg \frac{\sqrt{2}}{2} + \arctg \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = 0,963193.$$

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione straordinaria

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

[1] $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$.

- a) Dimostrare che, nel punto in cui secano l'asse y , hanno tangente parallela all'asse x .
- b) Trovare quale relazione deve sussistere fra i coefficienti a , b affinché la curva [1] volga la concavità verso le y positive in tutto il suo dominio.
- c) Determinare i coefficienti a , b , c in modo che la corrispondente curva [1] abbia, nel punto in cui secca l'asse y , un flesso e la relativa tangente inflessionale la sechi ulteriormente nel punto di coordinate $(2; 2)$.
- d) Indicata con K la curva trovata, stabilire com'è situata rispetto all'asse x , fornendo una esauriente spiegazione della risposta.
- e) Dopo aver verificato che la curva K presenta un secondo flesso, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da K e dalle due tangenti inflessionali.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione straordinaria

a) Le curve di equazione $y=f(x)=x^4+ax^3+bx^2+c$ sono funzioni polinomiali continue e derivabili nell'insieme dei numeri reali. Le derivate prime hanno forma: $y'=4x^3+3ax^2+2bx$ e, per definizione di derivata, esse si annullano nei punti in cui la tangente è parallela all'asse x . Pertanto, ponendo $y'=0$, si ottiene $4x^3+3ax^2+2bx=0$ che ha soluzioni $x=0$ e $x=\frac{-3a\pm\sqrt{9a^2-32b}}{8}$. Si conclude che nel punto $x=0$, in cui ogni curva secca l'asse y , le curve [1] hanno tangente parallela all'asse x .

b) Data una funzione con derivata prima e seconda continue in un intervallo, condizione sufficiente affinché essa rivolga la concavità verso l'alto in un punto x_0 , interno all'intervallo, è che la derivata seconda in quel punto sia positiva. Se $y=x^4+ax^3+bx^2+c$, la derivata prima è $y'=4x^3+3ax^2+2bx$ e la derivata seconda ha espressione: $y''=12x^2+6ax+2b$. Posto $y''>0$, risulta:

$$12x^2+6ax+2b>0 \quad \rightarrow \quad 6x^2+3ax+b>0.$$

L'equazione associata, $6x^2+3ax+b=0$, ammette soluzioni reali $x=\frac{-3a\pm\sqrt{9a^2-24b}}{12}$, con $\Delta=9a^2-24b\geq 0$.

Pertanto la disequazione è sempre verificata nel campo reale se il discriminante Δ è negativo. La funzione rivolge la concavità verso l'alto su tutto $\mathbb{R}$ se vale la seguente relazione tra a e b :

$$9a^2 - 24b < 0 \quad \rightarrow \quad 3a^2 - 8b < 0.$$

La condizione è sufficiente e può non contemplare altri casi in cui la funzione ha concavità verso l'alto su tutto il campo reale. È infatti necessario discutere il segno della derivata prima e della derivata seconda, in relazione al discriminante Δ .

Se $\Delta > 0$, cioè $3a^2 - 8b > 0$, la derivata seconda è negativa in un intervallo. In esso la funzione ha concavità rivolta verso il basso. Pertanto, per $3a^2 - 8b > 0$, la curva non mantiene la concavità verso l'alto nel suo campo di esistenza.

Se $\Delta = 0$, cioè $3a^2 = 8b$, la derivata seconda è positiva per $x \neq -\frac{a}{4}$ e nulla per $x = -\frac{a}{4}$. La derivata prima, $y' = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx$, diventa $y' = x\left(4x^2 + 3ax + \frac{3}{4}a^2\right)$: essa è negativa per $x < 0$, nulla per $x = 0$, positiva per $x > 0$. Pertanto la funzione ha un minimo in $x = 0$ e non possiede flessi: essa presenta concavità verso l'alto in $\mathbb{R}$.

In conclusione, la curva $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$ rivolge la concavità verso l'alto nel suo campo di esistenza $\mathbb{R}$ se a e b soddisfano la relazione: $3a^2 - 8b \leq 0$.

c) Nella soluzione del punto a) si è trovato che la curva parametrica ha tangente orizzontale nel punto $x=0$, ovvero nel punto del grafico di coordinate $(0; c)$. Affinché vi sia un flesso, è necessario che la derivata seconda $f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b$ si annulli per $x=0$ cioè $f''(0) = 0$. Risulta quindi:

$$f''(0) = 2b = 0 \quad \rightarrow \quad b = 0.$$

Se la tangente orizzontale inflessionale in $(0; c)$ interseca la curva in un ulteriore punto, $(2; 2)$, si deduce che $c = 2$.

Infine, poiché la curva passa per il punto $(2; 2)$ deve valere $2 = f(2)$, cioè:

$$2 = 2^4 + a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \quad \rightarrow \quad 8a + 4b + c = -14.$$

Si pongono a sistema le relazioni trovate:

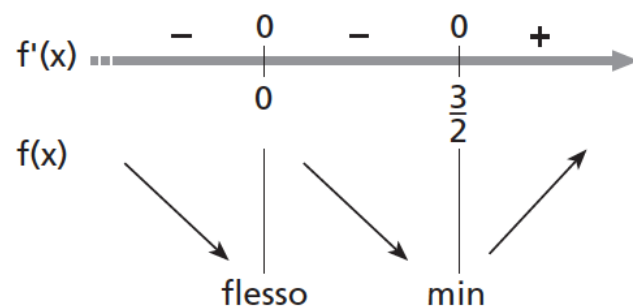
$$\begin{cases} b = 0 \\ c = 2 \\ 8a + 4b + c = -14 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} b = 0 \\ c = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

La curva ha equazione: $y = x^4 - 2x^3 + 2$.

d) La curva K ha equazione $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2$ e si ha: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$. Per $x < 0$ la funzione è sempre positiva e in questa regione la curva è situata sopra l'asse x . Rimane da valutare l'andamento per $x \geq 0$. La derivata prima è $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3)$ e la tabella del suo segno è riportata nella figura 4.

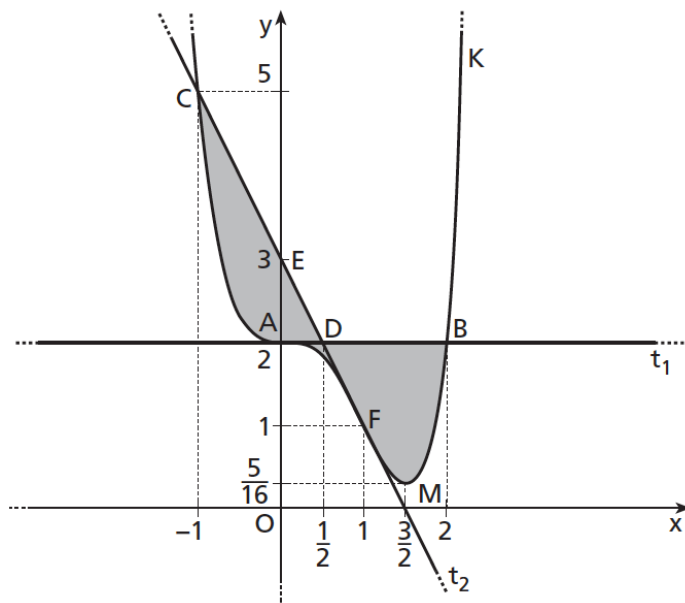
Per $0 \leq x < \frac{3}{2}$ la funzione è decrescente, per $x > \frac{3}{2}$ la funzione è crescente e $x = \frac{3}{2}$ è minimo assoluto. Poiché il minimo ha immagine $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 2 = \frac{5}{16}$ positiva, per definizione di crescita e decrescenza e tenendo conto della continuità, la funzione è positiva nei due intervalli e quindi per $x \geq 0$.

In conclusione il grafico della funzione è situato sopra l'asse delle x .



▲ **Figura 4.**

e) Si studia la curva K di equazione $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2$ per rappresentarla in un sistema cartesiano. Il campo di esistenza è quello dei numeri reali. Per le dimostrazioni precedenti, essa interseca l'asse y nel punto $A(0; 2)$, dove ha un flesso orizzontale con tangente inflessionale di equazione $t_1: y = 2$; è sempre positiva ed ha un minimo di coordinate $M\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{16}\right)$. La derivata seconda vale $f''(x) = 12x^2 - 12x$, pertanto la funzione ha un ulteriore flesso nel punto $x = 1$, di coordinate $F(1; 1)$. La corrispondente tangente inflessionale ha equazione $t_2: y - 1 = f'(1)(x - 1)$ cioè $y = -2x + 3$. Essa interseca la curva anche nel punto $C(-1; 5)$. Le rette t_1 e t_2 si intersecano in un punto D di coordinate $D\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. Nella figura 5 è tracciata la curva, le tangenti inflessionali e la regione compresa tra esse.



◀ Figura 5.

