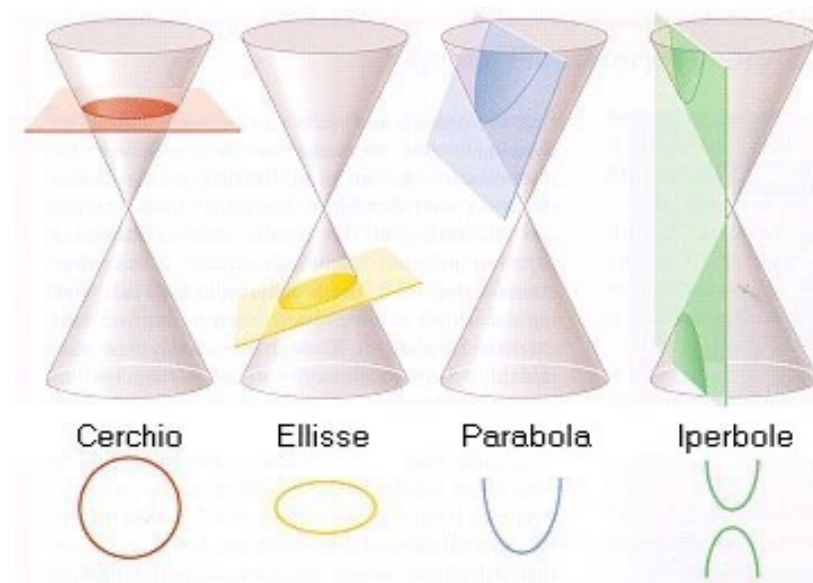


Geometria Analitica

L'IPERBOLE

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

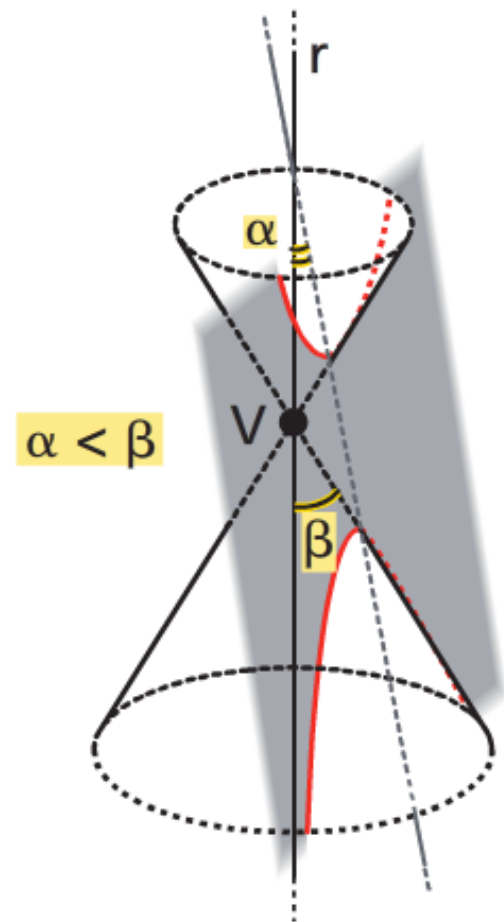
MATERIA: Matematica



L'*iperbole* fa parte di un insieme di curve (circonferenza, parabola, ellisse) chiamate *coniche*, perché si possono ottenere tagliando un cono con un piano.

Consideriamo un cono di asse r con angolo al vertice 2β . Sezioniamo la superficie del cono con un piano che formi con l'asse del cono un angolo $\alpha < \beta$.

La figura che si ottiene dall'intersezione è *un'iperbole*.

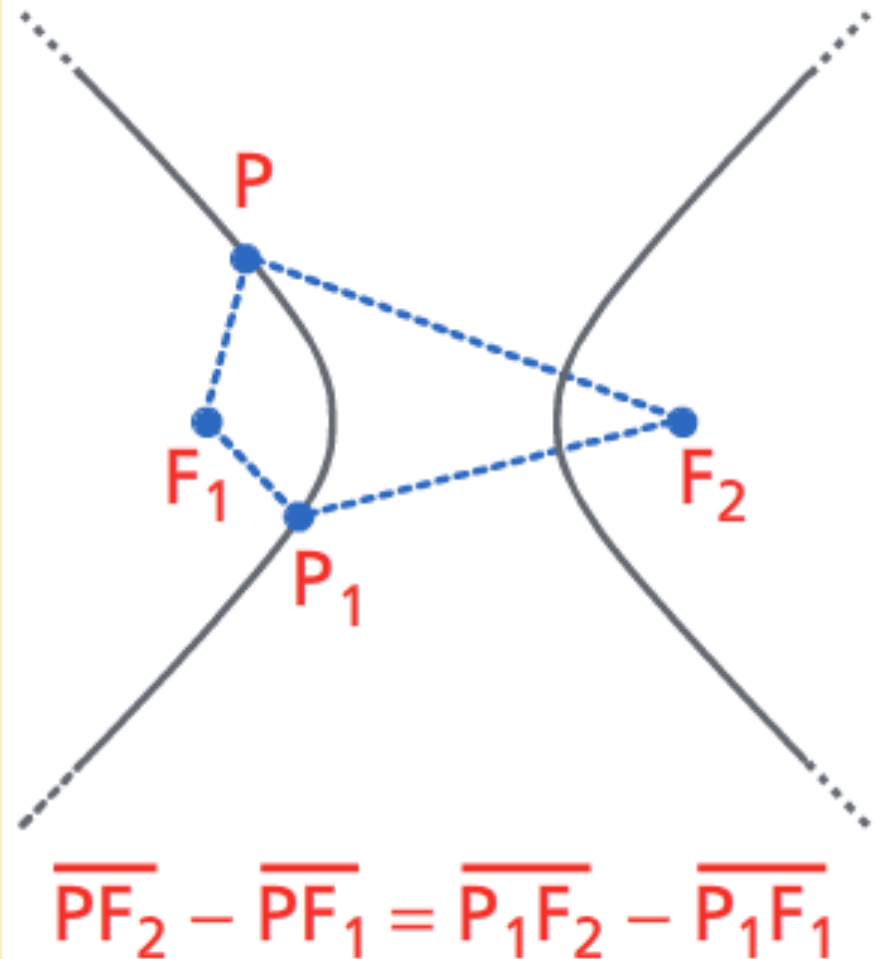


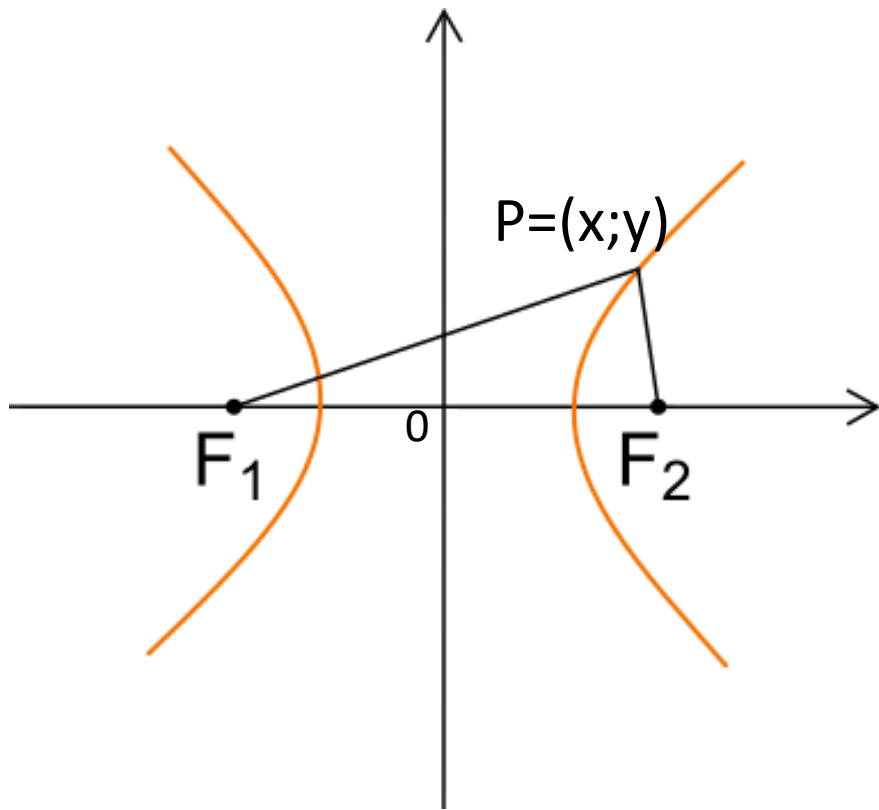
1. L'IPERBOLE E LA SUA EQUAZIONE

DEFINIZIONE

Assegniamo nel piano due punti fissi F_1 e F_2 detti **fuochi**, si chiama *iperbole* la curva piana luogo geometrico dei punti P tali che sia costante la differenza delle distanze di P da F_1 e F_2 :

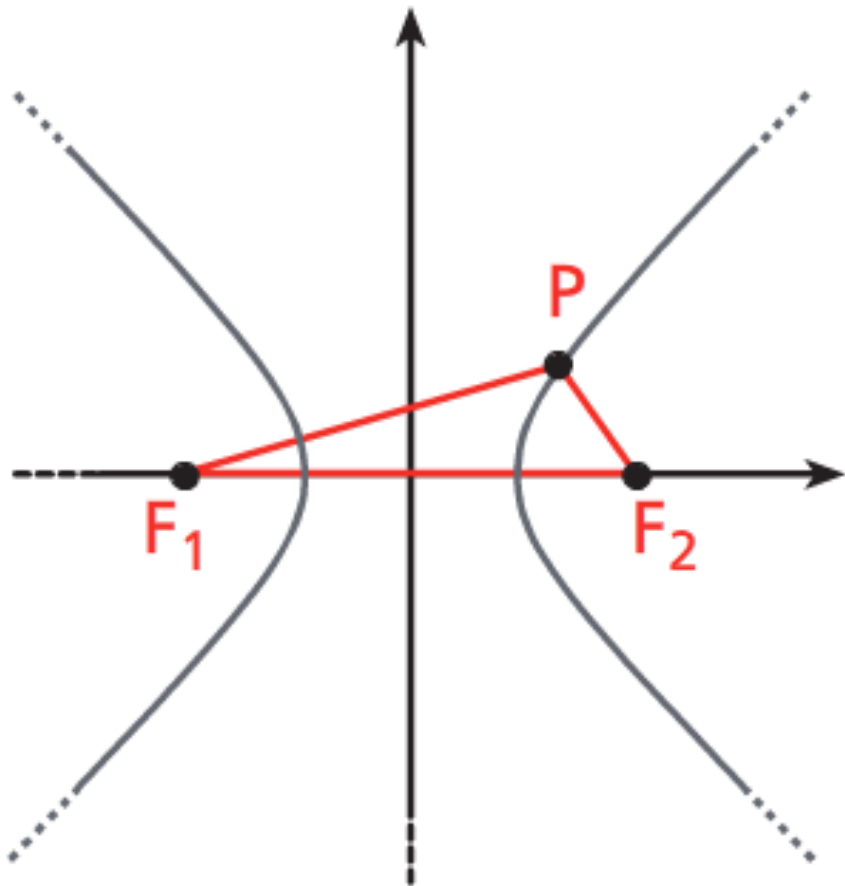
$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = \text{costante} = 2a$$





- distanza focale = $2c$
- differenza costante delle distanze dei punti dell'iperbole dai fuochi = $2a$
- centro iperbole=punto medio di F_1F_2

$$\left| \overline{PF_1} - \overline{PF_2} \right| = \text{costante} = 2a$$



In un triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due. Nel triangolo PF_1F_2 si ha che:

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$$

Il terzo lato è il segmento F_1F_2 di lunghezza $2c$, per cui:

$$2a < 2c \Rightarrow a < c$$

Determiniamo l'equazione dell'iperbole con il centro nell'origine degli assi cartesiani e l'asse x passante per i fuochi.

