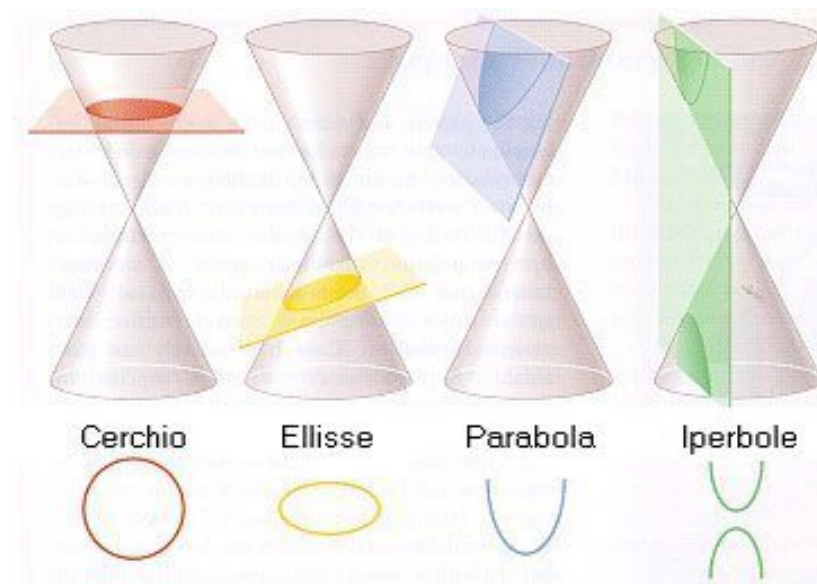


Geometria Analitica

L'ELLISSE

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

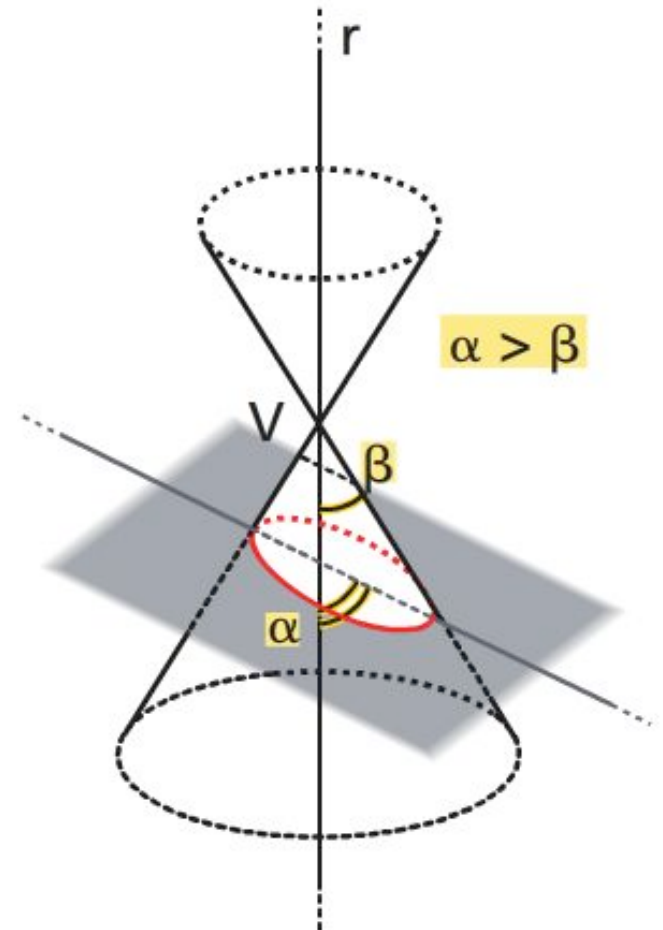
MATERIA: Matematica



L'*ellisse* fa parte di un insieme di curve (circonferenza, parabola, iperbole) chiamate *coniche*, perché si possono ottenere tagliando un cono con un piano.

Consideriamo un cono di asse r con angolo al vertice 2β . Sezioniamo la superficie del cono con un piano che formi con l'asse del cono un angolo $\alpha > \beta$.

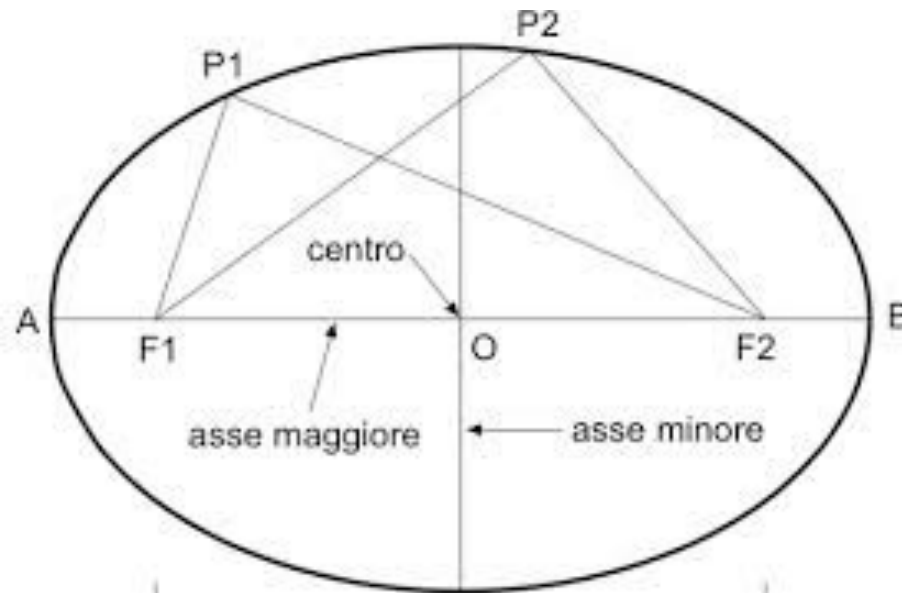
La figura che si ottiene dall'intersezione è *un'ellisse*.



DEFINIZIONE

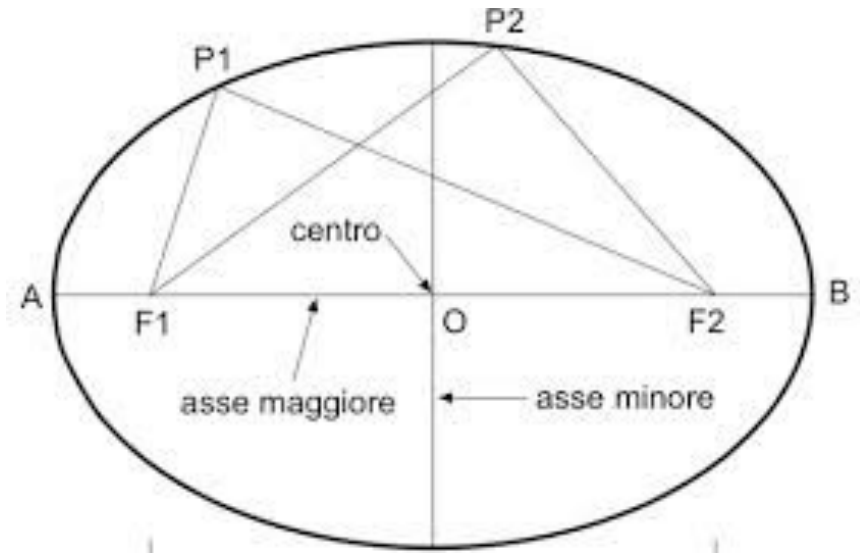
Assegniamo nel piano due punti fissi F_1 e F_2 detti **fuochi**, si chiama **ellisse** la curva piana luogo geometrico dei punti P tali che sia costante la somma delle distanze di P da F_1 e F_2 :

$$PF_1 + PF_2 = \text{costante}$$



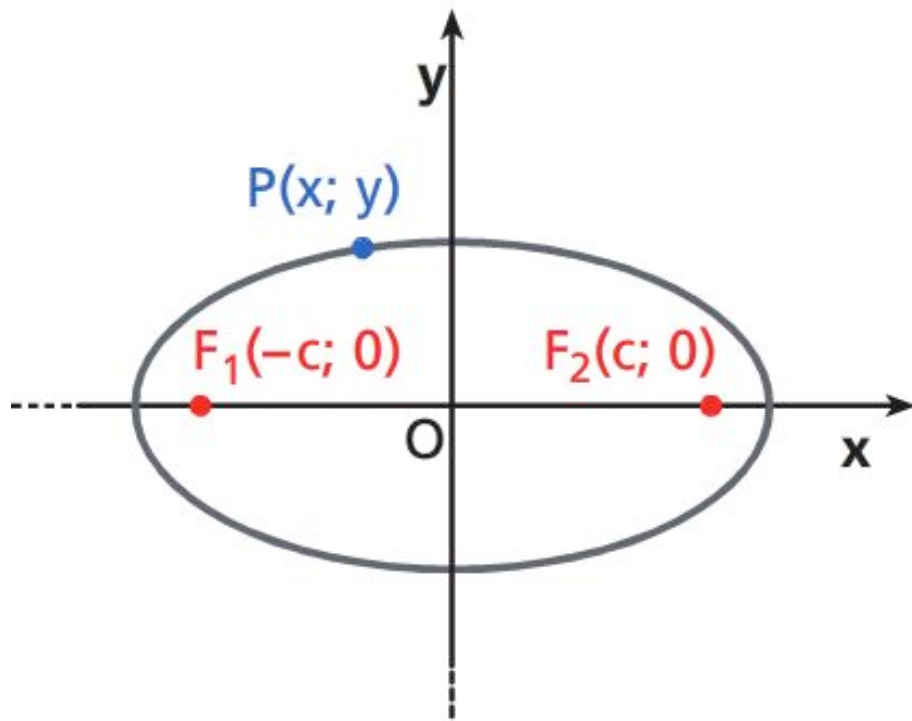
Indichiamo con: $2c$ la *distanza focale*; $2a$ la *somma costante* delle distanze dei punti dell'ellisse dai fuochi.

$$\text{Allora: } PF_1 + PF_2 = 2a$$



Poiché in un triangolo un lato è minore della somma degli altri due, abbiamo:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} > \overline{F_1F_2} \Rightarrow 2a > 2c \Rightarrow a > c \text{ (relazione tra } a \text{ e } c)$$



Determiniamo l'equazione dell'ellisse con il centro nell'origine degli assi cartesiani e l'asse x passante per i fuochi.

Fissiamo i fuochi nei punti $F_1(-c;0)$ e $F_2(c;0)$.

Applichiamo la definizione di ellisse, usando la distanza tra due punti:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Eseguiti i calcoli, e posto:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

otteniamo:

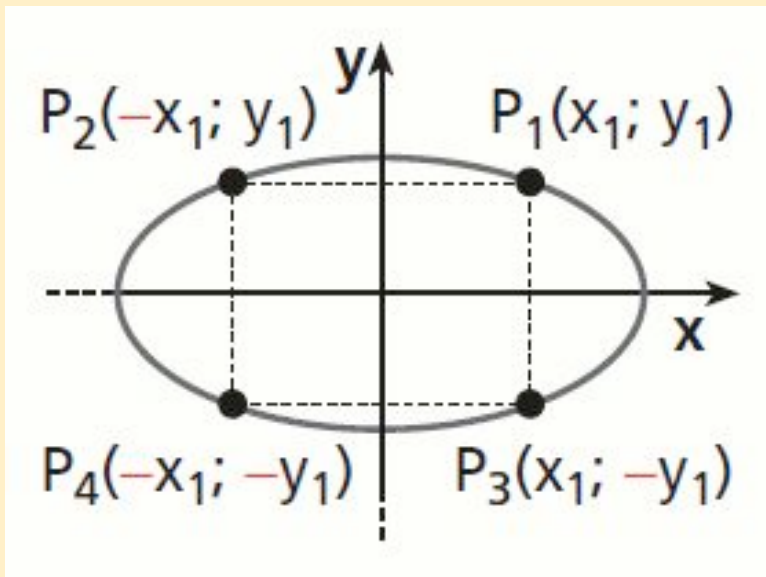
EQUAZIONE CANONICA DELL'ELLISSE

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2. PROPRIETA' ELLISSE

Simmetrie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \begin{cases} \frac{(-x_1)^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \rightarrow \text{simmetria rispetto all'asse } y \\ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{(-y_1)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \text{simmetria rispetto all'asse } x \\ \frac{(-x_1)^2}{a^2} + \frac{(-y_1)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \text{simmetria rispetto all'origine} \end{cases}$$

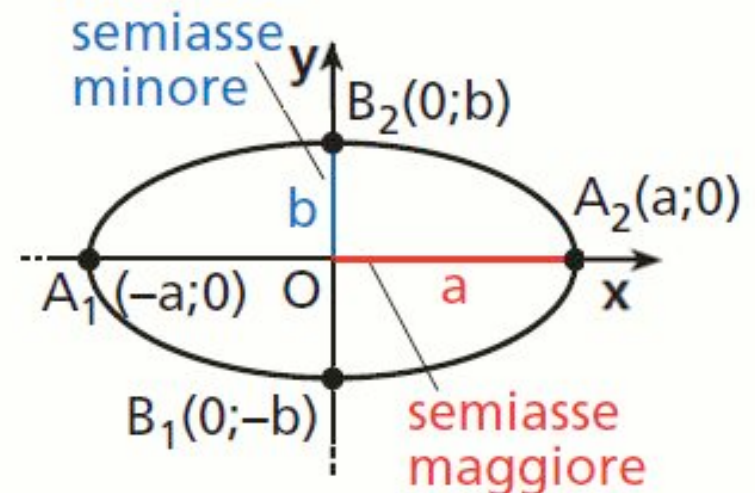


L'ellisse è simmetrica rispetto agli assi cartesiani

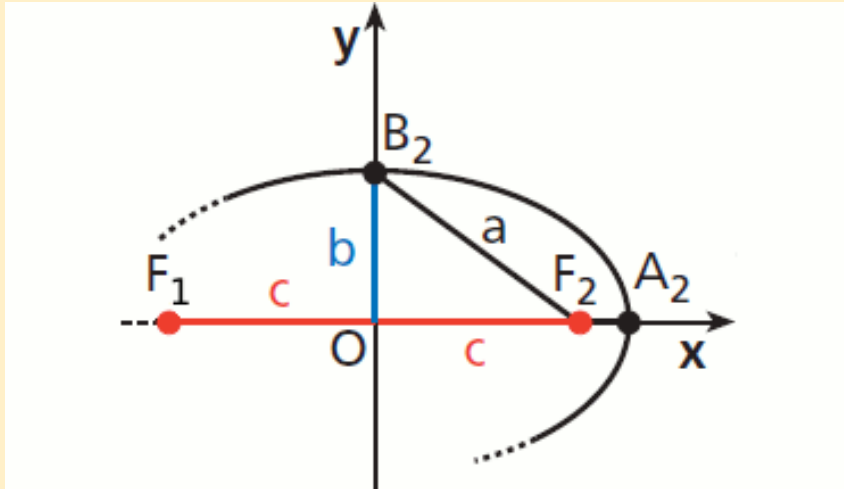
Intersezione con gli assi

$$\text{Asse } x \rightarrow \begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = \pm a$$

$$\text{Asse } y \rightarrow \begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = \pm b$$



Grandezze

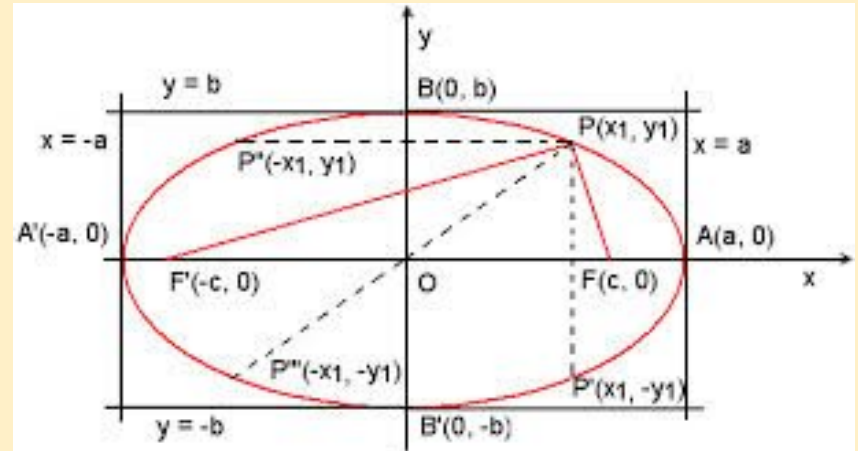


La distanza fra uno dei vertici sull'asse y e un fuoco è sempre uguale ad a :

$$\overline{B_2 F_2} = \sqrt{b^2 + c^2} = a$$

Grafico

L'ellisse è inscritta nel rettangolo di vertici ABA'B'.

