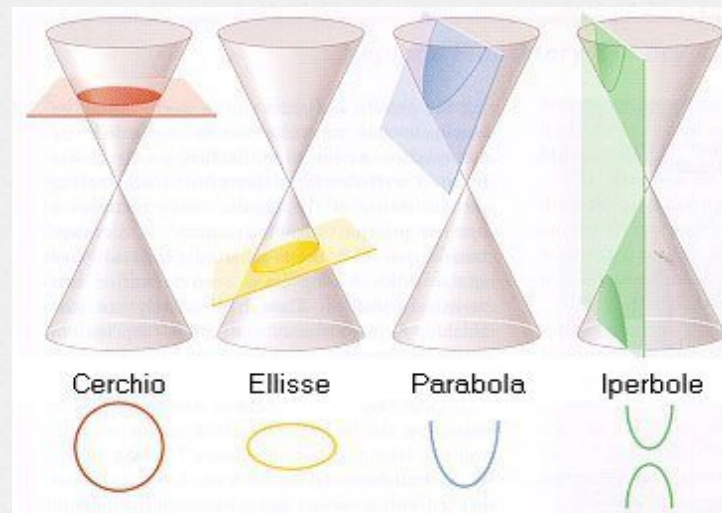


Docente: Vincenzo Pappalardo  
Materia: Matematica

# Geometria Analitica

## Circonferenza

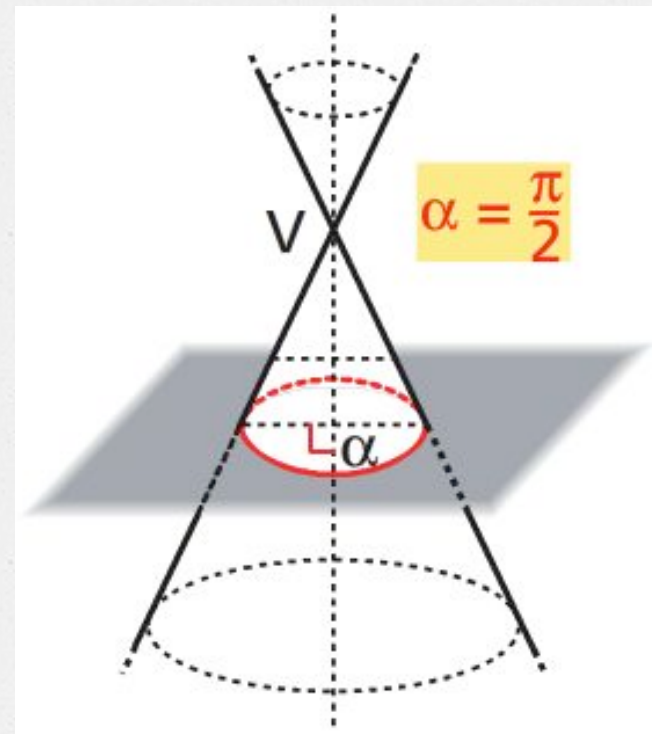


## INTRODUZIONE

*La circonferenza* fa parte di un insieme di curve (ellisse, parabola, iperbole) chiamate *coniche*, perché si possono ottenere tagliando un cono con un piano.

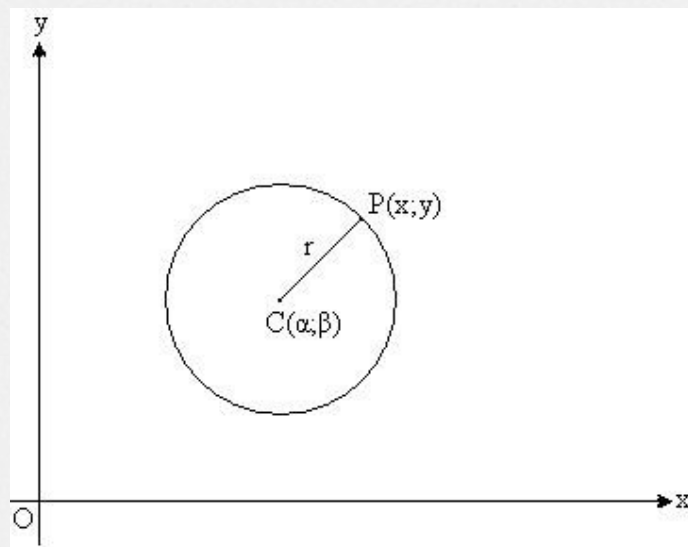
Consideriamo un cono e tagliamolo con un piano perpendicolare al suo asse.

*La figura che si ottiene dall'intersezione del piano e la superficie del cono è una circonferenza.*





# LA CIRCONFERENZA E LA SUA EQUAZIONE



*La circonferenza come luogo geometrico*

Assegnato nel piano un punto  $C=(\alpha, \beta)$ , detto centro, si chiama circonferenza la curva piana luogo geometrico dei punti  $P=(x, y)$  equidistanti da  $C$ :

$$PC = \text{costante} = r$$

Trasformiamo la proprietà che godono i punti P in una equazione: **l'equazione della circonferenza**, ossia l'equazione che deve essere soddisfatta dai punti P del luogo geometrico.

$$\overline{PC} = r$$

*usiamo la formula della distanza tra due punti*

$$\begin{aligned}\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} &= r \rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \\ \rightarrow x^2 + \alpha^2 - 2\alpha x + y^2 + \beta^2 - 2\beta y - r^2 &= 0\end{aligned}$$

Poniamo:

$$a = -2\alpha \quad b = -2\beta \quad c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$$

si ottiene:



*Equazione della circonferenza*  
 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

*RIASSUNTO FORMULE*

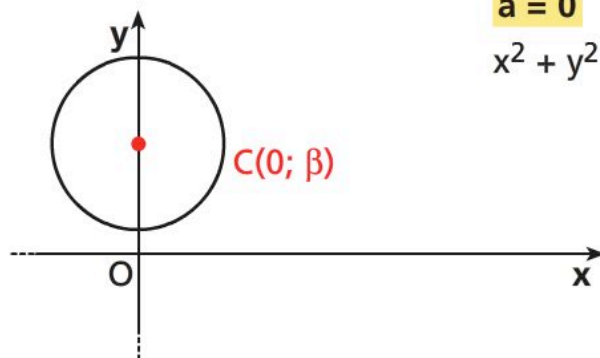
*centro*  $\rightarrow C = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$

*raggio*  $\rightarrow r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$

*condizione esistenza circonferenza*

$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c \geq 0$$

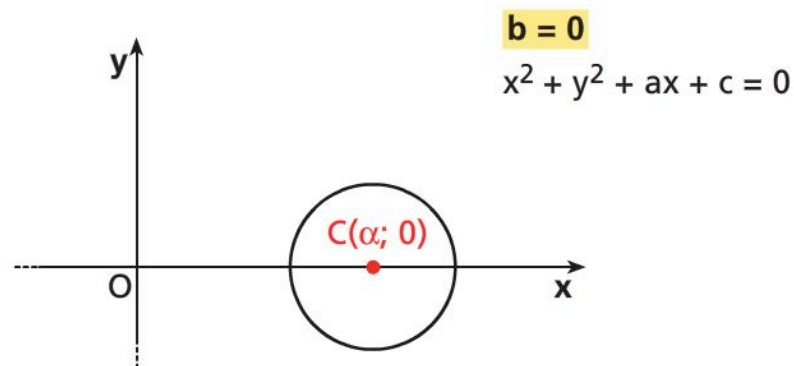
## CIRCONFERENZE PARTICOLARI



$$a = 0$$

$$x^2 + y^2 + by + c = 0$$

a. Si ha  $\alpha = 0$ , quindi  $C(0; \beta)$ : il centro appartiene all'asse  $y$ .

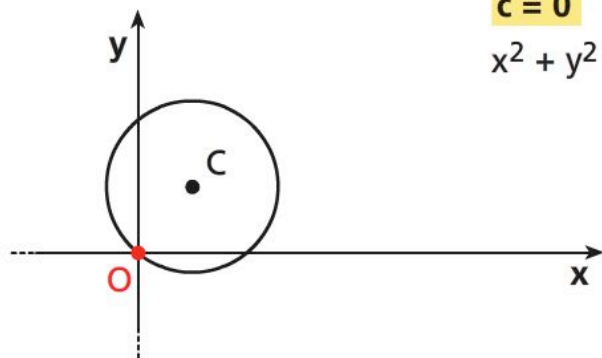


$$b = 0$$

$$x^2 + y^2 + ax + c = 0$$

b. Si ha  $\beta = 0$ , quindi  $C(\alpha; 0)$ : il centro appartiene all'asse  $x$ .

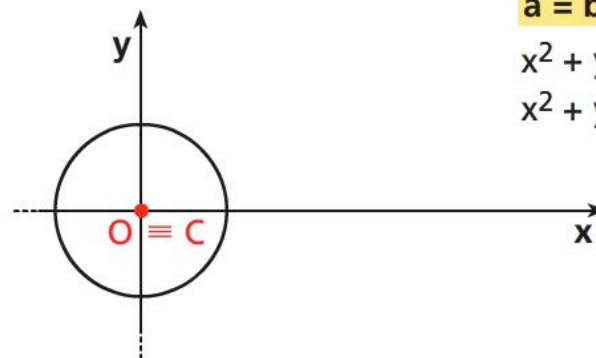




$$c = 0$$

$$x^2 + y^2 + ax + by = 0$$

c. Le coordinate di  $O(0; 0)$  verificano l'equazione, quindi la circonferenza passa per l'origine degli assi.

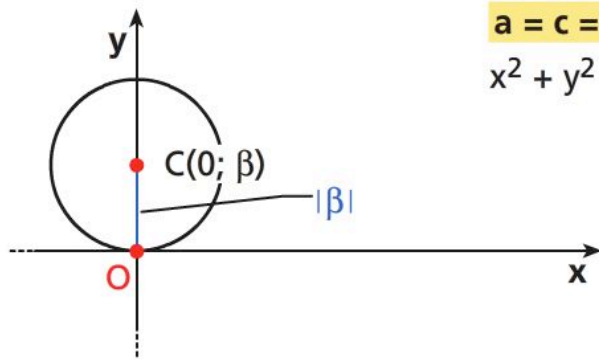


$$a = b = 0$$

$$x^2 + y^2 + c = 0$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (r = \sqrt{-c})$$

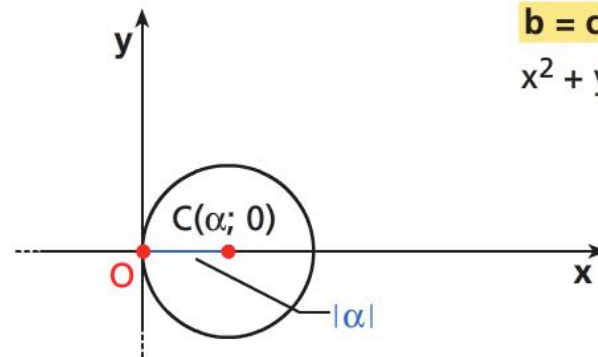
d. Si ha  $\alpha = \beta = 0$ , quindi  $C(0; 0)$ .  
La circonferenza ha il centro nell'origine.



$$a = c = 0$$

$$x^2 + y^2 + by = 0$$

e. La circonferenza ha centro sull'asse y e passa per l'origine. Il raggio misura  $r = \sqrt{\beta^2} = |\beta|$ .



$$b = c = 0$$

$$x^2 + y^2 + ax = 0$$

f. La circonferenza ha centro sull'asse x e passa per l'origine. Il raggio misura  $r = \sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$ .

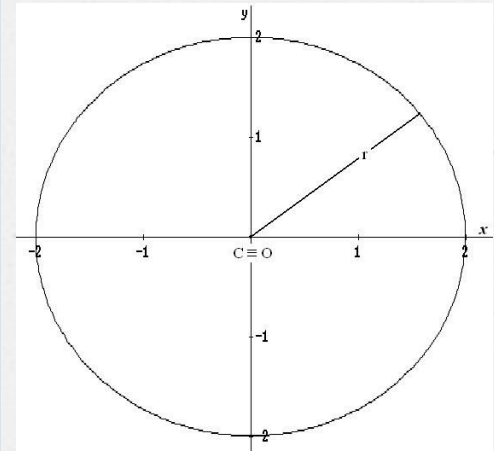


## ESERCIZI

*L'equazione:  $x^2 + y^2 = 4$  rappresenta una circonferenza? In caso affermativo determinare centro e raggio.*

$$a = 0; \quad b = 0; \quad c = -4; \quad a^2/4 + b^2/4 - c = 4$$

L'equazione data rappresenta una circonferenza reale di centro  $C(\alpha; \beta) = C(-a/2; -b/2) = C(0;0)$  e di raggio  $r = 2$ .



*L'equazione:  $x^2 + y^2 + 9 = 0$  rappresenta una circonferenza?*

$$a = 0; \quad b = 0; \quad c = -9; \quad a^2/4 + b^2/4 - c = -9$$

L'equazione data non rappresenta una circonferenza.

## ESERCIZIO GUIDA

Indichiamo quale, fra le seguenti equazioni, è quella di una circonferenza:

a)  $x^2 + y^2 - x + y + 5 = 0$ ;      b)  $2x^2 + 2y^2 - x - 4y + 2 = 0$ ;      c)  $x^2 - y^2 + 5x = 0$ .

a) Poiché la misura del raggio deve essere un numero reale, nella formula  $r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$  il radicando deve essere positivo.

Sostituendo i valori  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 5$ , otteniamo per il radicando:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 5 = -\frac{18}{4} < 0 \rightarrow \text{l'equazione non è quella di una circonferenza.}$$

b) Dividiamo entrambi i membri per 2:

$$x^2 + y^2 - \frac{x}{2} - 2y + 1 = 0.$$

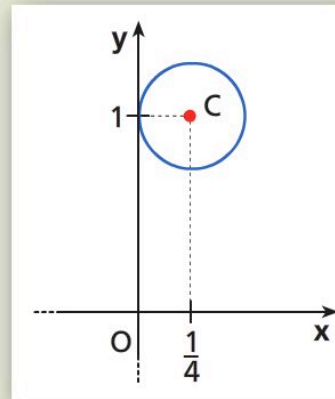
Sostituiamo  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $b = -2$ ,  $c = 1$  nell'espressione  $\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c$ :

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1 - 1 = \frac{1}{16} > 0.$$

L'equazione data, quindi, è quella di una circonferenza. Il raggio misura  $\frac{1}{4}$ .

Le coordinate del centro sono  $x_C = -\frac{a}{2} = \frac{1}{4}$  e  $y_C = -\frac{b}{2} = 1$  (figura sopra).

c)  $x^2 - y^2 + 5x = 0$  non è l'equazione di una circonferenza perché il coefficiente 1 di  $x^2$  non è uguale a coefficiente  $-1$  di  $y^2$ .





Determinare per quali valori del parametro reale  $k$  l'equazione:  $3x^2 + 3y^2 - 6(k-1)x + 27 = 0$  rappresenta una circonferenza.

Affinchè l'equazione data rappresenti una circonferenza si deve verificare che:

$$a^2/4 + b^2/4 - c \geq 0, \text{ cioè } (k-1)^2 - 9 \geq 0; \quad k^2 - 2k - 8 \geq 0, \quad \text{verificata per } k \leq -2 \cup k \geq 4.$$

In particolare per  $k = -2$  e per  $k = 4$  la circonferenza è degenera ( $r = 0$ ), e si riduce ai punti:

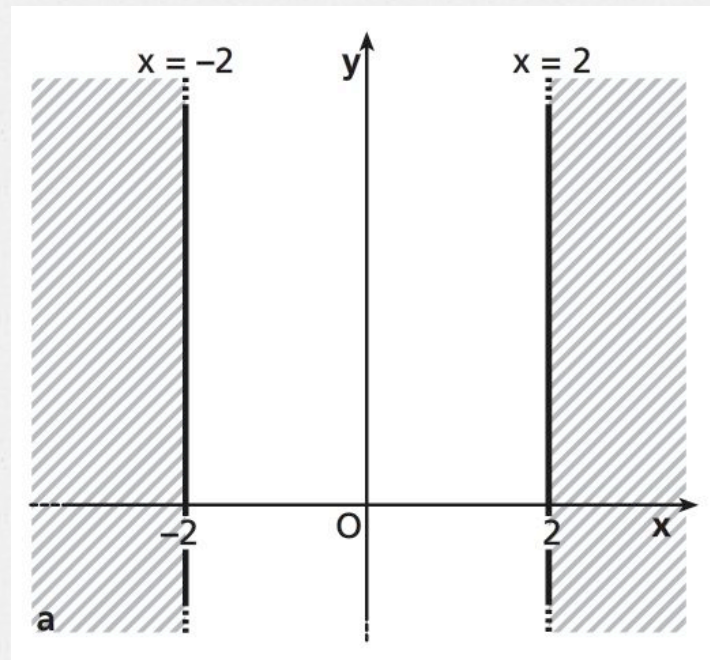
$C_1(-3;0)$ , per  $k = -2$ , e  $C_2(3;0)$ , per  $k = 4$ .

$$\text{Infatti si ha: } \left| \begin{array}{l} \text{per } k = -2 \rightarrow x^2 + y^2 + 6x + 9 = 0 \rightarrow (x+3)^2 + y^2 = 0, \text{ verificata solo per } \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases} \\ \text{per } k = 4 \rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 + y^2 = 0, \text{ verificata solo per } \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Tracciare il grafico della seguente funzione:

$$y = 2 + \sqrt{4 - x^2}$$

Cominciamo a determinare il dominio della funzione. Essendo una funzione irrazionale intera, il dominio è:



$$4 - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 - 4 \leq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow D = [-2; 2]$$



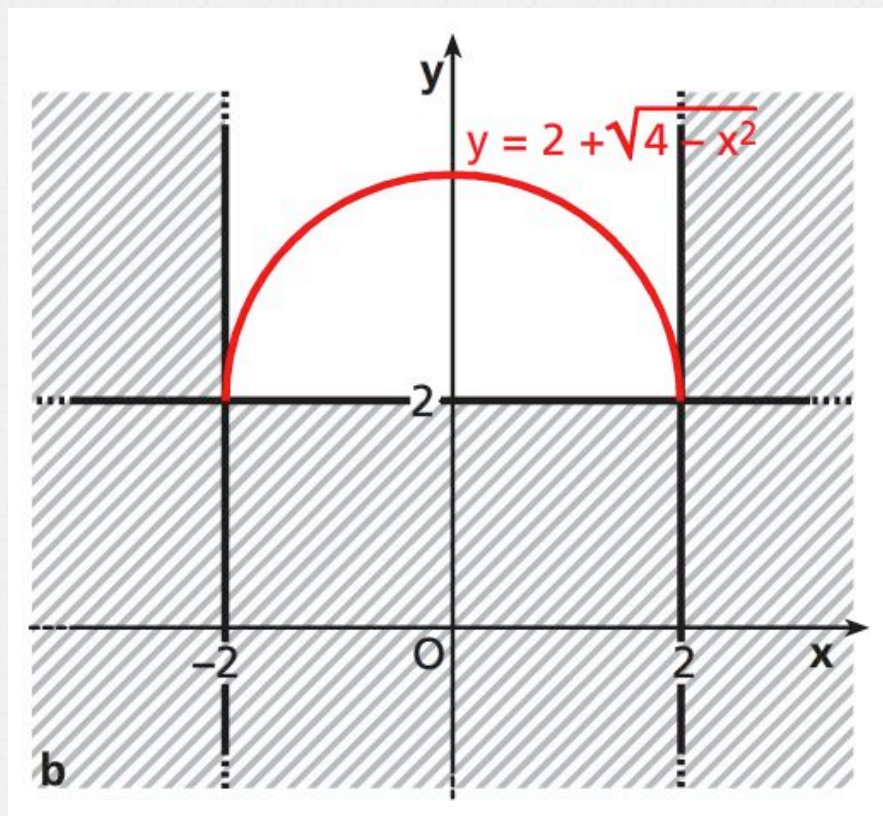
Per rappresentare la funzione, scriviamola come:

$$y - 2 = \sqrt{4 - x^2}$$

Tenendo presente il dominio, questa funzione è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} y - 2 \geq 0 \\ (y - 2)^2 = 4 - x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 2 \\ x^2 + y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

Pertanto, il grafico della funzione è quello in figura. Si noti il dominio e il codominio della funzione.