Fissiamo i fuochi nei punti $F_1(-c;0)$ e $F_2(c;0)$.

Applichiamo la definizione di iperbole, usando la distanza tra due punti:

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a \rightarrow \left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

Eleviamo al quadrato entrambi i membri:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Effettuando calcoli analoghi a quelli svolti per l'ellisse, e dopo aver posto:

$$b^2 = c^2 - a^2$$

si ottiene:

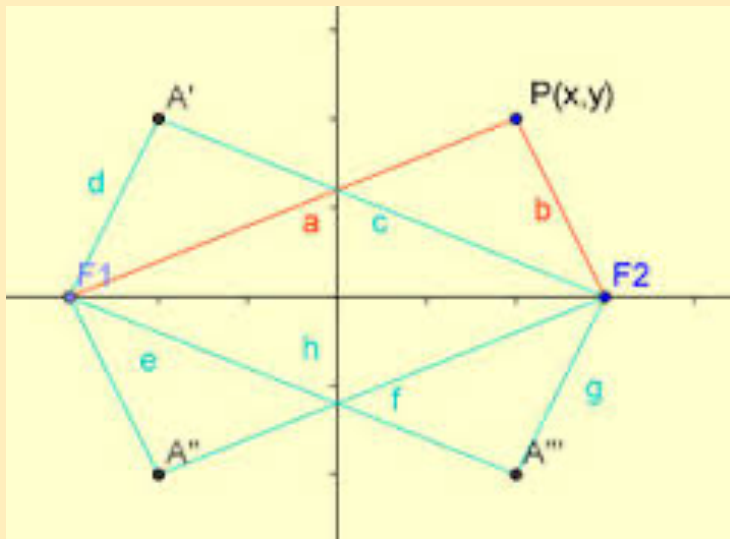
EQUAZIONE CANONICA DELL'IPERBOLE

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \xrightarrow{\text{equivalente a}} b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

2. PROPRIETA' IPERBOLE

Simmetrie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \begin{cases} \frac{(-x_1)^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \rightarrow \text{simmetria rispetto all'asse } y \\ \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{(-y_1)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \text{simmetria rispetto all'asse } x \\ \frac{(-x_1)^2}{a^2} - \frac{(-y_1)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \text{simmetria rispetto all'origine} \end{cases}$$



L'iperbole è simmetrica rispetto agli assi cartesiani

Intersezione con gli assi

$$\text{Asse } x \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = \pm a$$

$$\text{Asse } y \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \text{impossibile}$$

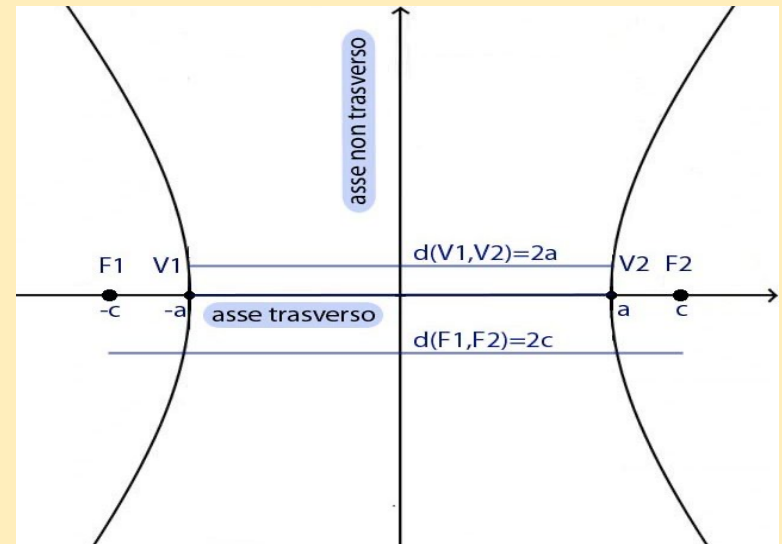
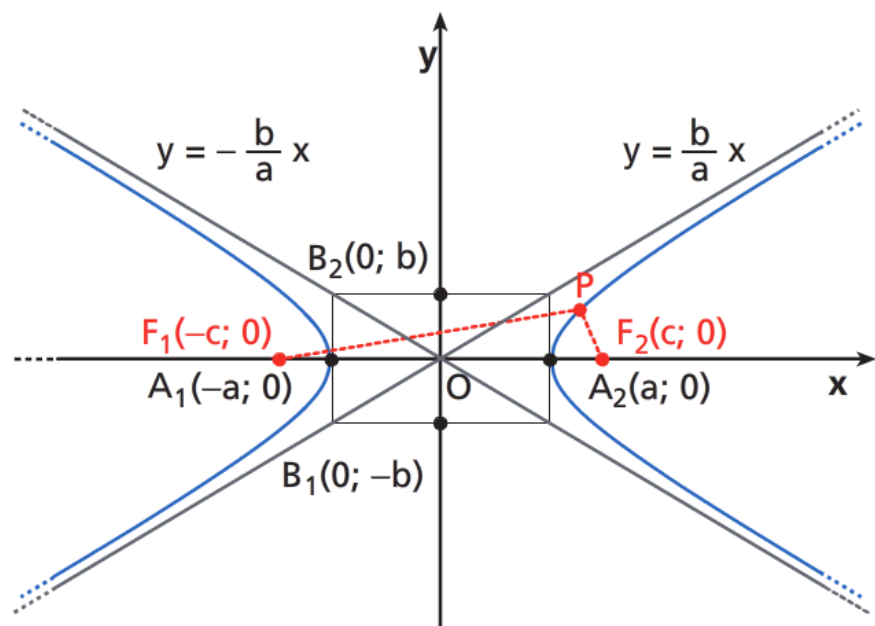


Grafico dell'iperbole

- ✧ Disegnare i vertici reali A_1 e A_2 e non reali B_1 e B_2
- ✧ Disegnare il rettangolo passante per i punti A_1 A_2 B_1 B_2



- ✧ Disegnare le rette (asintoti) sulle quali giacciono le diagonali del rettangolo:

$$y = \frac{b}{a}x \quad y = -\frac{b}{a}x$$

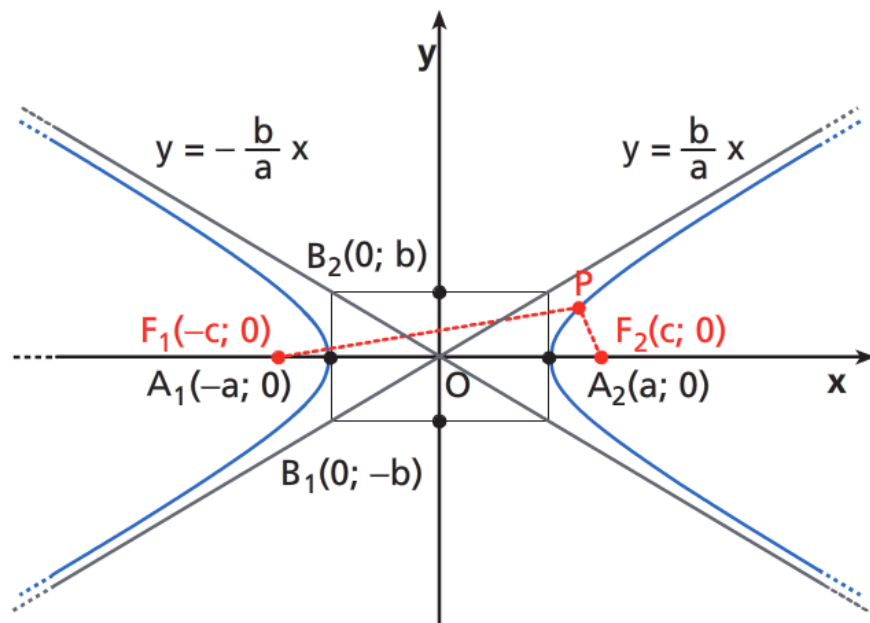
- ✧ Tutti i punti dell'iperbole, eccetto A_1 e A_2 , sono esterni al rettangolo:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \xrightarrow{\text{da cui}} x \leq -a \vee x \geq a$$

✧ I due rami dell'iperbole, sono interni agli angoli formati dai due asintoti e contenenti i fuochi:

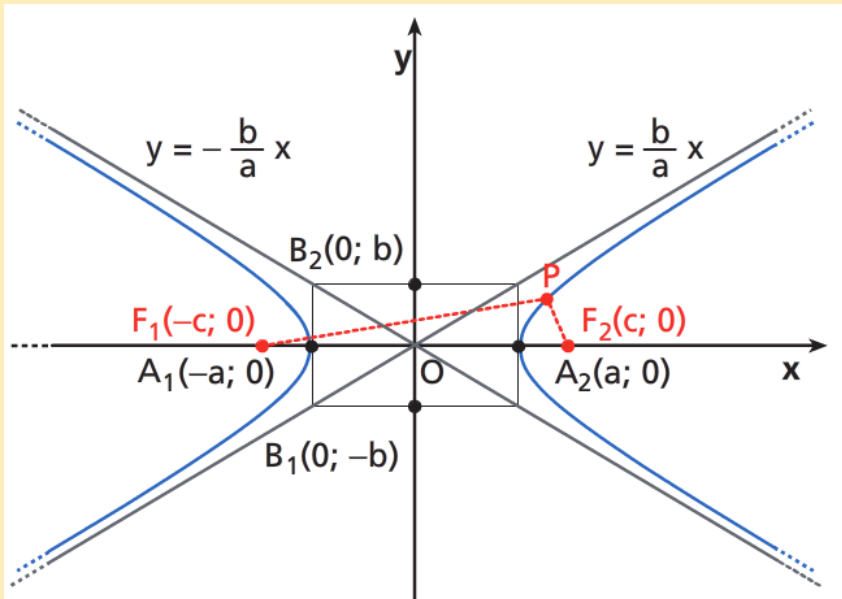
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx \end{cases} \xrightarrow{\text{ammette soluzione se}} -\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}$$

Si dice che gli asintoti intersecano la curva all'infinito.



L'iperbole non è una curva chiusa, ma è costituita da due rami distinti, chiamati rami d'iperbole.