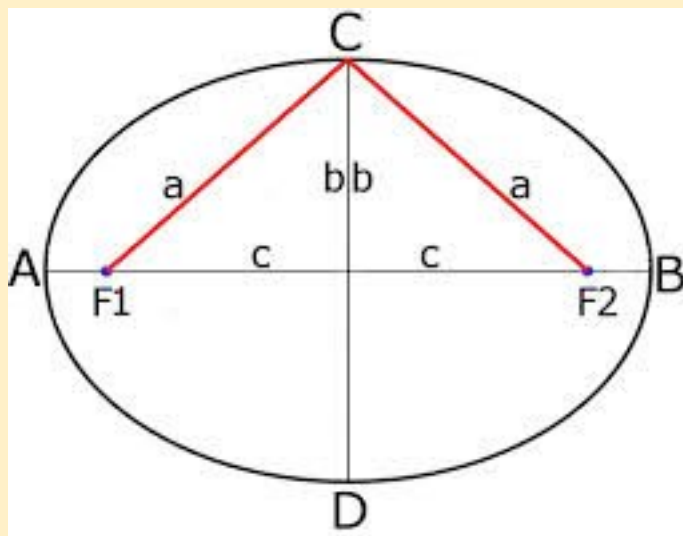


Infatti:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \rightarrow -a \leq x \leq a$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2) \rightarrow -b \leq y \leq b$$

Coordinate fuochi



Sapendo che $b^2 = a^2 - c^2$, si ottiene:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Pertanto, nota l'equazione dell'ellisse, le coordinate dei fuochi sono date da:

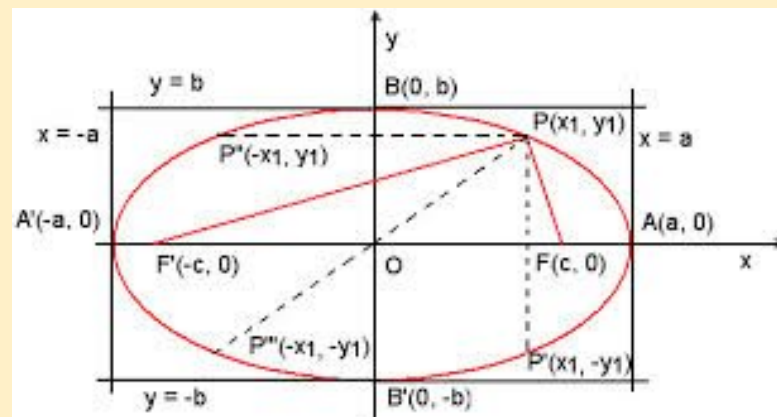
$$F_1 = (-c; 0) \quad F_2 = (c; 0)$$

Eccentricità

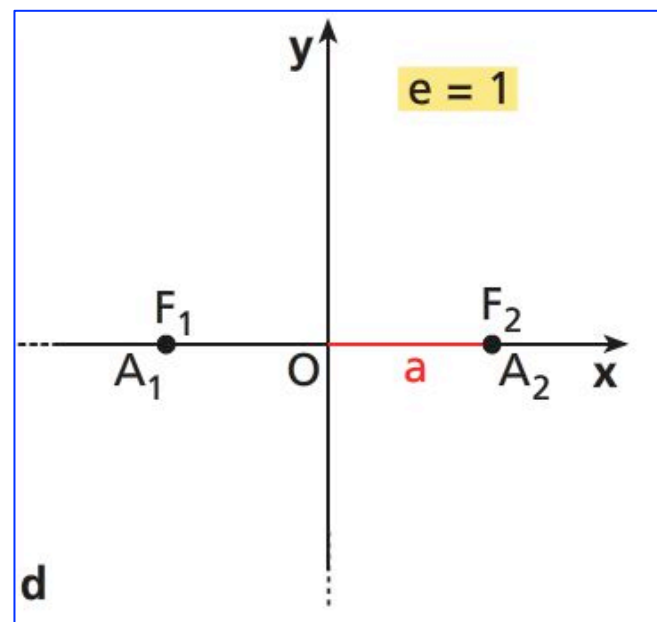
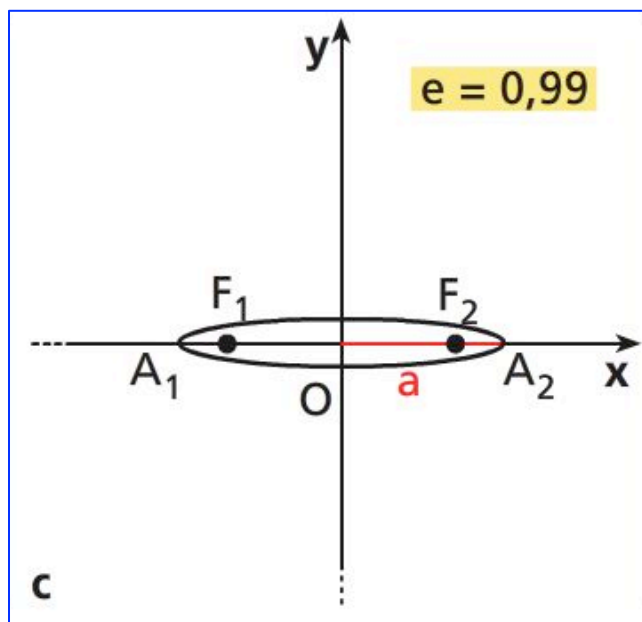
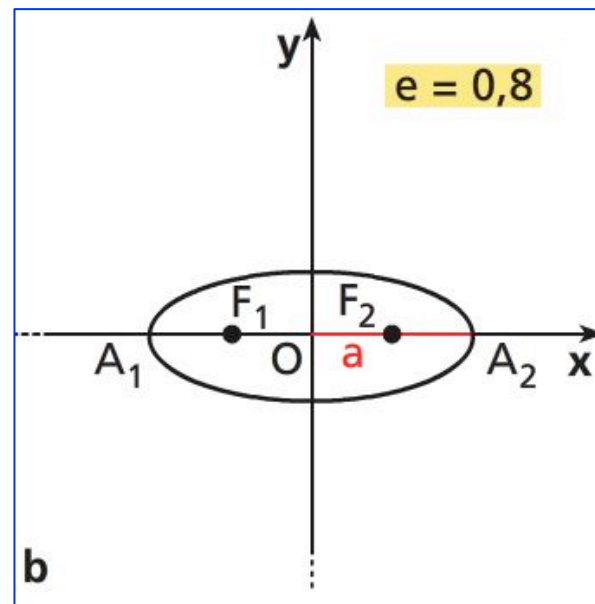
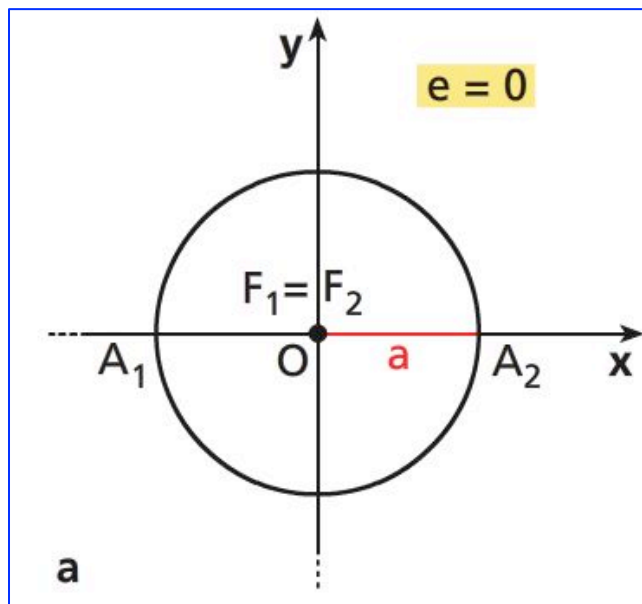
E' definita come:

$$e = \frac{\text{distanza focale}}{\text{lunghezza asse maggiore}} = \frac{c}{a}$$

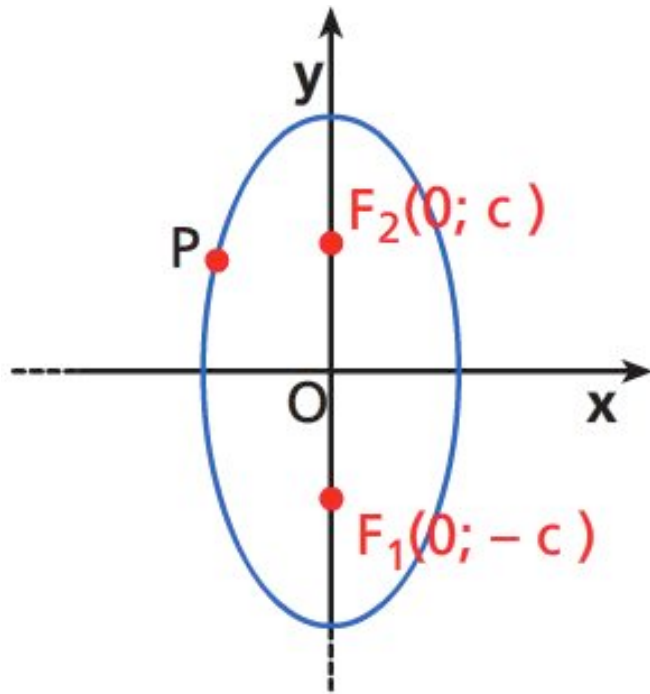
Poiché $c < a$, si ha: $0 < e < 1$



- Se $e=0$, allora $c=0 \rightarrow$ i fuochi coincidono con il centro e l'ellisse si riduce a una circonferenza;
- Se $e=1$, allora $c=a$ e $b=0 \rightarrow$ l'ellisse si riduce all'asse maggiore (*ellisse degenera*), nei cui vertici sono i fuochi.



3. ELLISSE CON I FUOCHI SULL'ASSE y



Il procedimento per determinare l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse y è analogo a quello precedente. L'equazione che si ottiene è la seguente:

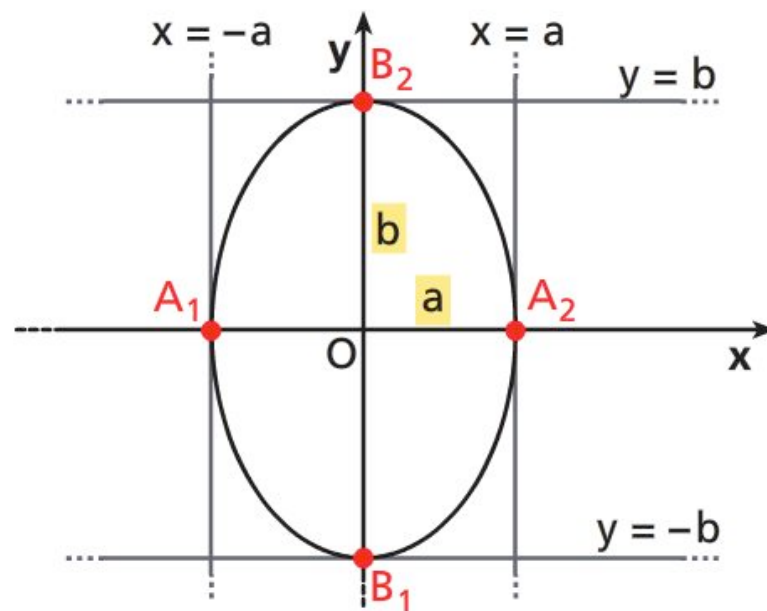
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

L'equazione ottenuta è analoga alla precedente, però in questo caso vale la relazione:

$$a^2 = b^2 - c^2 \rightarrow b > a$$

proprietà

- ✓ È simmetrica rispetto agli assi cartesiani
- ✓ Vertici: $A_1=(-a;0)$; $A_2=(a;0)$;
 $B_1=(0;-b)$; $B_2=(0;b)$
- ✓ È inscritta nel rettangolo che ha i lati di equazioni:
 $x = \pm a$ $y = \pm b$



- ✓ $B_1B_2 = 2b$ (asse maggiore); $A_1A_2 = 2a$ (asse minore)
- ✓ Coordinate dei fuochi: $F_1 = (0;-c)$ $F_2 = (0;c)$
- ✓ Eccentricità:
$$e = \frac{\text{distanza focale}}{\text{lunghezza asse maggiore}} = \frac{c}{b}$$

Determinare il luogo geometrico dei punti del piano, la cui somma delle distanze dai punti $A=(-4;0)$ e $B=(4;0)$ è uguale a 12.

Sappiamo che il luogo richiesto è un'ellisse. Cerchiamo la sua equazione utilizzando la condizione data. Detto $P(x,y)$ un punto generico del luogo, deve essere:

$$\overline{PA} + \overline{PB} = 12.$$

Poiché, per la formula della distanza:

$$\overline{PA} = \sqrt{(x+4)^2 + y^2}, \quad \overline{PB} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2},$$

sostituendo, otteniamo:

$$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 12.$$

Isoliamo una radice, eleviamo al quadrato ambo i membri e semplifichiamo:

$$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 12 - \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$$

$$x^2 + 16 + 8x + y^2 = 144 + x^2 + 16 - 8x + y^2 - 24\sqrt{(x-4)^2 + y^2}.$$

Isoliamo la radice rimasta ed eleviamo al quadrato ambo i membri:

$$24\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 144 - 16x$$

$$3\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 18 - 2x$$

$$9(x^2 + 16 - 8x + y^2) = 4x^2 + 324 - 72x.$$

Svolgiamo i calcoli, semplifichiamo e isoliamo il termine noto:

$$9x^2 + 144 - \cancel{72x} + 9y^2 = 4x^2 + 324 - \cancel{72x}$$

$$5x^2 + 9y^2 = 180.$$

Dividiamo ambo i membri per 180:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

ottenendo l'equazione canonica dell'ellisse.

ESERCIZIO GUIDA

Data l'ellisse di equazione $4x^2 + 9y^2 = 36$, determiniamo la misura dei semiassi, le coordinate dei vertici e dei fuochi, l'eccentricità e rappresentiamo la curva graficamente.

Dividiamo entrambi i membri dell'equazione data per il termine noto, per ridurla nella forma canonica,

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

da cui deduciamo $a = 3$, $b = 2$ e le coordinate dei vertici:

$$A_1(-3; 0), \quad A_2(3; 0), \quad B_1(0; -2), \quad B_2(0; 2).$$

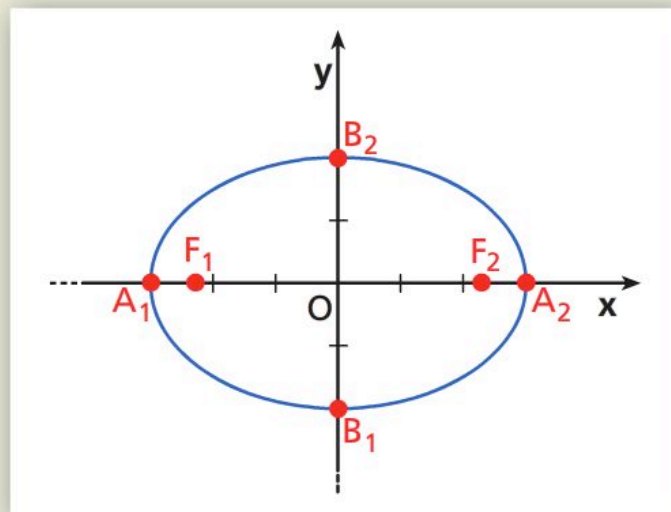
Determiniamo inoltre:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5,$$

le coordinate dei fuochi $F_1(-\sqrt{5}; 0)$, $F_2(\sqrt{5}; 0)$,

il valore dell'eccentricità $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Rappresentiamo graficamente l'ellisse, dopo aver disegnato i quattro vertici.