La regione finita di piano è formata dal triangolo ADE e da due figure mistilinee CAE e $AFMB$, di superficie rispettivamente S_{ADE} , S_{CAE} e S_{AFMB} . Esse si calcolano per via geometrica e per via integrale nel modo seguente:

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \overline{AD} \cdot \overline{AE} \quad \rightarrow \quad S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4};$$

$$S_{CAE} = \int_{-1}^0 (-2x + 3 - x^4 + 2x^3 - 2) dx = \left[-x^2 + x - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 \right]_{-1}^0 = \frac{13}{10};$$

$$S_{AFMB} = \int_0^2 (2 - x^4 + 2x^3 - 2) dx = \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 \right]_0^2 = \frac{8}{5}.$$

L'area S della regione finita di piano delimitata dalla curva K e dalle tangenti inflessionali vale:

$$S = S_{ADE} + S_{CAE} + S_{AFMB} \quad \rightarrow \quad S = \frac{1}{4} + \frac{13}{10} + \frac{8}{5} = \frac{63}{20}.$$

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO • 2006

PROBLEMA 2

Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo di base e .

1. Si discuta, al variare di a , l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto $a = 1$, l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni f e g e dalle rette $x = 1$ e $x = 2$.
3. Si studi la funzione $b(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

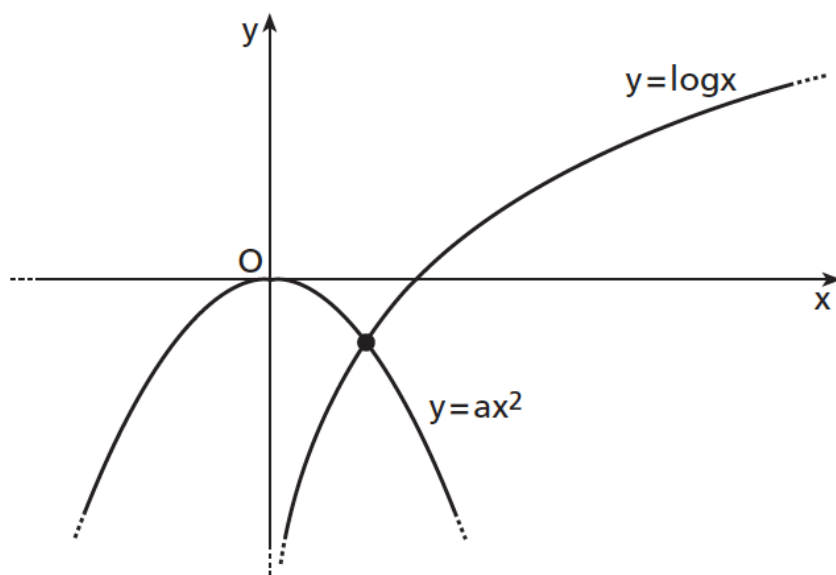
SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME

CORSO DI ORDINAMENTO • 2006

1. Primo metodo

Si discute l'equazione $\log x = ax^2$ con metodo grafico ponendo $y = \log x$ e $y = ax^2$ e determinando gli eventuali punti di intersezione tra i grafici delle due funzioni, al variare di a .

- $a < 0$. La funzione $y = ax^2$ è rappresentata da una parabola con il vertice nell'origine e con la concavità rivolta verso il basso (figura 5).



◀ Figura 5.

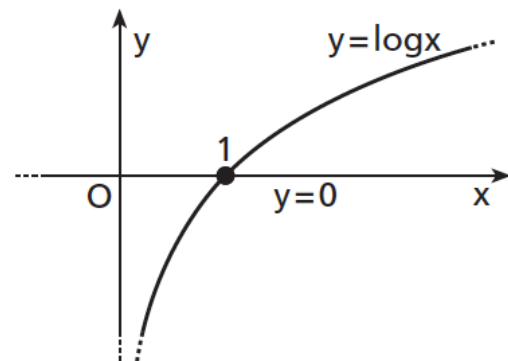
Si ha sempre un solo punto di intersezione.

- **$a = 0$.** La funzione $y = ax^2$ diventa $y = 0$.

In questo caso (figura 6) il punto di intersezione ha coordinate $(1; 0)$ e la soluzione dell'equazione è quindi $x = 1$.

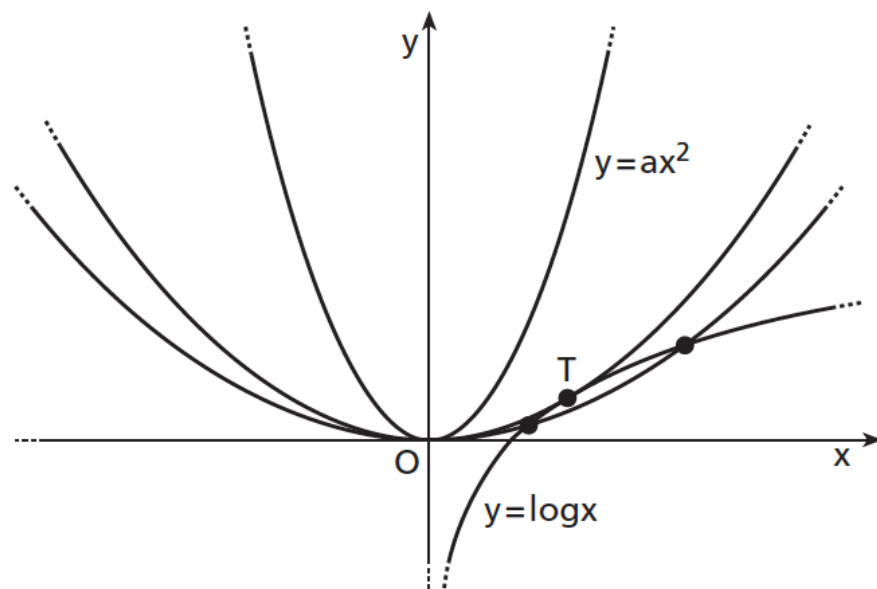
- **$a > 0$.** La funzione $y = ax^2$ è rappresentata da una parabola con il vertice nell'origine e con la concavità rivolta verso l'alto.

▼ **Figura 6.**



Ci sono tre possibilità al variare di a (figura 7):

- abbiamo parabole che intersecano il grafico di $y = \log x$ in due punti distinti;
- esiste una parabola tangente;
- ci sono parabole che non intersecano mai il grafico di $y = \log x$.



► **Figura 7.**

Determiniamo la parabola tangente. Risulta:

$$\begin{cases} ax^2 = \log x \\ D(ax^2) = D(\log x) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{le due curve devono intersecarsi} \\ \text{le due curve devono avere la stessa tangente nel punto comune} \end{array}$$

$$\begin{cases} ax^2 = \log x \\ 2ax = \frac{1}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax^2 = \log x \\ ax^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log x = \frac{1}{2} \\ ax^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{e} \\ a = \frac{1}{2e} \end{cases}.$$

La parabola tangente ha quindi equazione $y = \frac{1}{2e}x^2$ e il punto di tangenza T ha coordinate $\left(\sqrt{e}; \frac{1}{2}\right)$.

Riassumendo la discussione dell'equazione $\log x = ax^2$, risulta:

- per $a \leq 0$, 1 soluzione;
- per $0 < a < \frac{1}{2e}$, 2 soluzioni distinte;
- per $a = \frac{1}{2e}$, 2 soluzioni coincidenti;
- per $a > \frac{1}{2e}$, nessuna soluzione.

Secondo metodo

Le eventuali soluzioni dell'equazione $\log x = ax^2$ sono gli zeri della funzione $b(x) = \log x - ax^2$ al variare di $a \in \mathbb{R}$, che risulta continua nel suo campo di esistenza $D =]0; +\infty[$.

Osserviamo che per $a = 0$ si ottiene la nota funzione logaritmica che ha un unico zero in $x = 1$ (figura 8).

Sia ora $a \neq 0$ e studiamo l'andamento della funzione agli estremi del campo di esistenza.

Vale:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} b(x) = -\infty \quad \text{per ogni valore di } a,$$

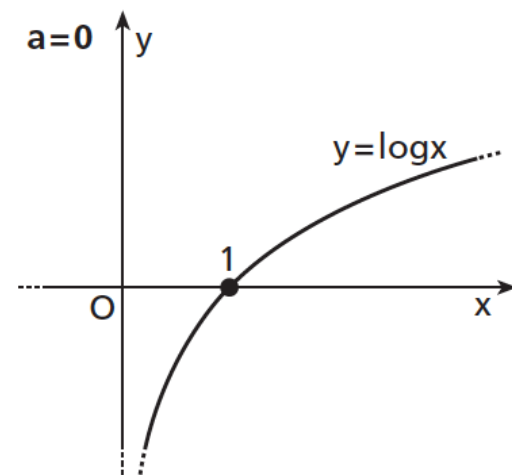
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a < 0 \\ -\infty & \text{se } a > 0 \end{cases}$$

Trattiamo separatamente i casi $a < 0$ e $a > 0$.