Coordinate fuochi



Sapendo che $b^2 = c^2 - a^2$, si ottiene:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pertanto, nota l'equazione dell'ellisse, le coordinate dei fuochi sono date da:

$$F_1 = (-c; 0) \quad F_2 = (c; 0)$$

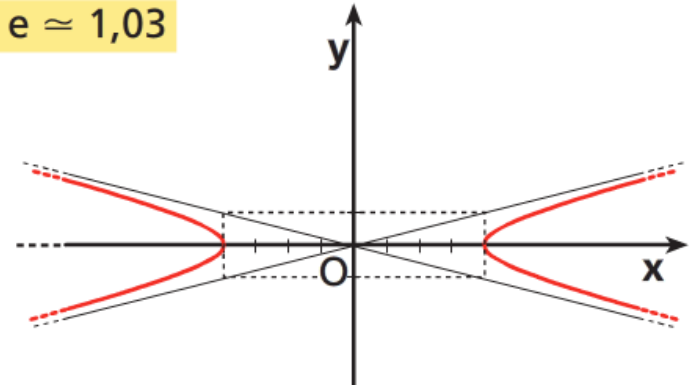
Eccentricità

E' definita come:

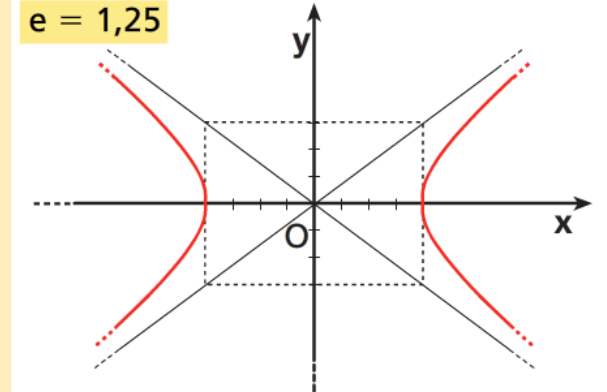
$$e = \frac{\text{distanza focale}}{\text{lunghezza asse trasverso}} = \frac{c}{a}$$

Poiché $c > a > 0$, si ha: $e > 1$

$$e \approx 1,03$$



$$e = 1,25$$



Data l'equazione $9x^2 - 16y^2 = 144$, determinare le caratteristiche dell'iperbole e poi rappresentarla graficamente.

Scriviamo l'equazione dell'iperbole nella forma canonica:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Si tratta di un'iperbole con i fuochi sull'asse delle x . Da questa equazione ricaviamo immediatamente le coordinate dei vertici reali A_1 e A_2 e non reali B_1 e B_2 :

$$a = 4 \quad b = 3 \quad \Rightarrow \quad A_1 = (-4; 0) \quad A_2 = (4; 0) \quad B_1 = (0; -3) \quad B_2 = (0; 3)$$

Le coordinate dei fuochi sono:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow F_1 = (-5;0) \quad F_2 = (5;0)$$

Il valore dell'eccentricità è:

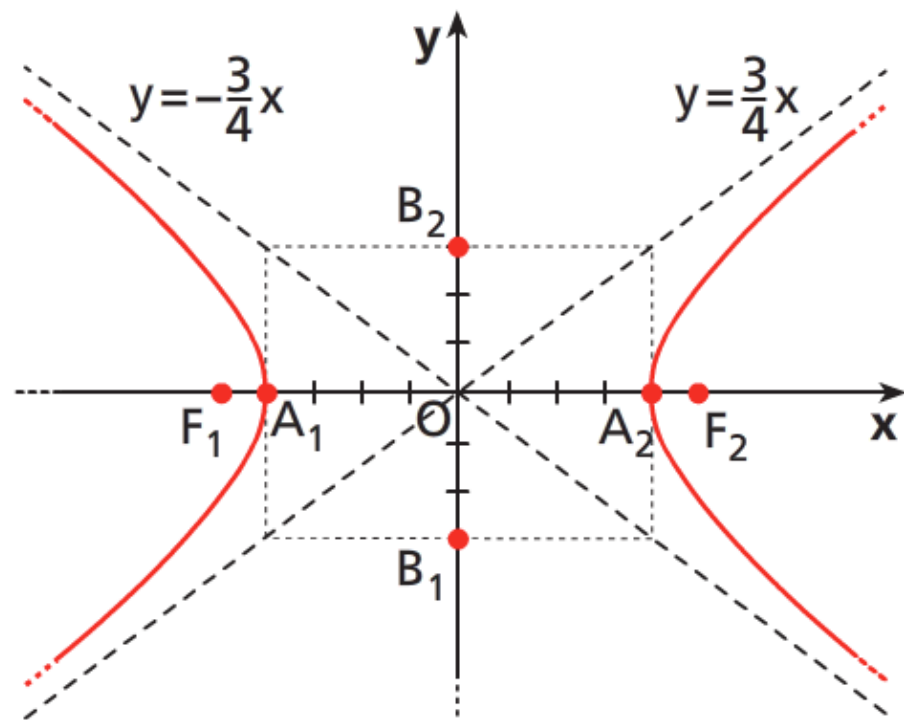
$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$

Infine, le equazioni degli asintoti sono:

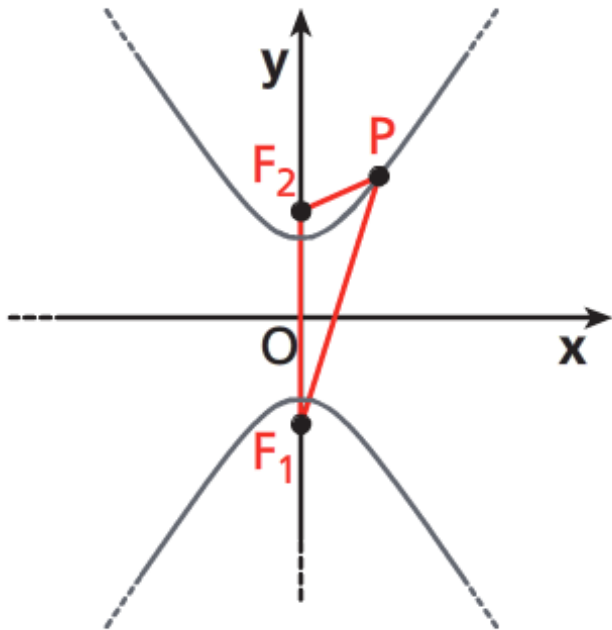
$$y = \frac{b}{a}x \quad y = -\frac{b}{a}x \Rightarrow y = \frac{3}{4}x \quad y = -\frac{3}{4}x$$

Per disegnare bene l'iperbole:

- disegnare i quattro vertici
- disegnare il rettangolo
- disegnare gli asintoti (che sono le diagonali del rettangolo)
- disegnare i due rami dell'iperbole che sono interni agli angoli formati dai due asintoti e contenenti i fuochi.



3. IPERBOLE CON I FUOCHI SULL'ASSE y



Il procedimento per determinare l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse y è analogo a quello dell'iperbole con i fuochi sull'asse x.

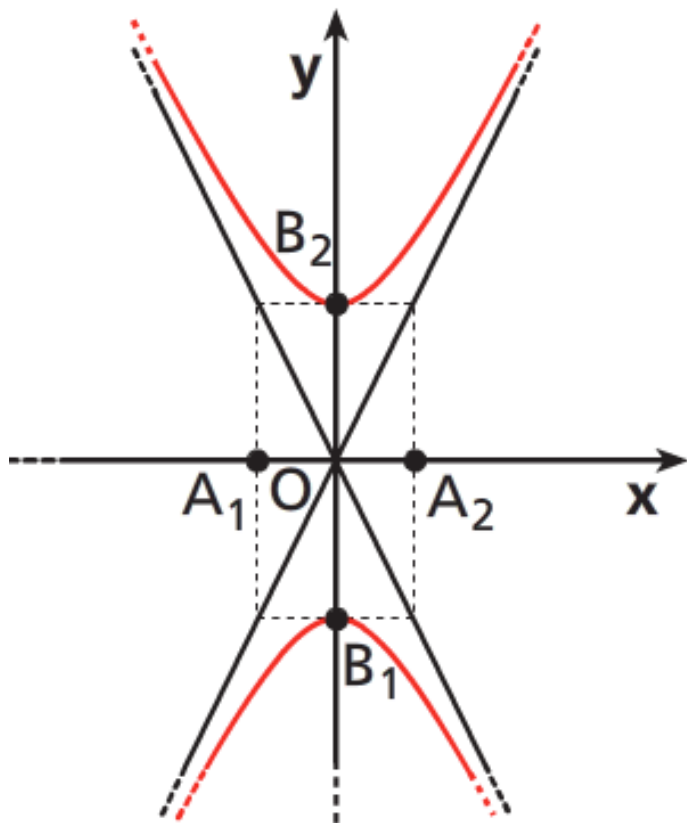
L'equazione che si ottiene è la seguente:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

L'equazione è stata ottenuta dopo aver posto:

$$a^2 = c^2 - b^2$$

Proprietà dell'iperbole



- ✓ È simmetrica rispetto agli assi cartesiani e all'origine
- ✓ L'asse y è l'asse trasverso e i vertici reali sono $B_1=(0;-b)$; $B_2=(0;b)$
- ✓ L'asse x è l'asse non trasverso e i vertici non reali sono $A_1=(-a;0)$; $A_2=(a;0)$
- ✓ Gli asintoti sono le rette:

$$y = \frac{b}{a}x \quad y = -\frac{b}{a}x$$

- ✓ Coordinate dei fuochi:

$$F_1 = (0;-c) \quad F_2 = (0;c)$$

- ✓ Eccentricità:

$$e = \frac{c}{b}$$

ESEMPIO

Nell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = -1$, essendo $a = 2$ e $b = 4$,

i vertici reali sono $B_1(0; -4)$, $B_2(0; 4)$;

i vertici non reali sono

$$A_1(-2; 0), A_2(2; 0);$$

gli asintoti hanno equazioni

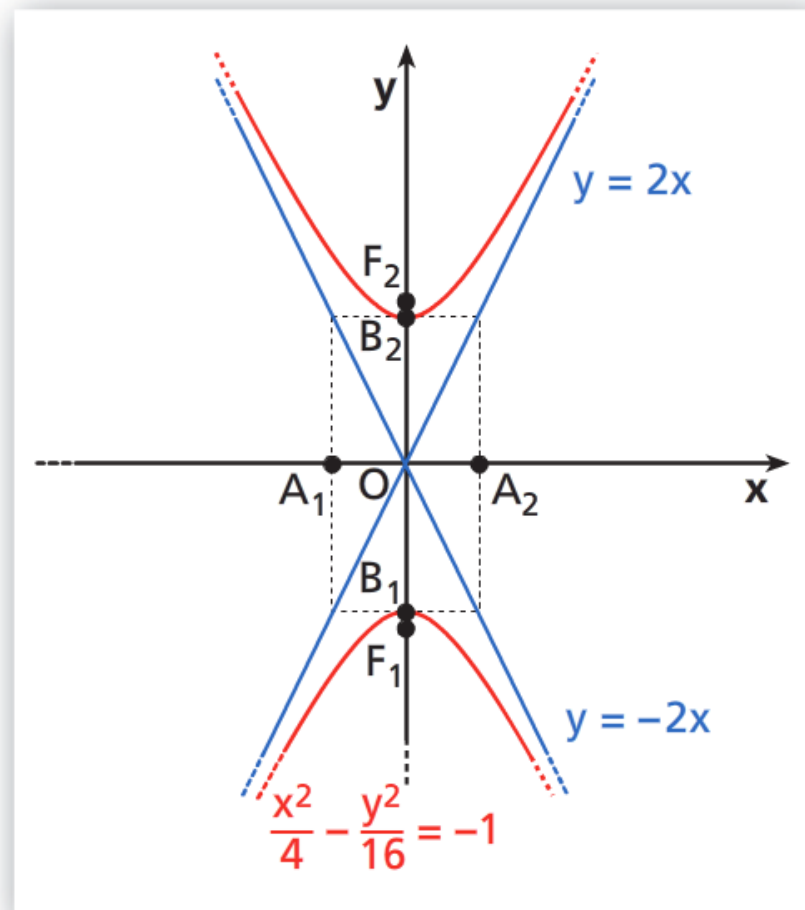
$$y = -2x \text{ e } y = 2x;$$

la semidistanza focale è

$$c = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5};$$

i fuochi sono $F_1(0; -2\sqrt{5})$ e $F_2(0; 2\sqrt{5})$;

l'eccentricità è $e = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.