Dopo aver calcolato tutti gli elementi necessari, disegnare l'ellisse di equazione $4x^2+9y^2=36$

Dividiamo entrambi i membri dell'equazione data per il termine noto, per ridurla nella forma canonica:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

da cui deduciamo $a=3$ e $b=2$ e le coordinate dei vertici:

$$A_1(-3; 0), \quad A_2(3; 0), \quad B_1(0; -2), \quad B_2(0; 2).$$

Determiniamo il valore di c^2 :

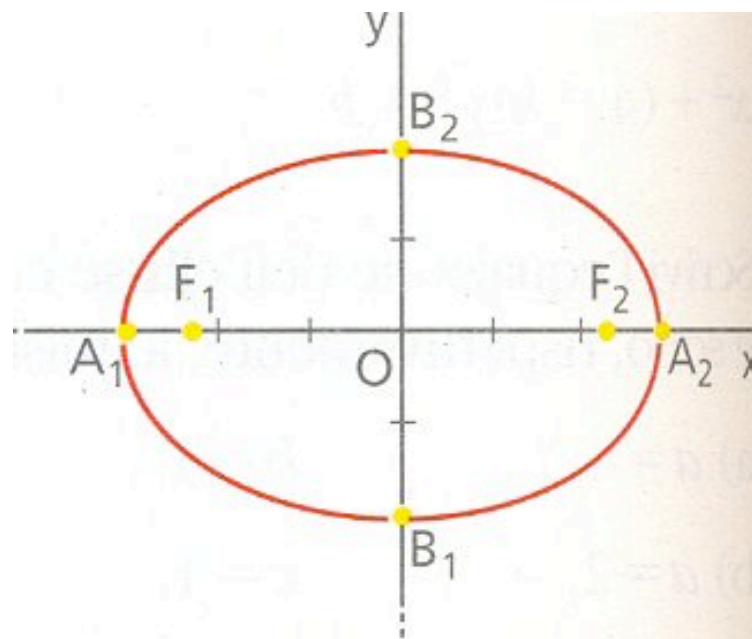
$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5,$$

le coordinate dei fuochi:

$$F_1(-\sqrt{5}; 0), \quad F_2(\sqrt{5}; 0),$$

il valore dell'eccentricità:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$



ESERCIZIO GUIDA

Data l'equazione

$$\frac{x^2}{k+2} + \frac{y^2}{3-k} = 1,$$

determiniamo i valori da attribuire al parametro k affinché rappresenti un'ellisse con i fuochi sull'asse delle x .

Affinché l'equazione data sia l'equazione canonica di un'ellisse, devono valere le uguaglianze:

$$a^2 = k + 2 \text{ e } b^2 = 3 - k.$$

Deve perciò essere: $k + 2 > 0$ e $3 - k > 0$.

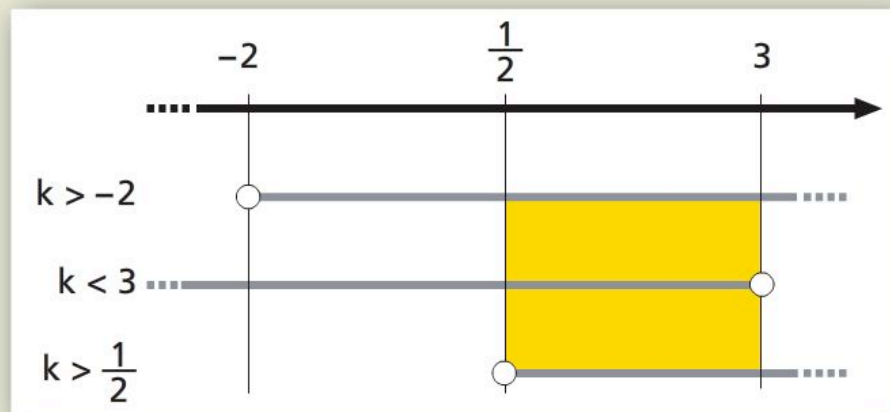
I fuochi stanno sull'asse x , quindi deve valere la disuguaglianza:

$$a > b \rightarrow a^2 > b^2 \rightarrow k + 2 > 3 - k.$$

Risolviamo il sistema costituito dalle tre disequazioni:

$$\begin{cases} k + 2 > 0 \\ 3 - k > 0 \\ k + 2 > 3 - k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k > -2 \\ k < 3 \\ k > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono $\frac{1}{2} < k < 3$, quindi l'equazione data rappresenta un'ellisse con i fuochi sull'asse x per $\frac{1}{2} < k < 3$.



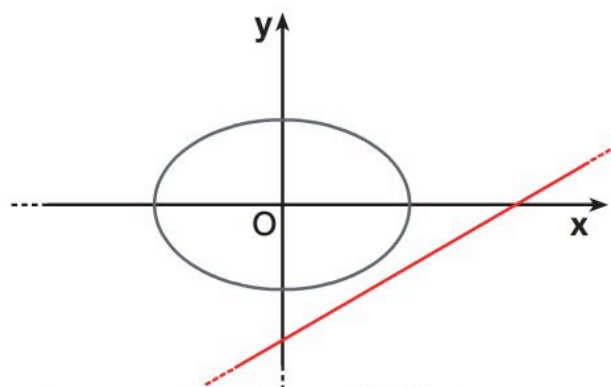
4. LA POSIZIONE DI UNA RETTA RISPETTO A UN'ELLISSE

Per studiare la posizione di una retta rispetto a un'ellisse, dobbiamo determinare quante sono le soluzioni del seguente sistema (metodo di sostituzione):

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx + q \end{cases}$$

$$\Delta < 0$$

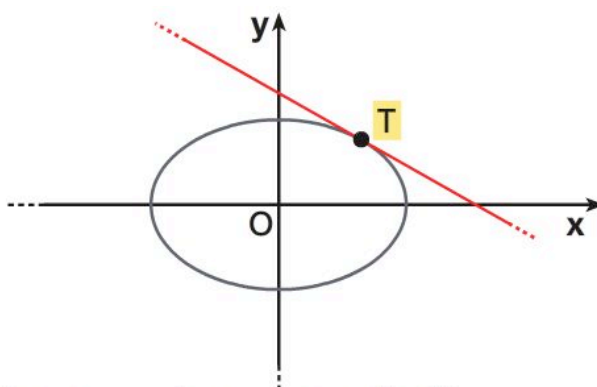
il sistema non
ammette soluzioni
reali



a. La retta è esterna all'ellisse.
Non vi sono punti di intersezione.

$$\Delta = 0$$

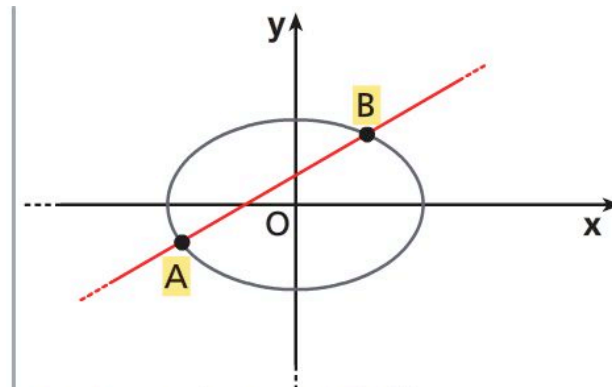
il sistema ammette due
soluzioni reali e
coincidenti



b. La retta è tangente all'ellisse.
L'unico punto di intersezione è il
punto di tangenza.

$$\Delta > 0$$

il sistema ammette
due soluzioni reali e
distinte



c. La retta è secante l'ellisse.
I punti di intersezione sono due.

Studiare la posizione della retta rispetto all'ellisse:

$$\text{retta} \rightarrow x + 2y - 6 = 0 \quad \text{ellisse} \rightarrow \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Risolviamo il seguente sistema (metodo di sostituzione):

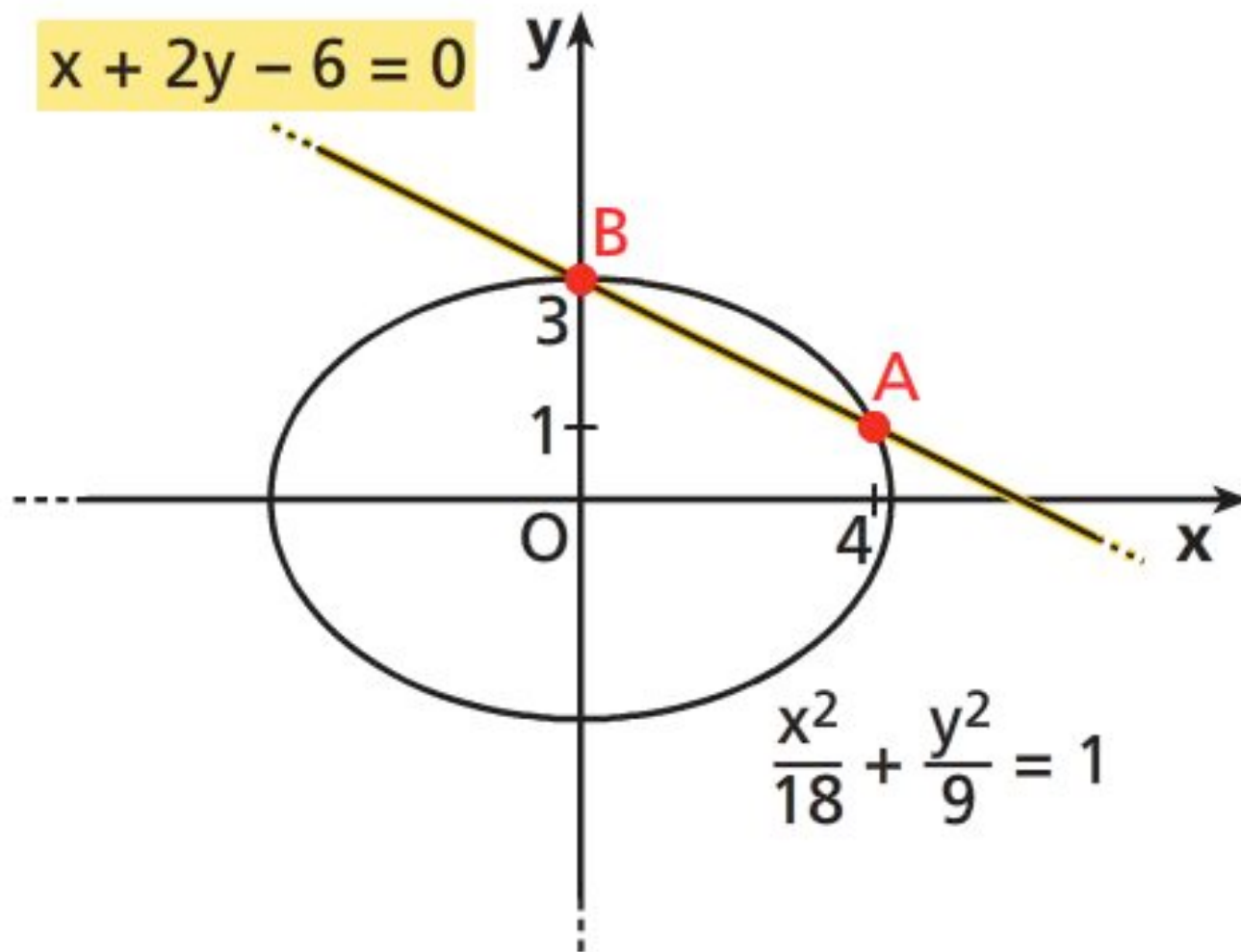
$$\begin{cases} \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ x = -2y + 6 \end{cases}$$

L'equazione risolvente è:

$$y^2 - 4y + 3 = 0 \rightarrow y_1 = 1 \quad y_2 = 3$$

L'equazione ha due soluzioni distinte, e dunque la retta interseca l'ellisse in due punti:

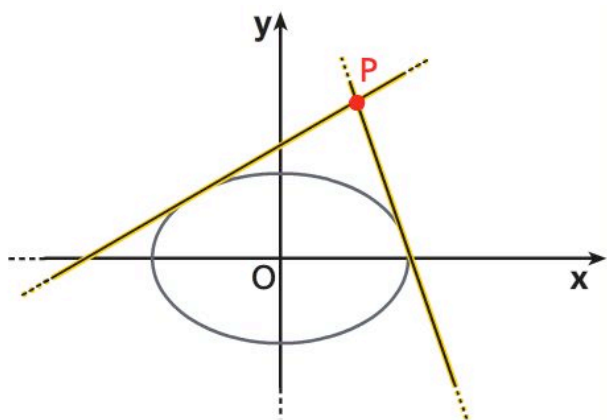
$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ x_1 = 4 \end{cases} \rightarrow A = (4; 1) \quad \begin{cases} y_2 = 3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow B = (0; 3)$$



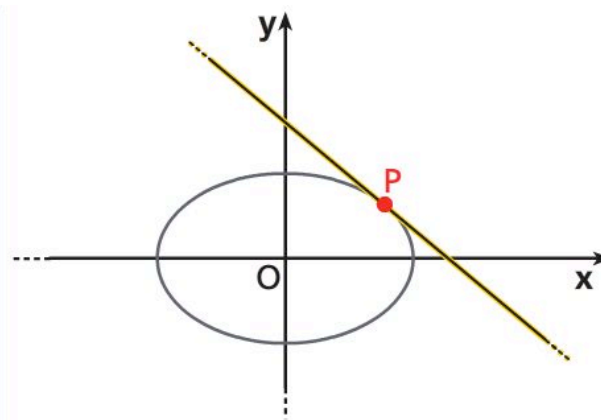
La retta $x + 2y - 6 = 0$ è secante
l'ellisse nei punti $A=(4;1)$ e $B=(0;3)$

5. LE RETTE TANGENTI A UN'ELLISSE

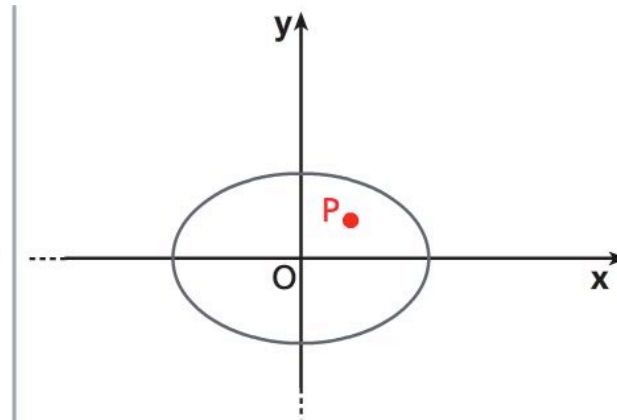
Dato un punto $P=(x_0;y_0)$ e un'ellisse qualsiasi, si possono presentare i seguenti tre casi:



a. P è esterno all'ellisse: esistono due rette tangenti per P .



b. P appartiene all'ellisse: esiste una sola retta tangente per P .



c. P è interno all'ellisse: non esistono rette tangenti per P .

Per determinare le equazioni delle eventuali rette tangenti, è possibile seguire i seguenti metodi.

- Metodo generale, valido per tutte le coniche (circonferenza, ellisse, parabola, iperbole)

METODO DEL DISCRIMINANTE NULLO $\Delta = 0$

Determinare le equazioni delle eventuali rette tangenti all'ellisse di equazione $(x^2/12)+(y^2/4)=1$ condotte dal punto $P=(6;-2)$.