## ESERCIZIO GUIDA

Rappresentiamo graficamente la curva di equazione:

$$x^2 + y^2 - 4|x| - 4 = 0.$$

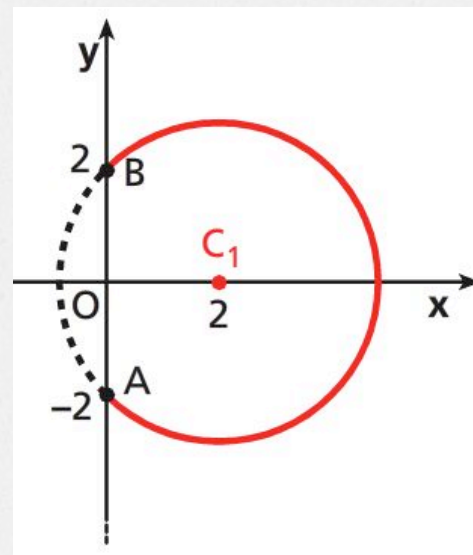
Poiché

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

allora l'equazione data risulta equivalente all'unione delle soluzioni dei due sistemi:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0 \end{cases}$$

La rappresentazione delle soluzioni del primo sistema è costituita dai punti della circonferenza di equazione  $x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0$  contenuti nel semipiano delle  $x \geq 0$ .

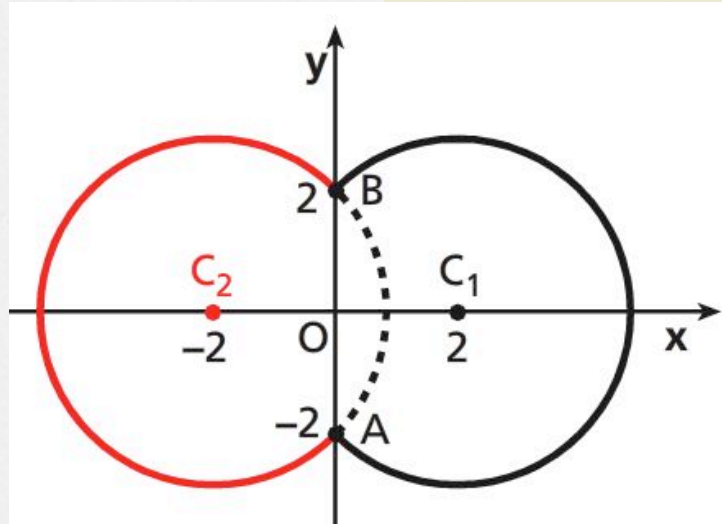


La circonferenza ha centro  $C_1(2; 0)$  e raggio  $r = 2\sqrt{2}$  e passa per i punti  $A(0; -2)$  e  $B(0; 2)$ .

Disegniamo solo l'arco di circonferenza contenuto nel semipiano delle  $x \geq 0$  (figura a).

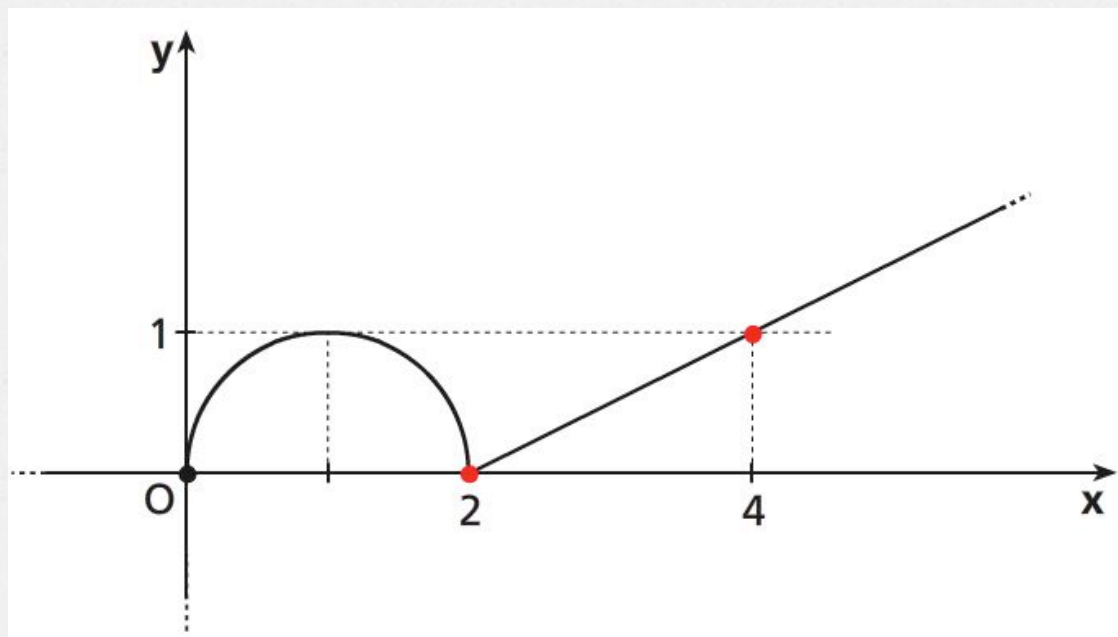
La rappresentazione delle soluzioni del secondo sistema è costituita dai punti della circonferenza di equazione  $x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0$  contenuti nel semipiano delle  $x < 0$ .

Tale circonferenza ha centro  $C_2(-2; 0)$  e raggio  $r = 2\sqrt{2}$  e passa per i punti  $A(0; -2)$  e  $B(0; 2)$ . Disegniamo solo l'arco di circonferenza contenuto nel semipiano delle  $x < 0$  (figu-





Trovare l'equazione corrispondente al grafico utilizzando i dati della figura.



Il grafico è costituito da una semicirconferenza nell'intervallo  $0 \leq x \leq 2$  e da una semiretta nell'intervallo  $x > 2$ .

Dai dati del grafico, conosciamo centro  $C=(1;0)$  e raggio  $r=1$  della circonferenza, per cui l'equazione sarà:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

Poiché i punti della semicirconferenza hanno  $y \geq 0$ , otteniamo l'espressione della funzione nell'intervallo  $0 \leq x \leq 2$ :

$$y^2 = 2x - x^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{2x - x^2} \xrightarrow[\text{la parte positiva}]{\text{prendiamo solo}} y = \sqrt{2x - x^2}$$



La semiretta passa per i punti (2;0) e (4;1), per cui, utilizzando la formula della retta passante per due punti, otteniamo l'espressione della funzione nell'intervallo  $x > 2$ :

$$\frac{y-0}{1-0} = \frac{x-2}{4-2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 1$$

In definitiva, la curva in figura rappresenta il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x - x^2} & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x - 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

## ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo graficamente la seguente disequazione irrazionale:

$$\sqrt{-x^2 + 2x + 8} + 4 \geq 2x.$$

Isoliamo la radice a sinistra del segno di disuguaglianza:

$$\sqrt{-x^2 + 2x + 8} \geq 2x - 4.$$

Dai due membri della disequazione ottenuta ricaviamo le equazioni di due funzioni:

$$y = \sqrt{-x^2 + 2x + 8},$$

$$y = 2x - 4.$$

Per disegnare il grafico della prima funzione,

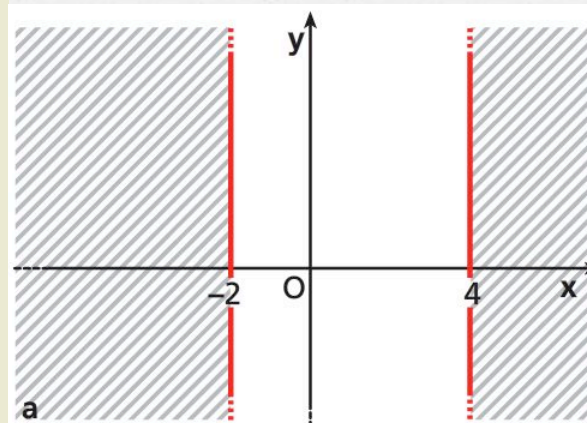
$$y = \sqrt{-x^2 + 2x + 8},$$

determiniamo il suo dominio ponendo il radicando maggiore o uguale a 0:

$$-x^2 + 2x + 8 \geq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq 4.$$

Il dominio della funzione è dunque l'insieme

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 4\} \text{ (figura a).}$$





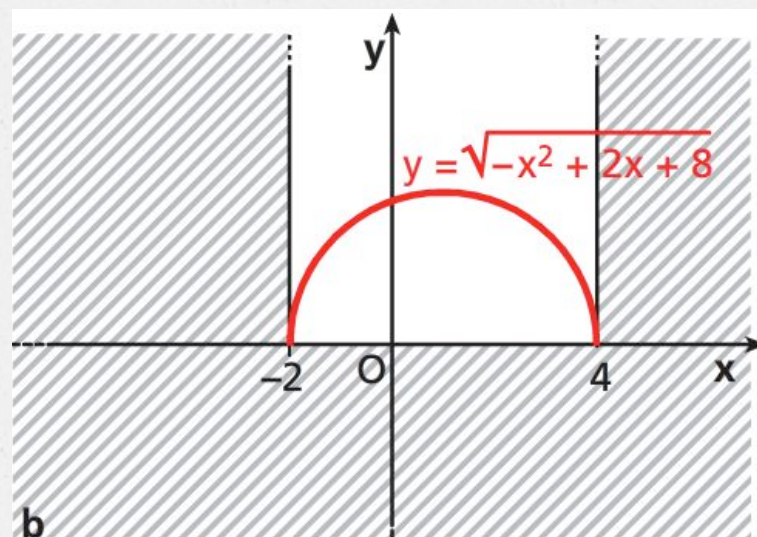
L'equazione della prima funzione,

$$y = \sqrt{-x^2 + 2x + 8},$$

è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = -x^2 + 2x + 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases}$$

che rappresenta una semicirconferenza di centro  $(1; 0)$  e raggio 3 (figura *b*).





La seconda funzione corrisponde alla retta di equazione

$$y = 2x - 4,$$

che interseca l'asse  $x$  in  $(2; 0)$  (figura  $c$ ).

Dal grafico leggiamo, in modo approssimato, l'ascissa  $\alpha$  del punto di intersezione tra la retta e la circonferenza, nella parte di piano in cui la disequazione ha significato:

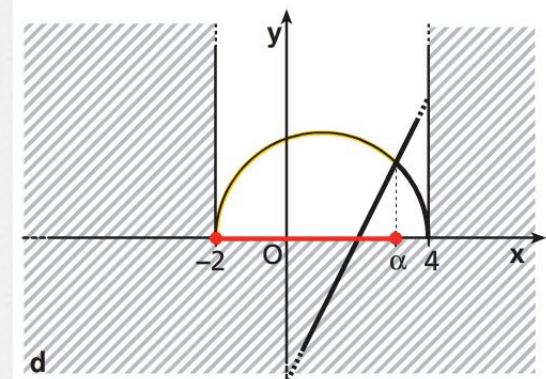
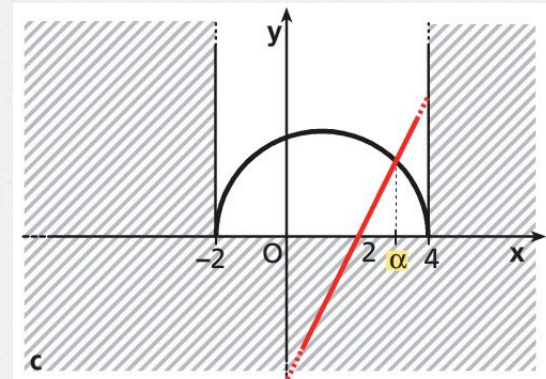
$$\alpha \simeq 3,1.$$

Osserviamo nel grafico tracciato che la disequazione  $\sqrt{-x^2 + 2x + 8} \geq 2x - 4$  mette a confronto l'ordinata di un punto della circonferenza con l'ordinata di un punto della retta con la stessa ascissa.

Evidenziamo sul grafico la zona in cui i punti della circonferenza hanno ordinate maggiori o uguali rispetto alle ordinate dei punti corrispondenti della retta (figura  $d$ ).

Le ascisse di questi punti sono le soluzioni della disequazione data:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq \alpha, \alpha \simeq 3,1\}.$$





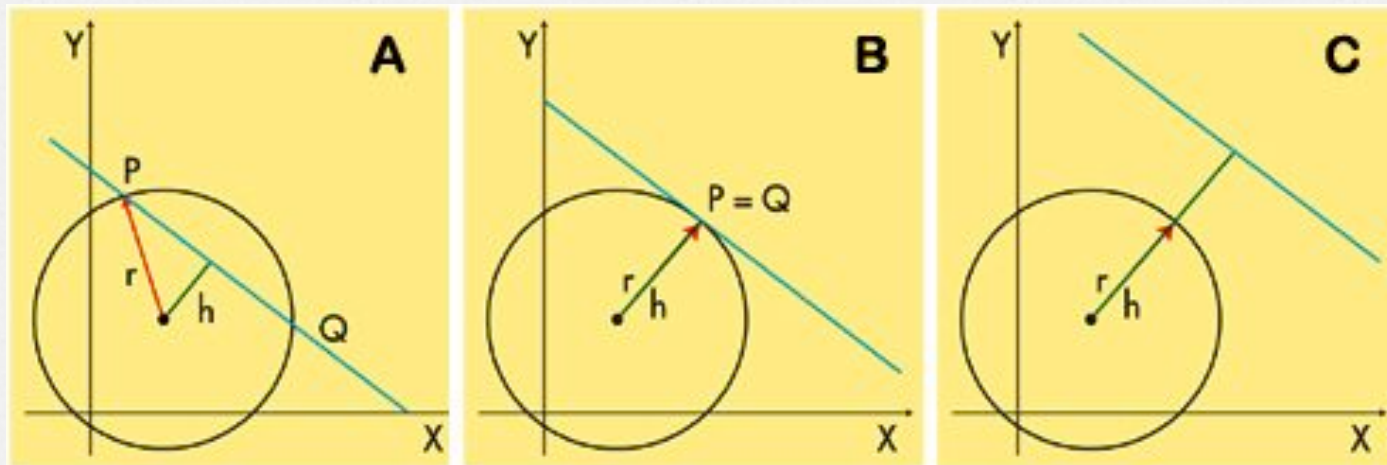
## POSIZIONE DI UNA RETTA RISPETTO ALLA CIRCONFERENZA

Per studiare la posizione di una retta rispetto a una circonferenza, dobbiamo determinare quante sono le soluzioni del seguente sistema (metodo di sostituzione):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = mx + q \end{cases}$$

- $\Delta > 0 \rightarrow$  retta secante (soluzioni reali e distinte)
- $\Delta = 0 \rightarrow$  retta tangente (soluzioni reali e coincidenti)
- $\Delta < 0 \rightarrow$  retta esterna (non ci sono soluzioni reali)

La posizione di una retta rispetto a una circonferenza è possibile definirla anche dalla distanza  $h$  della retta rispetto al centro della circonferenza:



$h < r \rightarrow$  retta secante  
 $h = r \rightarrow$  retta tangente  
 $h > r \rightarrow$  retta esterna



## ESERCIZI

Determinare gli eventuali punti di intersezione tra la circonferenza di equazione:  $x^2+y^2-2x-2y+1=0$  e la retta di equazione:  $x-2y-1=0$ .

Per determinare gli eventuali punti d'intersezione tra la retta e la circonferenza, dobbiamo risolvere il seguente sistema di 2° grado:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

Metodo di sostituzione: ricaviamo la  $x$  dalla seconda equazione e sostituiamola nella prima:

$$\begin{cases} x = 2y + 1 \\ (2y + 1)^2 + y^2 - 2(2y + 1) - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Effettuiamo le dovute operazioni:

$$\begin{cases} x = 2y + 1 \\ 4y^2 + 4y + 1 + y^2 - 4y - 2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ 5y^2 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ y(5y - 2) = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene

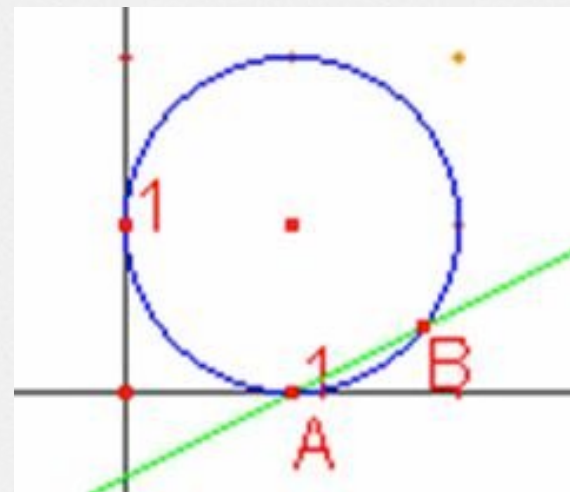
$$\begin{cases} x = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

A(1;0) e

$$\begin{cases} x = 2y + 1 \\ 5y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \cdot \frac{2}{5} + 1 = \frac{4}{5} + 1 = \frac{9}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$$

B $\left(\frac{9}{5}; \frac{2}{5}\right)$

La retta è secante alla circonferenza nei punti:  
A=(1;0) e B=(9/5;2/5)





Determinare gli eventuali punti di intersezione tra la circonferenza di equazione:  $x^2 + y^2 = 1$  e la retta di equazione:  $y = -x + 5$ .