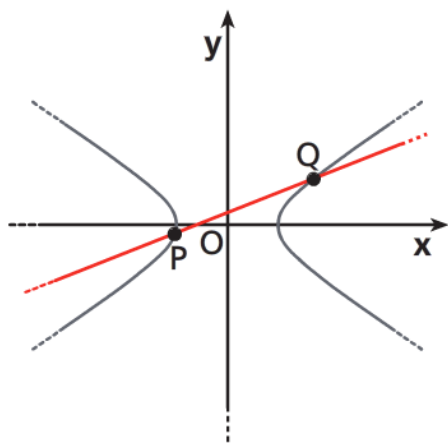
4. LA POSIZIONE DI UNA RETTA RISPETTO A UN'IPERBOLE

Per studiare la posizione di una retta rispetto a un'iperbole, dobbiamo determinare quante sono le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx + q \end{cases}$$

$$\Delta > 0$$

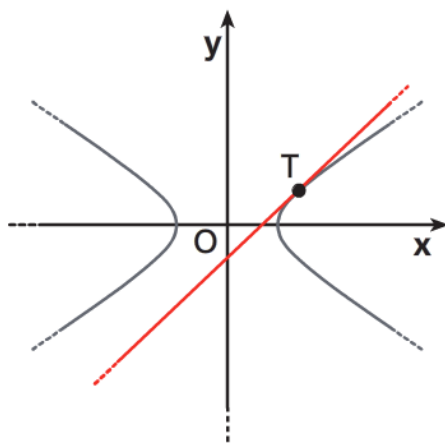
il sistema ammette
due soluzioni reali



a. La retta è secante
l'iperbole. I punti di
intersezione sono due.

$$\Delta = 0$$

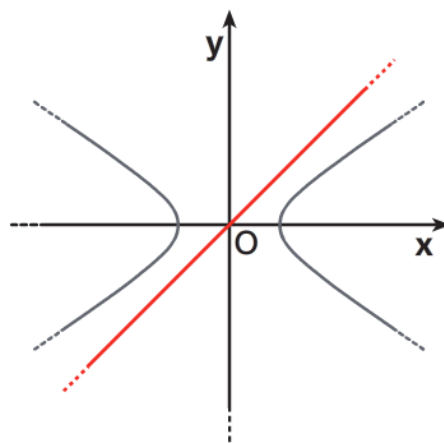
il sistema ammette
due soluzioni reali e
coincidenti



b. La retta, non parallela
agli asintoti, è tangente
all'iperbole. Il punto di
intersezione è unico e si
chiama *punto di tangenza*.

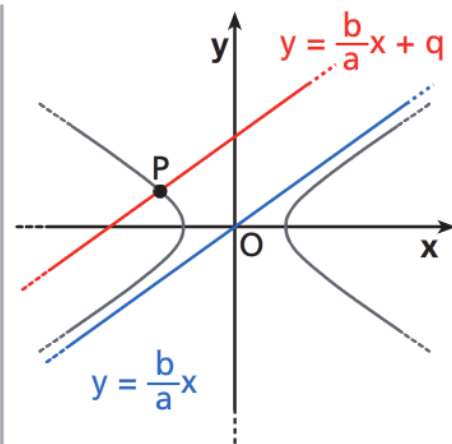
$$\Delta < 0$$

il sistema non
ammette soluzioni



c. La retta è esterna
all'iperbole. Non vi sono
punti di intersezione.

Equazione risolvente
di 1° grado



d. La retta è parallela a
un asintoto: la retta è
secante e il punto di
intersezione è unico.

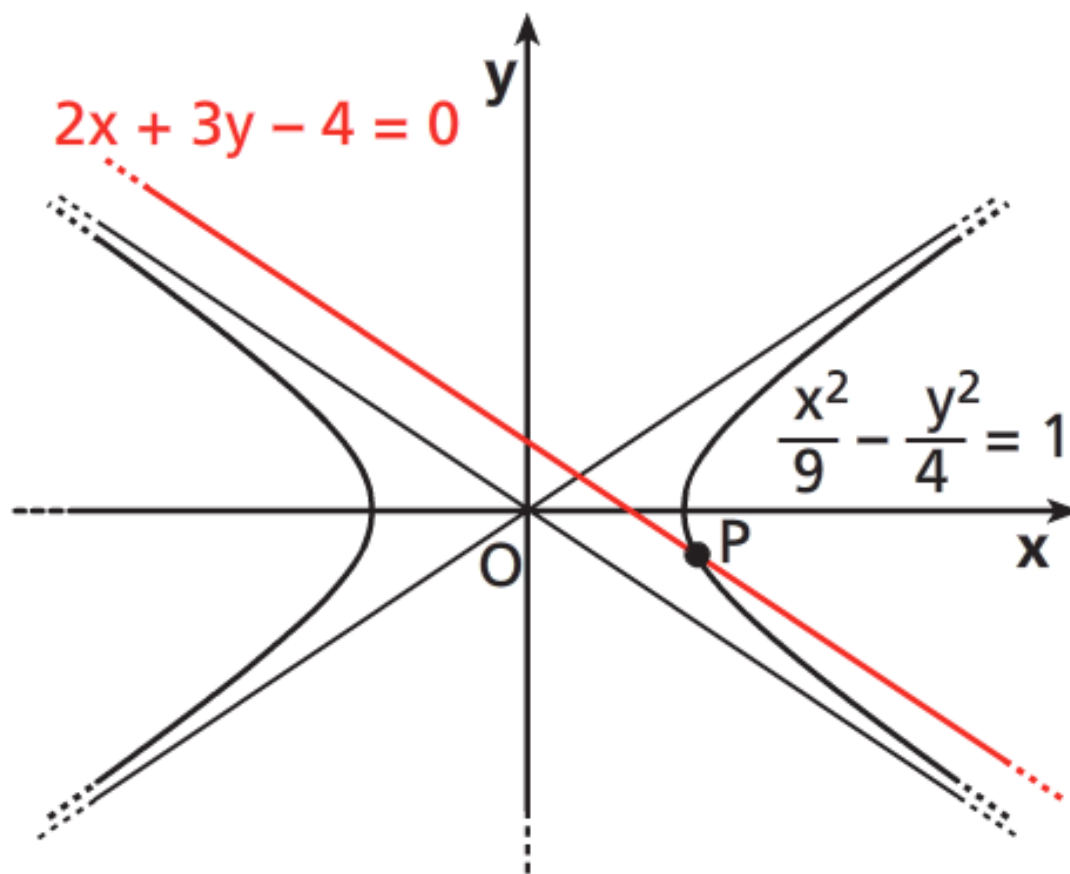
Studiare la posizione della retta $2x+3y-4=0$ rispetto all'iperbole $(x^2/9)-(y^2/4)=1$

Per studiare la posizione di una retta rispetto a un'iperbole, dobbiamo determinare quante sono le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \\ 2x + 3y - 4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{metodo di sostituzione}} \begin{cases} \frac{1}{9} \left(\frac{4-3y}{2} \right)^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \\ x = \frac{4-3y}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{calcoli algebrici}} \begin{cases} 6y + 5 = 0 \\ x = \frac{4-3y}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{6} \\ x = \frac{13}{4} \end{cases}$$

Poiché l'equazione risolvente (la prima del sistema) è di 1° grado, la retta è secante l'iperbole in un solo punto $P=(13/4;-5/6)$.



Metodo generale

valido per tutte le coniche, per trovare le equazioni delle rette tangenti all'iperbole condotte da un punto $P=(x_0; y_0)$

METODO DEL DISCRIMINANTE NULLO $\Delta=0$

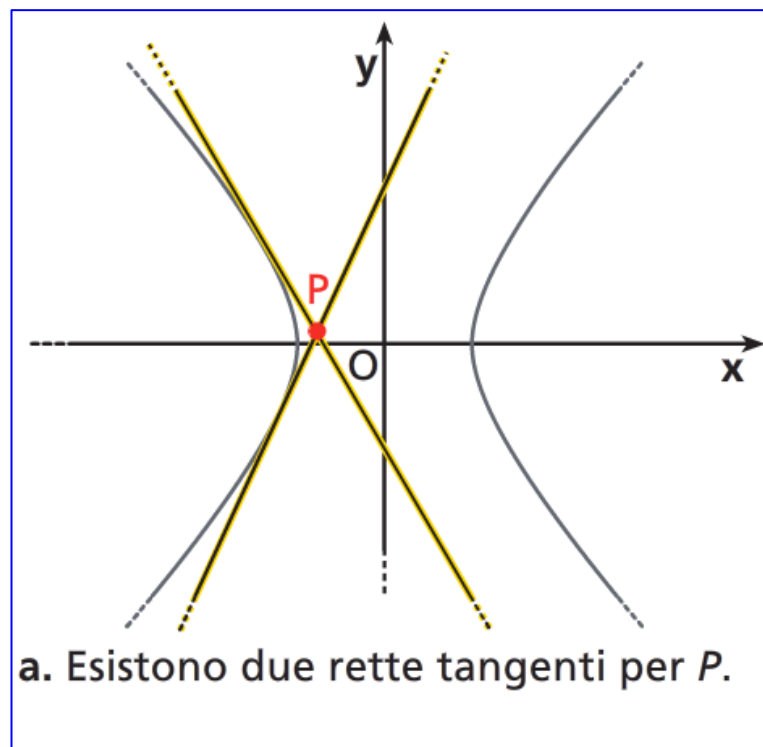
1. Si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per $P=(x_0; y_0)$:
2. Si scrive il sistema formato dalle equazioni dell'iperbole e del fascio:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