1. Si scrive il sistema formato dall'equazione della parabola e quella del fascio di rette passanti per P:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y+2 = m(x-6) \end{cases}$$

2. Ricaviamo la y dall'equazione della retta e sostituiamola nell'equazione dell'ellisse (metodo di sostituzione):

$$(1 + m^2)x^2 - 12(3m^2 + m)x + 108m^2 + 72m = 0$$

3. Calcoliamo Δ :

$$\Delta = 36(3m^2 + m)^2 - (1 + 3m^2)(108m^2 + 72m)$$

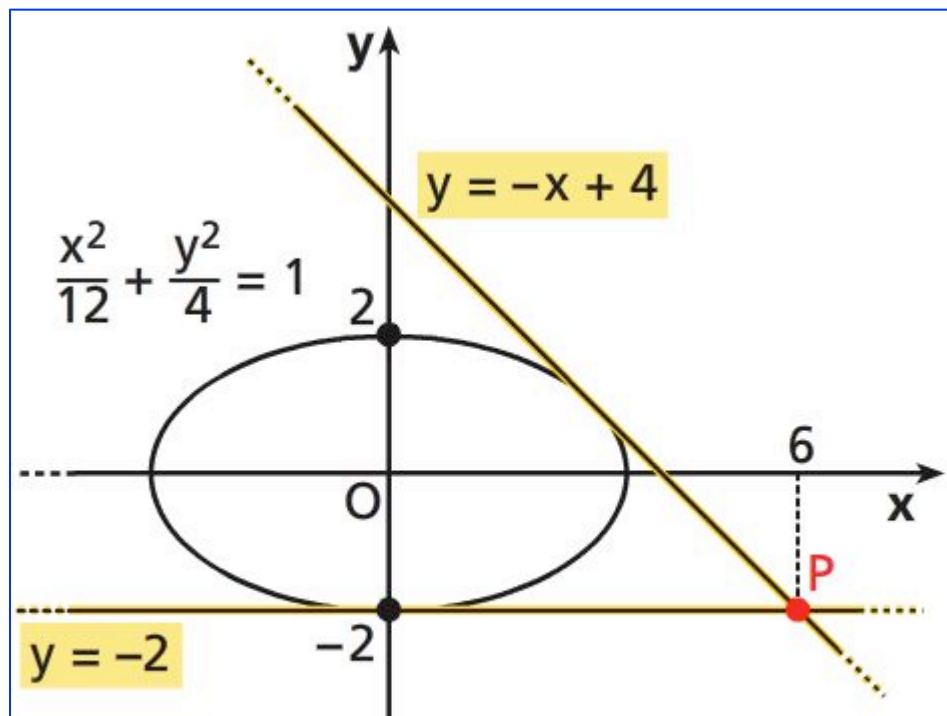
4. Poniamo la condizione di tangenza $\Delta=0$, in quanto, affinché le rette (o la retta) per P siano tangenti (o tangente) all'ellisse, è necessario che l'equazione risolvente ammetta due soluzioni coincidenti:

$$\Delta = 0 \Rightarrow 36(3m^2 + m)^2 - (1 + 3m^2)(108m^2 + 72m) = 0$$

Risolvendo l'equazione di 2° grado rispetto a m , otteniamo le seguenti soluzioni:

$$m_1 = 0 \quad m_2 = -1$$

5. In definitiva, ci sono due rette tangenti all'ellisse condotte dal punto P. Sostituendo i valori di m ottenuti nell'equazione del fascio, otteniamo le equazioni delle due tangenti all'ellisse:



$$t_1 \rightarrow y = -2$$

$$t_2 \rightarrow y = -x + 4$$

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo le equazioni delle rette tangenti all'ellisse di equazione $x^2 + 2y^2 = 9$, condotte dal punto $P(-9; 0)$.

L'equazione della retta generica passante per il punto $P(-9; 0)$ è $y = m(x + 9)$.

Scriviamo il sistema retta-ellisse per determinare i valori del coefficiente angolare m :

$$\begin{cases} y = mx + 9m \\ x^2 + 2y^2 = 9 \end{cases}$$

Determiniamo l'equazione risolvente:

$$x^2 + 2(mx + 9m)^2 = 9.$$

Riduciamo l'equazione risolvente a forma normale:

$$\begin{aligned} x^2 + 2(m^2x^2 + 18m^2x + 81m^2) - 9 &= 0 \\ (1 + 2m^2)x^2 + 36m^2x + 162m^2 - 9 &= 0. \end{aligned}$$

Imponiamo che Δ (in questo caso $\frac{\Delta}{4}$) sia nullo, in questo modo la retta intersecherà l'ellisse in due punti coincidenti:

$$\begin{aligned} (18m^2)^2 - (1 + 2m^2)(162m^2 - 9) &= 0 \\ 324m^4 - 162m^2 - 324m^4 + 9 + 18m^2 &= 0 \\ 144m^2 - 9 &= 0 \\ m^2 = \frac{9}{144} \rightarrow m^2 = \frac{1}{16} \rightarrow m &= \pm \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Sostituiamo i valori ottenuti in $y = mx + 9m$.
Ricaviamo così le equazioni delle rette tangenti all'ellisse uscenti da $P(-9; 0)$:

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{9}{4} \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}.$$

Scrivere le equazioni delle tangenti comuni all'ellisse di equazione $(x^2/100)+(y^2/36)=1$ e alla circonferenza di equazione $x^2+y^2=64$.

1. Costruire due sistemi di equazioni formati dalla retta generica $y=mx+n$ e dalle equazioni dell'ellisse e della circonferenza:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \\ y = mx + n \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 64 \\ y = mx + n \end{array} \right.$$

2. Applicare il metodo di sostituzione (sostituire la y della retta nell'equazione dell'ellisse e della circonferenza):

$$\begin{cases} 36x^2 + 100(mx + n)^2 = 3600 \\ y = mx + n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (9 + 25m^2)x^2 + 50nm x + 25(n^2 - 36) = 0 \\ y = mx + n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (mx + n)^2 = 64 \\ y = mx + n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (1 + m^2)x^2 + 2mnx + n^2 - 64 = 0 \\ y = mx + n \end{cases}$$

3. Imporre la condizione di tangenza $\Delta=0$:

$$1^\circ \text{ sistema} \Rightarrow (25mn)^2 - 25(9 + 25m^2)(n^2 - 36) = 0 \rightarrow 100m^2 - n^2 + 36 = 0$$

$$2^\circ \text{ sistema} \Rightarrow m^2n^2 - (1 + m^2)(n^2 - 64) = 0 \rightarrow 64m^2 - n^2 + 64 = 0$$

4. Mettere a sistema le due condizioni di tangenza:

$$\begin{cases} 100m^2 - n^2 + 36 = 0 \\ 64m^2 - n^2 + 64 = 0 \end{cases}$$

E' un sistema nelle incognite m e n . Applicando il metodo di riduzione (consigliabile), otteniamo:

$$\begin{cases} 64m^2 - n^2 + 64 = 0 \\ -1 \cdot 100m^2 - n^2 + 36 = 0 \\ \hline -36m^2 \quad // \quad +28 = 0 \end{cases}$$

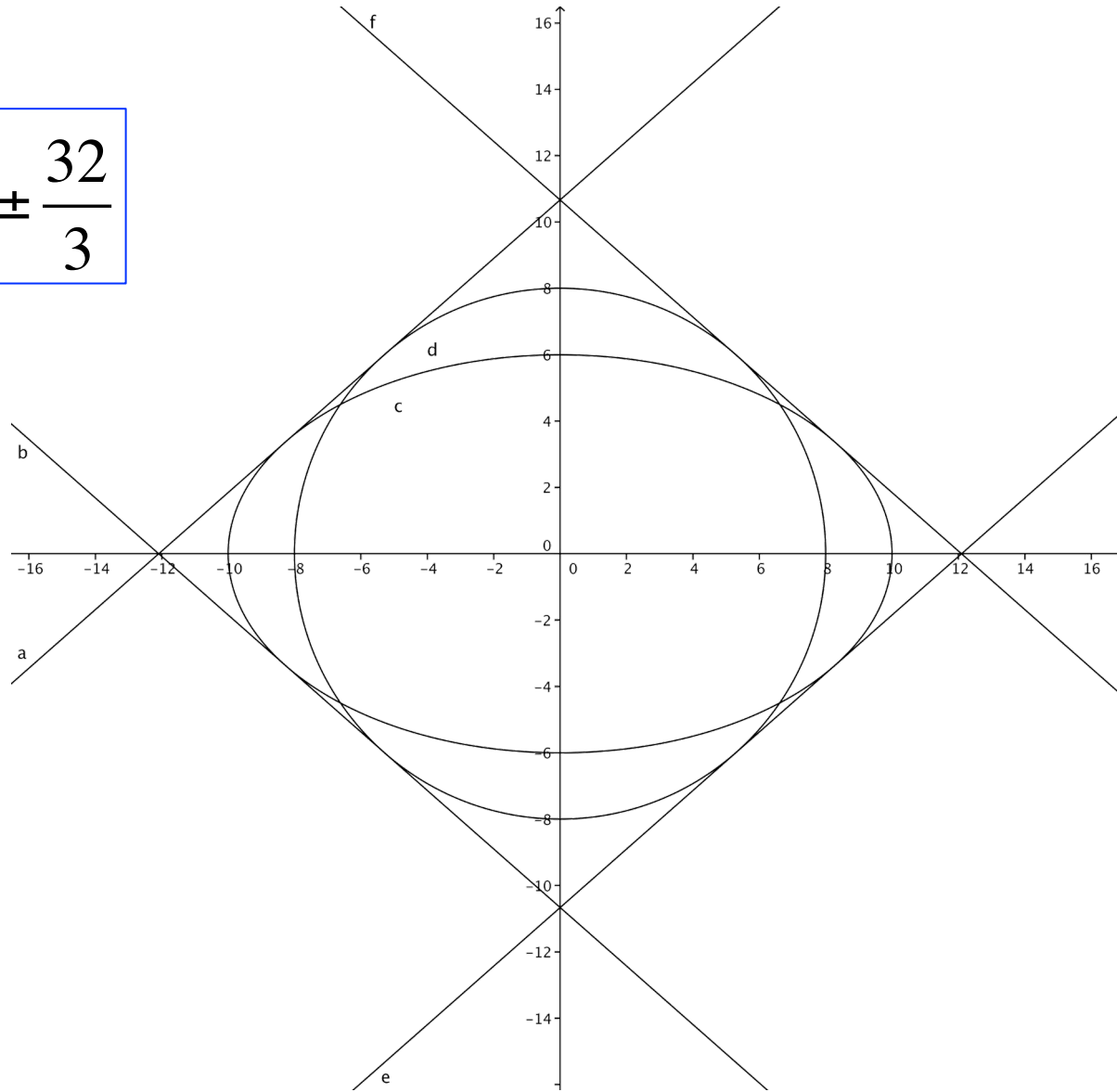
da cui

$$m = \pm \sqrt{\frac{28}{36}} = \pm \sqrt{\frac{7}{9}} = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{448}{9} - n^2 + 64 &= 0 \\ 448 - 9n^2 + 576 &= 0 \\ -9n^2 + 1024 &= 0 \\ n &= \pm \sqrt{\frac{1024}{9}} = \pm \frac{32}{3} \end{aligned}$$

5. In conclusione, le rette tangenti sono:

$$y = mx + n = \pm \frac{\sqrt{7}}{3} x \pm \frac{32}{3}$$



Data l'ellisse $x^2+9y^2=1$, determinare le equazioni delle rette tangenti, parallele alla retta $x+3y=1$.

La retta data con le tangenti costituiscono un fascio improprio di rette di equazione $x+3y=k$. Di questo fascio a noi interessano quelle tangenti all'ellisse. Quindi:

$$\begin{cases} x+3y=k \\ x^2+9y^2=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=k-3y \\ (k-3y)^2+9y^2=1 \end{cases} \rightarrow k^2-6ky+18y^2-1=0$$

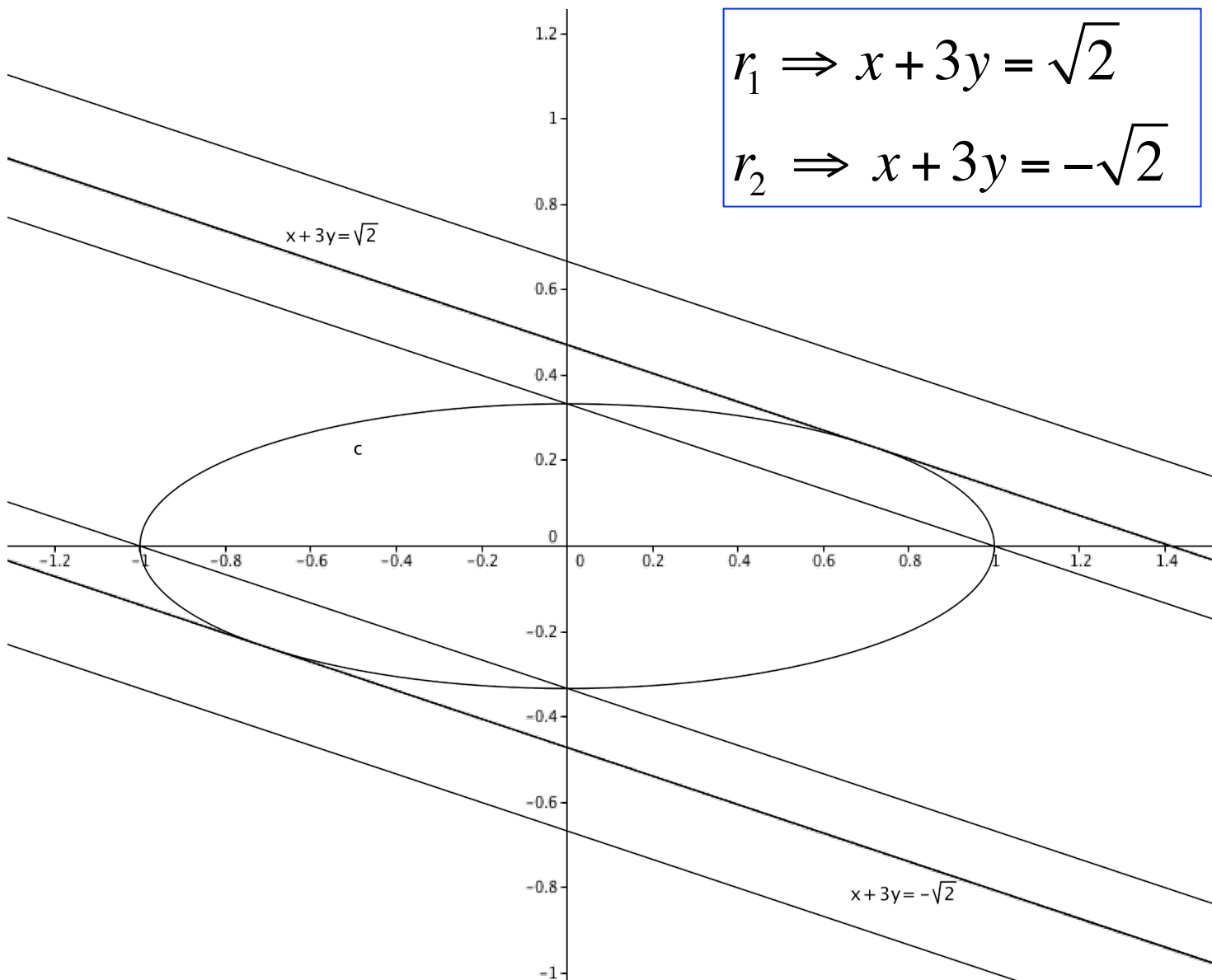
All'equazione ottenuta imponiamo la condizione di tangenza, che ci consentirà di trovare i valori di k :

$$\Delta=0 \Rightarrow 9k^2-18(k^2-1)=0 \rightarrow k^2-2=0 \rightarrow k=\pm\sqrt{2}$$

Le rette cercate sono:

$$r_1 \Rightarrow x + 3y = \sqrt{2}$$

$$r_2 \Rightarrow x + 3y = -\sqrt{2}$$



METODO DELLA FORMULA DI SDOPPIAMENTO

Si applica solo se il punto $P=(x_0;y_0)$ appartiene all'ellisse

Formula dello sdoppiamento

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Trovare la retta tangente t all'ellisse di equazione $(x^2/9)+(y^2/6)=1$ nel suo punto $P=(\sqrt{3};2)$.