- **$a < 0$.** Dallo studio dei limiti effettuato, deduciamo che esistono $x_1, x_2 \in D$ tali che $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$. Per il teorema degli zeri, esiste almeno un punto nell'intervallo $]x_1; x_2[$ in cui la funzione si annulla. D'altra parte, risulta:

$$b'(x) = \frac{1}{x} - 2ax > 0, \quad \text{per } x \in D,$$

quindi la funzione è strettamente crescente. Pertanto anche nel caso $a < 0$ l'equazione $\log x = ax^2$ ha un'unica soluzione.



▲ Figura 8.

- **$a > 0$.** In questo caso i limiti agli estremi del campo di esistenza sono entrambi negativi. Studiamo il segno della derivata prima $b'(x) = \frac{1 - 2ax^2}{x}$ in D . Risulta:

$$b'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 - 2ax^2 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x \leq \sqrt{\frac{1}{2a}}.$$

Poiché il massimo della funzione è assunto in $x = \sqrt{\frac{1}{2a}}$, l'esistenza degli zeri di b dipende dal segno di tale massimo. Calcoliamo l'immagine:

$$b\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right) = \log \sqrt{\frac{1}{2a}} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(\log 2a + 1).$$

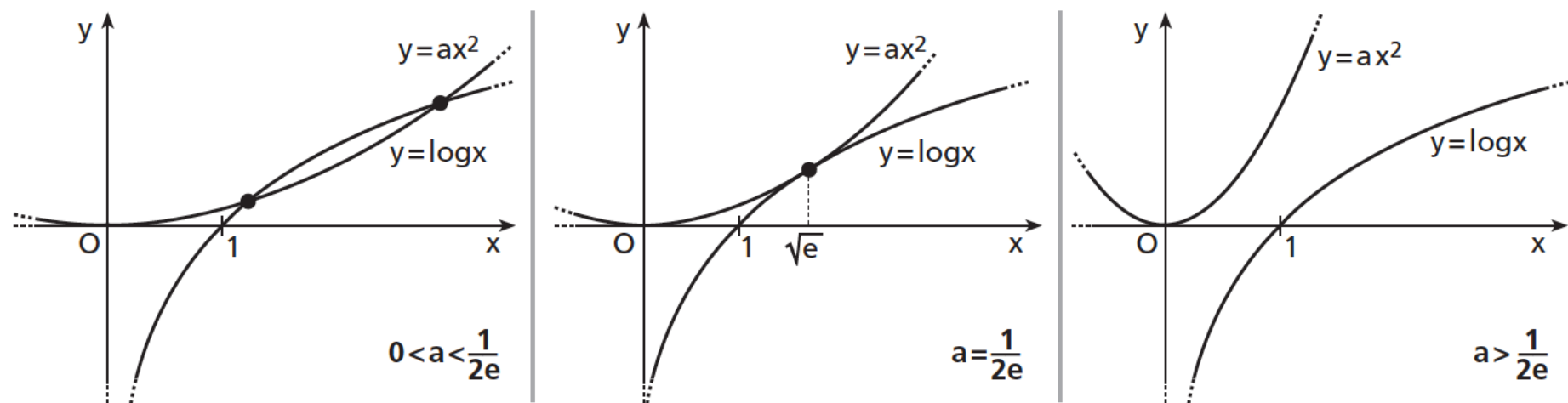
Studiamo la disequazione:

$$b\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log 2a + 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \leq \frac{1}{2e}.$$

In conclusione:

- $0 < a < \frac{1}{2e}$: il massimo di b è positivo, i limiti agli estremi del campo di esistenza sono entrambi negativi ed esiste un solo punto critico; quindi la funzione $b(x)$ ammette due zeri;
- $a = \frac{1}{2e}$: il massimo di b è zero ed esiste un solo punto critico, pertanto l'ascissa di tale massimo è l'unica soluzione dell'equazione assegnata dal problema;
- $a > \frac{1}{2e}$: poiché $\max b < 0$, non esistono soluzioni di $b(x) = 0$.

Gli zeri dell'equazione $\log x = ax^2$ possono essere interpretati graficamente come le ascisse dei punti di intersezione tra i grafici di $f(x)$ e $g(x)$, come mostra la figura 9.



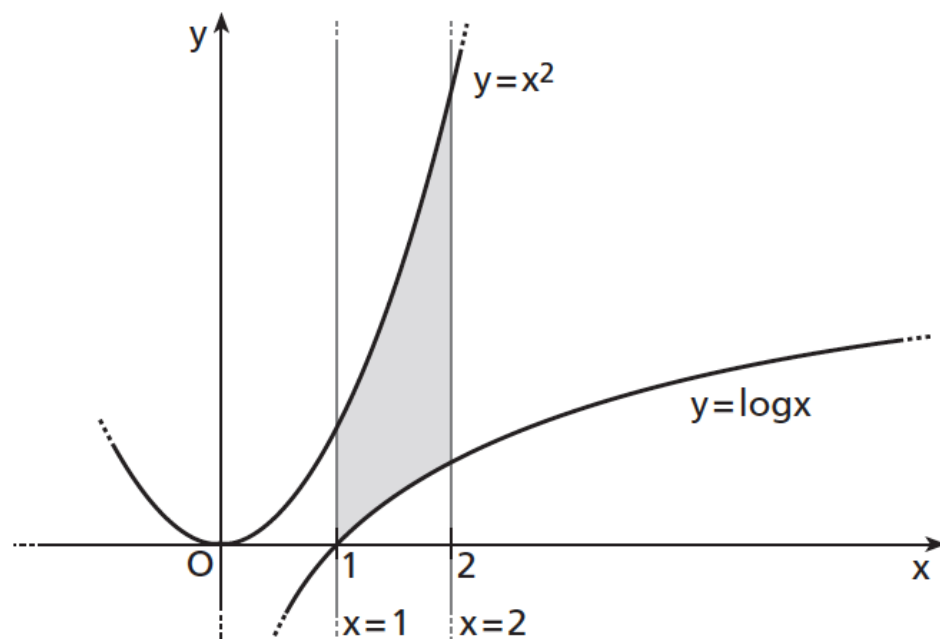
▲ Figura 9.

I grafici di f e g sono tangenti solo per $a = \frac{1}{2e}$. Infatti le due curve sono tangenti se e solo se si intersecano e hanno la stessa retta tangente nel punto di intersezione. Algebricamente, questo equivale a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \\ g'(x) = f'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 = \log x \\ ax^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x = \frac{1}{2} \\ ax^2 = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Questo sistema è soddisfatto se e solo se $x = \sqrt{e}$ e $a = \frac{1}{2e}$.

2. Dobbiamo determinare l'area $\mathcal{A}$ evidenziata in figura 10, dove si considera $a = 1$ come richiesto.

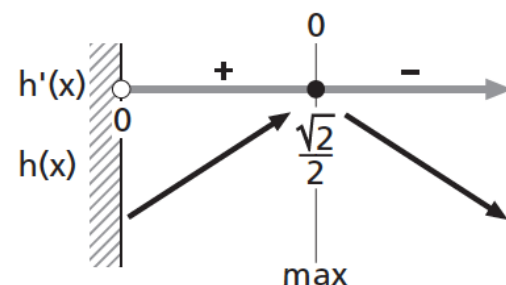


◀ **Figura 10.**

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \int_1^2 [g(x) - f(x)] dx = \int_1^2 (x^2 - \log x) dx = \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 - \left([x \log x]_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx \right) = \frac{7}{3} - (2 \log 2 - [x]_1^2) = \\
 &= \frac{10}{3} - 2 \log 2.
 \end{aligned}$$

3. Scegliamo $a = 1$ e studiamo la funzione $b(x) = \log x - x^2$. Per quanto visto nei punti precedenti:

- il campo di esistenza è $D =]0; +\infty[$;
- non esistono intersezioni con gli assi cartesiani e la funzione è sempre negativa perché il massimo è negativo;
- i limiti agli estremi di D sono entrambi $-\infty$;
- $f'(x) = \frac{1 - 2x^2}{x}$, la funzione è crescente in $\left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, decrescente in $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$ e $\max_{x \in D} b(x) = b\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}(\log 2 + 1)$, come riassunto nella figura 11.



▲ **Figura 11.**

Osserviamo che non vi sono asintoti obliqui perché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b(x)}{x} = -\infty$.