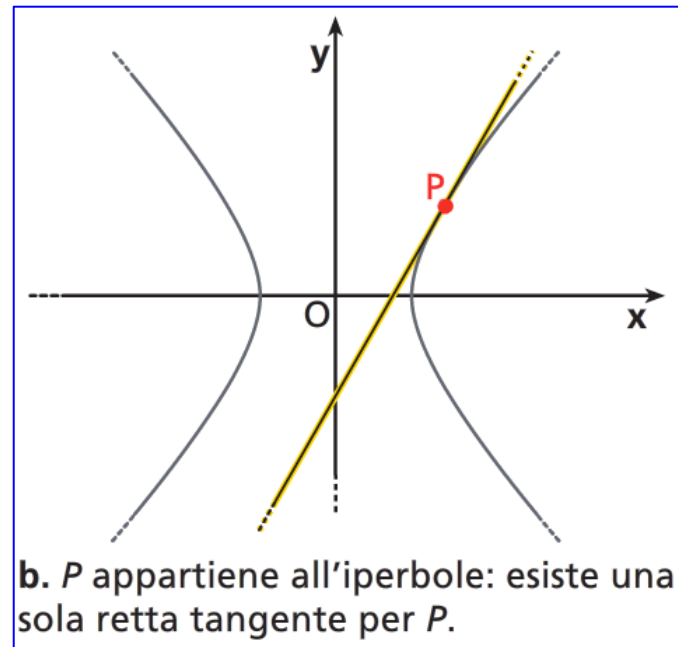
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases}$$

3. Si giunge all'equazione risolvente di 2° grado nella variabile x o y .
4. Si pone la condizione di tangenza: $\Delta = 0$
5. L'equazione $\Delta=0$ è un'equazione di 2° grado rispetto a m . Risolvendola, si ottengono i seguenti casi:

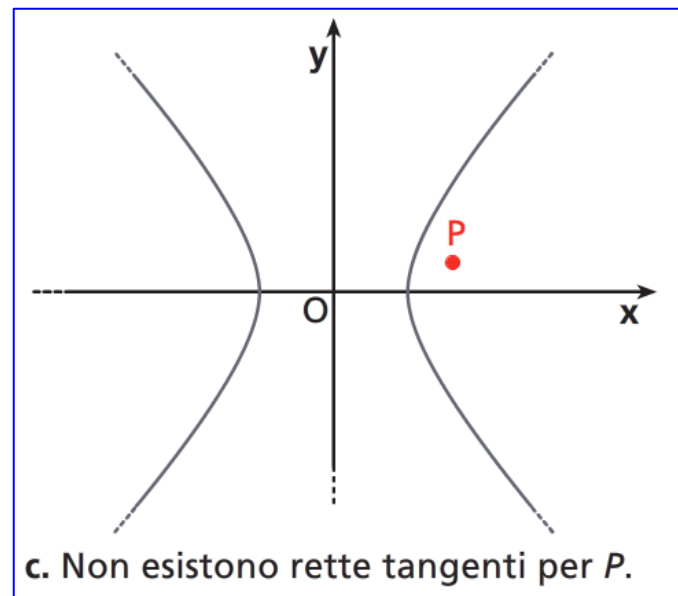
✓ Se $m_1 \neq m_2$ le rette tangenti sono due e il punto è esterno all'iperbole (fig. a).



✓ Se $m_1 = m_2$ la retta tangente è una sola e il punto appartiene all'iperbole (fig. b).



✓ Se $(m_1, m_2) \notin \mathfrak{R}$ non esistono rette tangenti e il punto è interno all'iperbole (fig. c).



Determinare le equazioni delle tangenti all'iperbole di equazione $x^2 - 4y^2 = 9$, condotte dal punto $P = (9/5; 0)$

Scriviamo il sistema formato dalle equazioni dell'iperbole e del fascio:

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 9 \\ y - 0 = m \left(x - \frac{9}{5} \right) \end{cases}$$

Troviamo l'equazione risolvente (ricavando la y dalla seconda equazione e sostituendola nella prima) e riduciamola a forma normale:

$$x^2 - 4 \left(mx - \frac{9}{5}m \right)^2 = 9 \xrightarrow{\text{passaggi algebrici}} 25(1 - 4m^2)x^2 + 360m^2x - 9(36m^2 + 25) = 0$$

Imponiamo la condizione di tangenza:

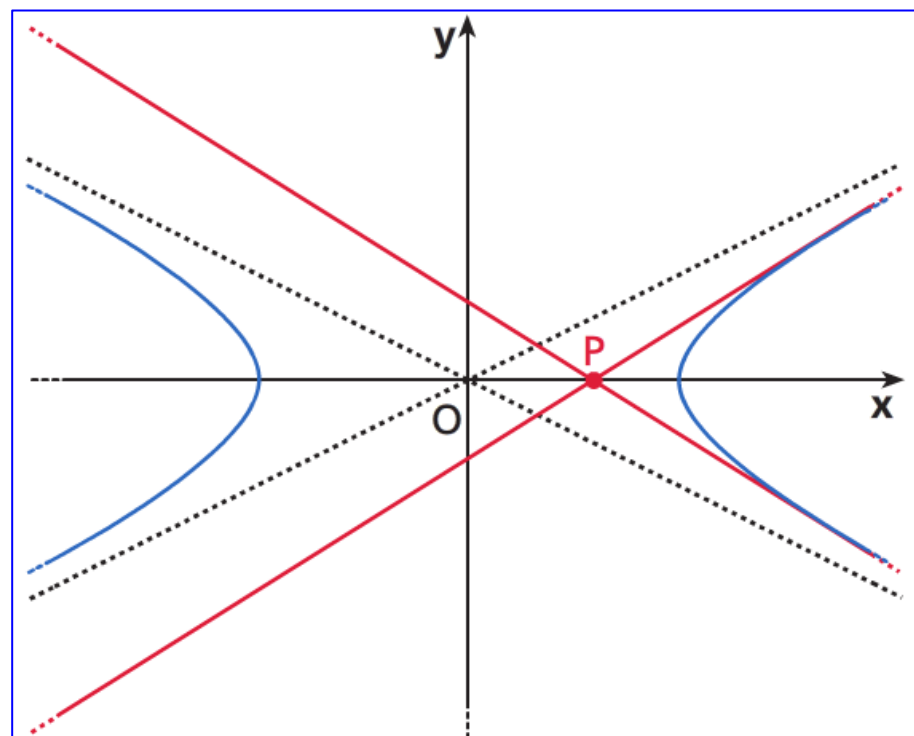
$$\Delta = 0 \Rightarrow (180m^2)^2 - 25(1 - 4m^2)(-9)(36m^2 + 25) = 0$$

Dopo vari calcoli algebrici,
l'equazione risolvente diventa:

$$64m^2 - 25 = 0 \rightarrow m = \pm \frac{5}{8}$$

Sostituendo i valori ottenuti
di m nell'equazione del
fascio, otteniamo le
equazioni delle tangenti
richieste:

$$t_1 : y = -\frac{5}{8}x + \frac{9}{8} \quad t_2 : y = \frac{5}{8}x + \frac{9}{8}$$



METODO DELLA FORMULA DI SDOPPIAMENTO

Si applica solo se il punto $P=(x_0;y_0)$
appartiene all'IPERBOLE

Formula dello sdoppiamento

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \quad \text{per l'iperbole} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = -1 \quad \text{per l'iperbole} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Determinare l'equazione della tangente all'iperbole di equazione $16x^2 - 3y^2 = 1$ nel suo punto $P = (-1/2; 1)$

Scriviamo l'equazione dell'iperbole nella forma canonica:

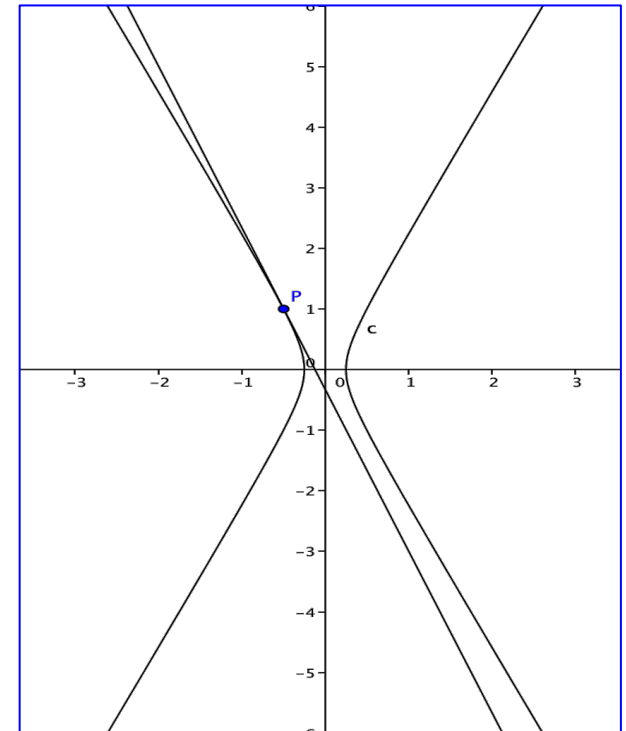
$$\frac{x^2}{\frac{1}{16}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

dove:

$$a^2 = \frac{1}{16} \quad b^2 = \frac{1}{3}$$

Pertanto, secondo la formula della sdoppiamento, l'equazione della retta tangente all'iperbole nel suo punto $P = (-1/2; 1)$ è:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{-\frac{1}{2}x}{\frac{1}{16}} - \frac{y}{\frac{1}{3}} = 1 \rightarrow 8x + 3y + 1 = 0$$



6. CONDIZIONI PER DETERMINARE L'EQUAZIONE DELL'IPERBOLE

L'equazione dell'iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

contiene due coefficienti a, b . Quindi, determinare l'equazione dell'iperbole significa calcolare “ a e b ”.

Pertanto il problema è: trovare due **condizioni** tra loro indipendenti tali da tradurle in un sistema di due equazioni nelle due incognite a, b .

Alcune condizioni possibili sono:

1. Sono note le coordinate di un fuoco e di un vertice; 2. L'iperbole passa per un punto noto e si conoscono le coordinate di un fuoco (o vertice); 3. L'iperbole passa per un punto noto e si conosce l'eccentricità; 4. L'iperbole passa per due punti noti; 5. E' nota l'eccentricità e si conoscono le coordinate di un fuoco (o di un vertice); 6. E' nota l'equazione di una retta tangente all'iperbole e sono note le coordinate di un vertice (o di un fuoco, o di un punto dell'iperbole); 7. E' nota l'equazione di una asintoto e sono note le coordinate di un vertice (o di un fuoco, o di un punto dell'iperbole).

Determinare l'equazione dell'iperbole avente fuoco $F=(\sqrt{5};0)$ e passante per $P=(\sqrt{5}/2;1)$.