Applichiamo la formula dello sdoppiamento:

$$\frac{\sqrt{3}x}{9} + \frac{2y}{6} = 1$$

Semplificando, otteniamo l'equazione della retta t :

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 3$$

6. CONDIZIONI PER DETERMINARE L'EQUAZIONE DELL'ELLISSE

Per poter determinare l'equazione dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

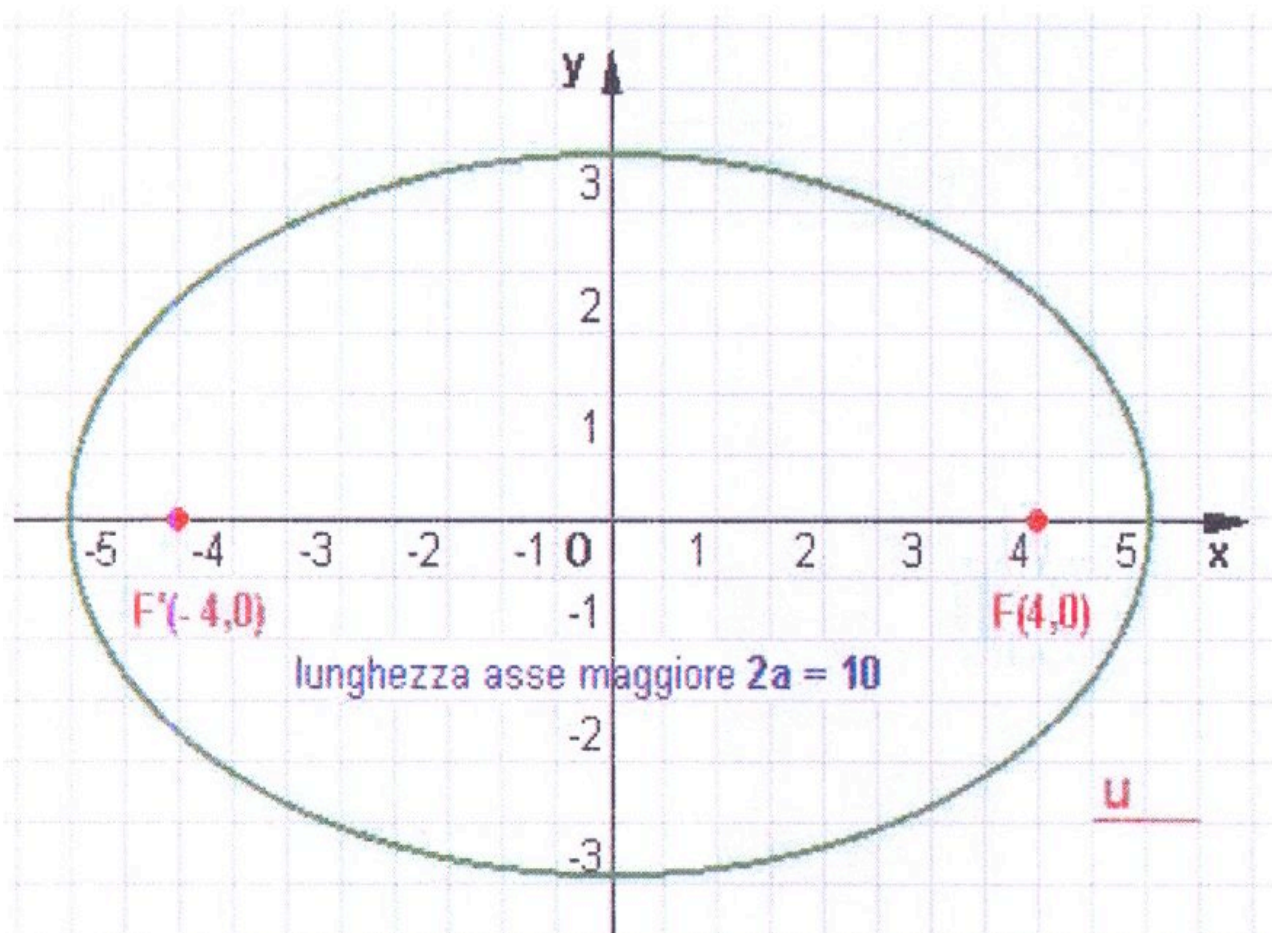
occorre calcolare i due coefficienti a, b presenti in essa.

Pertanto il problema è: trovare due **condizioni** tra loro indipendenti tali da tradurle in due equazioni nelle due incognite a, b .

Ecco alcuni casi:

1. Sono note le lunghezze dei due semiassi; 2. Sono note le coordinate di un fuoco e un vertice (o semiasse); 3. L'ellisse passa per un punto noto e si conoscono le coordinate di un fuoco (o vertice); 4. L'ellisse passa per un punto noto e si conosce l'eccentricità; 5. L'ellisse passa per due punti noti; 6. E' nota l'eccentricità e si conoscono le coordinate di un fuoco (o di un vertice); 7. E' nota l'equazione di una retta tangente all'ellisse (condizione di tangenza) e sono note le coordinate di un vertice (o di un fuoco, o di un punto dell'ellisse); 8. Sono note le coordinate di due punti dell'ellisse (condizioni di appartenenza).

Determinare l'equazione dell'ellisse con asse maggiore $2a=10$ sull'asse x e fuochi $F'=(-4;0)$ e $F=(4;0)$



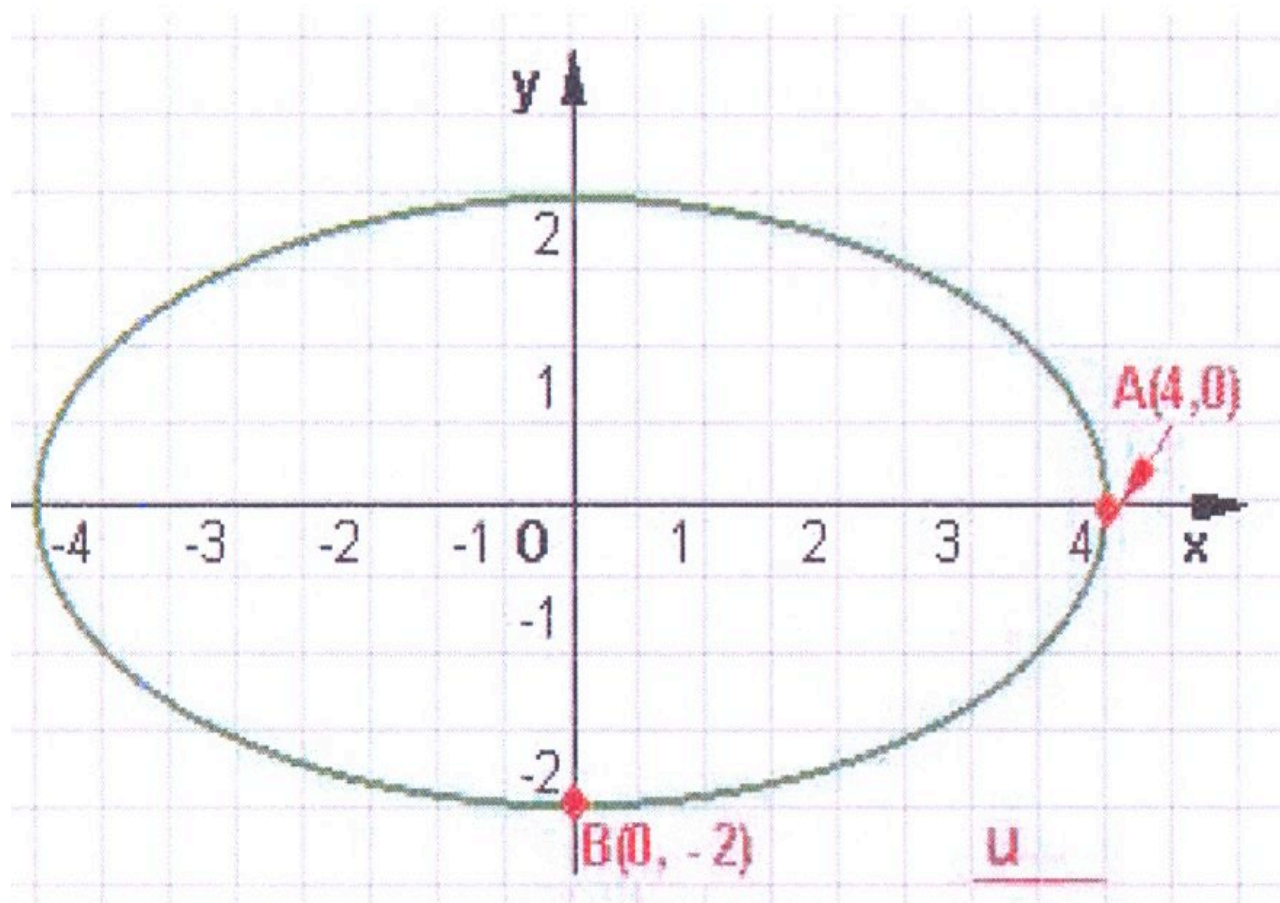
Essendo $2a = 10$ si ottiene $a = 5$ e quindi $a^2 = 25$.

Dalla relazione $c^2 = a^2 - b^2$, poichè $c^2 = 16$, si ottiene $b^2 = 25 - 16 = 9$.

Dunque l'equazione dell'ellisse è :

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Determinare l'equazione dell'ellisse con asse maggiore sull'asse x e avente i vertici nei punti A=(4;0) e B=(0;-2)



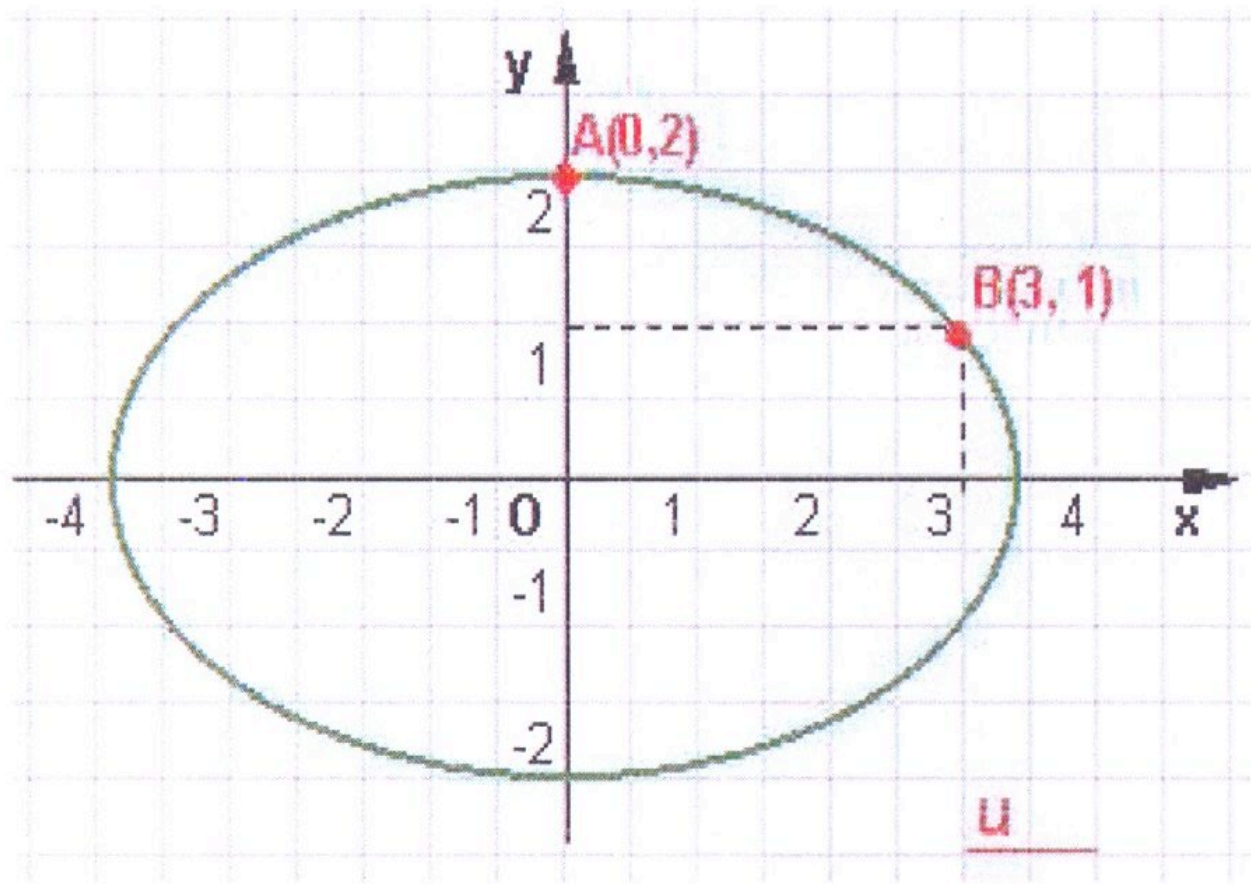
Essendo $a = 4$ si ottiene
 $a^2 = 16$.

Essendo $b = -2$ si ottiene
 $b^2 = 4$.

Dunque l'equazione
dell'ellisse è:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Determinare l'equazione dell'ellisse con asse maggiore sull'asse x e passante per $A=(0;2)$ e $B=(3;1)$.



Essendo $b = 2$, in quanto il punto A è vertice dell'ellisse, si ottiene $b^2 = 4$.

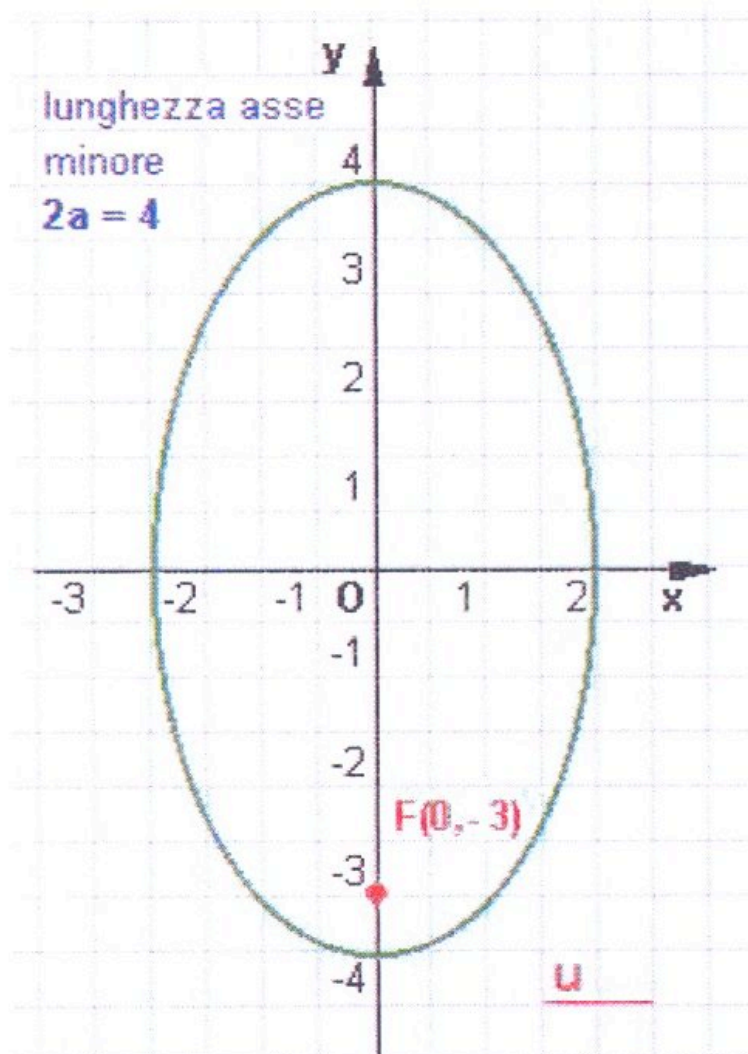
Imponendo l'appartenenza del punto $B(3;1)$ all'ellisse si ottiene l'equazione

$$\frac{9}{m} + \frac{1}{4} = 1$$

che risolta fornisce il valore $m = a^2 = 12$.

Dunque l'equazione dell'ellisse è $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Determinare l'equazione dell'ellisse con asse maggiore sull'asse y, avente asse minore di lunghezza $2a=4$ e un fuoco nel punto $F=(0;-3)$.



Essendo $2a = 4$ si ottiene $a = 2$ e quindi $a^2 = 4$.

Dalla relazione $c^2 = a^2 - b^2$, poichè $c^2 = 9$,

si ottiene $b^2 = 9 + 4 = 13$.