Il sistema da risolvere è il seguente:

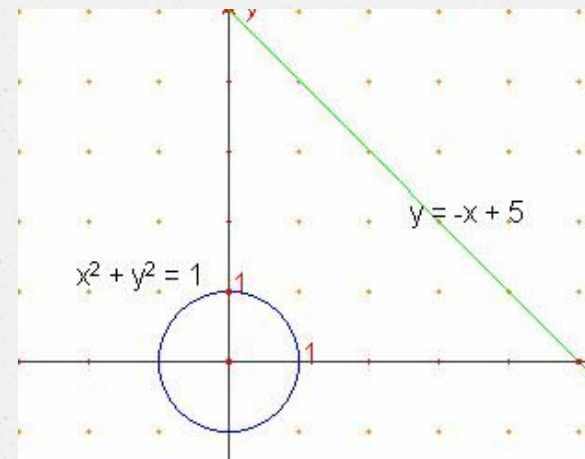
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = -x + 5 \end{cases}$$

Metodo di sostituzione: 
$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ x^2 + (-x + 5)^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x + 5 \\ x^2 + x^2 - 10x + 25 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ x^2 - 5x + 12 = 0 \end{cases}$$

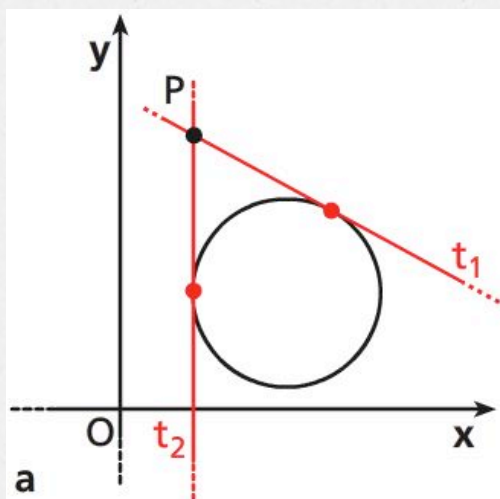
$$\Delta < 0$$

*il sistema non ammette soluzioni  
la retta è esterna*

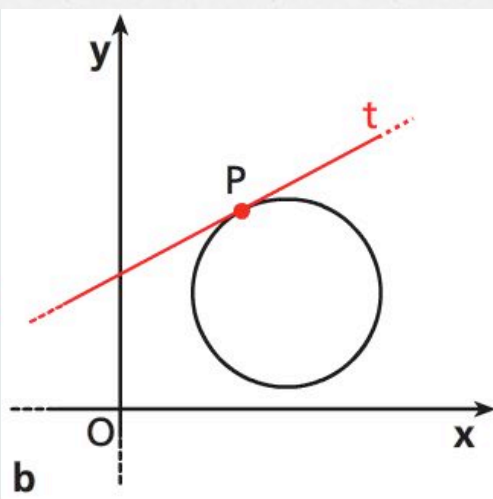


## LE RETTE TANGENTI A UNA CIRCONFERENZA

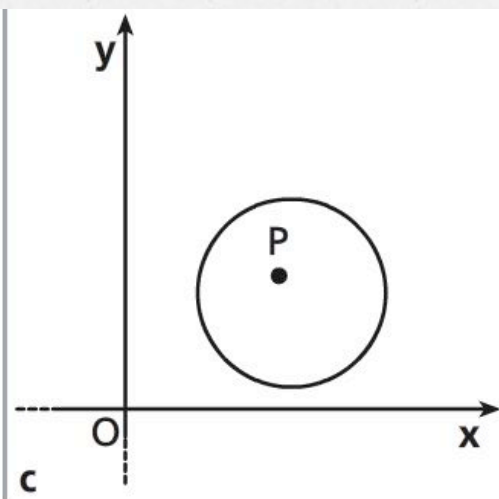
Dato un punto  $P=(x_0;y_0)$  e una circonferenza qualsiasi di equazione  $x^2+y^2+ax+by+c=0$ , si possono presentare i seguenti tre casi:



P è esterno  
alla circonferenza



P appartiene  
alla circonferenza



P è interno  
alla circonferenza



❑ Metodo generale, valido per tutte le coniche (circonferenza, ellisse, parabola, iperbole)

**METODO DEL DISCRIMINANTE NULLO  $\Delta = 0$**

Determinare le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione:  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  condotte dal punto  $P(9/4; 0)$ .

1. Verifico se  $P$  appartiene alla circonferenza:

$$81/16 - 9/2 \neq 0$$

$P$  non appartiene alla circonferenza, quindi posso avere due soluzioni (due rette tangenti), se  $P$  è esterno, nessuna soluzione (nessuna retta tangente), se  $P$  è interno alla circonferenza.

2. Si scrive il sistema formato dall'equazione della circonferenza e quella del fascio di rette passanti per P:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ y = m(x - 9/4) \end{cases}$$

Metodo di sostituzione:

$$x^2 + m^2 \left( x - \frac{9}{4} \right)^2 - 2x = 0$$



Dopo varie operazioni algebriche si ottiene un'equazione di 2° grado i cui coefficienti della x sono funzioni del parametro m:

$$16(1+m^2)x^2 - (72m^2 + 32)x + 81m^2 = 0$$

3. Si pone la condizione di tangenza  $\Delta=0$ :

$$\Delta=b^2 - 4ac = (72m^2 + 32)^2 - 4 \cdot 16(1+m^2) \cdot (81m^2) = 0$$

e l'equazione di 2° grado rispetto a m ammette le seguenti soluzioni:

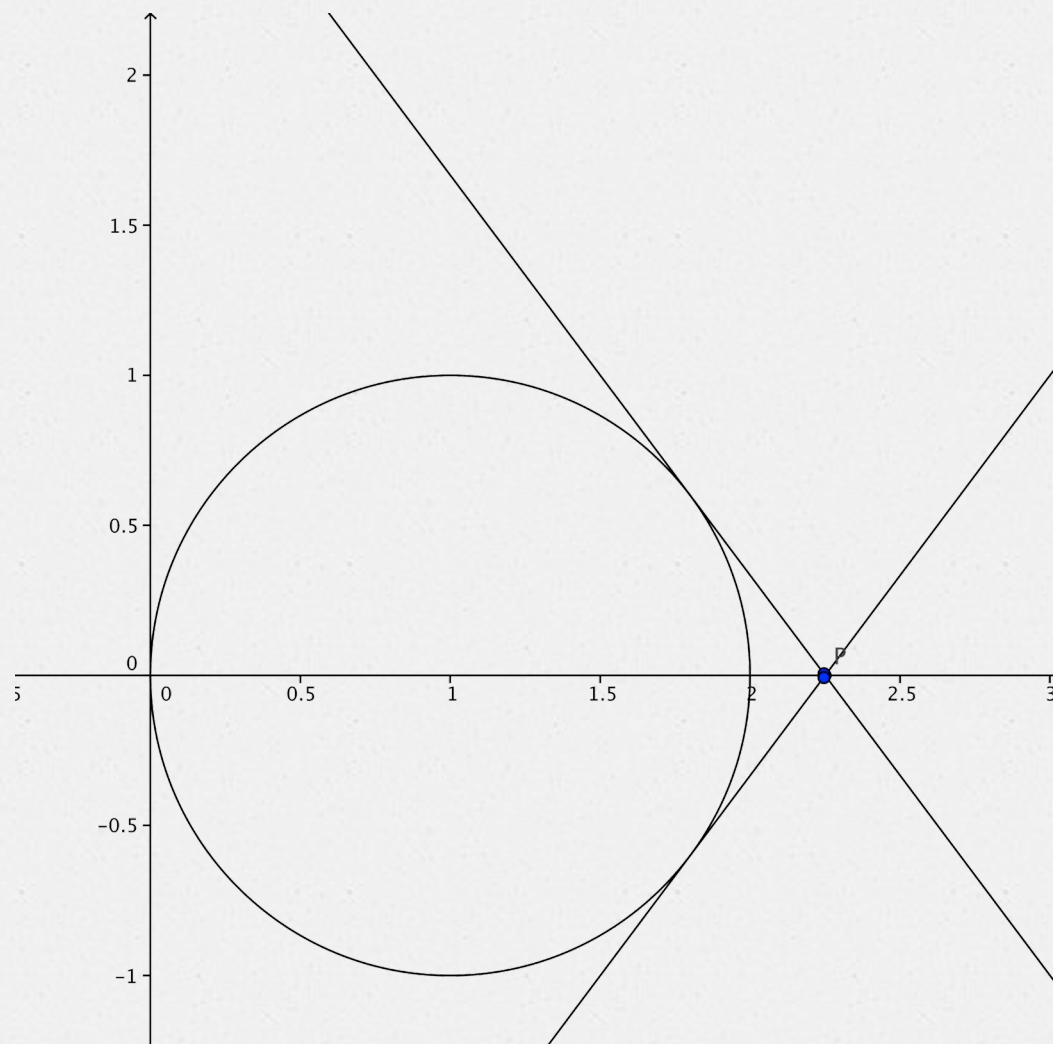
$$-144m^2 + 256 = 0 \qquad m_{1,2} = \pm \frac{4}{3}$$

4. Poiché le soluzioni sono due, il punto P è esterno alla retta e le rette tangenti alla circonferenza sono due:

Rette tangenti alla circonferenza passanti per P

$$y = \frac{4}{3}x - 3 \qquad y = -\frac{4}{3}x + 3$$





### ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza  $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$  condotte dal punto  $P(-3; -2)$ .

Rappresentiamo la circonferenza e il punto  $P$ . La circonferenza ha centro  $(0; 2)$  e raggio 3. Il punto  $P$  è esterno alla circonferenza, quindi le tangenti sono due.

- Utilizziamo il I metodo ( $\Delta = 0$ ). L'equazione di una retta generica per  $P$  è  $y + 2 = m(x + 3)$  e cioè  $y = mx + 3m - 2$  con esclusione della retta  $x = -3$  parallela all'asse  $y$ .

Mettiamola a sistema con l'equazione della circonferenza:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0 \\ y = mx + 3m - 2 \end{cases}$$

Troviamo l'equazione risolvente e riduciamo a forma normale:

$$x^2(1 + m^2) - 2m(4 - 3m)x + 9m^2 - 24m + 7 = 0.$$

Poniamo la condizione di tangenza  $\frac{\Delta}{4} = 0$ :

$$m^2(4 - 3m)^2 - (1 + m^2)(9m^2 - 24m + 7) = 0$$



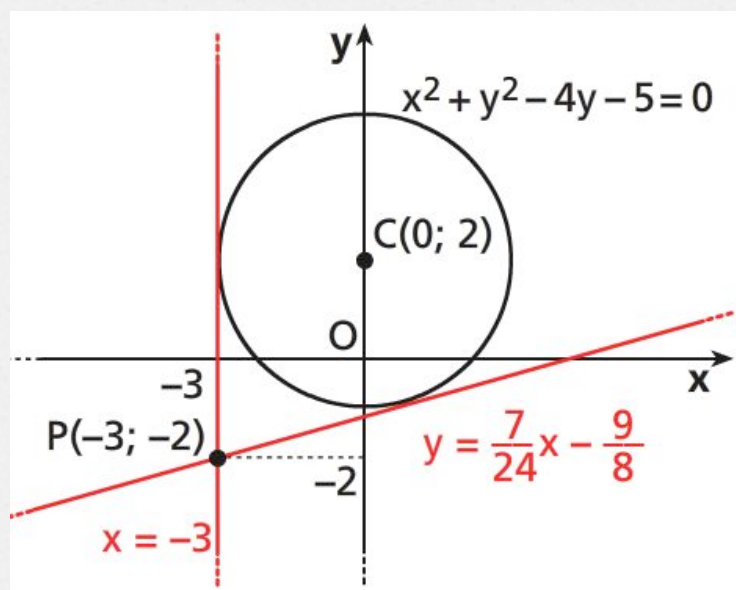
$$\cancel{16m^2} + \cancel{9m^4} - \cancel{24m^3} - \cancel{9m^2} + 24m - 7 - \cancel{9m^4} + \cancel{24m^3} - \cancel{7m^2} = 0$$

$$24m - 7 = 0 \rightarrow m = \frac{7}{24}.$$

Otteniamo **un solo** valore di  $m$  a cui corrisponde la retta di equazione:

$$y + 2 = \frac{7}{24}(x + 3) \rightarrow y = \frac{7}{24}x - \frac{9}{8}.$$

L'altra tangente deve essere parallela all'asse  $y$  e ha equazione  $x = -3$ .



## METODO DELLA FORMULA DI SDOPPIAMENTO

Si applica solo se il punto  $P=(x_0;y_0)$  appartiene alla circonferenza  $x^2+y^2+ax+by+c=0$

*Formula dello sdoppiamento*

$$xx_0 + yy_0 + a \cdot \frac{x + x_0}{2} + b \cdot \frac{y + y_0}{2} + c = 0$$



Determinare le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione  $x^2+y^2-2x-6y-10=0$ , condotte dal punto  $P(5;5)$ .

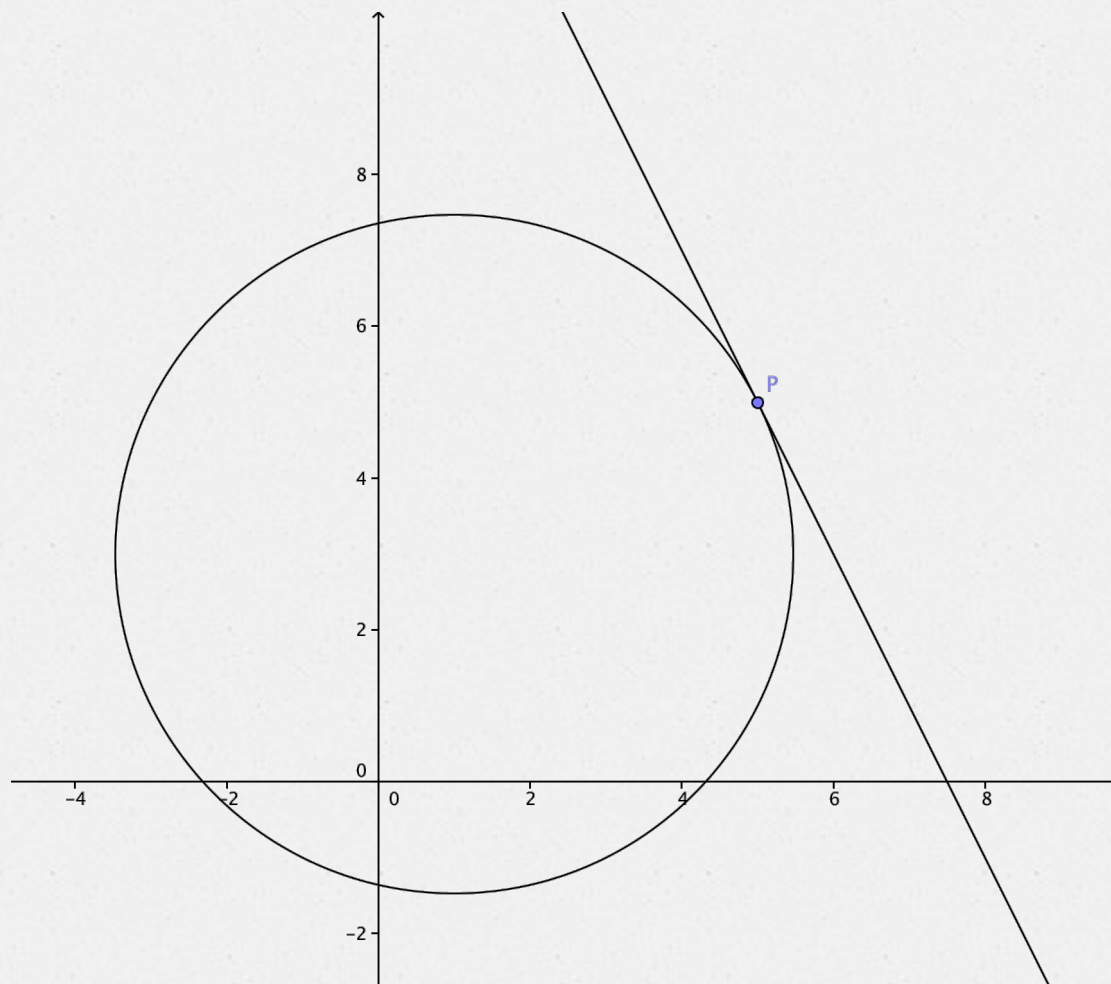
Verifico se  $P$  appartiene alla circonferenza:

$$25 + 25 - 10 - 30 - 10 = 0$$

$P$  appartiene alla circonferenza, quindi ho sicuramente una e una sola tangente, e posso applicare la formula dello sdoppiamento:

$$5x + 5y - 2 \cdot \frac{x+5}{2} - 6 \cdot \frac{y+5}{2} - 10 = 0$$

$$\text{retta tangente} \rightarrow 4x + 2y - 30 = 0 \quad \text{oppure} \quad y = -2x + 15$$





### ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'equazione della retta tangente alla circonferenza  $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$  nel suo punto  $P(1; 3)$ .

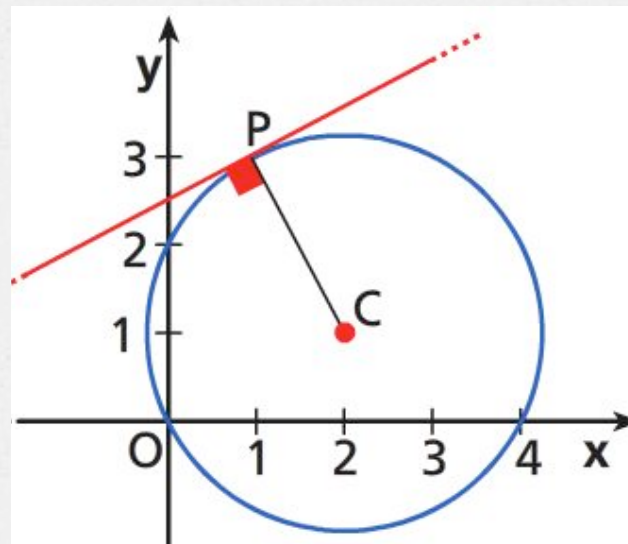
Il punto  $P(1;3)$  appartiene alla circonferenza.

*Formula dello sdoppiamento*

$$xx_0 + yy_0 + a \cdot \frac{x + x_0}{2} + b \cdot \frac{y + y_0}{2} + c = 0$$

$$x + 3y - 4 \frac{x+1}{2} - 2 \frac{y+3}{2} = 0$$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$



## **METODO DELLA DISTANZA CENTRO-RETTA = RAGGIO**

Si applica solo se il punto  $P=(x_0; y_0)$  non appartiene alla circonferenza  $x^2+y^2+ax+by+c=0$

Determinare le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione:  $x^2+y^2-2x=0$  condotte dal punto  $P(9/4;0)$ .

1. Verifico se  $P$  appartiene alla circonferenza:

$$81/16 - 9/2 \neq 0$$

$P$  non appartiene alla circonferenza, quindi posso applicare il metodo della distanza centro-retta=raggio.



2. Determino le coordinate del centro C e il raggio r:

$$C = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right) = (-1; 0)$$

$$r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c} = 1$$

3. Scrivo l'equazione del fascio di rette passanti per  $P=(9/4;0)$  in forma implicita:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 0 = m\left(x - \frac{9}{4}\right) \rightarrow$$

$$4mx - 4y - 9m = 0$$

4. Applico la formula della distanza fra le rette e il centro:

$$d = \frac{|4m(1) - 4(0) - 9m|}{\sqrt{16m^2 + 16}} = \frac{|-5m|}{\sqrt{16m^2 + 16}}$$

5. Impongo che la distanza fra le rette del fascio e il centro C sia uguale al raggio r e risolviamo:

$$\frac{|-5m|}{\sqrt{16m^2 + 16}} = 1 \quad |-5m| = \sqrt{16m^2 + 16}$$

$$25m^2 = 16m^2 + 16 \quad m^2 = \frac{16}{9} \quad m_{1,2} = \pm \frac{4}{3}$$

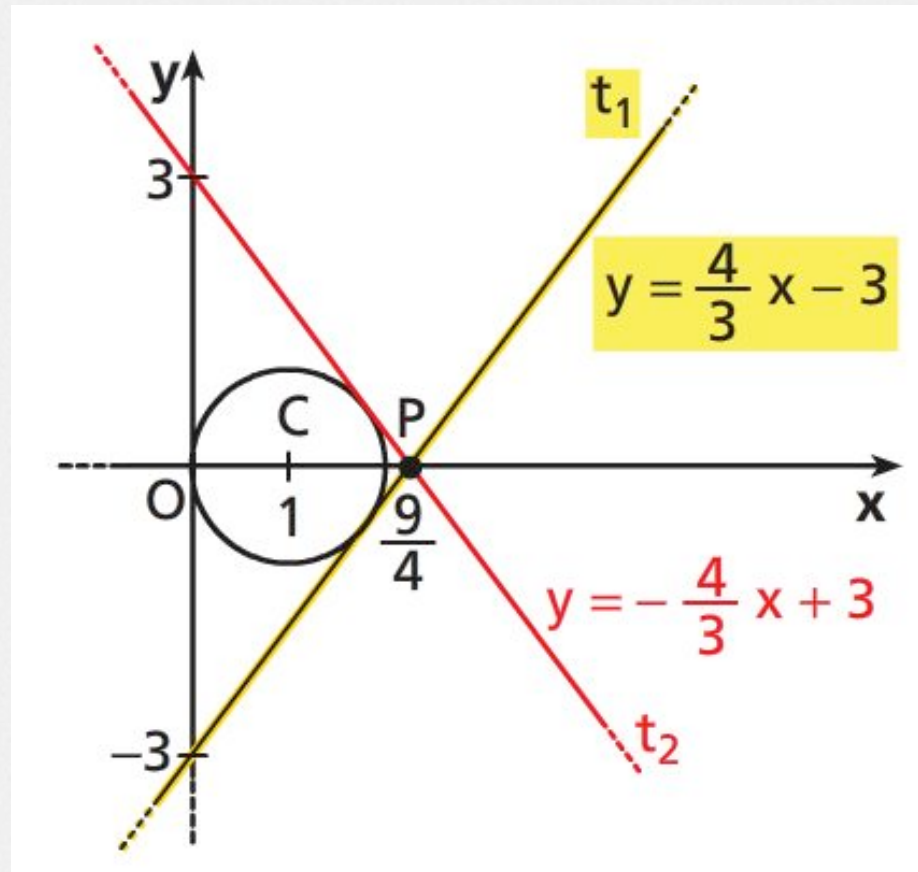


6. Sostituisco i valori di  $m$  nell'equazione del fascio di rette e troviamo le equazioni delle due tangenti:

Rette tangenti in P

$$y = \frac{4}{3}x - 3$$

$$y = -\frac{4}{3}x + 3$$



### ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza  $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$  condotte dal punto  $P(-3; -2)$ .