L'equazione dell'iperbole è $(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1$, pertanto il problema consiste nel trovare due condizioni tra loro indipendenti tali da formare un sistema di due equazioni nelle due incognite a,b :

$$\begin{aligned} \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ P \in \text{iperbole} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ \frac{5}{4a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \end{cases} \rightarrow \\ \begin{cases} a^2 = 5 - b^2 \\ 5b^2 - 4a^2 = 4a^2b^2 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} a^2 = 5 - b^2 \\ 4b^2 - 11b^2 - 20 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Scegliendo b^2 come incognita, dalla seconda equazione otteniamo:

$$b^2 = \begin{cases} 4 \\ -\frac{5}{4} \end{cases} \text{ non accettabile}$$

Poiché b^2 è sempre positivo, l'unica soluzione accettabile è 4, quindi:

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases}$$

L'equazione richiesta si ottiene sostituendo i valori dei parametri nell'equazione canonica dell'iperbole:

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$$

Nota l'equazione, possiamo determinare le altre caratteristiche dell'iperbole e disegnare il suo grafico:

intersezioni con gli assi

$$A_1 = (-1; 0) \quad A_2 = (1; 0)$$

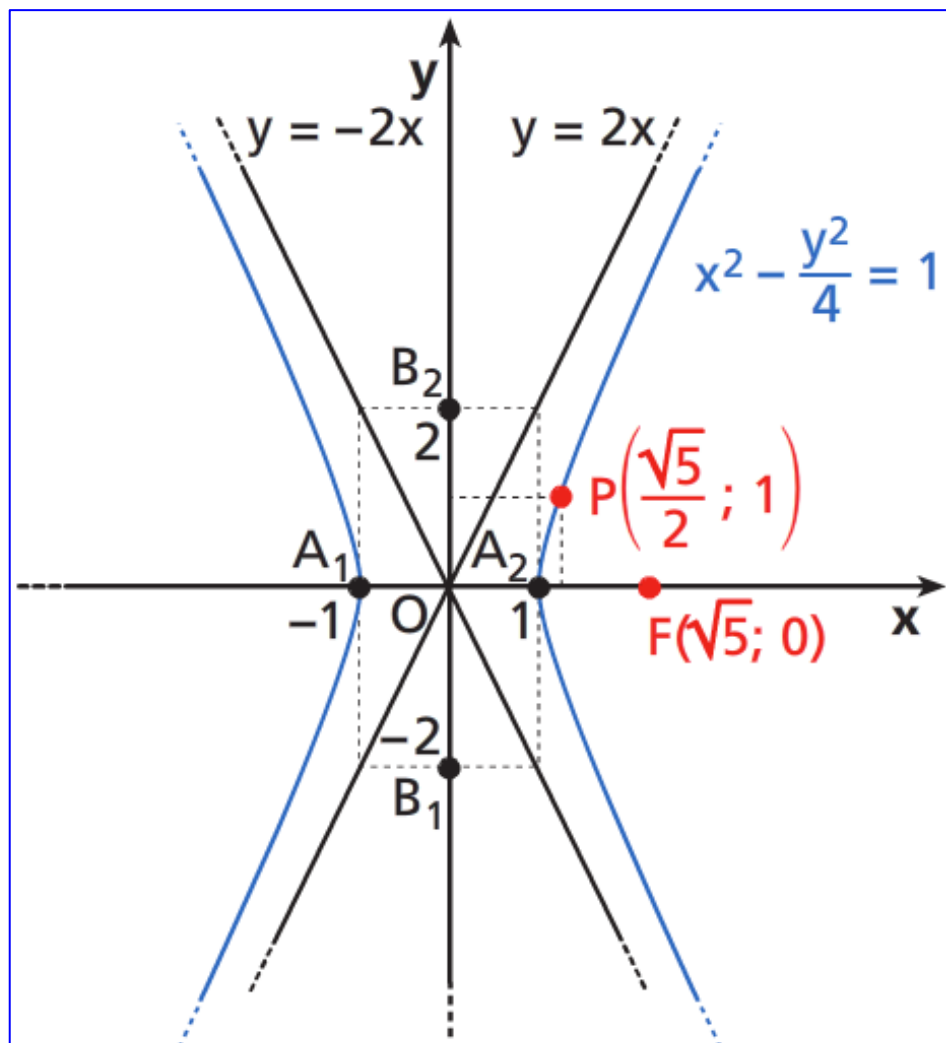
$$B_1 = (0; -2) \quad B_2 = (0; 2)$$

$$\text{eccentricità} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$$

asintoti

$$y = \frac{b}{a}x \quad y = -\frac{b}{a}x$$

$$y = 2x \quad y = -2x$$



Determinare l'equazione dell'iperbole avente fuoco $F=(-5/2;0)$ e un asintoto di equazione $y=(4/3)x$

L'equazione dell'iperbole è $(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1$, pertanto il problema consiste nel trovare due condizioni tra loro indipendenti tali da formare un sistema di due equazioni nelle due incognite a,b .

Dalle coordinate del fuoco deduciamo che:

$$a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow a^2 + b^2 = \frac{25}{4}$$

Dall'equazione dell'asintoto ricaviamo:

$$y = \frac{b}{a}x \rightarrow y = \frac{4}{3}x \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{4}{3} \rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{16}{9}$$

Risolviamo il sistema costituito dalle due relazioni ottenute:

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 = \frac{25}{4} \\ \frac{a^2}{b^2} = \frac{16}{9} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 + \frac{16}{9}a^2 = \frac{25}{4} \\ b^2 = \frac{16}{9}a^2 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{calcoli algebrici}} \left\{ \begin{array}{l} a^2 = \frac{9}{4} \\ b^2 = 4 \end{array} \right.$$

da cui, sostituendo i valori ottenuti nell'equazione canonica, si ottiene:

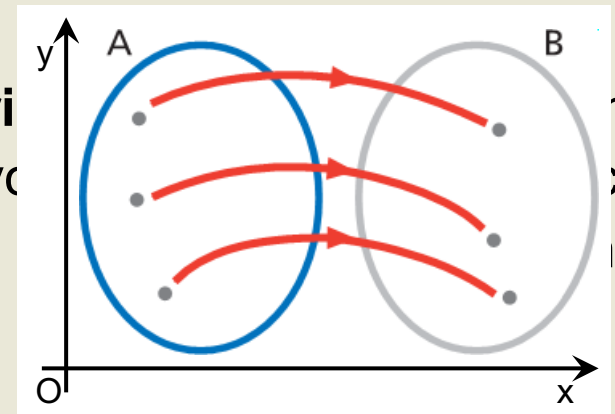
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{9}{4}} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{4}{9}x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$$

7. L'IPERBOLE E LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

Ci servono alcuni elementi sulle trasformazioni geometriche

DEFINIZIONE

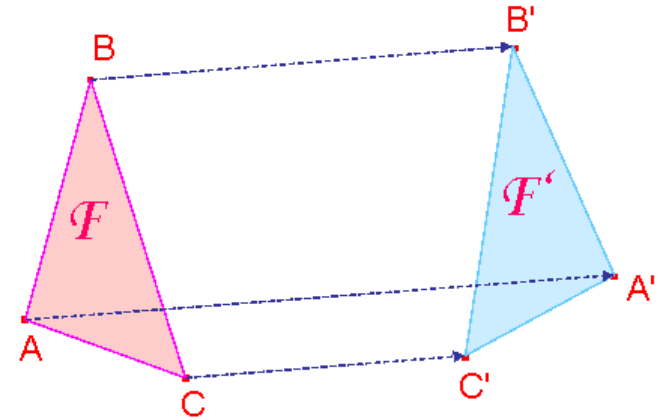
Una **trasformazione geometrica** è una corrispondenza biunivoca tra ogni punto del piano e un punto del piano stesso.



ESEMPIO

$$\begin{array}{ccccc} \begin{cases} x' = x - 2y + 6 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases} & \longrightarrow & \begin{cases} x' = 2 - 2 \cdot 1 + 6 \\ y' = -2 + 1 - 1 \end{cases} & \longrightarrow & \begin{cases} x' = 6 \\ y' = -2 \end{cases} \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ P(2; 1) & & & & P'(6; -2) \end{array}$$

Le **isometrie** sono tutte le trasformazioni (movimenti, spostamenti) che mantengono inalterate le figure, più precisamente che mantengono inalterate le caratteristiche misurabili (la lunghezza dei lati, l'ampiezza degli angoli).



Una **traslazione** è una isometria di equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

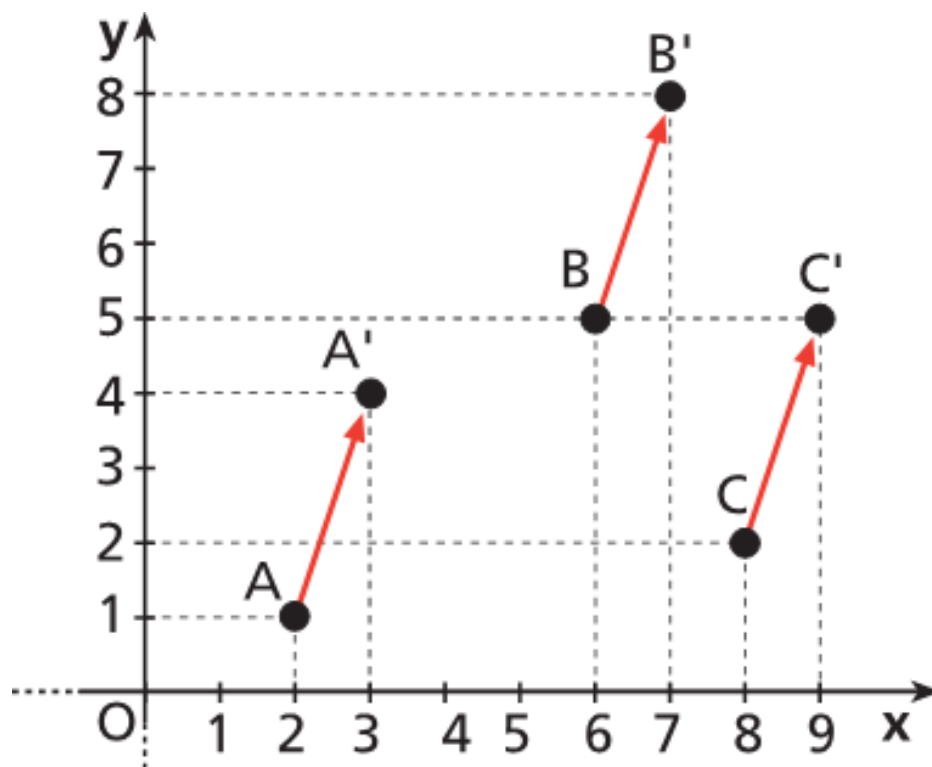
Le equazioni permettono di trovare le coordinate di un punto $P'(x';y')$ note quelle del punto $P(x;y)$.

ESEMPIO

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 3 \end{cases}$$

Ogni punto viene traslato aumentando di 1 unità la sua ascissa e di 3 unità la sua ordinata.

I segmenti orientati AA' , BB' , CC' sono tutti equipollenti e si chiamano **vettori**.