Dunque l'equazione dell'ellisse è

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{13} = 1$$

Determinare l'equazione dell'ellisse, nota l'eccentricità e il fuoco:

$$e = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad F = (0; 4)$$

Poiché il fuoco appartiene all'asse y , il semiasse maggiore è b e valgono le relazioni:

$$c^2 = b^2 - a^2;$$

$$e = \frac{c}{b}.$$

La conoscenza dell'ordinata del fuoco ci permette di porre $c = 4$.

Determiniamo a e b sostituendo nelle uguaglianze scritte i valori noti:

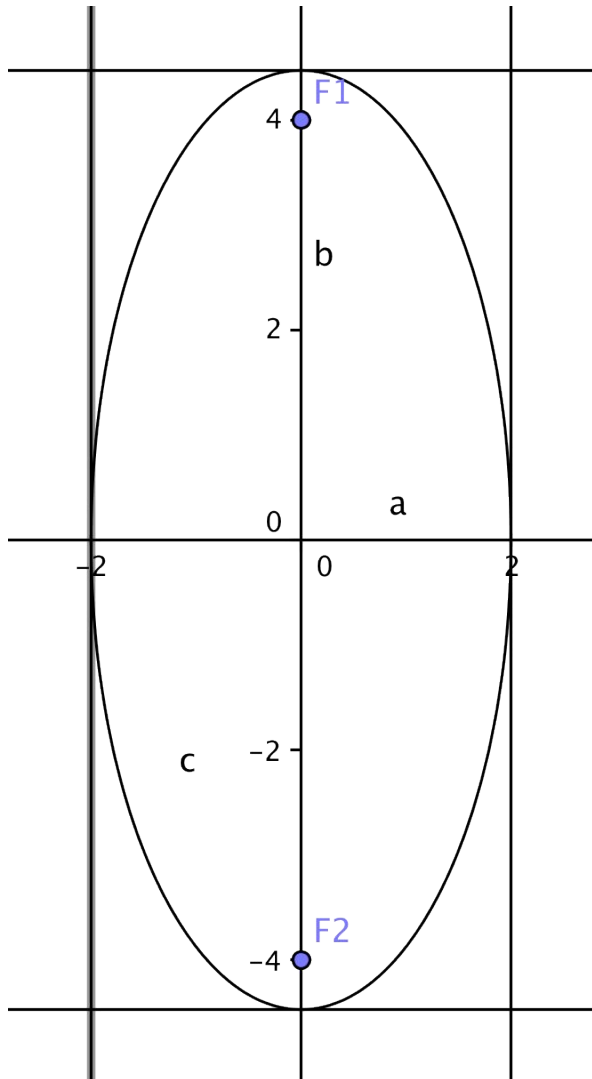
$$\begin{cases} 16 = b^2 - a^2 & \text{(conoscenza delle coordinate di un fuoco)} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{b} & \text{(conoscenza dell'eccentricità)} \end{cases}$$

Risolviamo il sistema in a e b :

$$\begin{cases} b^2 - a^2 = 16 \\ b = \frac{10}{\sqrt{5}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b^2 - a^2 = 16 \\ b = 2\sqrt{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 20 - a^2 = 16 \\ b = 2\sqrt{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b = 2\sqrt{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

Sostituiamo i valori trovati nell'equazione canonica:

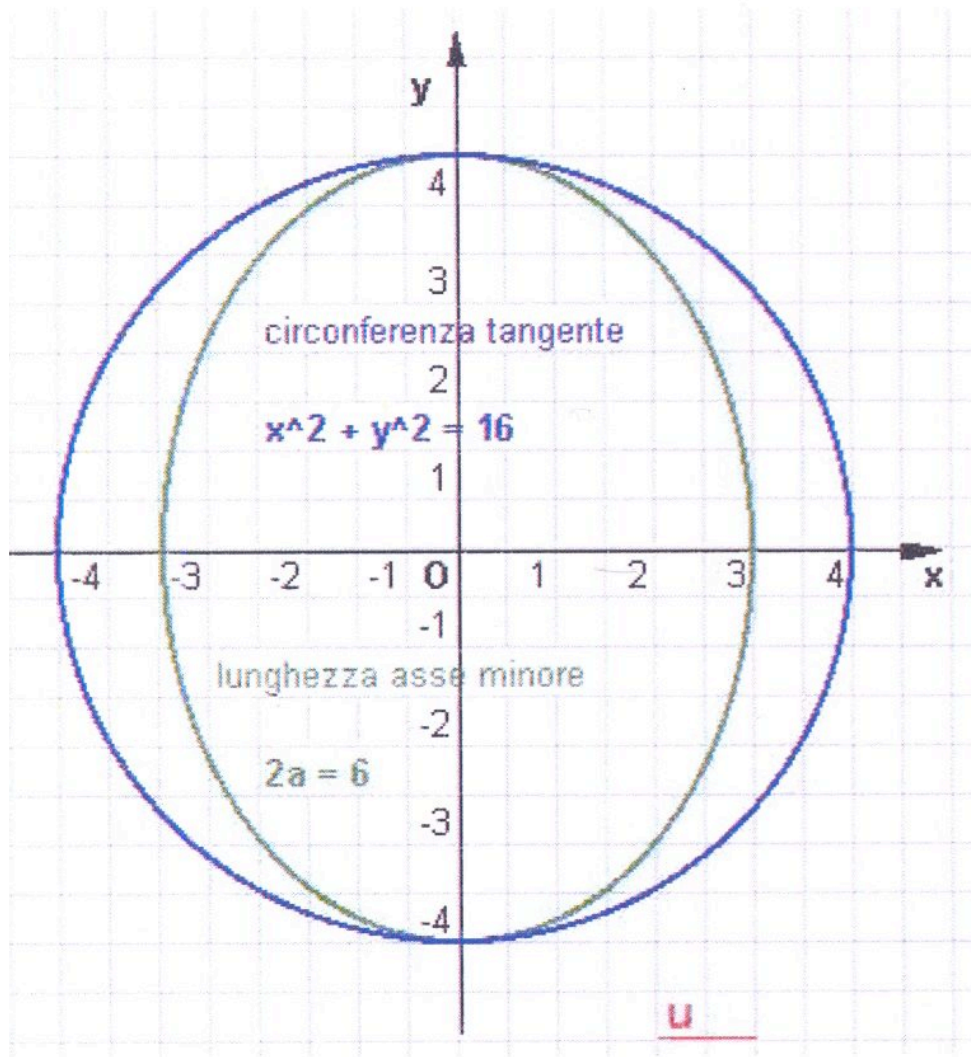
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{20} = 1.$$



- ✓ È simmetrica rispetto agli assi cartesiani
- ✓ Vertici: $A_1=(-2;0)$; $A_2=(2;0)$;
 $B_1=(0;-2\sqrt{5})$; $B_2=(0;2\sqrt{5})$
- ✓ È inscritta nel rettangolo che ha i lati di equazioni:

$$x = \pm 2 \quad y = \pm 2\sqrt{5}$$

Determinare l'equazione dell'ellisse con asse maggiore sull'asse y , avente l'asse minore di lunghezza $2^\circ=6$ e tangente alla circonferenza di equazione $x^2+y^2=16$



Essendo $2a = 6$ si ottiene $a = 3$ e quindi $a^2 = 9$.

Mettendo a sistema l'equazione dell'ellisse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{n} = 1$$

con l'equazione della circonferenza

$$x^2 + y^2 = 16,$$

imponendo la condizione di tangenza $\Delta = 0$ si ottiene il valore di n :

$$n = b^2 = 16.$$

Dunque l'equazione dell'ellisse è

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

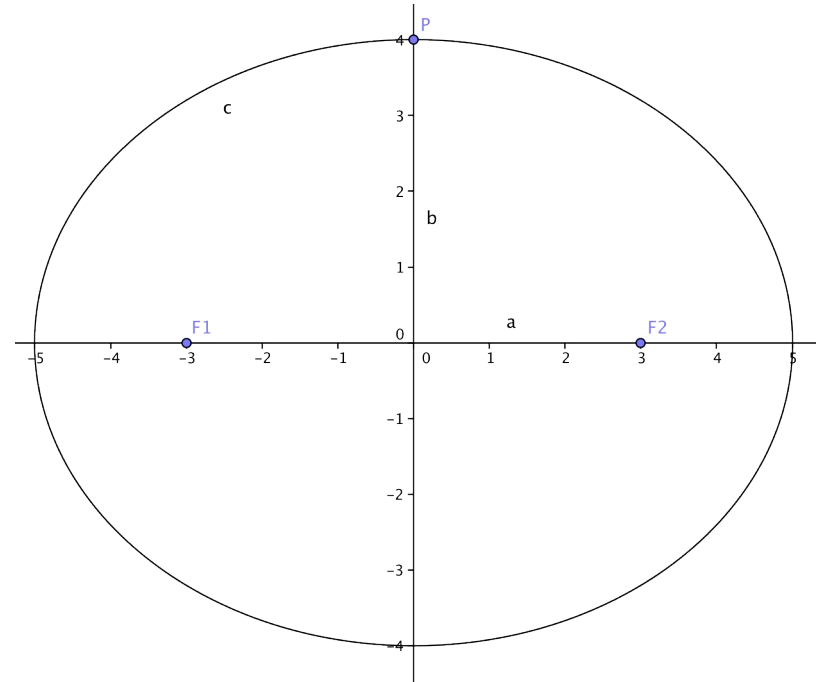
Determinare l'equazione dell'ellisse avente i fuochi $F=(\pm 3;0)$ e passante per il punto $P=(0;4)$.

- ✓ Essendo la distanza focale $c=3$, ricaviamo che $c^2=9$.
- ✓ Il punto P rappresenta il vertice dell'ellisse sull'asse delle y , per cui $b=4$ e quindi $b^2=16$.
- ✓ Dalla relazione $b^2=a^2-c^2$ ricaviamo a^2 :

$$a^2=b^2+c^2=25$$

➤ L'equazione dell'ellisse cercata è:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$



ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'equazione dell'ellisse passante per i punti $P(1; 2)$ e $Q\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$.

Consideriamo l'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e imponiamo il passaggio per P e Q .

Sostituendo le coordinate di P e Q , otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \\ \frac{3}{4a^2} + \frac{9}{2b^2} = 1 \end{cases}$$

Per risolverlo più facilmente, conviene porre $\frac{1}{a^2} = t$ e $\frac{1}{b^2} = v$.

Si ha:

$$\begin{cases} t + 4v = 1 \\ \frac{3}{4}t + \frac{9}{2}v = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 1 - 4v \\ 3(1 - 4v) + 18v = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 1 - 4v \\ 3 - 12v + 18v = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 1 - 4v \\ 6v = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ v = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Tenendo conto delle posizioni effettuate, otteniamo:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{3} \text{ e } \frac{1}{b^2} = \frac{1}{6}.$$

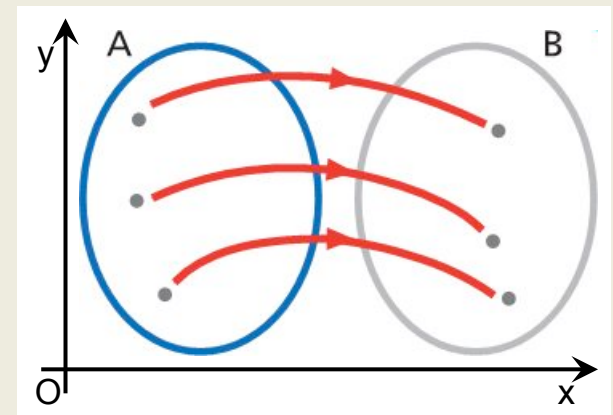
L'equazione dell'ellisse è $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$.

7. L'ELLISSE E LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

Ci servono alcuni elementi sulle trasformazioni geometriche

DEFINIZIONE

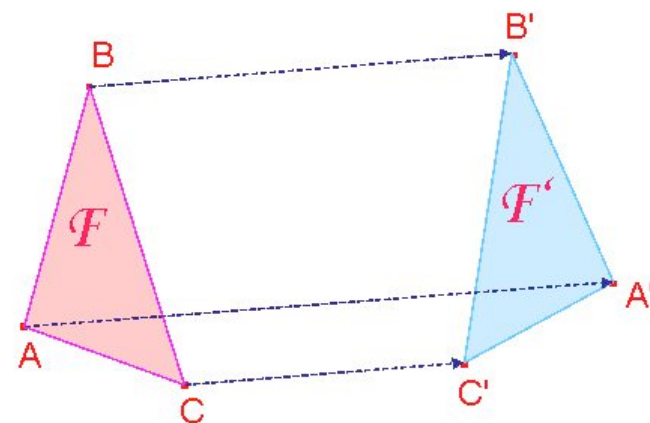
Una **trasformazione geometrica** nel piano è una corrispondenza biunivoca che associa a ogni punto del piano uno e un solo punto del piano stesso.



ESEMPIO

$$\begin{cases} x' = x - 2y + 6 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases} \xrightarrow{P(2; 1)} \begin{cases} x' = 2 - 2 \cdot 1 + 6 \\ y' = -2 + 1 - 1 \end{cases} \xrightarrow{} \begin{cases} x' = 6 \\ y' = -2 \end{cases} \xrightarrow{} P'(6; -2)$$

Le **isometrie** sono tutte le trasformazioni (movimenti, spostamenti) che mantengono inalterate le figure, più precisamente che mantengono inalterate le caratteristiche misurabili (la lunghezza dei lati, l'ampiezza degli angoli).



Una **traslazione** è una isometria di equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

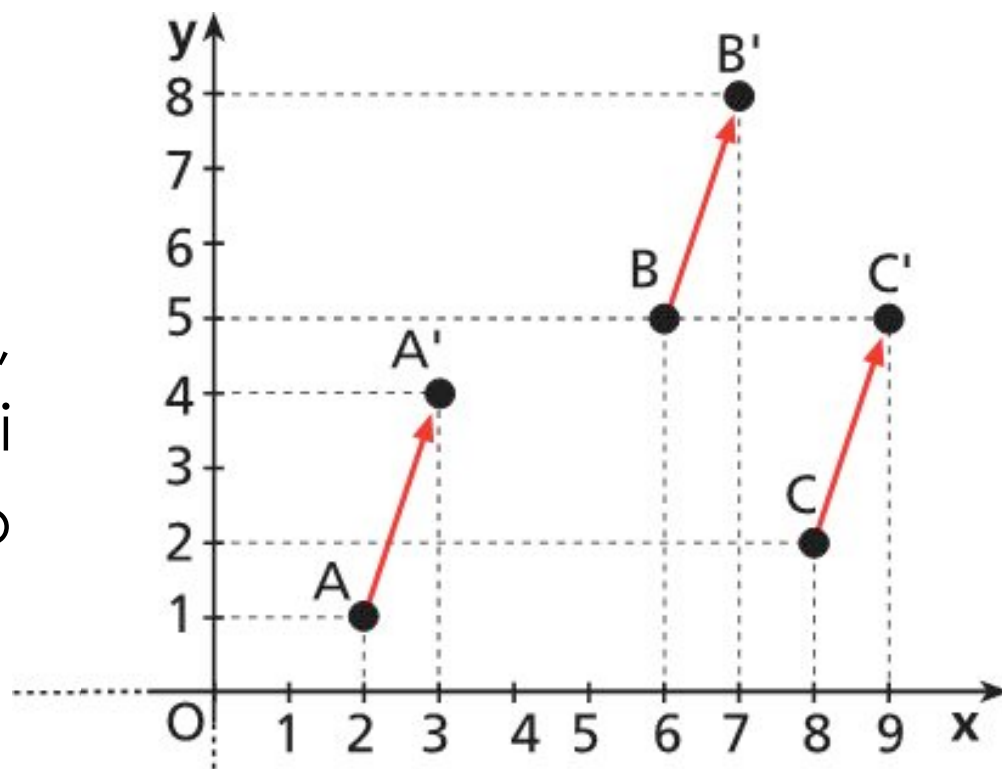
Le equazioni permettono di trovare le coordinate di un punto $P'(x';y')$ note quelle del punto $P(x;y)$.