Rappresentiamo la circonferenza e il punto  $P$ . La circonferenza ha centro  $(0; 2)$  e raggio 3. Il punto  $P$  è esterno alla circonferenza, quindi le tangenti sono due.

Consideriamo il fascio di rette per  $P$ ,  $mx - y + 3m - 2 = 0$ , che esclude la retta  $x = -3$ , e applichiamo la formula della distanza fra le rette e il centro  $C$ :

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-2 + 3m - 2|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

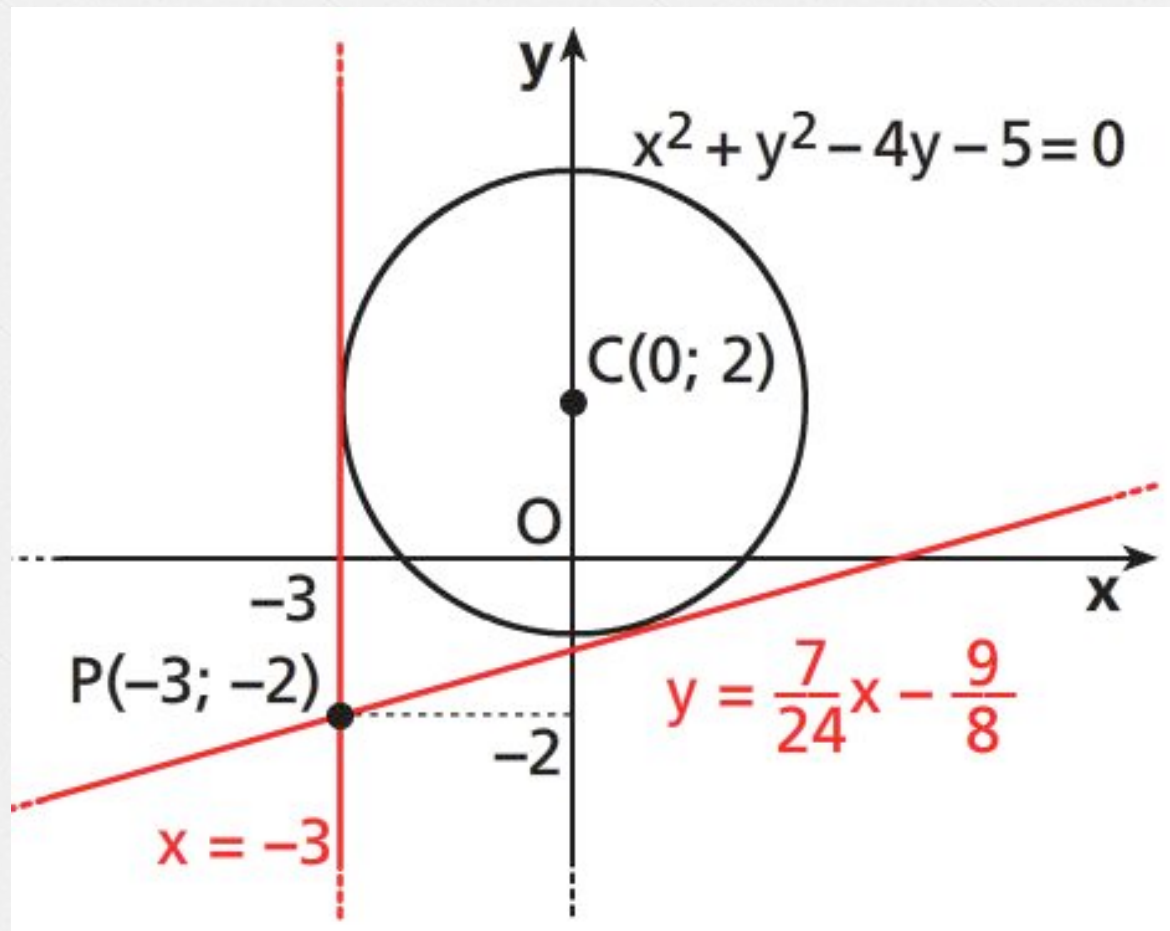
Poniamo tale distanza uguale al raggio e risolviamo l'equazione rispetto a  $m$ :

$$\frac{|3m - 4|}{\sqrt{1 + m^2}} = 3 \rightarrow (3m - 4)^2 = 9(1 + m^2) \rightarrow 9m^2 + 16 - 24m = 9 + 9m^2 \rightarrow m = \frac{7}{24}.$$

Otteniamo la retta di equazione:

$$y = \frac{7}{24}x - \frac{9}{8}.$$





## METODO DELLA TANGENTE IN P PERPENDICOLARE AL RAGGIO

Si applica solo se il punto  $P=(x_0;y_0)$  appartiene alla circonferenza  $x^2+y^2+ax+by+c=0$

Determinare le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione  $x^2+y^2-2x-6y-10=0$ , condotte dal punto  $P(5;5)$ .

1. Verifico se  $P$  appartiene alla circonferenza:

$$25 + 25 - 10 - 30 - 10 = 0$$

$P$  appartiene alla circonferenza, quindi ho sicuramente una e una sola tangente, e posso applicare il metodo della tangente in  $P$  perpendicolare al raggio.



2. Determino le coordinate del centro C:

$$C = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right) = (1; 3)$$

3. Scrivo l'equazione del fascio di rette di centro  $P=(5;5)$ :

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y = mx - 5m + 5$$

4. Determino il coefficiente angolare della retta PC:

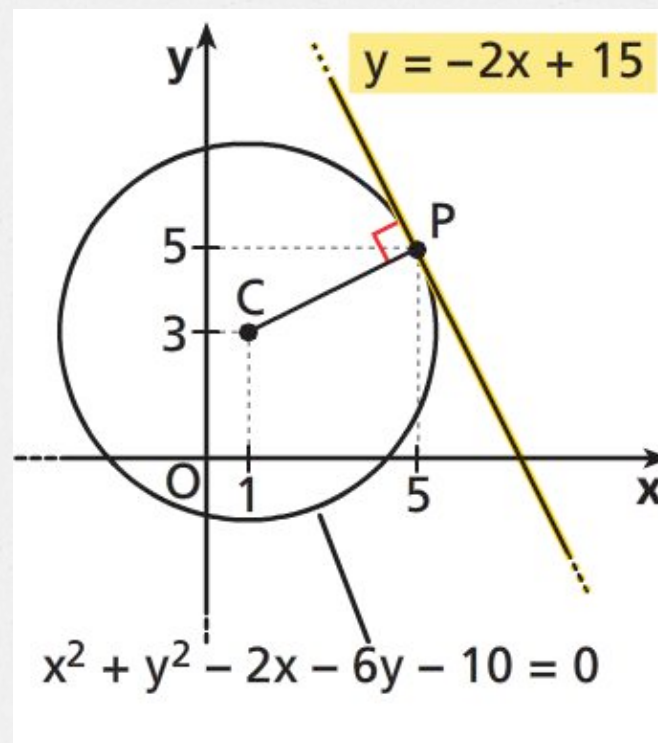
$$m_{PC} = \frac{y_P - y_C}{x_P - x_C} = \frac{5 - 3}{5 - 1} = \frac{1}{2}$$

5. Determino il coefficiente angolare della retta PC perpendicolare alla retta tangente in P :

$$m = -\frac{1}{m_{PC}} = -2$$

6. L'equazione della retta tangente in P è:

$$y = -2x + 15$$





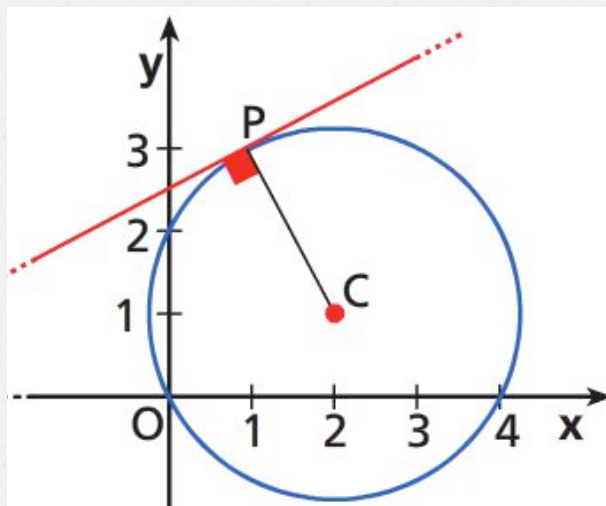
### ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'equazione della retta tangente alla circonferenza  $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$  nel suo punto  $P(1; 3)$ .

Le coordinate del centro sono  $C(2; 1)$  e il coefficiente angolare del raggio  $PC$  è  $m = \frac{3 - 1}{1 - 2} = -2$ .

Per la condizione di perpendicolarità la retta tangente ha coefficiente angolare  $\frac{1}{2}$ :

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 1) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$



## CONDIZIONI PER DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UNA CIRCONFERENZA

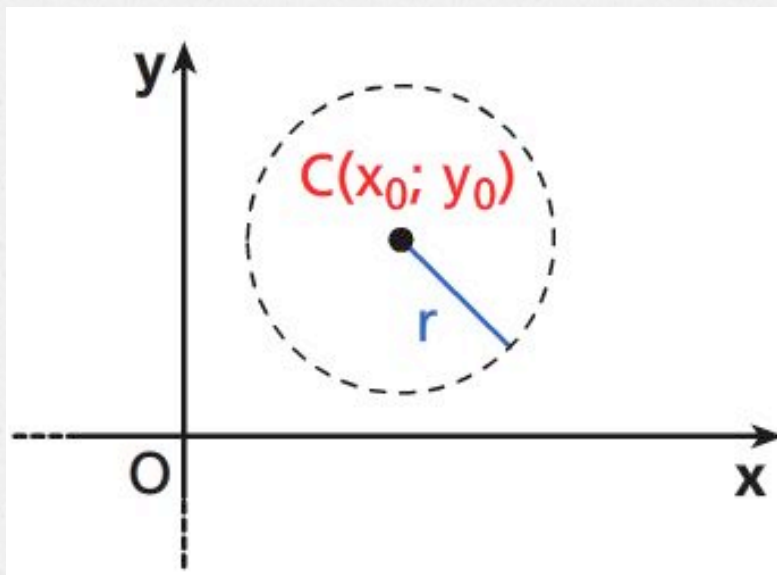
Per poter determinare l'equazione di una circonferenza  $x^2+y^2+ax+by+c=0$  occorre calcolare i tre coefficienti  $a, b, c$  presenti in essa.

Pertanto il problema è: trovare tre condizioni tra loro indipendenti tali da tradurle in tre equazioni nelle tre incognite  $a, b, c$ .

Ecco alcuni casi.



1. Sono noti le coordinate del centro e il raggio.



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Scrivere l'equazione della circonferenza di centro  $C=(-2;1/2)$  e raggio  $r=1$ .

- Sono note le coordinate del centro  $C$  (due condizioni) e il raggio  $r$  (una condizione)

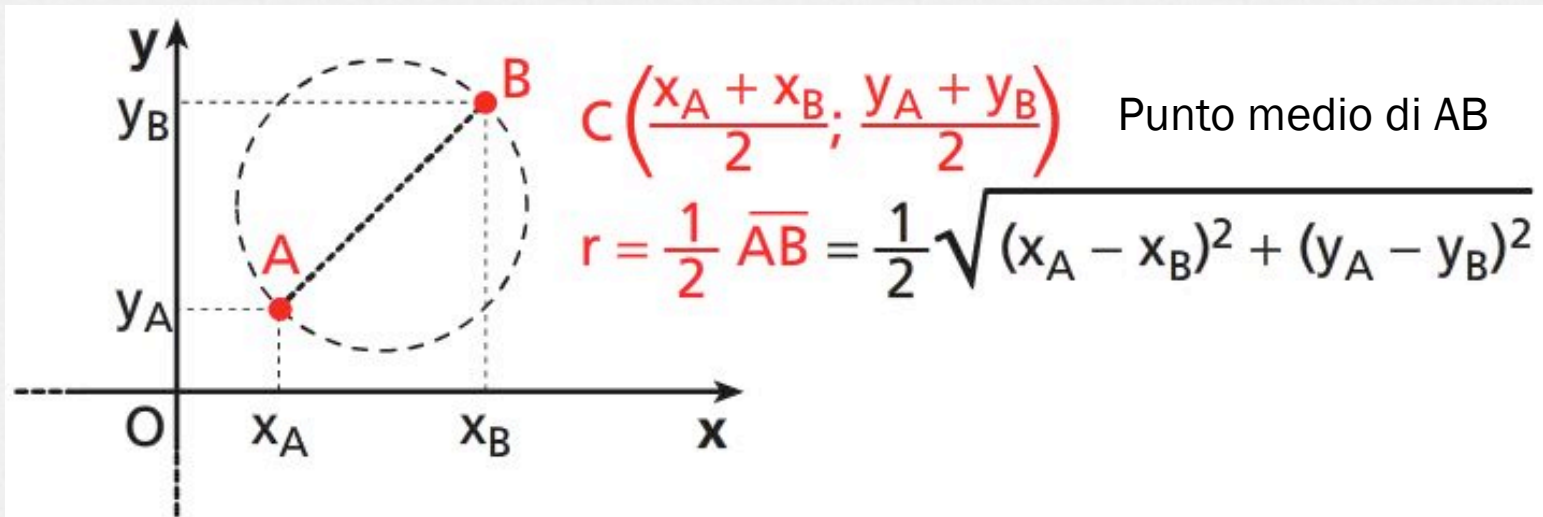
$$\begin{cases} a = -2\alpha ; & a = -2 \cdot (-2) = 4 \\ b = -2\beta ; & b = -2 \cdot (1/2) = -1 \\ c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 & c = 4 + 1/4 - 1 = 13/4 \end{cases}$$

*equazione circonferenza*

$$x^2 + y^2 + 4x - y + \frac{13}{4} = 0$$



2. Sono note le coordinate degli estremi di un diametro.



Scrivi l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento di estremi  $A(-3;1)$  e  $B(2;5)$ .

- Sono note le coordinate degli estremi del diametro: il centro  $C$  come punto medio (due condizioni) e il raggio come metà del diametro (una condizione).

$$C = \left( \frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left( -\frac{1}{2}; 3 \right)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(2 + 3)^2 + (5 - 1)^2} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$



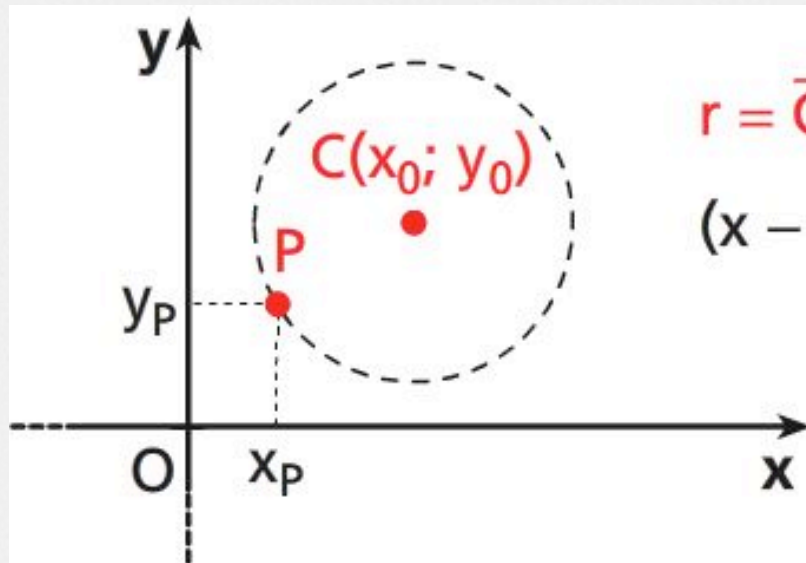
Quindi, l'equazione della circonferenza è:

$$\begin{cases} a = -2\alpha = 1 \\ b = -2\beta = -6 \\ c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 1/4 + 9 - 41/4 = -1 \end{cases}$$

*equazione circonferenza*

$$x^2 + y^2 + x - 6y - 1 = 0$$

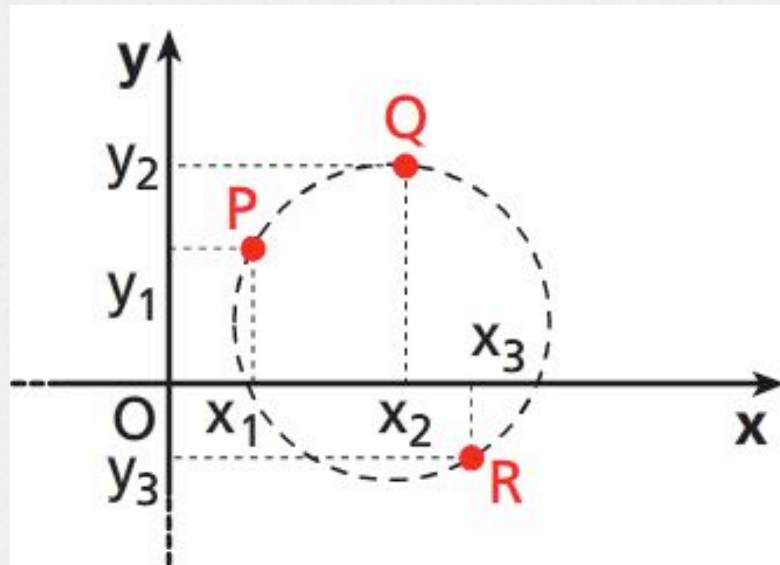
3. La circonferenza passa per un punto e sono note le coordinate del centro.



$$r = \overline{CP} = \sqrt{(x_P - x_0)^2 + (y_P - y_0)^2}$$
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



4. La circonferenza passa per tre punti non allineati.



$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 + c = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 + ax_2 + by_2 + c = 0 \\ x_3^2 + y_3^2 + ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases}$$

Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti  $A=(0;-2)$ ,  $B=(0;6)$ ,  $C=(8;0)$

- La circonferenza passa per tre punti non allineati (tre condizioni)

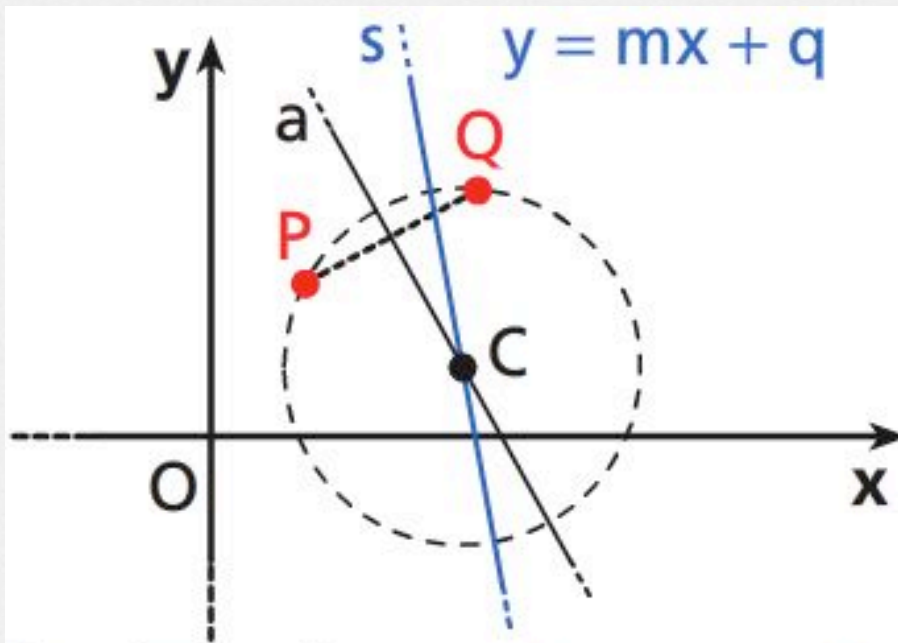
$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4 - 2b + c = 0 & \text{passaggio per A} \\ 36 + 6b + c = 0 & \text{passaggio per B} \\ 64 + 8a + c = 0 & \text{passaggio per C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -13/2 \\ b = -4 \\ c = -12 \end{cases}$$

*equazione circonferenza*

$$x^2 + y^2 - \frac{13}{2}x - 4y - 12 = 0$$



5. La circonferenza passa per due punti e il centro appartiene a una retta di equazione nota.



$$C = s \cap a$$
$$r = \overline{CP} = \overline{CQ}$$

Si trova l'equazione dell'asse del segmento PQ: il centro C è il punto di intersezione della retta nota s con l'asse a. Il raggio è  $r = CP = CQ$

Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti  $A=(1;2)$  e  $B=(3;4)$  e avente il centro sulla retta di equazione  $x-3y-1=0$ .