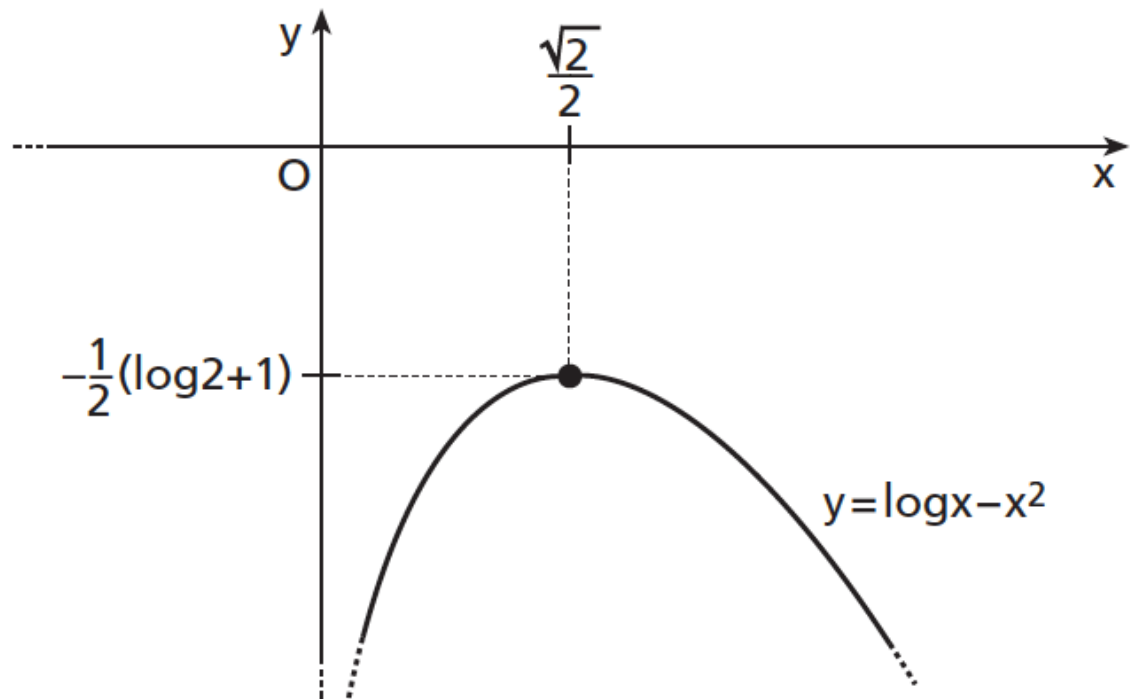
Rimane ora da studiare la derivata seconda:

$$b''(x) = \frac{-4x \cdot x - (1 - 2x^2)}{x^2} = \frac{-2x^2 - 1}{x^2}.$$

Risulta quindi:

$$b''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(2x^2 + 1) \geq 0$$

e questa disequazione non è mai soddisfatta. Pertanto la derivata seconda è sempre negativa e la funzione ha la concavità rivolta verso il basso in tutto il campo di esistenza. Il grafico della funzione è riportato nella figura 12.



◀ **Figura 12.**

SIMULAZIONE DI PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO

PROBLEMA 1

Considera la famiglia di funzioni

$$f_k(x) = \begin{cases} k \ln x^x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad k > 0$$

e la funzione $g(x) = \begin{cases} \ln x^{x^2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

1. Determina per quale valore di k la funzione f_k e g hanno la stessa tangente nel punto di ascissa 1.
2. Detta f la funzione determinata al punto precedente, studia la continuità e la derivabilità di f e g nel punto $x = 0$.
3. Studia le funzioni f e g e disegna i grafici riferiti allo stesso sistema cartesiano ortogonale.
4. Calcola l'area della regione finita di piano delimitata da f e da g , appartenente al semipiano $x \geq \frac{1}{4}$.

SOLUZIONE DELLA SIMULAZIONE D'ESAME

CORSO DI ORDINAMENTO

1. Riscriviamo le funzioni applicando le proprietà del logaritmo:

$$f_k(x) = \begin{cases} kx \ln x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad k > 0; \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Tutte le funzioni date sono continue e derivabili per $x > 0$, con derivate:

$$f'_k(x) = k \ln x + k, \quad g'(x) = 2x \ln x + x \quad \text{quindi } f'_k(1) = k, \quad g'(1) = 1.$$

Perciò f_k e g hanno la stessa tangente in $x = 1$ se $f'_k(1) = g'(1)$, ossia se

$$k = 1.$$

2. Indichiamo con $f(x)$ la funzione $f_1(x)$ corrispondente a $k = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0 \quad (\text{De L'Hospital}) \quad \text{pertanto } f \text{ è continua per } x = 0.$$

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{f(0+b) - f(0)}{b} = \lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{b \ln b - 0}{b} = \lim_{b \rightarrow 0^+} \ln b = -\infty.$$

La f non è derivabile in $x=0$ nel senso che la derivata diverge negativamente quindi ha per tangente l'asse delle ordinate.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = 0, \text{ pertanto } g \text{ è continua in } x=0.$$

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{g(0+b) - g(0)}{b} = \lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{b^2 \ln b - 0}{b} = \lim_{b \rightarrow 0^+} b \ln b = 0.$$

La g è derivabile in $x=0$ e ha per tangente l'asse delle ascisse.

3. Studio di f e g .

Segno di f e intersezioni con gli assi:

$$x \ln x > 0 \text{ per } x > 1$$

$$\rightarrow f(x) < 0 \text{ se } 0 < x < 1$$

$$f(x) > 0 \text{ se } x > 1$$

$$f(1) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$\rightarrow f$ non ha asintoti orizzontali né obliqui.

Derivata prima: crescita e decrescenza,
massimi e minimi:

$$f'(x) = \ln x + 1 > 0 \text{ per } x > e^{-1} \quad \rightarrow f \text{ è crescente per } x > e^{-1}$$
$$f \text{ è decrescente per } 0 < x < e^{-1}$$
$$A(e^{-1}; -e^{-1}) \text{ minimo relativo e assoluto.}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x > 0 \quad \rightarrow \text{concavità verso l'alto.}$$

Segno di g e intersezioni con gli assi:

$$x^2 \ln x > 0 \text{ per } x > 1 \quad \rightarrow g(x) < 0 \text{ se } 0 < x < 1$$
$$g(x) > 0 \text{ se } x > 1$$
$$g(1) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$$

$\rightarrow g$ non ha asintoti orizzontali né obliqui.

Derivata prima: crescita e decrescenza,
massimi e minimi:

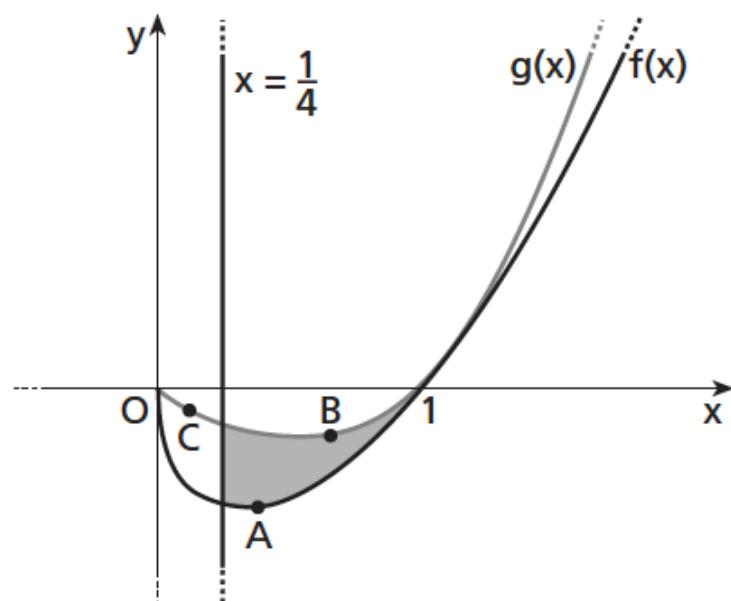
$$g'(x) = x(2 \ln x + 1) > 0 \text{ per } x > e^{-\frac{1}{2}} \quad \rightarrow g \text{ è crescente per } x > e^{-\frac{1}{2}}$$
$$\rightarrow g \text{ è decrescente per } 0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$$

$$B\left(e^{-\frac{1}{2}}; -\frac{1}{2}e^{-1}\right) \text{ min. rel. e assoluto.}$$

$$g''(x) = 2 \ln x + 3 > 0 \text{ per } x > e^{-\frac{3}{2}} \rightarrow \text{concavità verso l'alto per } x > e^{-\frac{3}{2}}$$

concavità verso il basso per $0 < x < e^{-\frac{3}{2}}$

$C\left(e^{-\frac{3}{2}}; -\frac{3}{2}e^{-3}\right)$ punto di flesso.



◀ **Figura 1.**

4. L'area richiesta è data dal seguente integrale che calcoleremo per parti:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{4}}^1 (x^2 \ln x - x \ln x) dx &= \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^2}{2} \ln x \right]_{\frac{1}{4}}^1 - \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(\frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \right) dx = \\ &= \frac{1}{192} \ln 4 - \frac{1}{32} \ln 4 - \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} \right) dx = -\frac{5 \ln 4}{192} - \left[\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} \right]_{\frac{1}{4}}^1 = \dots = \frac{1}{8} - \frac{5 \ln 2}{96}. \end{aligned}$$

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica

Calcolo volumi

Verso l'Esame di Stato



ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO • 2005

PROBLEMA 1

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy , ortogonale e monometrico, si consideri la regione R , finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola λ d'equazione: $y = 6 - x^2$.

1. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno all'asse y .
2. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno alla retta $y = 6$.
3. Si determini il valore di k per cui la retta $y = k$ dimezza l'area di R .
4. Per $0 < t < \sqrt{6}$ sia $A(t)$ l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa t . Si determini $A(1)$.
5. Si determini il valore di t per il quale $A(t)$ è minima.