ESEMPIO

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 3 \end{cases}$$

Ogni punto viene traslato aumentando di 1 unità la sua ascissa e di 3 unità la sua ordinata.

I segmenti orientati AA' , BB' , CC' sono tutti equipollenti e si chiamano **vettori**.

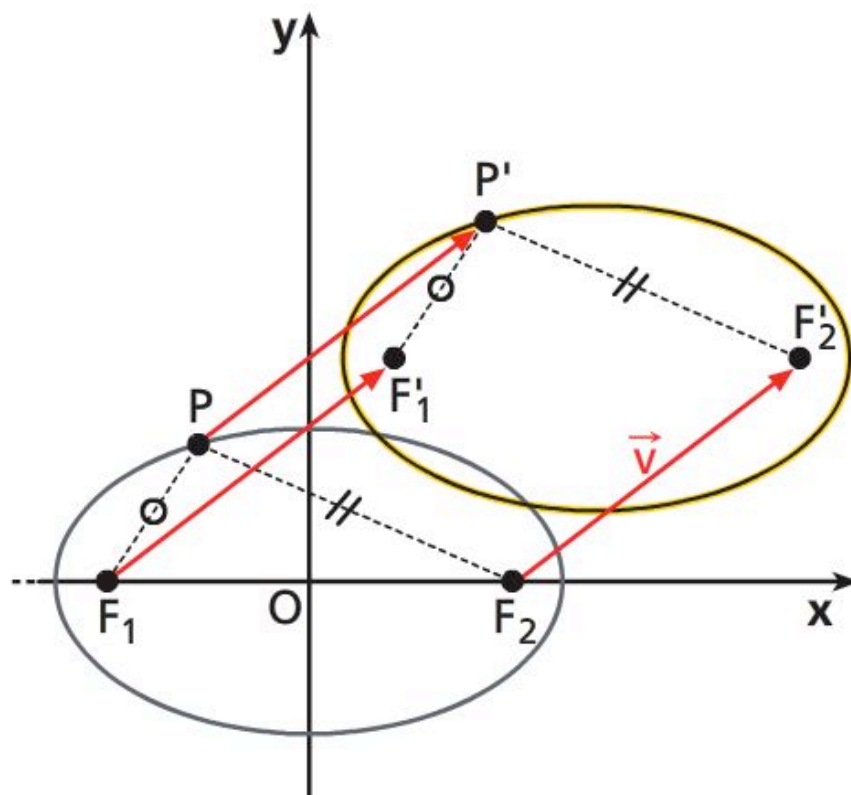


➤ *Ellisse traslata*

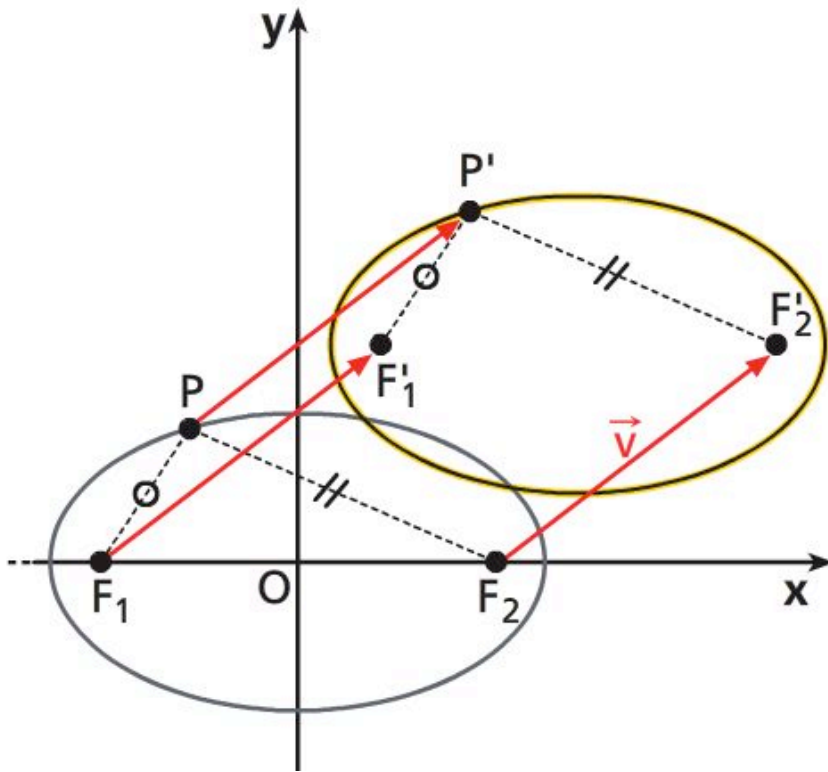
Se trasformiamo un'ellisse con una trasformazione di vettore $\mathbf{v}$, la curva ottenuta è ancora un'ellisse.

Infatti, indicando con P' il corrispondente di un punto P dell'ellisse e con F'_1 e F'_2 i corrispondenti dei fuochi F_1 e F_2 dell'ellisse, vale ancora:

$$\overline{P'F'_1} + \overline{P'F'_2} = 2a$$



L'ellisse trasformata non ha più il centro corrispondente con l'origine degli assi cartesiani, e la sua equazione assume una forma diversa.



Una traslazione lascia invariate le distanze:

$$\overline{PF_1} = \overline{P'F'_1} \quad \overline{PF_2} = \overline{P'F'_2}$$

Ricaviamo l'equazione dell'ellisse traslata.

Applichiamo alla generica ellisse, con centro di simmetria nell'origine degli assi cartesiani, la traslazione di vettore $\mathbf{v}(p;q)$:

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x' - p \\ y = y' - q \end{cases}$$

Sostituiamo queste trasformazioni nell'equazione dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x' - p)^2}{a^2} + \frac{(y' - q)^2}{b^2} = 1$$

Eliminando gli apici, otteniamo l'equazione cercata:

$$\frac{(x - p)^2}{a^2} + \frac{(y - q)^2}{b^2} = 1$$

L'equazione può essere scritta anche in altro modo.
Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$a'x^2 + b'y^2 + c'x + d'y + e' = 0$$

Dove:

$$\begin{aligned} a' &= b^2 & b' &= a^2 & c' &= -2b^2p \\ d' &= -2a^2q & e' &= b^2p^2 + a^2q^2 - a^2b^2 \end{aligned}$$

❑ Coordinate del centro dell'ellisse traslata:

$$p = -\frac{c'}{2a'} \quad q = -\frac{d'}{2b'}$$

$$O' = \left(-\frac{c'}{2a'}; -\frac{d'}{2b'} \right)$$

❑ Assi di simmetria:

$$x = -\frac{c'}{2a'} \quad y = -\frac{d'}{2b'}$$

❑ Vertici ellisse:

$$\begin{cases} a'x^2 + b'y^2 + c'x + d'y + e' = 0 \\ x = -\frac{c'}{2a'} \end{cases} \quad \begin{cases} a'x^2 + b'y^2 + c'x + d'y + e' = 0 \\ y = -\frac{d'}{2b'} \end{cases}$$

Rappresentare l'ellisse di equazione $x^2+4y^2-6x-8y-3=0$.

Coordinate del centro di simmetria O' :

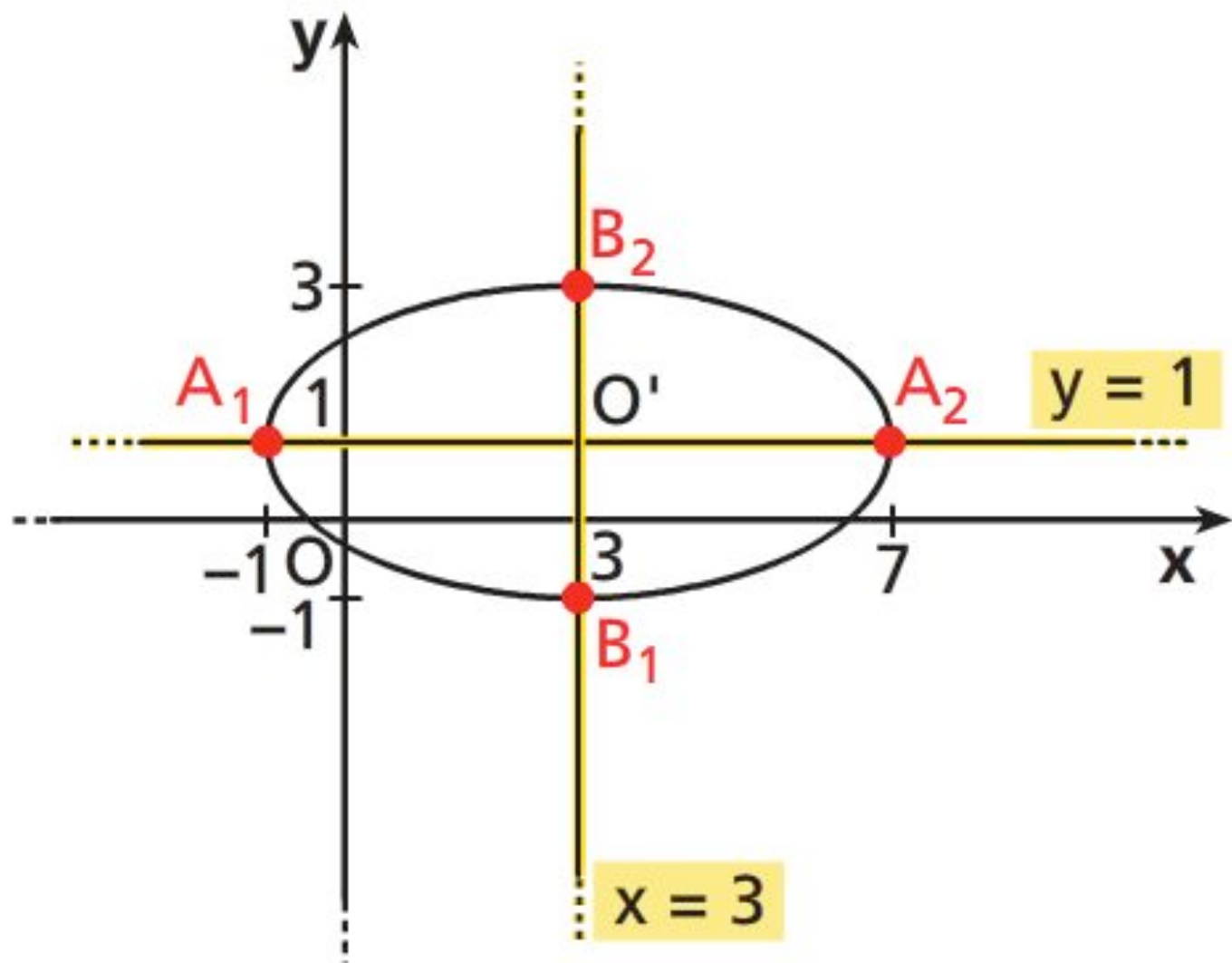
$$O' = \left(-\frac{c'}{2a'}; -\frac{d'}{2b'} \right) = \left(-\frac{-6}{2 \cdot 1}; -\frac{-8}{2 \cdot 4} \right) = (3; 1)$$

Assi di simmetria:

$$x = -\frac{c'}{2a'} = 3 \quad y = -\frac{d'}{2b'} = 1$$

Vertici ellisse:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0 \\ y = 1 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = 7 \\ y_2 = 1 \end{cases} \rightarrow A_1 = (-1; 1) \quad A_2 = (7; 1) \\ \begin{cases} x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0 \\ x = 3 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} y_1 = -1 \\ x_1 = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} y_2 = 3 \\ x_2 = 3 \end{cases} \rightarrow B_1 = (3; -1) \quad B_2 = (3; 3) \end{aligned}$$



ESERCIZIO GUIDA

Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, determiniamo l'equazione dell'ellisse corrispondente nella traslazione di vettore $\vec{v}(3; -4)$ e rappresentiamo le due ellissi.

Nell'ellisse data vale $a = 2$ e $b = 3$ e dunque i vertici sono $A_1(-2; 0)$, $A_2(2; 0)$, $B_1(0; -3)$ e $B_2(0; 3)$. Scriviamo le equazioni della traslazione di vettore $\vec{v}(3; -4)$:

$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 4 \end{cases}$$

Ricaviamo la x e la y :

$$\begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' + 4 \end{cases}$$

Sostituiamo nell'equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ alla x e alla y le espressioni trovate:

$$\frac{(x' - 3)^2}{4} + \frac{(y' + 4)^2}{9} = 1.$$

Eliminando gli apici, otteniamo l'equazione dell'ellisse cercata:

$$\frac{(x - 3)^2}{4} + \frac{(y + 4)^2}{9} = 1.$$

Sviluppando i calcoli otteniamo l'equazione:

$$\frac{9(x^2 - 6x + 9) + 4(y^2 + 8y + 16)}{36} = \frac{36}{36} \rightarrow 9x^2 + 4y^2 - 54x + 32y + 109 = 0.$$

Il centro O' dell'ellisse traslata corrisponde nella traslazione al centro $O(0; 0)$ dell'ellisse data; per trovare O' sostituiamo, nelle equazioni della traslazione, le coordinate di O a x e y :

$$\begin{cases} x' = 0 + 3 \\ y' = 0 - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ y' = -4 \end{cases}$$

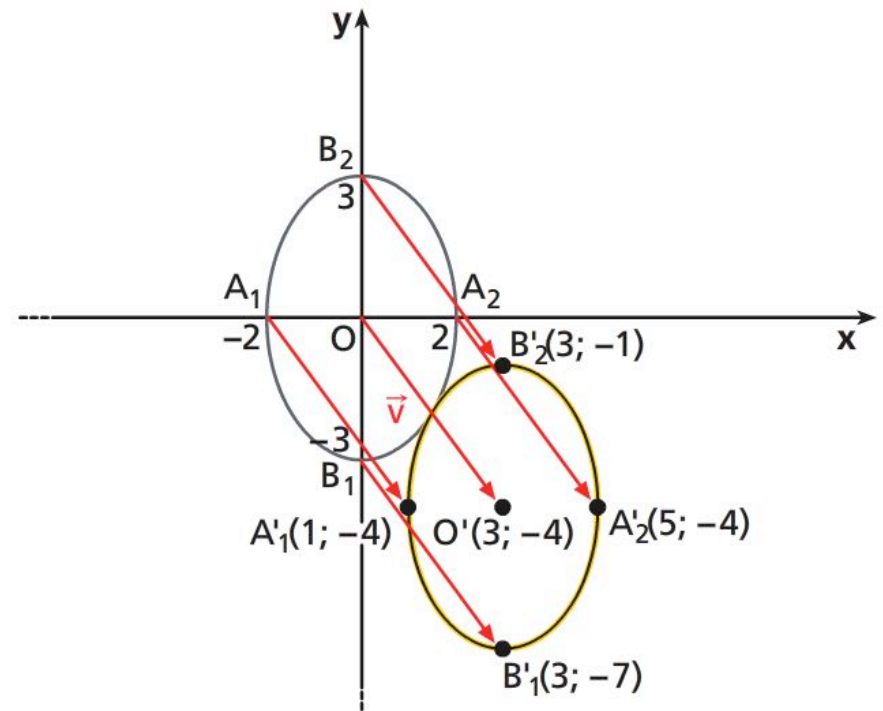
Il centro dell'ellisse traslata è $O'(3; -4)$.
Gli assi di simmetria dell'ellisse traslata sono le rette per O' parallele agli assi cartesiani:

$$x = 3 \quad \text{e} \quad y = -4.$$

I vertici dell'ellisse traslata sono i corrispondenti dei vertici dell'ellisse data.

Sostituendo nelle equazioni della traslazione alla x e alla y le coordinate dei vertici otteniamo:

$$A'_1(1; -4), A'_2(5; -4), B'_1(3; -7), B'_2(3; -1).$$



ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo le caratteristiche dell'ellisse di equazione $9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0$ e tracciamone poi il grafico.