Poiché  $AB$  è una corda della circonferenza, allora l'asse di  $AB$  passa per il centro.

Determiniamo l'equazione dell'asse di  $AB$  sapendo che è la retta perpendicolare al segmento e passante per il suo punto medio. Le coordinate del punto medio  $M$  di  $AB$  sono  $(2; 3)$ .

Il coefficiente angolare di  $AB$  è  $m = 1$ , quindi il coefficiente angolare dell'asse è  $m_1 = -1$ .

L'equazione dell'asse è  $y - y_M = m_1(x - x_M)$ , ossia:

$$y - 3 = -1(x - 2) \rightarrow y + x - 5 = 0.$$

Determiniamo le coordinate del centro intersecando l'asse di  $AB$  con la retta data:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x = -y + 5 \\ -y + 5 - 3y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} x = -y + 5 \\ -4y = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Il centro è  $C(4; 1)$ .

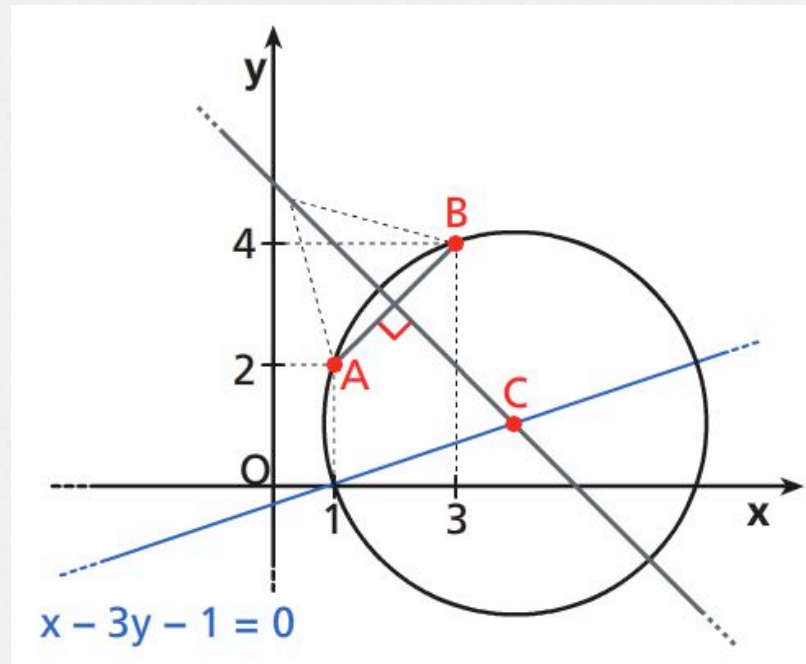


Calcoliamo la misura del raggio:

$$r = \overline{CA} = \sqrt{(4-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}.$$

Quindi l'equazione della circonferenza è:

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{10})^2 \rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 10 \rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0.$$



### Metodo alternativo

Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti  $A=(1;2)$  e  $B=(3;4)$  e avente il centro sulla retta di equazione  $x-3y-1=0$ .

➤ La circonferenza passa per due punti (due condizioni) e il centro appartiene a una retta di equazione nota (una condizione):

$$\begin{cases} 1 + 4 + a + 2b + c = 0 & \text{passaggio della circonferenza per A} \\ 9 + 16 + 3a + 4b + c = 0 & \text{passaggio della circonferenza per B} \\ -a/2 - 3(-b/2) - 1 = 0 & \text{passaggio retta t per } C(-a/2; -b/2) \end{cases}$$



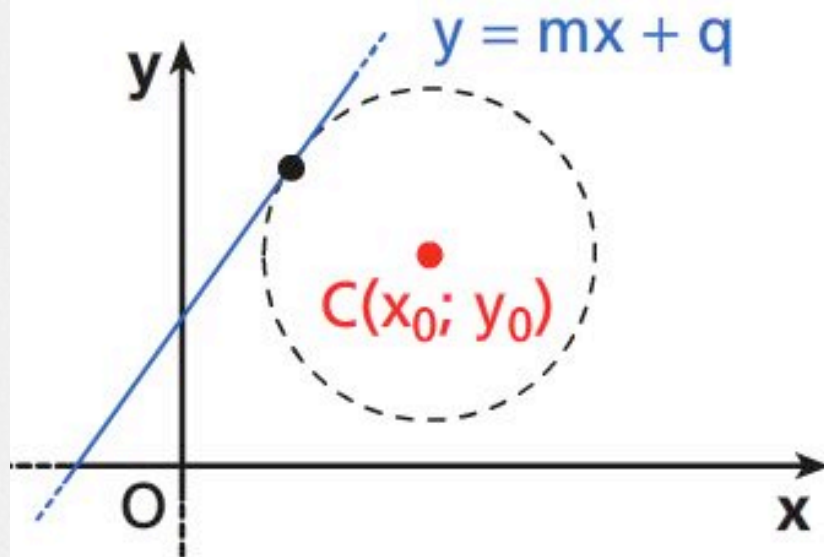
La risoluzione del sistema ci da i tre coefficienti della circonferenza:

$$\begin{cases} a = -8 \\ b = -2 \\ c = 7 \end{cases}$$

*equazione circonferenza*

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$$

6. Sono note le coordinate del centro e la circonferenza è tangente a una retta di equazione nota.



$$r = \frac{|mx_0 - y_0 + q|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



Determinare l'equazione della circonferenza di centro  $C(-2;-3)$  e tangente alla retta di equazione  $y=3x-1$ .

- Sono note le coordinate del centro  $C$  (due condizioni) e il raggio  $r$  (una condizione) come distanza del centro dalla retta tangente.

Calcoliamo il raggio come distanza centro-retta tangente:

$$r = \frac{|y_0 - mx_0 - q|}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{|-3 - 3(-2) + 1|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

Il sistema di equazioni, che traduce le tre condizioni, è:

$$\begin{cases} a = -2\alpha ; \\ b = -2\beta ; \\ c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 \end{cases}$$

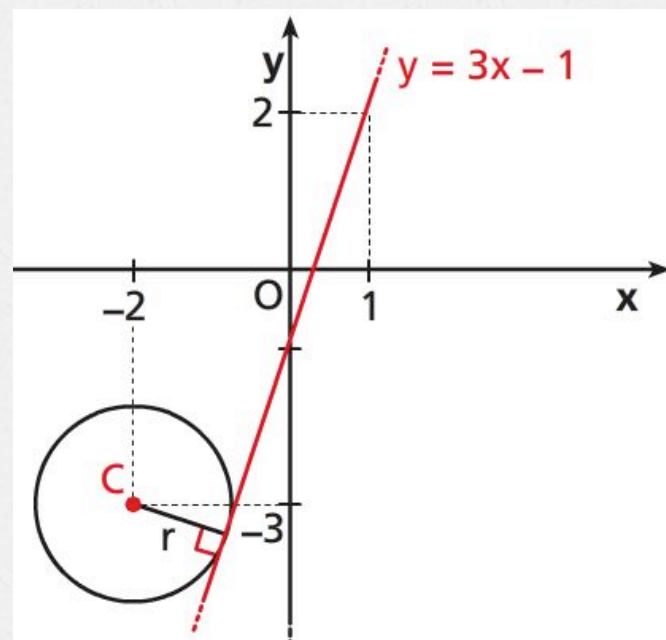
$$a = -2 \cdot (-2) = 4$$

$$b = -2 \cdot (-3) = 6$$

$$c = 4 + 9 - 8/5 = 57/5$$

*equazione circonferenza*

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + \frac{57}{5} = 0$$





## Altri casi

Determinare l'equazione della circonferenza passante per i punti  $A=(1;4)$  e  $B=(5;0)$  e tangente alla retta di equazione  $y = -x + 1$ .

- La circonferenza passa per due punti (due condizioni) ed è tangente alla retta (una condizione):

$$\begin{cases} 1 + 16 + a + 4b + c = 0 & \Rightarrow \text{passaggio della circonf. per } A(1; 4) \\ 25 + 5a + c = 0 & \Rightarrow \text{passaggio della circonf. per } B(5; 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 4b + c = -17 \\ 5a + c = -25 \end{cases}$$

Condizione di tangenza:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

$$x^2 + (-x + 1)^2 + ax + (a + 2)(-x + 1) + (-5a - 25) = 0$$

$$x^2 - 2x - 2a - 11 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 4 - 4(-2a - 11) = 0 \Rightarrow \underline{a = -6}$$

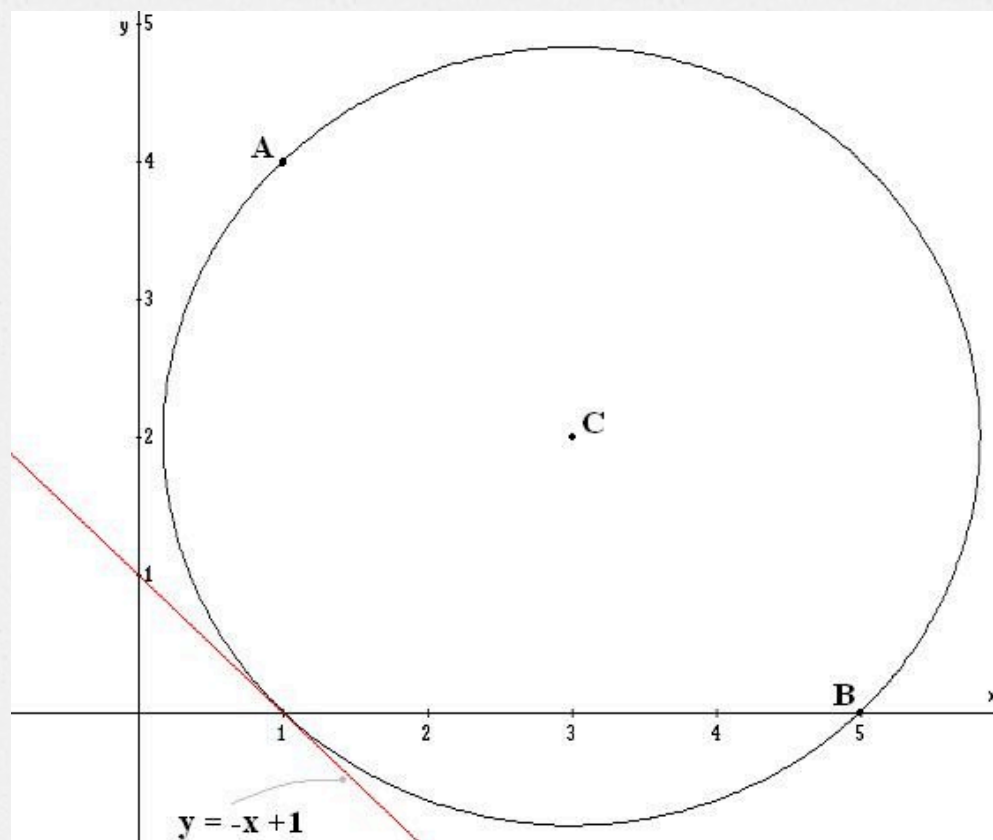


In definitiva:

$$\begin{cases} a + 4b + c = -17 \\ 5a + c = -25 \\ a = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = -4 \\ c = 5 \end{cases}$$

*equazione circonferenza*

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$$





### ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'equazione della circonferenza passante per i punti  $P(1; 2)$  e  $Q(3; 4)$  e tangente alla retta di equazione  $y = -3x + 3$ .

Imponiamo alla circonferenza di equazione  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  il passaggio per i punti  $P$  e  $Q$ :

$$\begin{cases} a + 2b + c = -5 & \text{passaggio per } P \\ 3a + 4b + c = -25 & \text{passaggio per } Q \end{cases}$$

Ricaviamo due incognite in funzione della terza. Usiamo il metodo di riduzione, sottraendo membro a membro:

$$2a + 2b = -20 \rightarrow a + b = -10.$$

Sostituiamo  $b = -a - 10$  nella prima equazione e ricaviamo  $c$  in funzione di  $a$ :

$$c = a + 15.$$

L'equazione della circonferenza diventa:

$$x^2 + y^2 + ax - (a + 10)y + a + 15 = 0.$$

Giungiamo all'equazione risolvente,

$$5x^2 + 2(a + 3)x - (a + 3) = 0,$$

e imponiamo la condizione di tangenza, cioè  $\Delta = 0$ :

Ora imponiamo che la retta  $y = -3x + 3$  sia tangente alla circonferenza:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax - (a + 10)y + a + 15 = 0 \\ y = -3x + 3 \end{cases}$$

$$(a + 3)^2 + 5(a + 3) = 0,$$

da cui  $a = -3$ ,  $a = -8$ .

Riprendiamo il sistema

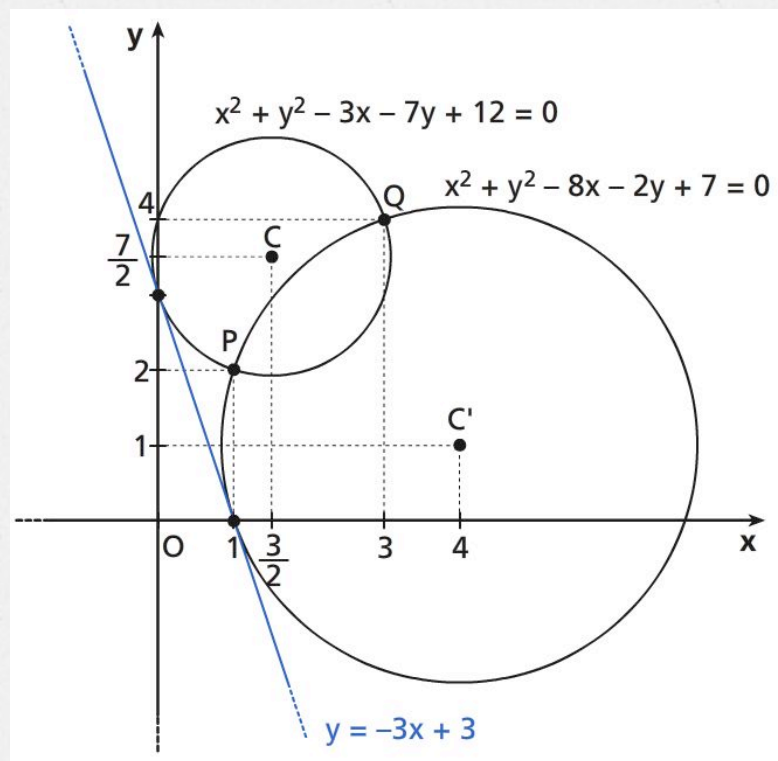
$$\begin{cases} b = -a - 10 \\ c = a + 15 \end{cases}$$

e calcoliamo  $b$  e  $c$  in corrispondenza dei valori  $a = -3$ ,  $a = -8$ .

Le circonferenze che soddisfano le condizioni richieste hanno le seguenti equazioni:

$$x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$$





Determinare le equazioni delle circonferenze tangenti agli assi cartesiani, con il centro sulla retta  $r$  di equazione  $x-5y+12=0$ .