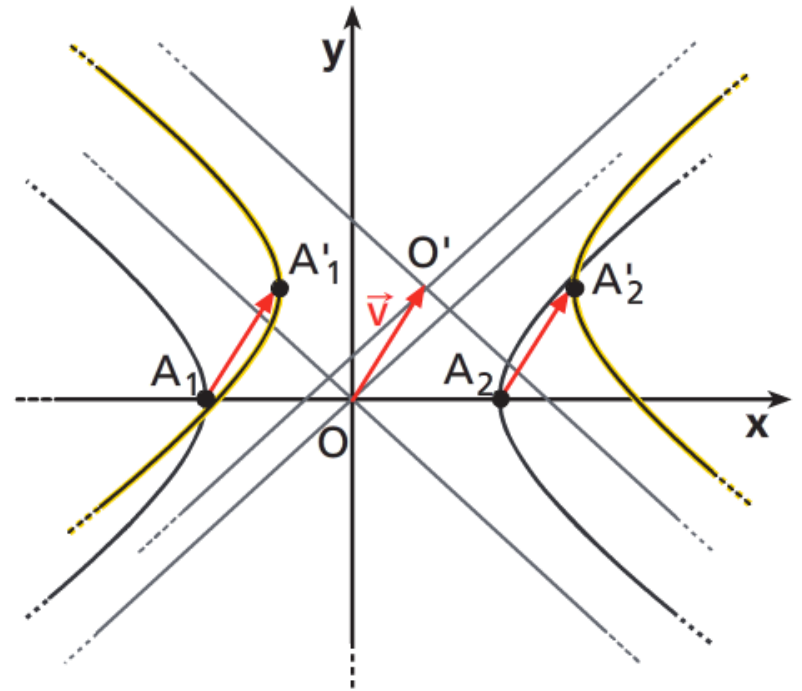


➤ *IPERBOLE traslata*

Se trasformiamo un'iperbole con una trasformazione di vettore $\mathbf{v}$, la curva ottenuta è ancora un'iperbole.

Infatti, indicando con P' il corrispondente di un punto P dell'iperbole e con F'_1 e F'_2 i corrispondenti dei fuochi F_1 e F_2 dell'iperbole, vale ancora:

$$\left| \overline{P'F'_1} - \overline{P'F'_2} \right| = 2a$$



L'iperbole traslata ha il centro, i vertici, gli assi di simmetria e gli asintoti che sono i corrispondenti di quelli dell'iperbole data.

Ricaviamo l'equazione dell'iperbole traslata.

Applichiamo alla generica iperbole, con centro di simmetria nell'origine degli assi cartesiani, la traslazione di vettore $\mathbf{v}(p;q)$:

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x' - p \\ y = y' - q \end{cases}$$

Sostituiamo queste trasformazioni nell'equazione dell'iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x' - p)^2}{a^2} - \frac{(y' - q)^2}{b^2} = 1$$

Eliminando gli apici, otteniamo l'equazione cercata:

$$\frac{(x - p)^2}{a^2} - \frac{(y - q)^2}{b^2} = 1$$

L'equazione può essere scritta anche in altro modo.
Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$a'x^2 + b'y^2 + c'x + d'y + e' = 0$$

dove:

$$\begin{aligned} a' &= b^2 & b' &= -a^2 & c' &= -2b^2p \\ d' &= 2a^2q & e' &= b^2p^2 - a^2q^2 - a^2b^2 \end{aligned}$$

Centro di simmetria:

$$O' = \left(-\frac{c'}{2a'}; -\frac{d'}{2b'} \right)$$

Assi di simmetria:

$$x = -\frac{c'}{2a'} \quad y = -\frac{d'}{2b'}$$

ESERCIZIO GUIDA

Data l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = -1$, determiniamo l'equazione dell'iperbole corrispondente nella traslazione di vettore $\vec{v}(6; 2)$ e rappresentiamo le due iperboli.

L'iperbole data ha i fuochi sull'asse y e inoltre $a = 2$ e $b = 4$. I vertici reali sono perciò $B_1(0; -4)$ e $B_2(0; 4)$, mentre quelli non reali sono $A_1(-2; 0)$ e $A_2(2; 0)$. Gli asintoti dell'iperbole hanno equazione:

$$y = \pm 2x.$$

Scriviamo le equazioni della traslazione di vettore $\vec{v}(6; 2)$ e ricaviamo la x e la y :

$$\begin{cases} x' = x + 6 \\ y' = y + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x' - 6 \\ y = y' - 2 \end{cases}$$

Sostituiamo nell'equazione dell'iperbole alla x e alla y le espressioni trovate:

$$\frac{(x' - 6)^2}{4} - \frac{(y' - 2)^2}{16} = -1.$$

L'equazione dell'iperbole traslata è:

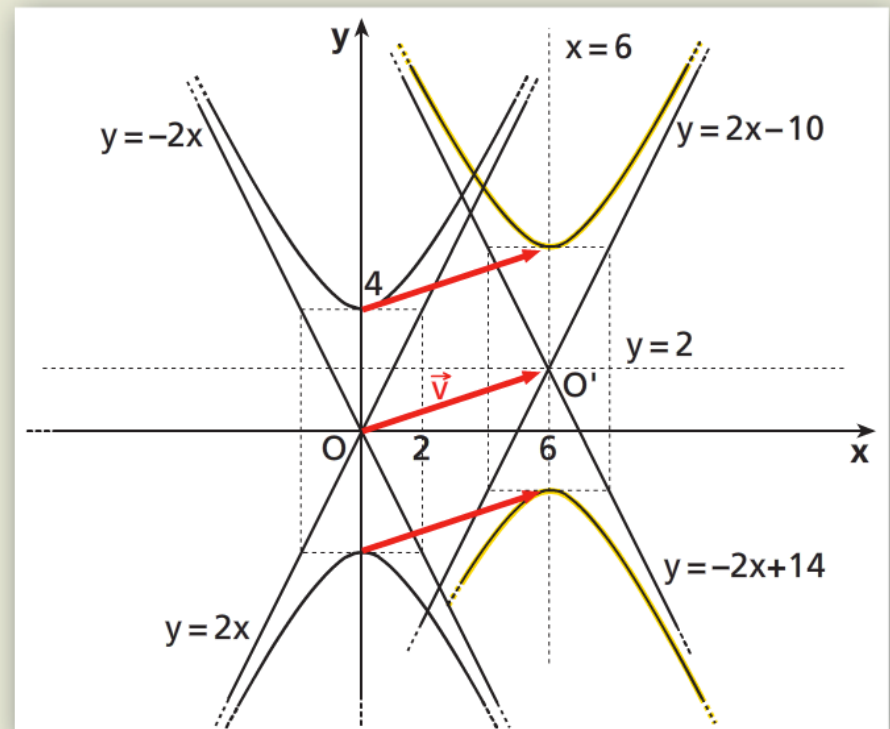
$$\frac{(x - 6)^2}{4} - \frac{(y - 2)^2}{16} = -1.$$

Sviluppando i calcoli otteniamo l'equazione:

$$4x^2 - y^2 - 48x + 4y + 156 = 0.$$

Ricaviamo le coordinate del centro di simmetria e dei vertici dell'iperbole traslata, sostituendo nelle equazioni della traslazione alla x e alla y le coordinate dei punti corrispondenti:

$$O'(6; 2), A'_1(4; 2), A'_2(8; 2), B'_1(6; -2), B'_2(6; 6).$$

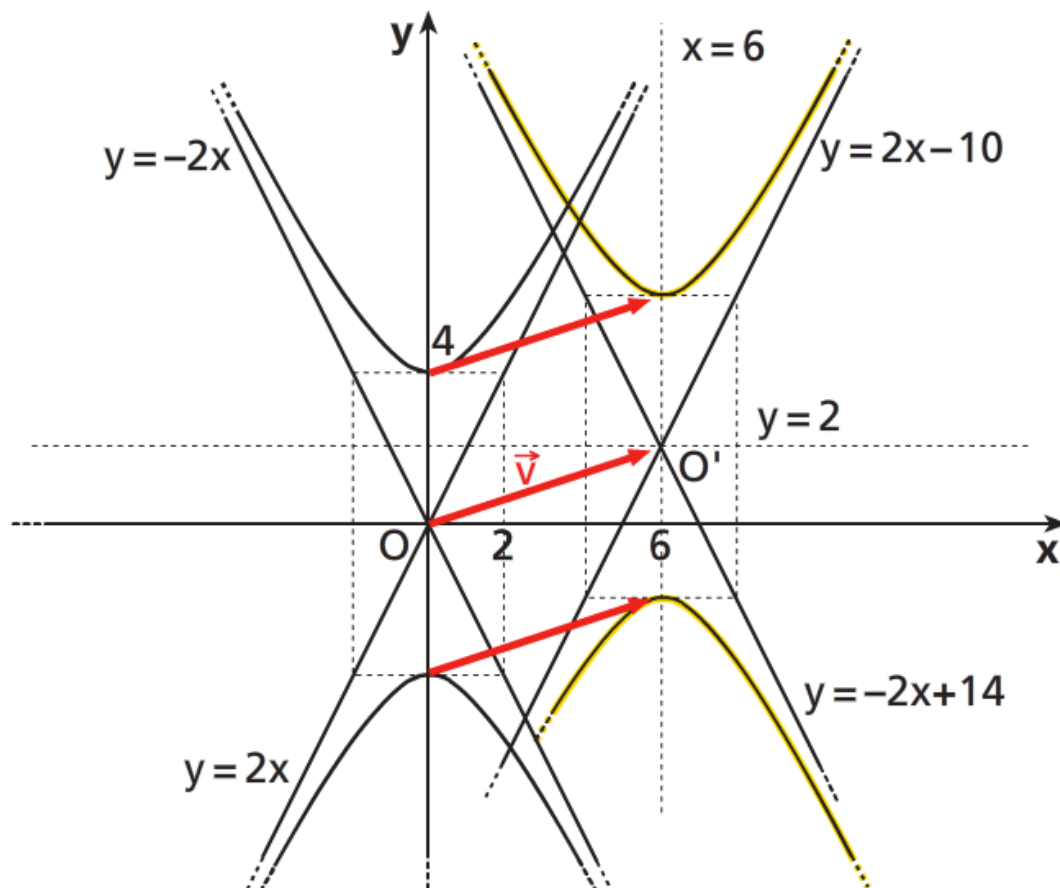


Gli assi di simmetria dell'iperbole traslata sono le rette per O' parallele agli assi cartesiani:

$$x = 6 \text{ e } y = 2.$$

Gli asintoti dell'iperbole traslata sono le rette per O' parallele agli asintoti dell'iperbole data. La loro equazione è:

$$y - 2 = \pm 2(x - 6) \rightarrow y = -2x + 14 \vee y = 2x - 10.$$



ESERCIZIO GUIDA

Studiamo e tracciamo il grafico delle curve di equazioni:

a) $9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y + 29 = 0$; b) $4x^2 - y^2 + 8x + 4y = 0$.

a) Poiché i coefficienti di x^2 e y^2 sono opposti, si tratta di un'iperbole. Cerchiamo di scrivere l'equazione data nella forma:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \quad \text{oppure} \quad \frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = -1.$$

Riscriviamo l'equazione data raggruppando i termini con x e quelli con y :

$$9x^2 - 18x - 4y^2 + 16y + 29 = 0 \rightarrow 9(x^2 - 2x) - 4(y^2 - 4y) + 29 = 0.$$

Perché i termini all'interno delle parentesi diventino il quadrato di un binomio, occorre aggiungere il termine noto. Aggiungiamo i termini mancanti a entrambi i membri dell'equazione:

$$\begin{aligned} 9(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 - 4y + 4) + 29 &= 9 - 16 \rightarrow 9(x - 1)^2 - 4(y - 2)^2 + 29 = -7 \rightarrow \\ &\rightarrow 9(x - 1)^2 - 4(y - 2)^2 = -36. \end{aligned}$$

Dividendo entrambi i membri per 36, otteniamo: $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = -1$.