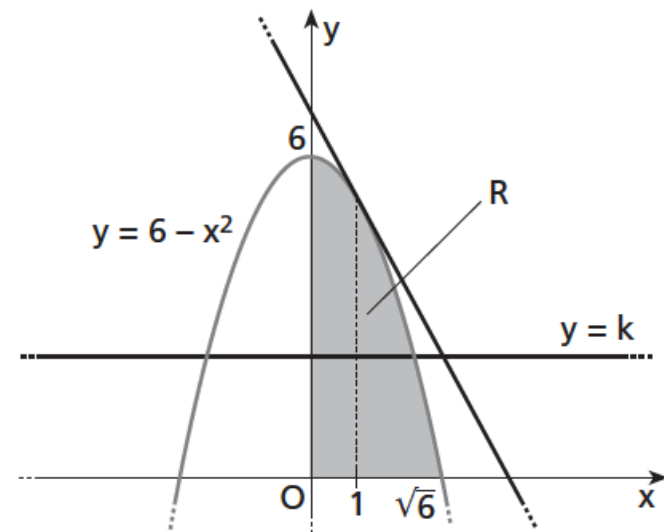
SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO 2005

1. Le intersezioni della parabola $y = 6 - x^2$ con gli assi cartesiani nel primo quadrante si ricavano sostituendo $x = 0$, da cui si ricava il punto $(0; 6)$, e $y = 0$, da cui si ricava il punto $(\sqrt{6}; 0)$ perché bisogna considerare la sola soluzione positiva di $x^2 - 6 = 0$. Il volume del solido ottenuto ruotando la funzione $f(x)$ intorno all'asse y tra i punti di ordinata a e b è dato da:

$$\pi \int_a^b [f(y)]^2 dy.$$

In questo caso è $f(y) = \sqrt{6 - y}$, quindi

$$\pi \int_0^6 (\sqrt{6 - y})^2 dy = \pi \int_0^6 (6 - y) dy = \pi \left[6y - \frac{y^2}{2} \right]_0^6 = \pi (36 - 18) = 18\pi.$$



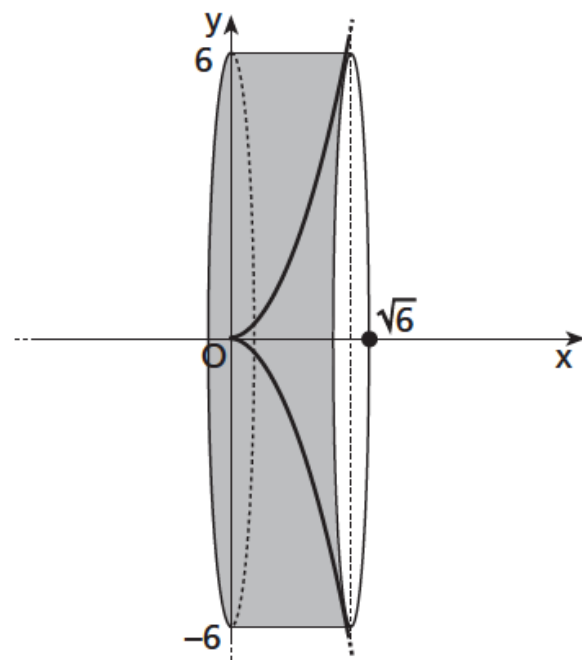
▲ Figura 1.

2. Per trovare il volume richiesto eseguiamo prima una traslazione di vettore $\vec{v}(0; -6)$ che porta la parabola con il vertice nell'origine e la retta $y=6$ sull'asse x .

Si ha:

$$\begin{aligned} V &= 36\pi\sqrt{6} - \pi \int_0^{\sqrt{6}} (-x^2)^2 dx = \\ &= 36\pi\sqrt{6} - \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt{6}} = 36\pi\sqrt{6} - \frac{36}{5}\pi\sqrt{6}. \\ &= \frac{144}{5}\pi\sqrt{6}. \end{aligned}$$

► Figura 2.



3. L'area della parte finita del primo quadrante delimitata dalla retta $y=k$ e dalla parabola è data da $\int_0^b (6-x^2-k) dx$, dove b è l'ascissa dell'intersezione tra $y=k$ e $y=6-x^2$ del primo quadrante, se esiste. Tale ascissa si trova risolvendo $6-k-x^2=0$. La soluzione positiva, e quindi il valore di b , è $\sqrt{6-k}$ con $k \leq 6$. Calcolando l'integrale si ottiene:

$$\left[6x - \frac{x^3}{3} - kx \right]_0^{\sqrt{6-k}} = \left[(6-k)x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{6-k}} = \frac{2}{3}(6-k)^{\frac{3}{2}}$$

Tale valore deve essere uguale alla metà dell'area di R , che è

$$\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{6}} (6-x^2) dx = \frac{1}{2} \left[6x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

Uguagliando le due espressioni si ha:

$$2\sqrt{6} = \frac{2}{3}(6-k)^{\frac{3}{2}}$$

$$6-k = 3\sqrt[3]{2}$$

$$k = 6 - 3\sqrt[3]{2}.$$

4. Il triangolo considerato si trova nel primo quadrante ed è rettangolo. I suoi cateti sono uguali all'ascissa e all'ordinata dell'intersezione della retta tangente a λ rispettivamente con l'asse x e con l'asse y . La generica retta passante per un punto $(a; b)$ ha equazione

$$y - b = m(x - a).$$

In questo caso $a = t$, $b = 6 - t^2$ e m è il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola nel punto di ascissa t , cioè la derivata di $y = 6 - x^2$ calcolata in t . Si ha $m = -2t$ e sostituendo

$$y - 6 + t^2 = (-2t)(x - t)$$

$$y = (-2t)x + t^2 + 6.$$

Sostituendo $x = 0$ si ottiene $y = t^2 + 6$, mentre sostituendo $y = 0$ si ottiene $x = \frac{t^2 + 6}{2t}$. Quindi l'area $A(t)$ vale:

$$A(t) = \frac{1}{2}(t^2 + 6) \frac{t^2 + 6}{2t} = \frac{(t^2 + 6)^2}{4t}.$$

Per $t = 1$ si ha $A(1) = \frac{49}{4}$.

5. Per trovare il valore di t per cui $A(t)$ è minima, calcoliamo la sua derivata

$$D(A(t)) = \frac{2(t^2 + 6)2t \cdot 4t - 4(t^2 + 6)^2}{16t^2} = \frac{3(t^2 + 6)(t^2 - 2)}{4t^2}.$$

La derivata si annulla, nel campo di esistenza stabilito, in $t = \sqrt{2}$. Inoltre per $0 < t < \sqrt{2}$ la derivata è negativa, mentre è positiva per $t > \sqrt{2}$, quindi in $t = \sqrt{2}$ c'è il punto di minimo richiesto.

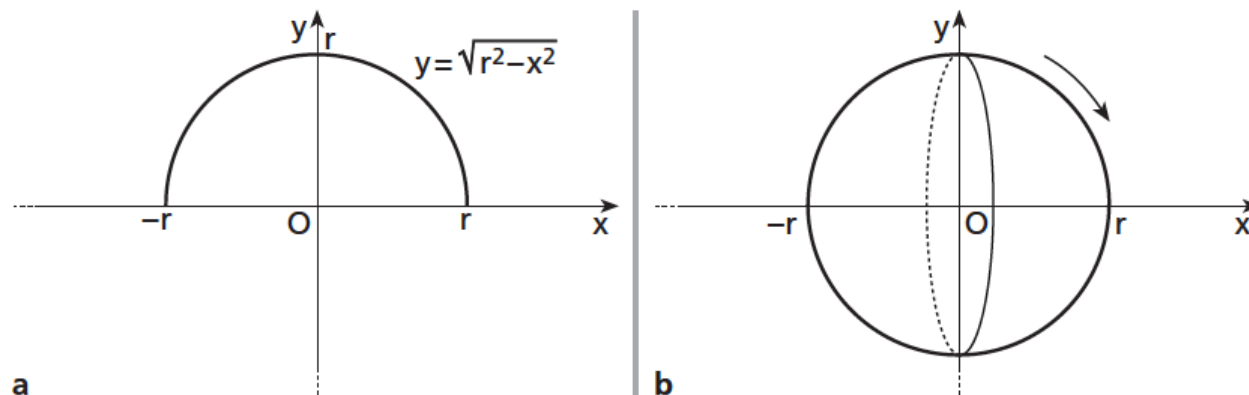
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione straordinaria

- 6** Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare la formula che fornisce il volume di una sfera di raggio assegnato.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione straordinaria

- 6** Si consideri la sfera come il solido ottenuto dalla rotazione di un semicerchio intorno al suo diametro $2r$. Posto il centro del semicerchio nell'origine di un sistema di assi cartesiani e il diametro sull'asse x (figura 9a), l'equazione della semicirconferenza corrispondente è $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Compiendo una rotazione intorno all'asse delle ascisse (figura 9b), per il calcolo integrale il volume della sfera ottenuta vale:

$$V = \pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r = \pi \left(r^3 - \frac{1}{3} r^3 + r^3 - \frac{1}{3} r^3 \right) = \frac{4}{3} \pi r^3.$$



◀ **Figura 9.**

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica

Analisi numerica

Verso l'Esame di Stato



ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2001
Sessione ordinaria

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y) è assegnata la funzione:

$$y = x^2 + a \ln(x + b), \text{ con } a \text{ e } b \text{ diversi da zero.}$$

- a) Si trovino i valori di a e b tali che la curva Γ grafico della funzione passi per l'origine degli assi e presenti un minimo assoluto in $x = 1$.
- b) Si studi e si disegni Γ .
- c) Si determini, applicando uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione della intersezione positiva di Γ con l'asse x .
- d) Si determini l'equazione della curva Γ' simmetrica di Γ rispetto alla retta $y = y(1)$;
- e) Si disegni, per i valori di a e b trovati il grafico di $y = |x^2 + a \ln(x + b)|$.