Essendo la circonferenza tangente agli assi cartesiani, abbiamo due condizioni (condizioni di tangenza):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 + by + c = 0 \\ x = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{condizione di tangenza}} \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4c = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + ax + c = 0 \\ y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{condizione di tangenza}} \Delta = 0 \Rightarrow a^2 - 4c = 0$$

La terza condizione è data dal fatto che il centro della circonferenza si trova (appartiene) sulla retta r:

$$x_0 - 5y_0 + 12 = 0 \Rightarrow -\frac{a}{2} - 5\left(-\frac{b}{2}\right) + 12 = 0$$

Le tre condizioni trovate formano un sistema di tre equazioni nelle tre incognite a,b,c:

$$\begin{cases} b^2 - 4c = 0 \\ a^2 - 4c = 0 \\ a - 5b - 24 = 0 \end{cases}$$



Dalle prime due equazioni si ricava che:

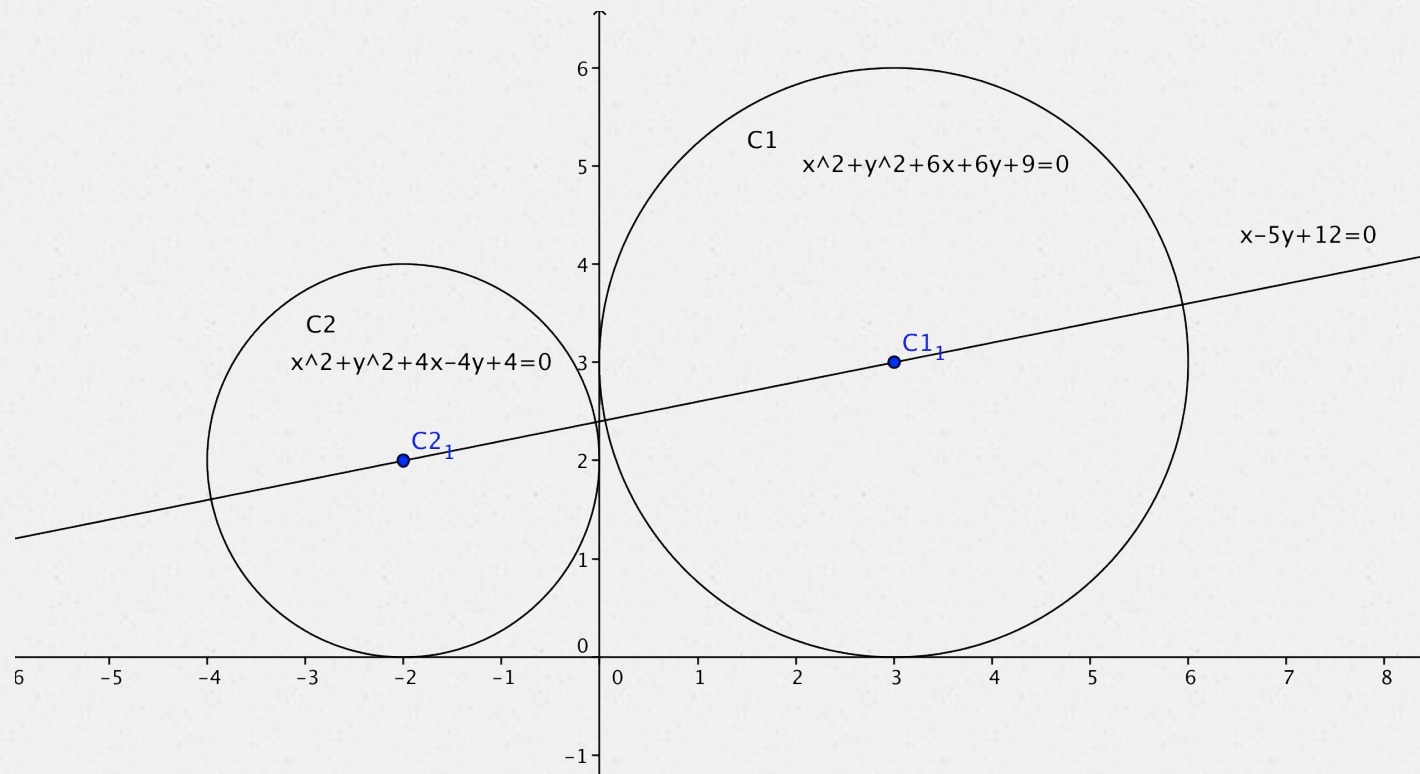
$$a^2 = 4c \rightarrow b^2 = 4c \Rightarrow a^2 = b^2 \rightarrow \pm a = \pm b$$

Quindi, la prima circonferenza è:

$$\begin{cases} a = b \\ a^2 = 4c \\ a = 5a + 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -6 \\ c = 9 \\ a = -6 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$$

Mentre, la seconda circonferenza è:

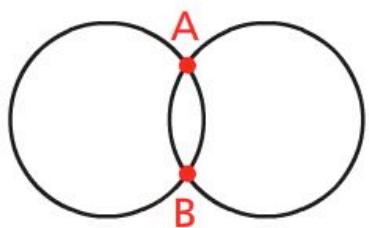
$$\begin{cases} a = -b \\ a^2 = 4c \\ a = -5a + 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -4 \\ c = 4 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$$



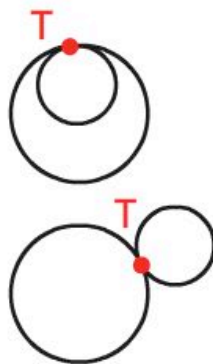


## LA POSIZIONE DI DUE CIRCONFERENZE

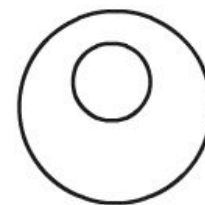
I casi che si possono presentare:



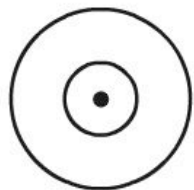
**a.** Circonferenze secanti.



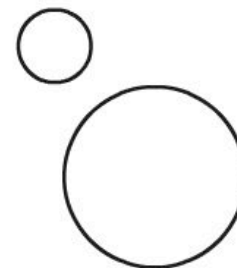
**b.** Circonferenze tangenti.



**c.** Circonferenze una interna all'altra.



**d.** Circonferenze concentriche.



**e.** Circonferenze esterne.

Per determinare gli eventuali punti d'intersezione o il punto di tangenza, occorre risolvere il sistema di quarto grado formato dalle equazioni delle due circonferenze:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$



Metodo di riduzione:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

---

$$(a-a')x + (b-b')y + c - c' = 0$$

Equazione asse radicale

$$(a-a')x + (b-b')y + c - c' = 0$$

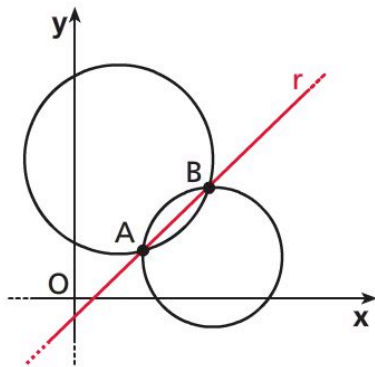
## Equazione asse radicale in forma esplicita

$$y = -\frac{a - a'}{b - b'}x - \frac{c - c'}{b - b'} \quad m = -\frac{a - a'}{b - b'}$$

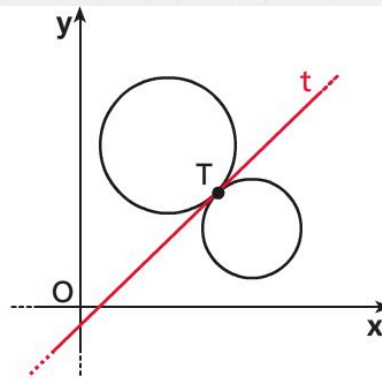
Osserva che se  $a = a'$  e  $b = b'$  non si ottiene l'equazione della retta “asse radicale”; in questo caso le due circonferenze sono concentriche e non hanno punti in comune o sono coincidenti.



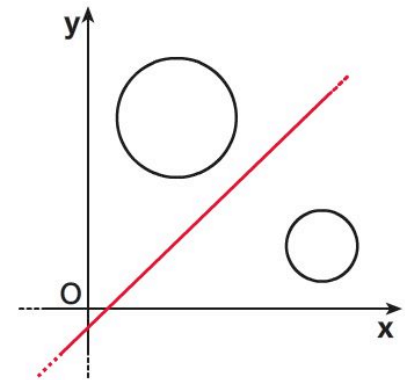
I casi che si possono presentare:



a. L'**asse radicale** è la retta  $r$  passante per i punti di intersezione delle due circonferenze.



b. L'**asse radicale** è la retta  $t$  passante per il punto di tangenza delle due circonferenze.



c. L'**asse radicale** esiste anche se le circonferenze non sono secanti.

## Proprietà dell'asse radicale:

- Il coefficiente angolare  $m_a$  dell'asse radicale è  $-\frac{a-a'}{b-b'}$ . Il coefficiente angolare  $m_c$  della retta passante per i centri  $C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$  e  $C'\left(-\frac{a'}{2}; -\frac{b'}{2}\right)$  è:

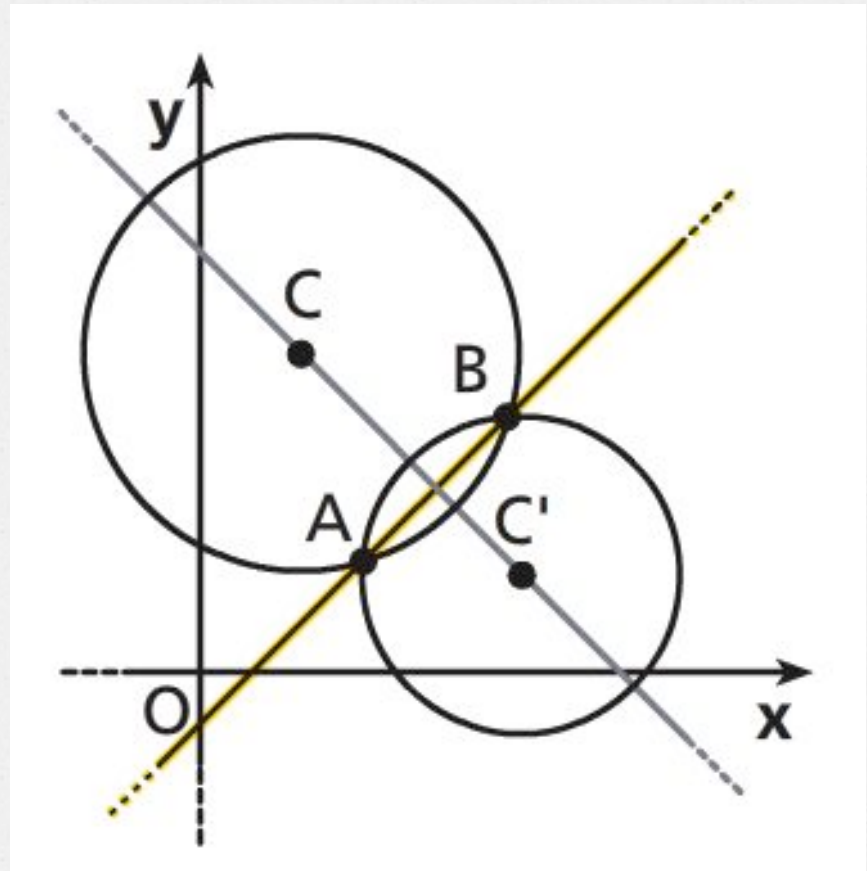
$$m_c = \frac{-\frac{b}{2} + \frac{b'}{2}}{-\frac{a}{2} + \frac{a'}{2}} = \frac{-b + b'}{-a + a'} = \frac{-(b - b')}{-(a - a')} = \frac{b - b'}{a - a'}.$$

Poiché  $m_a \cdot m_c = -\frac{a-a'}{b-b'} \cdot \frac{b-b'}{a-a'} = -1$ , l'asse radicale risulta perpendicolare alla retta passante per i centri delle due circonferenze (figura 13).

Si deduce, quindi, che nel caso di circonferenze tangenti (figura 12b) l'asse radicale coincide con la retta tangente alle circonferenze nel loro comune punto di tangenza  $T$ .



L'asse radicale è  
perpendicolare alla  
retta passante per i  
centri delle due  
circonferenze.



La conoscenza dell'equazione dell'asse radicale consente di calcolare gli eventuali punti di intersezione tra due circonferenze.

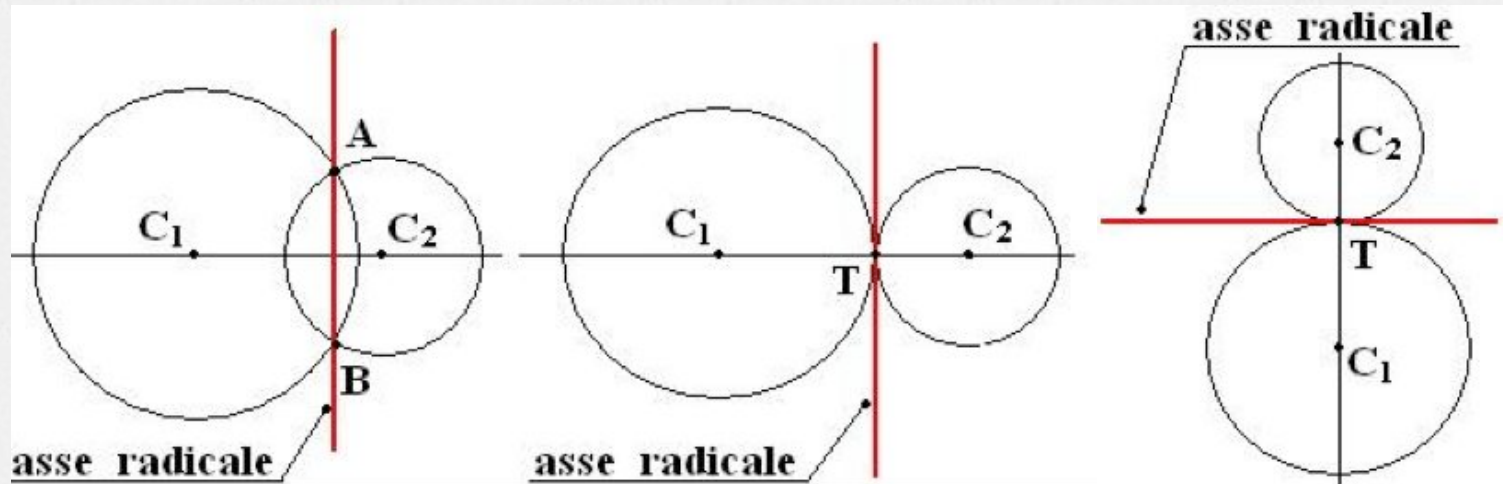
Il sistema iniziale (di 4° grado) è equivalente al sistema (di 2° grado) formato dall'equazione di una delle due circonferenze e da quella dell'asse radicale:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ (a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0 \end{cases}$$

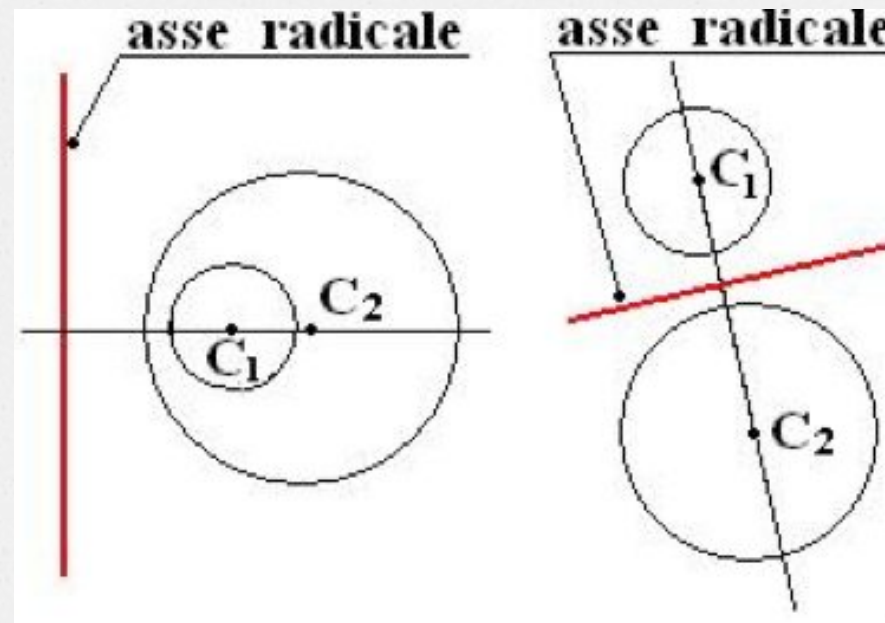


Tale sistema ammette:

- ✧ due soluzioni se le circonferenze sono secanti;
- ✧ una soluzione se le circonferenze sono tangenti;



✧ nessuna soluzione se le circonferenze non sono secanti, né tangenti.





## ESERCIZI

Determinare gli eventuali punti d'intersezione delle due circonferenze di equazione:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 + 2x - 16y + 13 = 0$$

Trovo l'asse radicale risolvendo il seguente sistema con il metodo di riduzione:

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 16y + 13 = 0 \end{array} \right. \\ \hline 12y - 24 = 0 \quad \rightarrow \quad y = 2 \end{array}$$

Il sistema iniziale è equivalente al sistema formato dall'equazione di una delle due circonferenze e da quella dell'asse radicale:

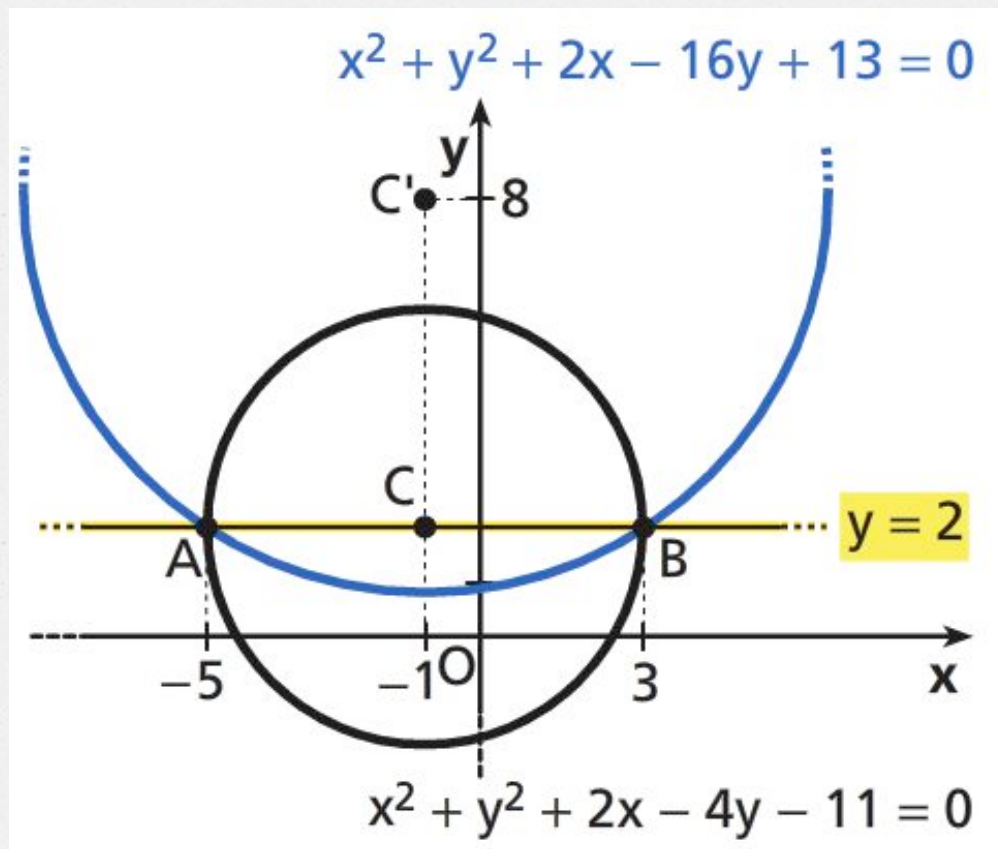
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$x^2 + 4 + 2x - 8 - 11 = 0$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$



Le due circonferenze sono secanti nei punti  $A(-5;2)$  e  $B(3;2)$ . I centri sono  $C_1(-1;8)$  e  $C_2(-1;2)$ .