1. Metodo del completamento del quadrato

Cerchiamo di scrivere l'equazione data nella forma:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1.$$

Riscriviamo l'equazione data raggruppando i termini con x e quelli con y :

$$9x^2 - 54x + 25y^2 - 100y - 44 = 0$$

$$9(x^2 - 6x) + 25(y^2 - 4y) - 44 = 0.$$

Per avere il quadrato di un binomio all'interno di ogni parentesi, occorre aggiungere il termine noto. Aggiungiamo a entrambi i membri i termini mancanti:

$$9(x^2 - 6x + 9) + 25(y^2 - 4y + 4) - 44 = 81 + 100$$

$$9(x - 3)^2 + 25(y - 2)^2 = 225.$$

Dividendo entrambi i membri per 225 si ha:

$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1.$$

Il centro di simmetria è $(3; 2)$, i semiassi misurano 5 e 3.

2. Considerata l'equazione generica

$a'x^2 + b'y^2 + c'x + d'y + e = 0$, per l'ellisse data abbiamo:

$$a' = 9, b' = 25, c' = -54, d' = -100, e' = -44.$$

Troviamo le coordinate del centro di simmetria O' dell'ellisse:

$$x_{O'} = -\frac{c'}{2a'} = -\frac{-54}{2 \cdot 9} = 3; \quad y_{O'} = -\frac{d'}{2b'} = -\frac{-100}{2 \cdot 25} = 2.$$

Pertanto è $O'(3; 2)$.

Gli assi di simmetria sono perciò:

$$x = 3, \quad y = 2.$$

Calcoliamo le coordinate dei vertici intersecando gli assi di simmetria con l'ellisse:

$$\begin{cases} 9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = 8 \\ y = 2 \end{cases}$$

Due vertici sono i punti $A_1(-2; 2)$ e $A_2(8; 2)$.

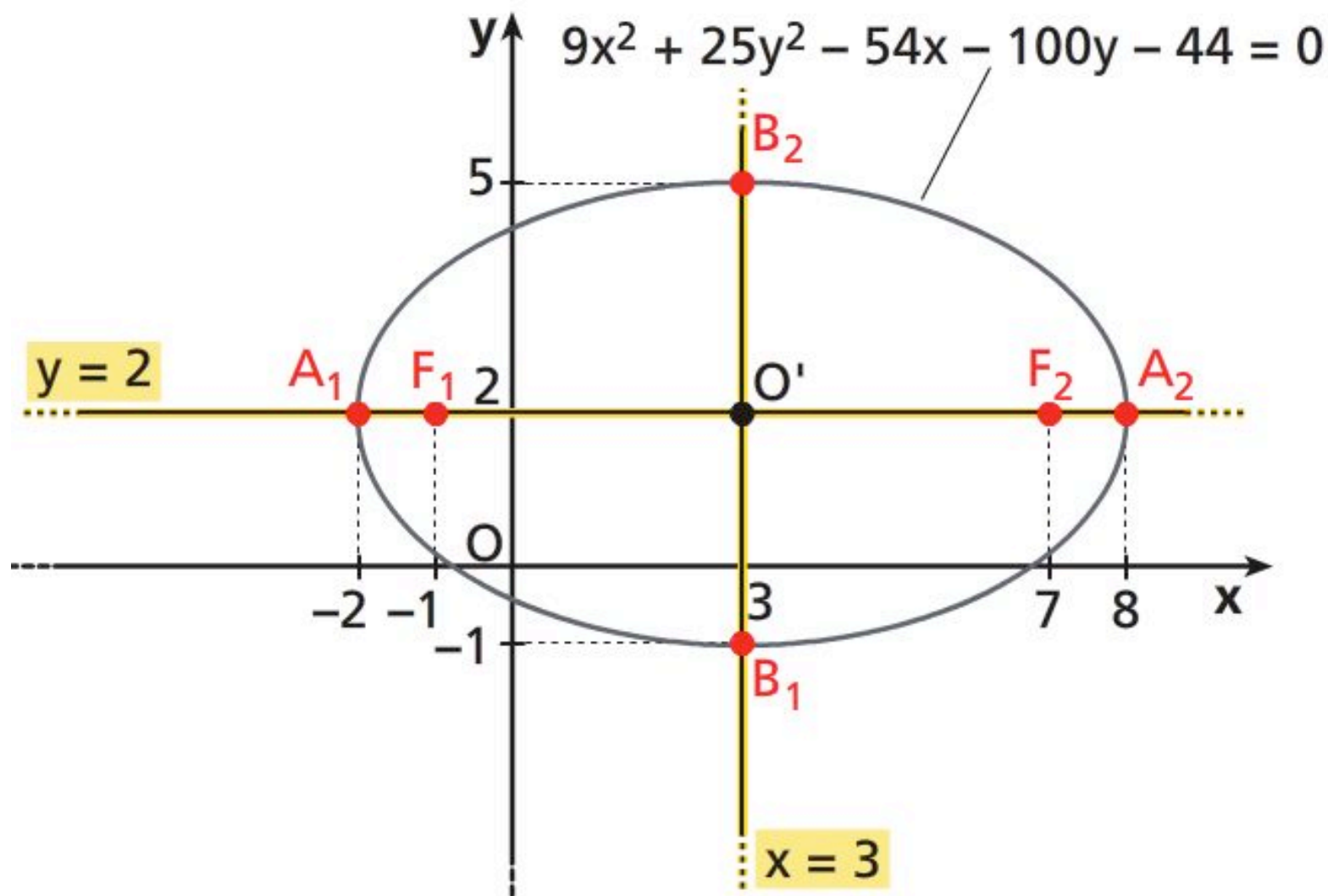
$$\begin{cases} 9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0 \\ x = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = -1 \\ x = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} y_2 = 5 \\ x = 3 \end{cases}$$

Gli altri due vertici sono i punti $B_1(3; -1)$ e $B_2(3; 5)$.

Essendo $a = 5$ e $b = 3$:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4.$$

Quindi i fuochi sono i punti $F_1(-1; 2)$ e $F_2(7; 2)$.



➤ *Ellisse come dilatazione della circonferenza*

Una **dilatazione** è una trasformazione geometrica non isometrica tale che al punto $P=(x;y)$ gli associa il punto $P'=(x';y')$ attraverso le equazioni:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = ny \end{cases} \quad \text{con } (m,n) \in R^+$$

La dilatazione e le funzioni

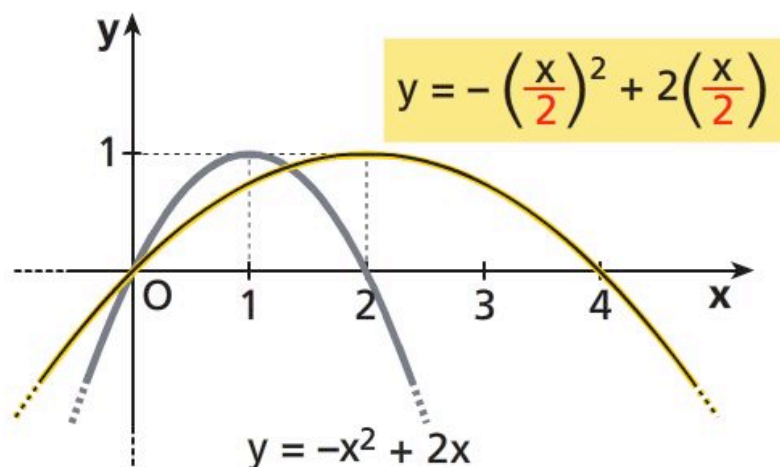
Data la funzione $y = f(x)$, l'equazione della sua immagine f' nella dilatazione si ottiene ricavando x e y dalle equazioni della trasformazione e sostituendo in $y = f(x)$. Si ha:

$$y = nf\left(\frac{x}{m}\right).$$

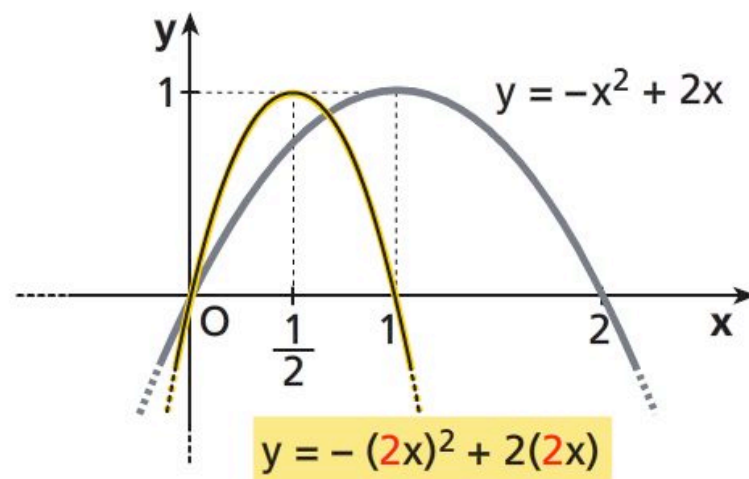
Casi particolari

1. Dilatazione o contrazione orizzontale

Se $n = 1$, si ha $y = f\left(\frac{x}{m}\right)$.



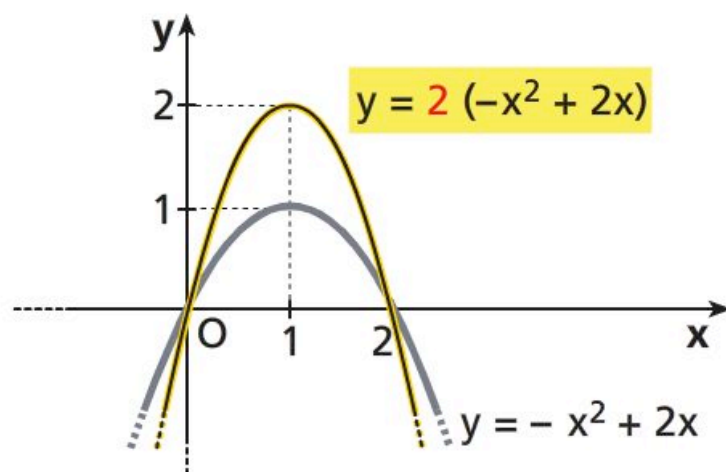
Caso $m > 1$: dilatazione orizzontale



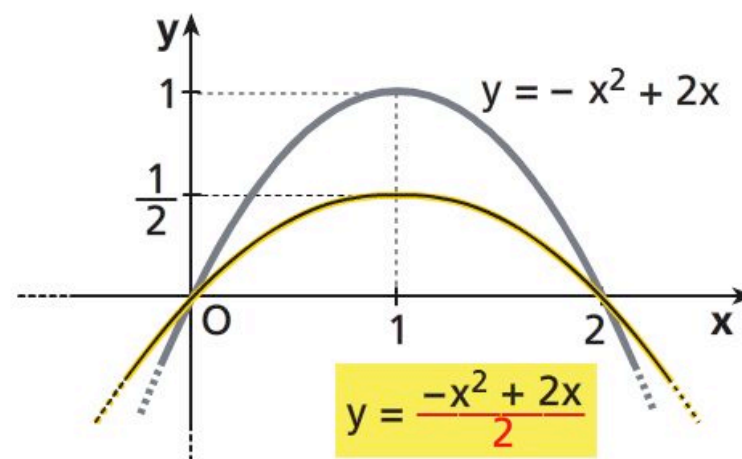
Caso $m < 1$: contrazione orizzontale

2. Dilatazione o contrazione verticale

Se $m = 1$, si ha $y = n f(x)$.



Caso $n > 1$: dilatazione verticale



Caso $n < 1$: contrazione verticale

Date queste premesse sulla dilatazione, sostituiamo nella circonferenza $x^2+y^2=1$ le equazioni della dilatazione:

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{x'}{a} \\ y = \frac{y'}{b} \end{cases}$$

Eliminando gli apici, otteniamo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

L'equazione generica dell'ellisse è l'immagine della circonferenza nella dilatazione.

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo i parametri $a, b \in \mathbb{R}^+$ della dilatazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$$

affinché la circonferenza con centro nell'origine e raggio 1 sia trasformata nell'ellisse di equazione:

$$4x^2 + 9y^2 = 1.$$

Ricaviamo la x e la y dalle equazioni della dilatazione:

$$\begin{cases} x = \frac{x'}{a} \\ y = \frac{y'}{b} \end{cases}$$

L'equazione della circonferenza è $x^2 + y^2 = 1$. Sostituiamo in tale equazione alla x e alla y le espressioni trovate:

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1 \rightarrow \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Affinché l'equazione trovata sia l'equazione dell'ellisse deve valere:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} = 4 \\ \frac{1}{b^2} = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{1}{4} \\ b^2 = \frac{1}{9} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \pm \frac{1}{2} \\ b = \pm \frac{1}{3} \end{cases}$$

Poiché si richiede che a e b siano positivi, i valori cercati sono $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{3}$.

ESERCIZIO GUIDA

Dopo averne determinato il dominio, rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = 2\sqrt{4x - x^2} + 1.$$

Per determinare il dominio poniamo il radicando maggiore o uguale a 0, ossia:

$$4x - x^2 \geq 0 \rightarrow 0 \leq x \leq 4.$$

Il dominio della funzione è dunque l'insieme $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$.

Tracciamo nel piano cartesiano la retta $x = 4$ ed eliminiamo tutti i punti che hanno ascissa minore di 0 o maggiore di 4 (figura a).

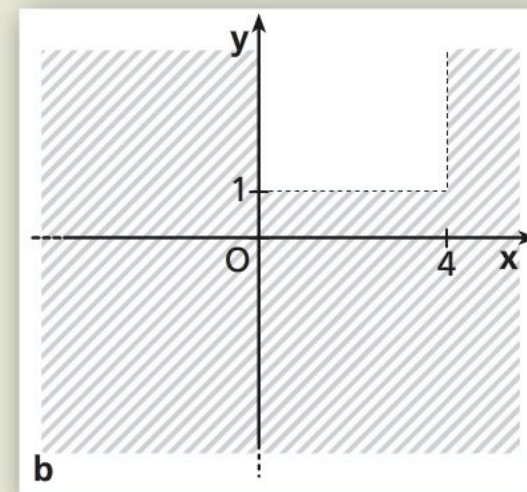
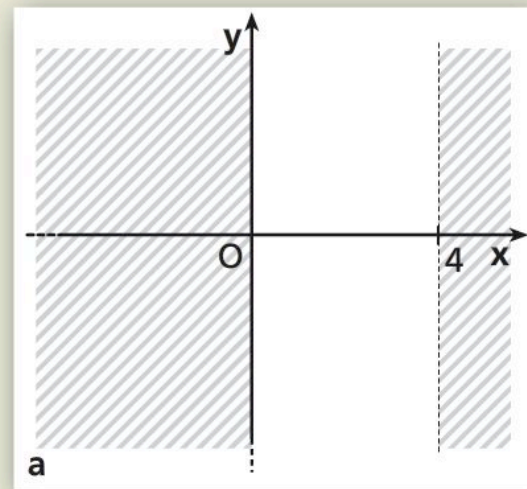
Per rappresentare la funzione isoliamo la radice, ossia:

$$y - 1 = 2\sqrt{4x - x^2} \rightarrow \frac{y - 1}{2} = \sqrt{4x - x^2}.$$

Questa equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \frac{y-1}{2} \geq 0 \\ \frac{(y-1)^2}{4} = 4x - x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ \frac{(y-1)^2}{4} + (x^2 - 4x + 4 - 4) = 0 \end{cases} \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ \frac{(y-1)^2}{4} + (x-2)^2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ \frac{(y-1)^2}{16} + \frac{(x-2)^2}{4} = 1 \end{cases}$$

Nella seconda equazione abbiamo aggiunto +4 (e quindi anche -4) per ottenere un quadrato di binomio. L'equazione finale



ottenuta è così quella di un'ellisse traslata, ricavata traslando l'ellisse $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$ del vettore $\vec{v}(2; 1)$.

Tracciamo nel piano cartesiano la retta $y = 1$ ed eliminiamo tutti i punti che hanno ordinata minore di 1 (figura b).

L'equazione $\frac{(y - 1)^2}{16} + \frac{(x - 2)^2}{4} = 1$ è l'equazione di un'ellisse di centro $C(2; 1)$, asse maggiore di equazione $x = 2$, con $b = 4$, e asse minore di equazione $y = 1$, con $a = 2$. Tracciamo ora il ramo di ellisse contenuto nella parte di piano che non abbiamo oscurato (figura c), ottenendo così il grafico cercato.