L'analisi numerica riguarda il punto c).

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2001
Sessione ordinaria

PROBLEMA 2

a) Il C.E. della funzione è $x > -b$. Per il passaggio dall'origine risulta $a \ln b = 0$ e, poiché $a \neq 0$ per ipotesi, si deduce che $\ln b = 0$ da cui $b = 1$ e quindi $x > -1$.

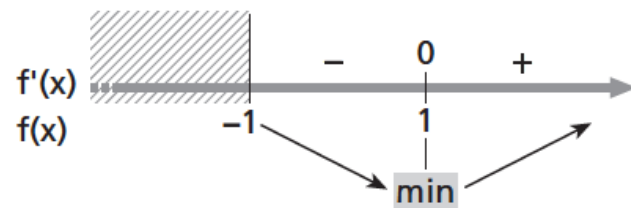
Considerato $y = x^2 + a \ln(x+1)$, la condizione necessaria per avere un estremo nel punto $x=1$ ri-

chiede che $y'(1) = 0$. Dato che $y'(x) = 2x + \frac{a}{x+1}$, $y'(1) = 2 + \frac{a}{2} = 0 \rightarrow a = -4$. La funzione ha forma $y = x^2 - 4 \ln(x+1)$.

Ora bisogna verificare se $x=1$ è un punto di minimo assoluto.

La derivata prima $y'(x) = 2x - \frac{4}{x+1} = 2 \frac{x^2 + x - 2}{x+1}$ ha denominatore sempre positivo, pertanto essa è complessivamente positiva se $x^2 + x - 2 > 0 \rightarrow x < -2 \vee x > 1$. Tenendo conto della condizione di esistenza, si riporta nella figura 5 il quadro della monotonia di f .

Si ricava che la funzione ha un minimo assoluto in $x=1$.



▲ **Figura 5.**

b) Data $f(x) = x^2 - 4\ln(x+1)$, per le precedenti considerazioni, essa ha C.E.: $x > -1$, minimo assoluto $M(1; 1 - 4\ln 2)$ e interseca l'asse y nell'origine del sistema. Non è possibile determinare in modo esatto i punti di intersezione con l'asse x perché l'equazione $x^2 - 4\ln(x+1) = 0$ non è risolvibile algebricamente e si rimanda al punto c per il calcolo numerico. Si osserva comunque che $f(2) = 4 - 4\ln 3 < 0$ e $f(3) = 9 - 4\ln 4 > 0$ e, quindi, c'è un'intersezione positiva compresa tra 2 e 3. I limiti agli estremi del campo di esistenza valgono:

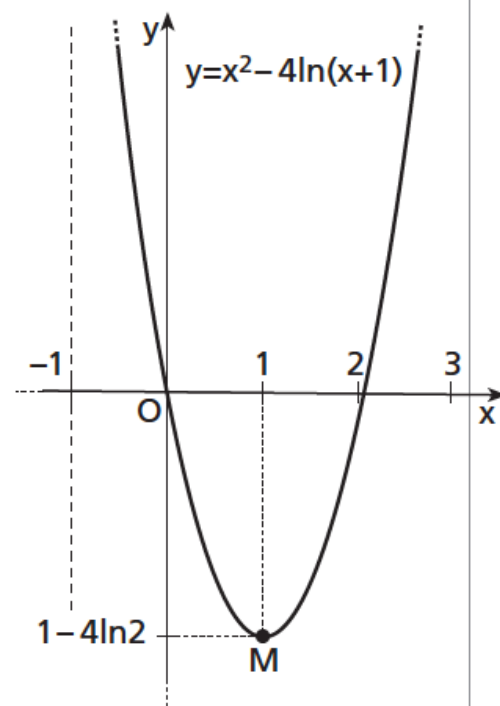
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - 4\ln(x+1)) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4\ln(x+1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - 4 \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right) = (\text{De L'Hospital}) = +\infty.$$

La funzione ha asintoto verticale $x = -1$ e non ha asintoti orizzontali. Inoltre, poiché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 4\ln(x+1))}{x} = +\infty, \text{ la funzione non ha asintoti obliqui.}$$

La derivata seconda $y''(x) = 2 + \frac{4}{(x+1)^2}$ è sempre positiva, pertanto la curva ha sempre concavità verso l'alto. La figura 6 rappresenta il grafico di Γ .



▲ Figura 6.

c) Consideriamo l'intervallo $[2; 3]$: poiché $f(2) < 0$ e $f(3) > 0$, esiste solo uno zero in tale intervallo essendo in esso la derivata prima non nulla. Si valuta lo zero attraverso il metodo di bisezione. La tabella di iterazione è la seguente:

n	a_n	b_n	m_n	ϵ_n
0	2	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{1}{8}$
3	$\frac{17}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{35}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	$\frac{17}{8}$	$\frac{35}{16}$	$\frac{69}{32}$	$\frac{1}{32}$
5	$\frac{17}{8}$	$\frac{69}{32}$	$\frac{137}{64}$	$\frac{1}{64}$

Il valore approssimato dell'intersezione è $x = \frac{137}{64} \simeq 2,14$ con un errore inferiore a $\frac{1}{64}$ cioè a 0,015625.

d) Si determini l'equazione della curva Γ' simmetrica di Γ rispetto alla retta $y = y(1)$.

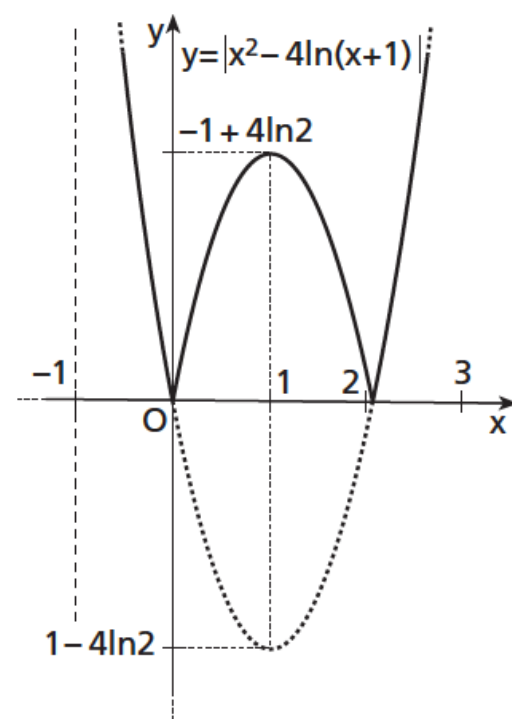
L'asse di simmetria è $y = y(1)$ cioè la retta parallela all'asse delle y ,

$y = 1 - 4\ln 2$. Le equazioni della simmetria sono
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2 - 8\ln 2 - y \end{cases}.$$

La curva trasformata risulta di equazione:

$$y = 4\ln \frac{x+1}{4} - x^2 + 2.$$

e) Il grafico di $y = |x^2 - 4\ln(x+1)|$ coincide con quello di $f(x) = x^2 - 4\ln(x+1)$ per quei valori di x in cui la funzione f è positiva o nulla, mentre, per i restanti valori, si traccia la simmetrica rispetto all'asse delle x . (figura 7).



▲ Figura 7.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2004

PROBLEMA 2

Sia f la funzione così definita:

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2b}x\right) + x$$

con a e b numeri reali diversi da zero.

1. Si dimostri che, comunque scelti a e b , esiste sempre un valore di x tale che

$$f(x) = \frac{a+b}{2}$$

2. Si consideri la funzione g ottenuta dalla f ponendo $a = 2b = 2$. Si studi g e se ne tracci il grafico.
3. Si consideri per $x > 0$ il primo punto di massimo relativo e se ne fornisca una valutazione approssimata applicando un metodo iterativo a scelta.