Determinare gli eventuali punti d'intersezione delle due circonferenze di equazione:

$$x^2+y^2-1=0 \quad \text{e} \quad x^2+y^2-3x+2=0$$

Trovo l'asse radicale risolvendo il seguente sistema con il metodo di riduzione:

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 3x + 2 = 0 \end{array} \right. \\ \hline 3x - 3 = 0 \rightarrow x = 1 . \end{array}$$

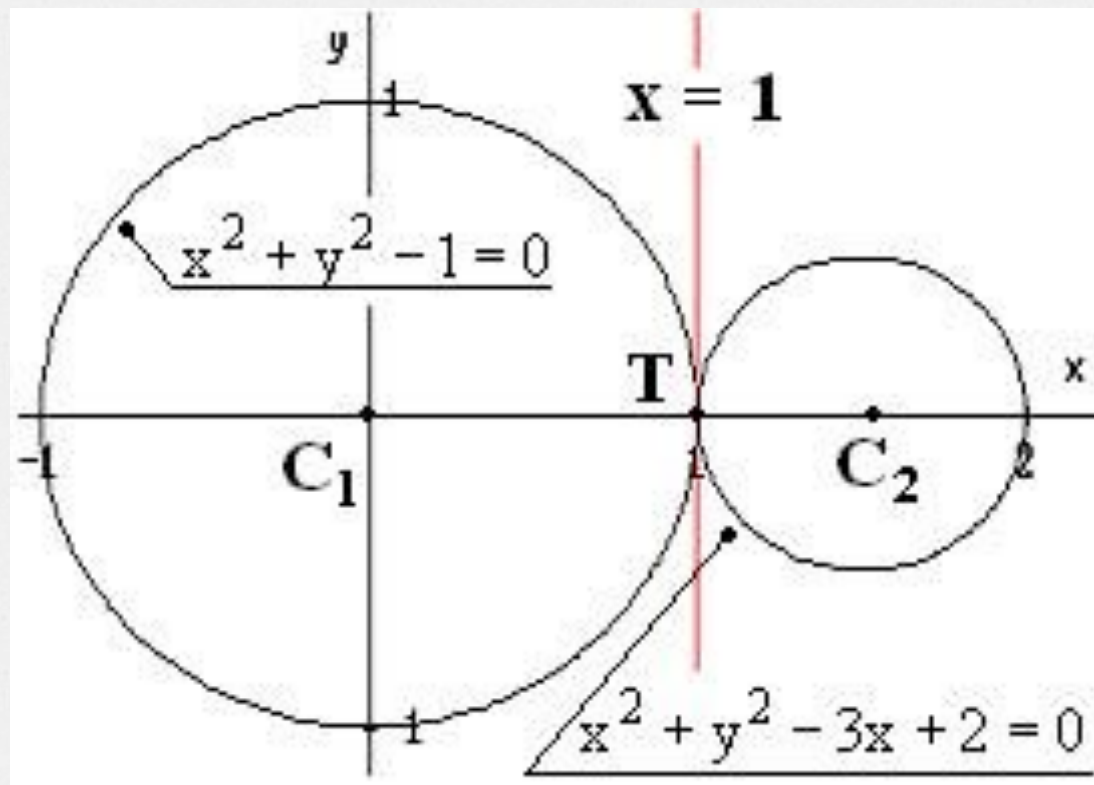


Il sistema iniziale è equivalente al sistema formato dall'equazione di una delle due circonferenze e da quella dell'asse radicale:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow 1 + y^2 - 1 = 0 \rightarrow y = 0$$

quindi c'è una sola soluzione :  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Cioè le circonferenze sono tangenti in  $T(1;0)$  e la retta tangente è l'asse radicale di equazione  $x=1$ . I centri sono  $C_1(0;0)$  e  $C_2(3/2;0)$ .





Determinare gli eventuali punti d'intersezione delle due circonferenze di equazione:

$$x^2+y^2-1=0 \quad \text{e} \quad x^2+y^2-4x-12=0$$

Trovo l'equazione dell'asse radicale:

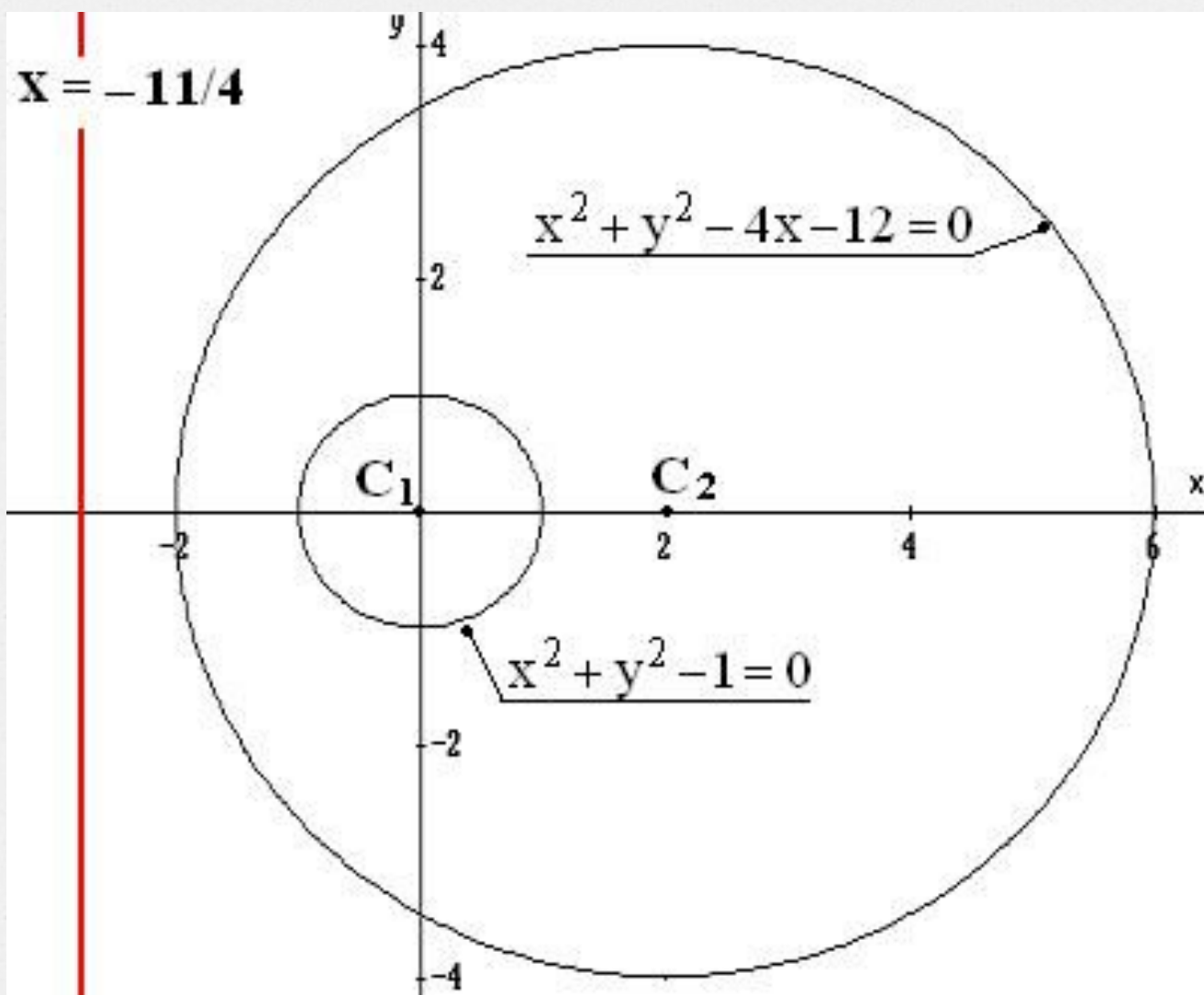
$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0 \end{array} \right. \\ \hline 4x + 11 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -11/4 \end{array}$$

Il sistema iniziale è equivalente al sistema formato dall'equazione di una delle due circonferenze e da quella dell'asse radicale:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x = -11/4 \end{cases} \rightarrow \frac{121}{16} + y^2 - 1 = 0 ; y^2 = -\frac{105}{16}$$

Il sistema non ammette soluzione, per cui le due circonferenze, di centri  $C_1=(0;0)$  e  $C_2=(2;0)$ , non hanno punti in comune.





### ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo gli eventuali punti di intersezione delle due circonferenze di equazioni:

$$x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0.$$

Troviamo l'equazione dell'asse radicale sottraendo membro a membro le due equazioni:

$$\ominus \begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0 \end{cases}$$

---

$$8x + 4y - 16 = 0$$

L'asse radicale ha equazione  $y = -2x + 4$ .

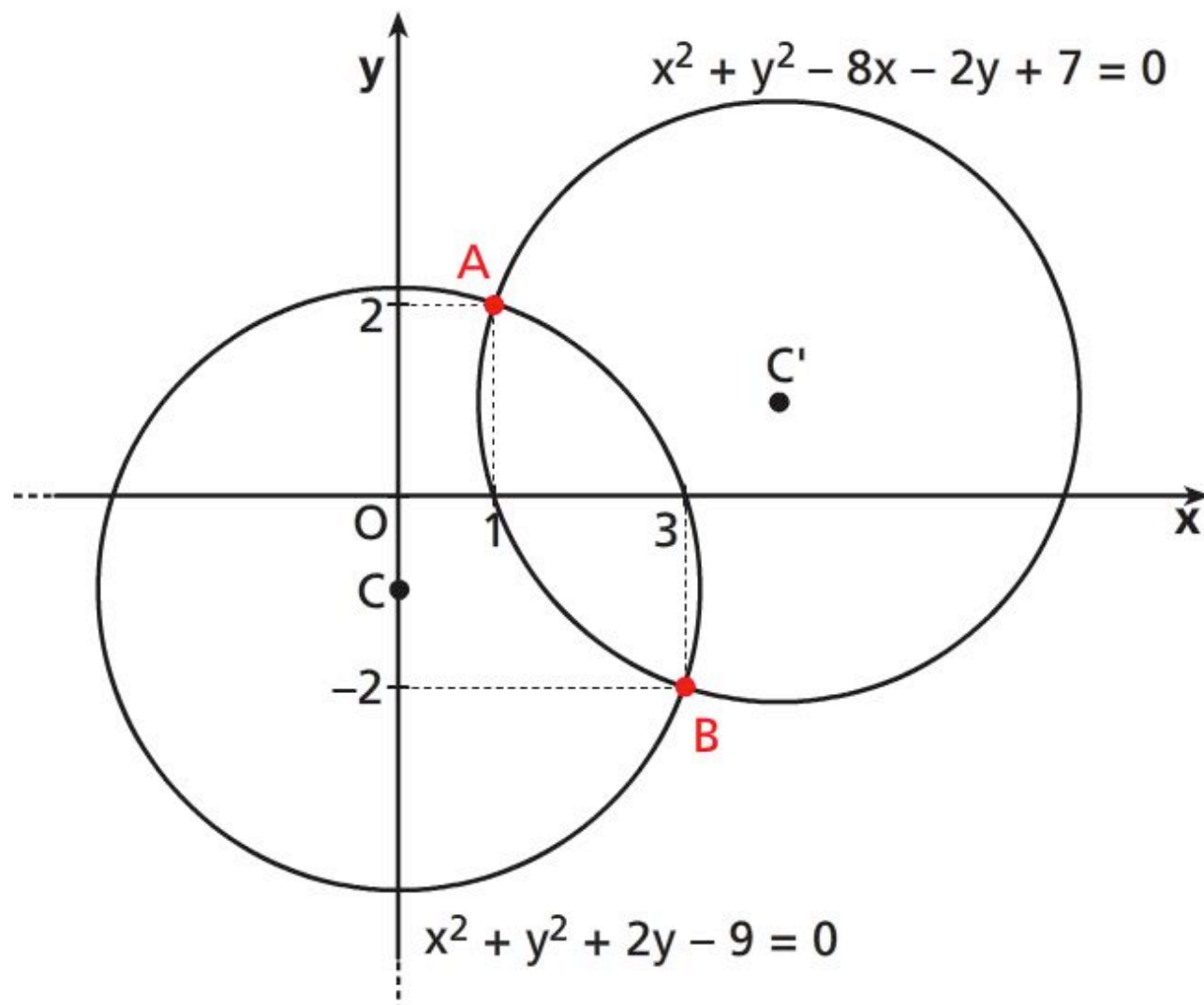
Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$

Le due circonferenze si intersecano nei punti:

$$A(1; 2) \quad \text{e} \quad B(3; -2).$$





## FASCI DI CIRCONFERENZE

Date due circonferenze  $C$  e  $C'$ , di equazioni:

$$C: x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad \text{e} \quad C': x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$$

si chiama **fascio di circonferenze** definito da  $C$  e  $C'$  (*generatrici del fascio*), l'insieme di  $C'$  e di tutte le circonferenze rappresentate dall'equazione:

*Equazione fascio di circonferenze*

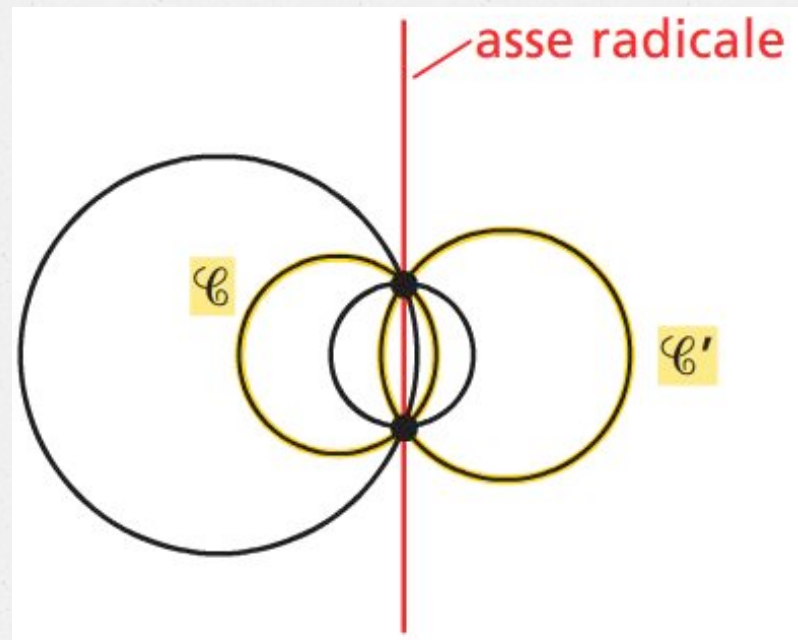
$$x^2 + y^2 + ax + by + c + k(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0$$



Per  $k=-1$  l'equazione del fascio diventa l'equazione dell'**asse radicale** del fascio:

$$(a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0$$

L'asse radicale è una particolare circonferenza con raggio infinito (circonferenza degenera).

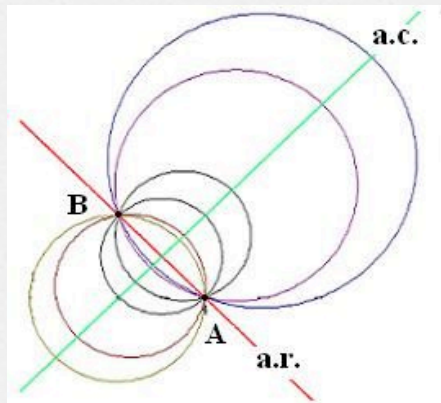


Le generatrici  $C$  e  $C'$  possono avere uno o due punti comuni; tali punti si chiamano **punti base** del fascio.

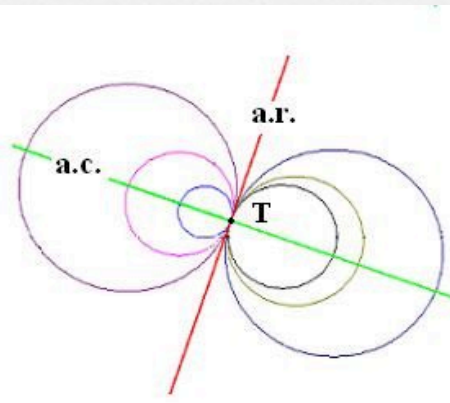
Il luogo dei centri delle circonferenze del fascio è una retta perpendicolare all'asse radicale e si chiama **asse centrale**.



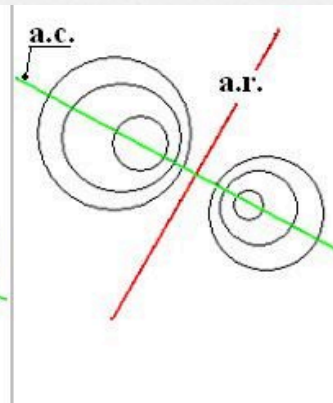
Si possono avere i seguenti tipi di fasci:



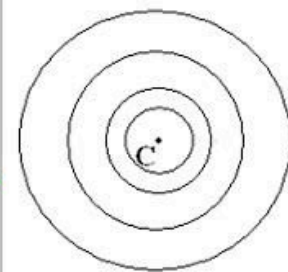
Fascio con due punti base A e B



Fascio con un punto base T



Fascio senza punti base



Fascio di circonf.  
concentriche

a.r. = asse radicale  
a.c. = asse centrale

## STUDIO DI UN FASCIO DI CIRCONFERENZE

Per **studiare un fascio di circonferenze** occorre trovare:

- a) centro e raggio in funzione del parametro  $k$ ;
- b) le due generatrici;
- c) gli eventuali punti base;
- d) l'asse radicale e l'asse centrale;
- e) eventuali circonferenze degeneri.



## ESERCIZIO GUIDA

Studiamo il fascio di circonferenze di equazione:

$$(1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 + (2 - 4k)x - 6y - 1 + 2k = 0$$

Scriviamo l'equazione del fascio di circonferenze in forma canonica, dividendo entrambi i membri per  $1 + k$  (perché ciò abbia senso, poniamo  $1 + k \neq 0$ , ossia  $k \neq -1$ ):

$$x^2 + y^2 + \frac{2 - 4k}{k + 1}x - \frac{6}{1 + k}y + \frac{2k - 1}{1 + k} = 0.$$

- Le coordinate dei centri, al variare di  $k$ , sono:

$$C\left(\frac{2k - 1}{1 + k}; \frac{3}{1 + k}\right).$$

- Determiniamo la misura del raggio, sempre in funzione di  $k$ :

$$r = \sqrt{\frac{(2k-1)^2}{(k+1)^2} + \frac{9}{(1+k)^2} - \frac{2k-1}{1+k}} = \frac{\sqrt{2k^2 - 5k + 11}}{|k+1|}.$$

Tale espressione è reale quando il radicando è positivo o nullo, cioè quando:

$$2k^2 - 5k + 11 \geq 0.$$

Dato che  $\Delta = 25 - 88 < 0$ , il trinomio è positivo  $\forall k \in \mathbb{R}$  e non si annulla mai.

- Troviamo le due circonferenze generatrici e gli eventuali punti base del fascio.

Raccogliamo il parametro  $k$  nell'equazione del fascio assegnato:

$$kx^2 + x^2 + ky^2 + y^2 - 4kx + 2x - 6y - 1 + 2k = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 + k(x^2 + y^2 - 4x + 2) = 0.$$

Le due circonferenze generatrici sono:

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0.$$



Risolvi il sistema, formato dalle due equazioni, per trovare i punti base:

$$\ominus \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases}$$

---

$$+ 6x - 6y - 3 = 0 \rightarrow 2x - 2y - 1 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0 \\ 2x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x^2 - 20x + 9 = 0 \\ 2x - 2y - 1 = 0 \end{cases} \quad x = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{4}$$

I punti base del fascio sono  $A\left(\frac{5 + \sqrt{7}}{4}; \frac{3 + \sqrt{7}}{4}\right)$  e  $B\left(\frac{5 - \sqrt{7}}{4}; \frac{3 - \sqrt{7}}{4}\right)$ .

- $2x - 2y - 1 = 0$  è l'equazione dell'asse radicale e si ottiene anche ponendo  $k = -1$  nell'equazione del fascio.