L'analisi numerica riguarda il punto 3.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME

CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2004

PROBLEMA 2

1. Una funzione f , continua in $[a; b]$, con $f(a) \neq f(b)$, assume, almeno una volta, nell'interno di tale intervallo, un qualsiasi valore compreso fra $f(a)$ e $f(b)$. (Teorema dei valori intermedi, o di Darboux)

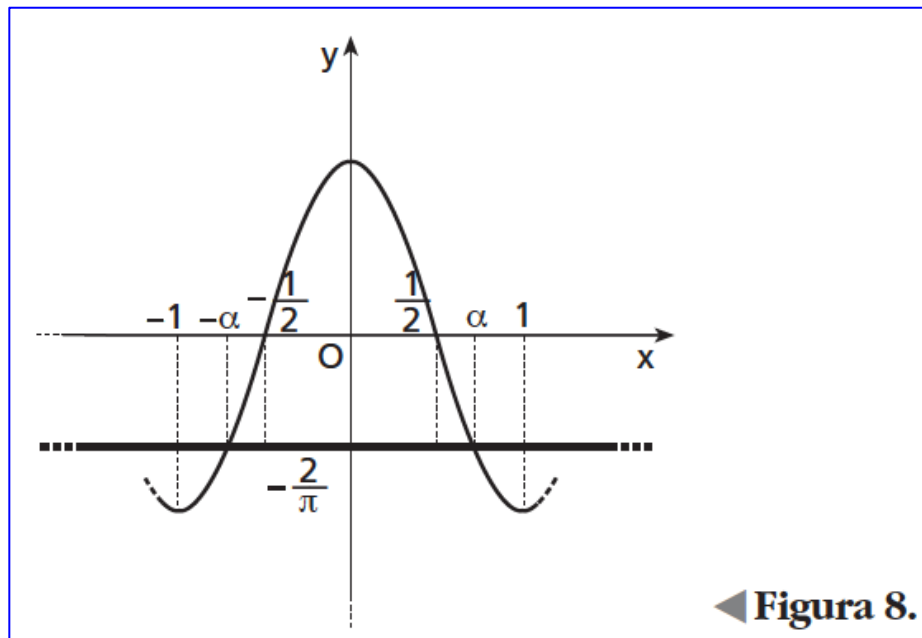
La funzione $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2b}x\right) + x$ è continua su tutto $\mathbb{R}$, in particolare nell'intervallo chiuso limitato $[a; b]$. In tale intervallo la funzione assume ogni valore compreso tra $f(a) = a$ e $f(b) = b$, in particolare il valore $\frac{f(a) + f(b)}{2} = \frac{a + b}{2}$.

2. Ponendo $a = 2b = 2$ si ottiene $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x = \frac{1}{2}\sin(\pi x) + x$.

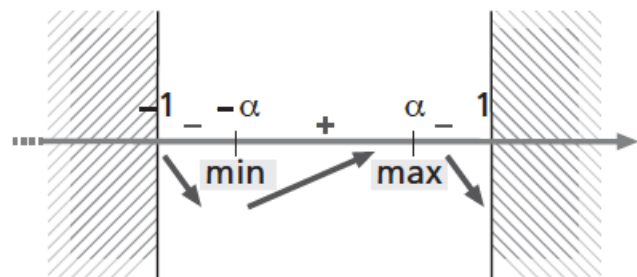
$g(-x) = -g(x)$, la funzione è dispari, quindi simmetrica rispetto all'origine degli assi. $g(0) = 0$, il grafico passa per l'origine.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$$

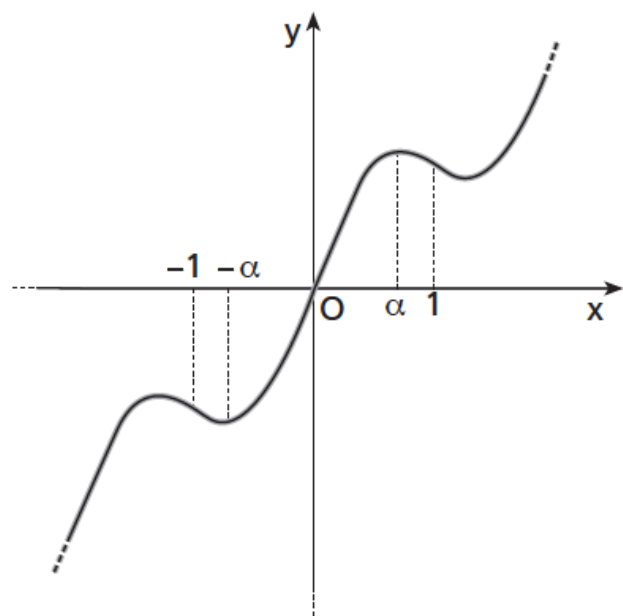
$g'(x) = \frac{1}{2}\pi \cos(\pi x) + 1 > 0$, se $\cos(\pi x) > -\frac{2}{\pi}$. La rappresentazione grafica di $g'(x)$ (figura 8) mostra che $\cos(\pi x) > -\frac{2}{\pi} \Rightarrow -\alpha + 2k < x < \alpha + 2k$, con $\alpha = \frac{1}{\pi} \arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right)$ e $k \in \mathbb{Z}$.



Si hanno quindi punti di minimo relativo per $x = -\frac{1}{\pi} \arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right) + 2k$ e punti di massimo relativo per $x = \frac{1}{\pi} \arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right) + 2k$ (vedi figura 9).



$g''(x) = -\frac{\pi^2}{2} \sin(\pi x) > 0$, se $\sin(\pi x) < 0$, tale condizione è verificata per $1 + 2k < x < 2 + 2k$. Si hanno punti di flesso per $x = 1 + 2k$ e $x = 2 + 2k$. Il grafico di g è rappresentato in figura 10.



◀ Figura 10.

3. Al punto precedente si è ottenuto: $g'(\alpha) = \frac{\pi \cdot \cos \pi}{2} + 1 = 0$.

Considerando che: $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 > 0$ e

$g'(1) = -\frac{\pi}{2} + 1 < 0$, segue che $\alpha \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$.

Si applica il metodo di bisezione a $g'(x)$, ottenendo:

c	$f(c)$	α
$0,75 = (0,5 + 1)/2$	$-0,11 < 0$	$0,5 < \alpha < 0,75$
$0,625 = (0,5 + 0,75)/2$	$-0,40 > 0$	$0,625 < \alpha < 0,75$
$0,6875 = (0,625 + 0,75)/2$	$-0,13 > 0$	$0,6875 < \alpha < 0,75$
$0,71875 = (0,6875 + 0,75)/2$	...	...

Si arriva infine al valore $\alpha \cong 0,72$.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione f definita sull'intervallo $[0; +\infty[$ da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1 \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy , ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se f è *continua* e *derivabile* in 0.
2. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo $[0; +\infty]$, un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
3. Si disegni C e si determini l'equazione della retta r tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.

L'analisi numerica riguarda il punto 2.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO SPERIMENTALE • P.N.I • 2005

PROBLEMA 2

1. Una funzione è continua in un punto x_0 se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. In questo caso, poiché la funzione ha come campo di esistenza $x \geq 0$, esaminiamo la continuità a destra di 0. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} x^2 (3 - 2 \log x) + 1 = 1 = f(0).$$

Infatti per il teorema di De L'Hopital si ha $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \log x = 0$. La funzione è continua in 0.

Una funzione è derivabile in un punto x_0 se esiste ed è finito

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + b) - f(x_0)}{b}.$$

In questo caso:

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{f(b) - f(0)}{b} = \lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} b^2 (3 - 2 \log b) + 1 - 1}{b} = \lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} b (3 - 2 \log b) = 0$$

quindi la funzione è derivabile in 0.

2. $Df(x) = \frac{1}{2}(2x(3 - 2\log x) - \frac{2}{x}x^2) = 2x(1 - \log x)$, quindi la funzione è crescente quando $\log x < 1$, cioè in $]0; e[$, mentre è decrescente in $]e; +\infty[$. In $x = e$ c'è un punto di massimo: $f(e) = \frac{1}{2}e^2 + 1 > 0$. Inoltre $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = [+ \infty \cdot (-\infty)] = -\infty$. In $]1; +\infty[$, quindi, la funzione deve attraversare l'asse x per il

teorema di esistenza degli zeri. Inoltre, essendo la funzione decrescente in tale intervallo, il punto di intersezione tra la funzione e l'asse x è unico.

Per stimare il valore della soluzione si può procedere, per esempio, con il metodo di bisezione. Notiamo innanzitutto che $f(4) \simeq 2,82 > 0$, mentre $f(5) \simeq -1,74 < 0$.