Disegniamo alcune circonferenze del fascio, attribuendo alcuni valori a  $k$ :

$k = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 = 0$ ,  
 $C_0(-1; 3)$ ,  $r_0 = \sqrt{11}$  (è la prima circonferenza generatrice);

$k = 1 \rightarrow x^2 + y^2 - x - 3y + \frac{1}{2} = 0$ ,

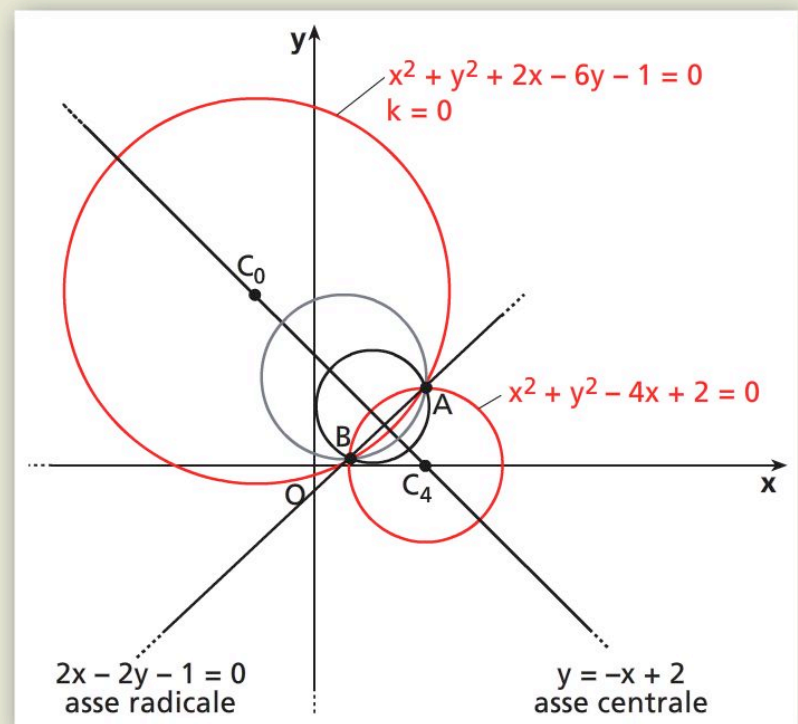
$C_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ ,  $r_1 = \sqrt{2}$ ;

$k = 2 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ ,

$C_2(1; 1)$ ,  $r_2 = 1$ .

La seconda circonferenza generatrice ha centro  $C_4(2; 0)$  e raggio  $r_4 = \sqrt{2}$ .

- L'asse centrale è  $y = -x + 2$  (è la retta passante per  $C_1$  e  $C_2$ ).





Studiare il fascio di circonferenze di equazione:

$$x^2 + y^2 - 3(2 - k)x + 4ky - 16 - 34k = 0 .$$

1. Scriviamo l'equazione del fascio nel seguente modo:

$$x^2 + y^2 - 6x - 16 + k(3x + 4y - 34) = 0$$

Quindi il fascio è generato dalla circonferenza:

$$x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \quad \text{di centro } C(3 ; 0)$$

e dall'asse radicale (circonferenza degenera):

$$3x + 4y - 34 = 0$$

2. Il fascio rappresenta circonferenze reali per:

$$\Delta \geq 0 \rightarrow \frac{9}{4}(2-k)^2 + 4k^2 + 16 + 34k \geq 0 \quad \text{cioè per } \underline{k \neq -2}$$

Per  $k = -2$  si ha la circ. degenera, che coincide con il punto  $T(6 ; 4)$ ; infatti, per  $k = -2$  si ha:

$$x^2 + y^2 - 12x - 8y + 52 = 0, \quad \text{circ. di centro } T(6 ; 4) \\ \text{e raggio} = 36 + 16 - 52 = 0.$$

3. Eventuali punti base :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \\ 3x + 4y - 34 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases} \rightarrow T(6 ; 4)$$

Il sistema ammette una sola soluzione, quindi l'asse radicale coincide con la tangente in T.



## Conclusione:

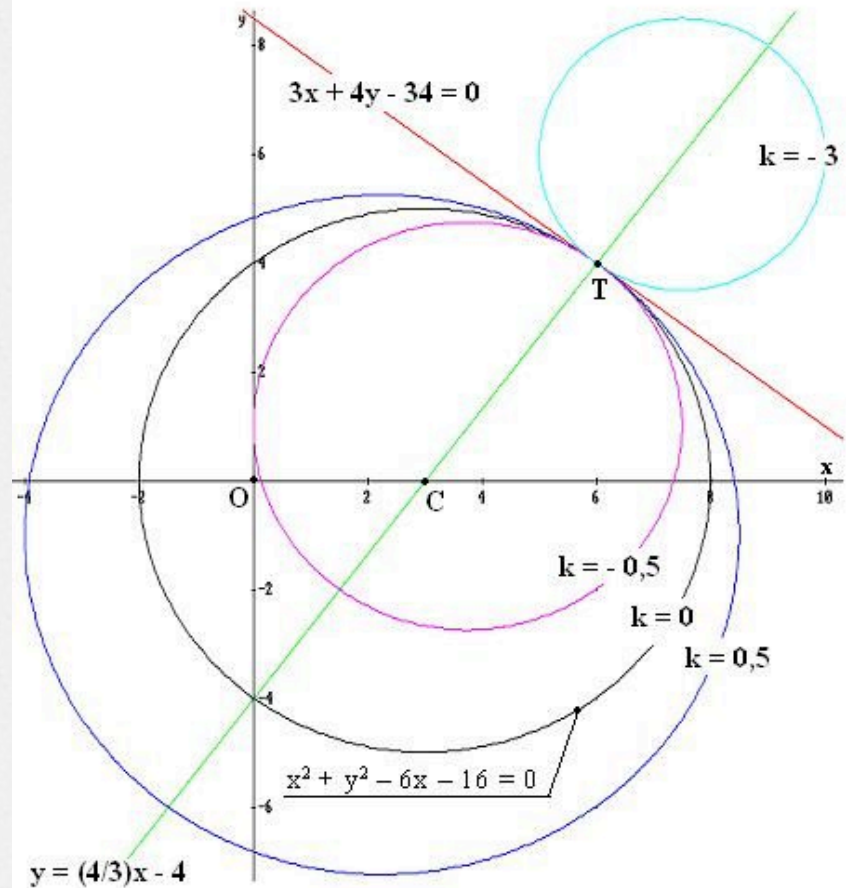
L'equazione del fascio rappresenta:

per  $k \neq -2$  un fascio di circonferenze tangenti in T e i centri delle circonferenze si trovano sulla retta "asse centrale" passante per CT, di equazione:

$$\frac{y - y_T}{x - x_T} = \frac{y_C - y_T}{x_C - x_T}$$

$$\frac{y - 4}{x - 6} = \frac{0 - 4}{3 - 6} \rightarrow y = \frac{4}{3}x - 4$$

Equazione fascio:  $x^2 + y^2 - 6x - 16 + k(3x + 4y - 34) = 0$



Studiare il fascio di circonferenze di equazione:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + k - 3 = 0 .$$

1. Si osserva che le coordinate del centro:

$$C = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right) = (2; -1)$$

sono costanti, indipendenti dal parametro  $k$ .

Quindi si tratta di un fascio di circonferenze concentriche di centro  $C(2 ; -1)$ .

2. Il fascio rappresenta circonferenze reali per:

$$\Delta \geq 0 \rightarrow 4 + 1 - k + 3 \geq 0 , \text{ cioè per } k \leq 8$$



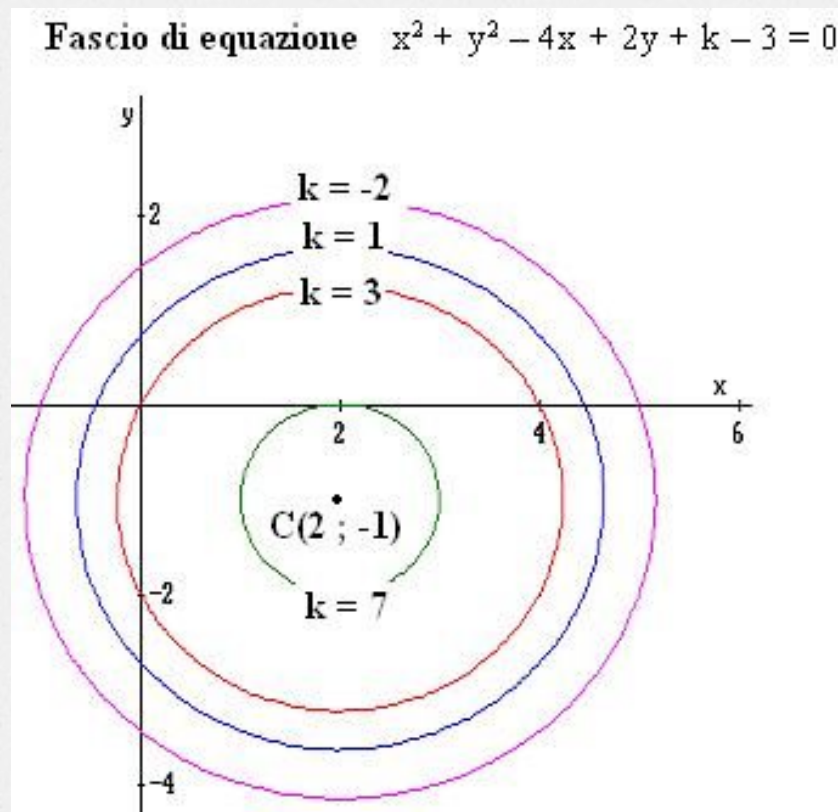
Per  $k = 8$  si ha la circonferenza degenera, che coincide con il punto  $C(2;-1)$ . Infatti, per  $k = 8$  si ha:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$$

equazione che rappresenta una circonferenza di centro  $C(2;-1)$  e raggio  $= 4 + 1 - 5 = 0$ .

## Conclusione

L'equazione data rappresenta, per  $k \leq 8$ , un fascio di circonferenze concentriche, di centro  $C(2; -1)$ .





Date le circonferenze:

$$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 24 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 4x = 0$$

determinare:

1. l'equazione del fascio di circonferenze;
2. l'equazione dell'asse radicale del fascio;
3. l'equazione dell'asse centrale del fascio.

1. Equazione del fascio di circonferenze:

$$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 24 + k(x^2 + y^2 - 4x) = 0$$

oppure

$$(1+k)x^2 + (1+k)y^2 - (10 + 4k)x - 6y + 24 = 0$$

2. L'equazione dell'asse radicale si ottiene per  $k = -1$ :

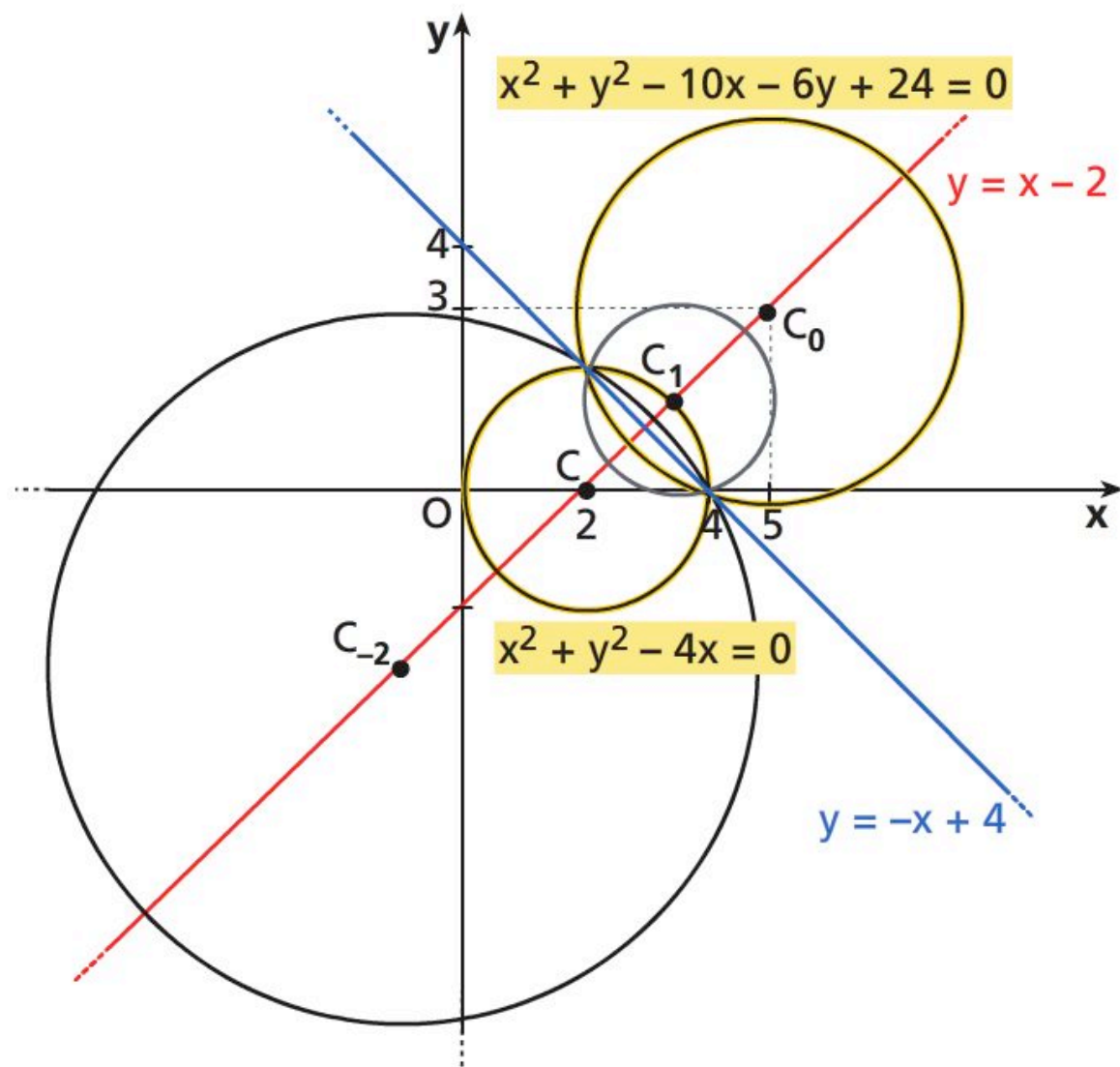
$$-6x - 6y + 24 = 0 \quad y = -x + 4$$

3. Equazione asse centrale:

$$\begin{cases} C(2 ; 0) & \text{centro della circ. } x^2 + y^2 - 4x = 0 \\ m = 1 & \text{coeff. ang. (asse centrale } \perp \text{ asse radicale)} \end{cases}$$

$$y = m(x - 2) \quad y = -x + 4$$





Determinare l'equazione del fascio di circonferenze passanti per i punti  $A(-1;2)$  e  $B(3;0)$ .

A e B sono i due punti base del fascio di circonferenze. Andiamo a trovare due elementi del fascio da poter combinare linearmente.

Tali elementi sono: asse radicale (retta AB) e circonferenza di diametro AB.



Asse radicale: distanza tra due punti A e B.

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \rightarrow \frac{y - 2}{0 - 2} = \frac{x + 1}{3 + 1}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad \text{oppure} \quad x + 2y - 3 = 0$$

## Circonferenza di diametro AB

$$\left| \begin{array}{l} \text{raggio} = \frac{1}{2} \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 4} = \sqrt{5} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{centro : } \alpha = \frac{x_A + x_B}{2} = 1 ; \quad \beta = \frac{y_A + y_B}{2} = 1 ; \quad C(1;1) \end{array} \right.$$

$$\text{quindi } \begin{cases} a = -2\alpha ; & a = -2 \\ b = -2\beta ; & b = -2 \\ c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 ; & c = 1 + 1 - 5 = -3 \end{cases}$$

$$\underline{x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0}$$



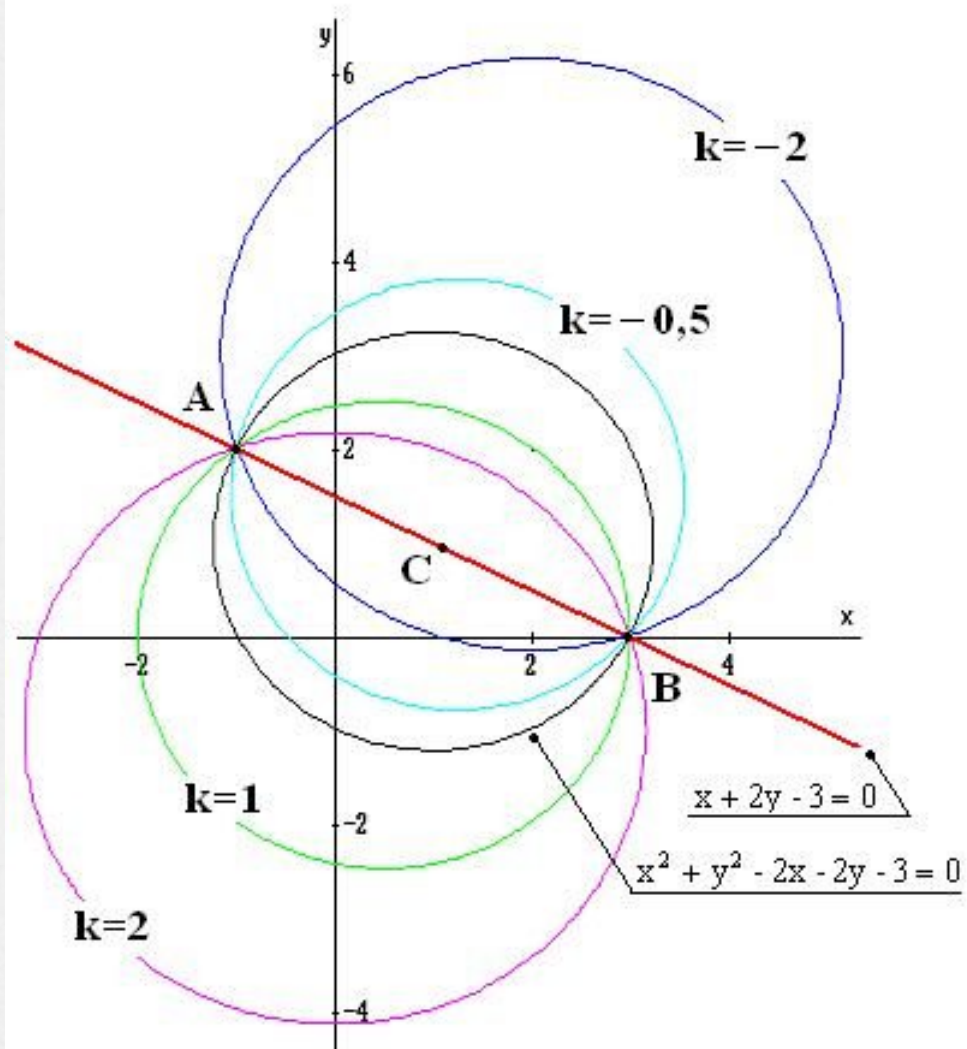
## Equazione del fascio di circonferenze

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 + k(x + 2y - 3) = 0$$

oppure

$$x^2 + y^2 + (k-2)x + 2(k-1)y - 3(k+1) = 0$$

**Equaz. fascio**  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 + k(x + 2y - 3) = 0$





Determinare l'equazione del fascio di circonferenze tangenti nel punto T di ascissa 1 alla retta t di equazione  $3x-y-2=0$ .

Per determinare l'equazione del fascio, occorre combinare linearmente le equazioni di due circonferenze tangenti nel punto T alla retta t.

Il punto T appartiene alla retta r, per cui la sua ordinata è:

$$y = 3 \cdot 1 - 2 = 1 \rightarrow T = (1;1)$$

Come prima circonferenza prendiamo quella degenera che ha centro  $T=(1;1)$  e raggio nullo:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$$

Come seconda circonferenza prendiamo la retta:

$$t: 3x - y - 2 = 0 \text{ (asse radicale)}$$

che rappresenta una circonferenza degenera di raggio infinito.



Combinando linearmente le equazioni ottenute, otteniamo l'equazione del fascio:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 + k(3x - y - 2) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + y^2 + (3k - 2)x - (k + 2)y - 2k + 2 = 0$$