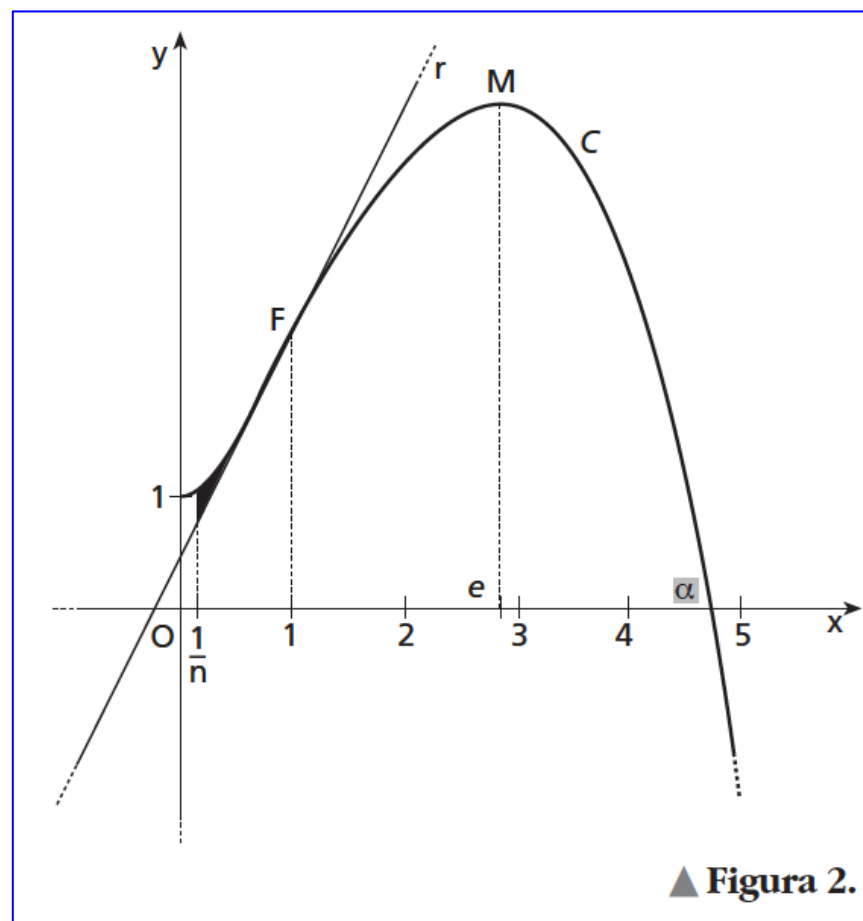
a	$f(a)$	b	$f(b)$	$(a + b)/2$	$f[(a + b)/2]$
4	2,82	5	-1,74	4,5	0,92
4,5	0,92	5	-1,74	4,75	-0,31
4,5	0,92	4,75	-0,31	4,625	0,33

E così via fino alla precisione voluta (la soluzione è circa 4,6901).

3. Per disegnare C , oltre ad utilizzare gli elementi studiati nel punto 2, calcoliamo

$f''(x) = 2 \left[1 - \log x + x \left(-\frac{1}{x} \right) \right] = -2 \log x$. La concavità è rivolta verso l'alto quando $-2 \log x > 0$, cioè quando $x < 1$, mentre è rivolta verso l'alto per $x > 1$. In $x = 1$ c'è un punto di flesso obliquo ($f'(1) = 2$). La generica retta tangente alla curva $f(x)$ in un punto x_0 è $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Sostituendo $x_0 = 1$ si ottiene $y - \frac{5}{2} = 2(x - 1)$ quindi $y = 2x + \frac{1}{2}$ (tangente inflessionale).

Rappresentiamo il grafico di C (figura 2)



▲ Figura 2.

SIMULAZIONE DELLA PROVA D'ESAME DI LICEO SCIENTIFICO CORSO SPERIMENTALE P.N.I.

PROBLEMA 2

Considera le funzioni $f(x) = x + (1 + x)e^{-2x}$ e $g(x) = (1 + x)e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Verifica che f ha un solo asintoto e determina il suo punto d'intersezione con la funzione.
2. Disegna il grafico sommario di f ; dimostra che ha un'unica intersezione con l'asse delle ascisse e determina, con tre iterazioni di un metodo iterativo a piacere, un valore approssimato.

L'analisi numerica riguarda il punto 2.

SOLUZIONE DELLA SIMULAZIONE D'ESAME CORSO SPERIMENTALE P.N.I.

PROBLEMA 2

1. f è continua su $\mathbb{R}$ quindi non ha asintoti verticali.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + (1+x)e^{-2x}) = -\infty - \infty \cdot e^{+\infty} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \left(1 + \frac{1+x}{x} e^{-2x}\right) = 1 + 1 \cdot e^{+\infty} = +\infty.$$

Pertanto f non ha asintoto orizzontale né obliquo per $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1+x}{e^{2x}}\right) = +\infty + 0 = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \left(1 + \frac{1+x}{x} \frac{1}{e^{2x}}\right) = 1 + 0 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{e^{2x}}\right) = 0.$$

Quindi la retta $y = x$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$.

Troviamo l'intersezione fra la f e l'asintoto:

$$\begin{cases} y = x + (1+x)e^{-2x} \\ y = x \end{cases} \rightarrow x + (1+x)e^{-2x} = x, \quad (1+x)e^{-2x} = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow A(-1; -1).$$

2. Dal comportamento per x tendente a $\pm\infty$ e dal teorema di esistenza degli zeri, deduciamo che f ha almeno un punto di intersezione con l'asse delle ascisse; per dimostrarne l'unicità studiamo la derivata prima: $f'(x) = 1 - (1 + 2x)e^{-2x}$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - (1 + 2x)e^{-2x} \geq 0 \rightarrow 1 - \frac{1 + 2x}{e^{2x}} \geq 0 \rightarrow \frac{e^{2x} - 2x - 1}{e^{2x}} \geq 0 \rightarrow e^{2x} - 2x - 1 \geq 0.$$

Per risolvere questa disequazione cerchiamo di capire l'andamento della funzione $u(x) = e^{2x} - 2x - 1$.

$u'(x) = 2e^{2x} - 2$ quindi:

$u'(x) < 0$ per $x < 0 \rightarrow u(x)$ decrescente;

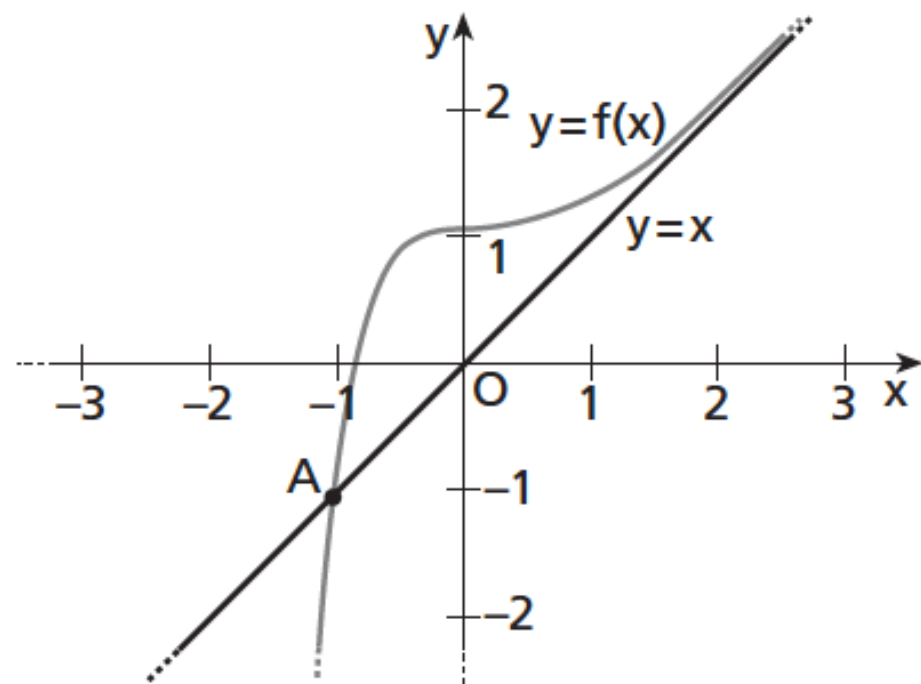
$u'(x) > 0$ per $x > 0 \rightarrow u(x)$ crescente

$u'(x) = 0$ per $x = 0 \rightarrow (0; 0)$ min. rel. e ass.

Pertanto $f'(x) = u(x)e^{-2x} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $f'(x) = u(x)e^{-2x} = 0$ soltanto se $x = 0$; quindi la f è monotona crescente $\forall x \in \mathbb{R}$ e interseca una sola volta l'asse delle ascisse.

Completiamo lo studio di f con la derivata seconda.

$f''(x) = 4xe^{-2x} \rightarrow$ per $x < 0$ la concavità è rivolta verso il basso;
per $x > 0$ la concavità è rivolta verso l'alto;
nel punto $(0; 1)$ flesso orizzontale.



◀ **Figura 5.**

Per determinare lo zero di f utilizziamo il metodo di bisezione. Nella tabella sono riportati i risultati di tre iterazioni a partire dall'intervallo $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$.

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$(a + b)/2$	$f[(a + b)/2]$	errore
0	-1	-0,5	-1	0,859141	-0,75	0,370422	0,25
1	-1	-0,75	-1	0,370422	-0,875	-0,15567	0,125
2	-0,875	-0,75	-0,15567	0,370422	-0,8125	0,139704	0,0625
3	-0,875	-0,8125	-0,15567	0,139704	-0,84375	0,00093	0,03125

Pertanto $-0,84375$ è un valore approssimato dello zero di f con un'approssimazione di 0,03125.