Il centro di simmetria dell'iperbole è $O'(1; 2)$.

Le coordinate di O' potevano essere determinate anche ricordando che nell'equazione

$$a'x^2 + b'y^2 + c'x + d'y + e' = 0$$

$$\text{si ha } x_{O'} = -\frac{c'}{2a'} \text{ e } y_{O'} = -\frac{d'}{2b'}.$$

Quindi

$$x_{O'} = -\frac{-18}{2 \cdot 9} = 1, \quad y_{O'} = -\frac{16}{2 \cdot (-4)} = 2.$$

Gli assi di simmetria sono le rette per O' parallele agli assi:

$$x = 1, \quad y = 2.$$

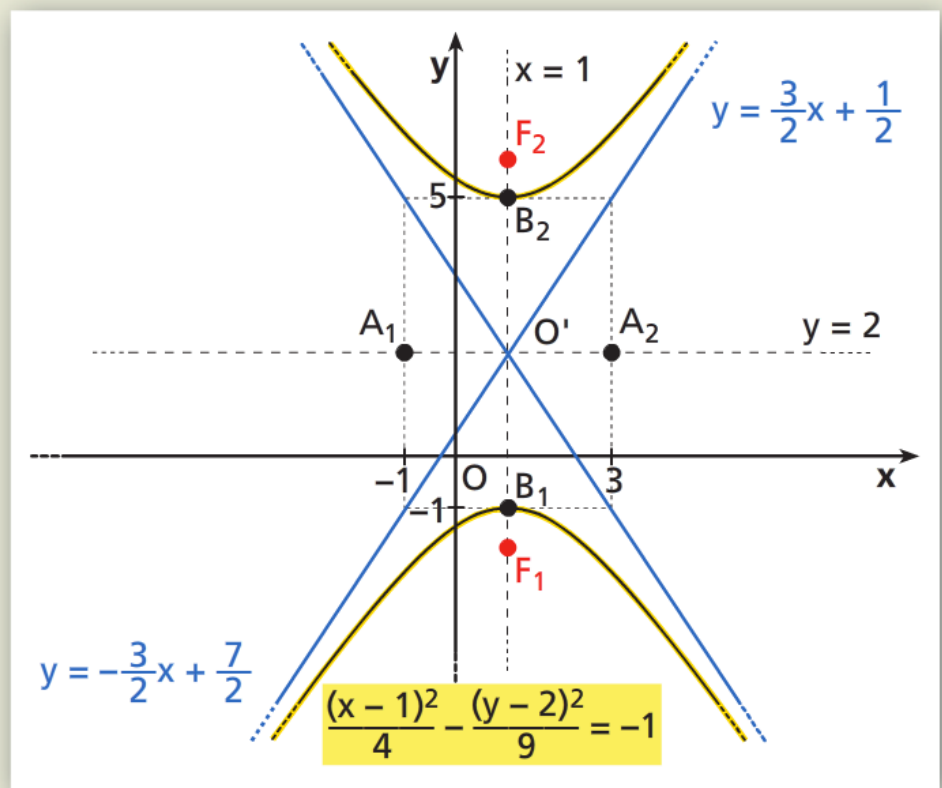
La lunghezza dei semiassi dell'iperbole è $a = 2$ e $b = 3$.

La semidistanza focale è $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$.
Poiché l'iperbole ha l'asse focale parallelo all'asse y , i vertici reali sono $B_1(1; -1)$ e $B_2(1; 5)$, i vertici non reali sono $A_1(-1; 2)$ e $A_2(3; 2)$, e i fuochi sono $F_1(1; 2 - \sqrt{13})$ e $F_2(1; 2 + \sqrt{13})$.

Gli asintoti sono le rette per O' con coefficiente angolare $m = \pm \frac{b}{a}$:

$$y - 2 = \pm \frac{3}{2}(x - 1) \rightarrow$$

$$\rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} \vee y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$



b) Appliciamo il metodo del completamento del quadrato riscrivendo l'equazione data:

$$4(x^2 + 2x) - (y^2 - 4y) = 0 \rightarrow$$

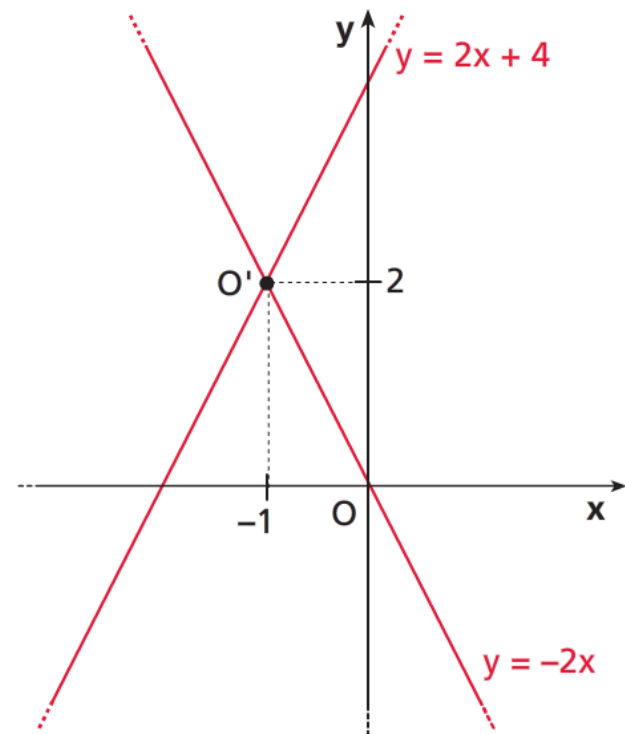
$$\rightarrow 4(x^2 + 2x + 1) - 4 - (y^2 - 4y + 4) + 4 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4(x + 1)^2 - (y - 2)^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4(x + 1)^2 = (y - 2)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2(x + 1) = \pm(y - 2).$$

Questo risultato significa che l'equazione data rappresenta un'*iperbole degenera* costituita dalle due rette $y = 2x + 4$ e $y = -2x$ passanti per $O'(-1; 2)$.



Dopo aver determinato il dominio, rappresentare graficamente la funzione:

$$y = 2\sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 4x + 7} + 1$$

Per determinare il dominio poniamo il radicando maggiore o uguale a 0, ossia:

$$\frac{1}{4}x^2 - 4x + 7 \geq 0 \rightarrow x \leq 2 \vee x \geq 14.$$

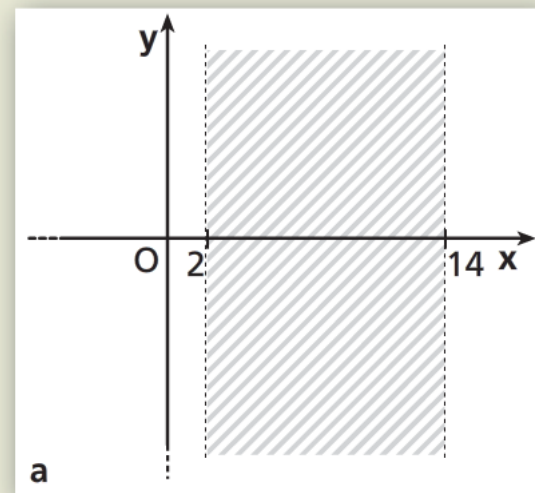
Il dominio della funzione è dunque l'insieme:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \vee x \geq 14\}.$$

Tracciamo nel piano cartesiano le rette $x = 2$ e $x = 14$ ed eliminiamo tutti i punti che hanno ascissa maggiore di 2 e minore di 14 (figura a).

Per rappresentare la funzione isoliamo la radice:

$$y - 1 = 2\sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 4x + 7} \rightarrow \frac{y - 1}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 4x + 7}.$$

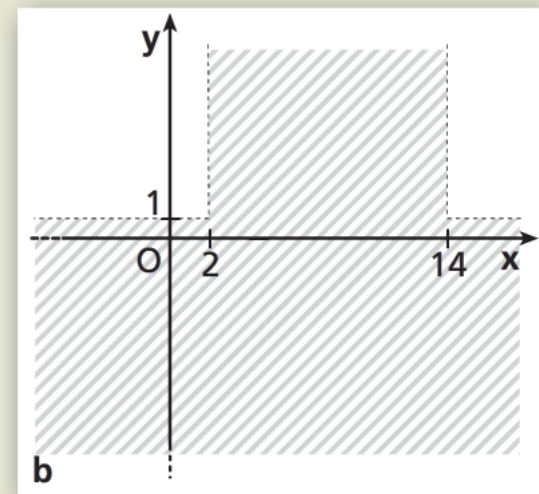


Questa equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \frac{y-1}{2} \geq 0 \\ \frac{(y-1)^2}{4} = \frac{1}{4}x^2 - 4x + 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ \frac{(y-1)^2}{4} - \frac{x^2 - 16x + 64 - 64}{4} = 7 \end{cases} \rightarrow$$

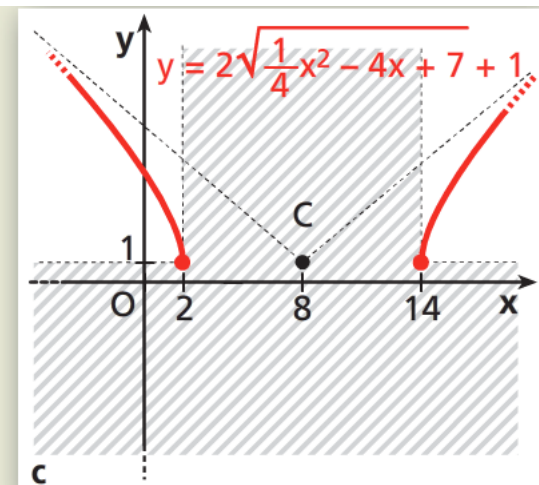
$$\rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ \frac{(y-1)^2}{4} - \frac{x^2 - 16x + 64}{4} = -9 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ \frac{(x-8)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{36} = 1 \end{cases}$$



Tracciamo nel piano cartesiano la retta $y = 1$ ed eliminiamo tutti i punti che hanno ordinata minore di 1 (figura b).

L'equazione $\frac{(x-8)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{36} = 1$ rappresenta un'iperbole traslata di centro $C(8; 1)$, assi di simmetria $x = 8$ e $y = 1$, asintoti $y = x - 7$ e $y = -x + 9$. Tracciamo ora i rami di iperbole contenuti nella parte di piano che non abbiamo eliminato (figura c), ottenendo così il grafico cercato.



➤ Caso I: i fuochi sono sull'asse x

Equazione generica dell'iperbole riferita agli assi di simmetria:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ponendo $b = a$, si ottiene l'iperbole equilatera, cioè:

$$x^2 - y^2 = a^2$$

➤ Caso II: i fuochi sono sull'asse y

Equazione generica dell'iperbole riferita agli assi di simmetria:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Ponendo $b = a$, si ottiene l'iperbole equilatera, cioè:

$$x^2 - y^2 = -a^2$$

➤ **Esempio**

Disegnare la seguente iperbole equilatera: $x^2 - y^2 = 9$

✓ Vertici (reali e non reali):

$$a = b \Rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = \pm 3$$

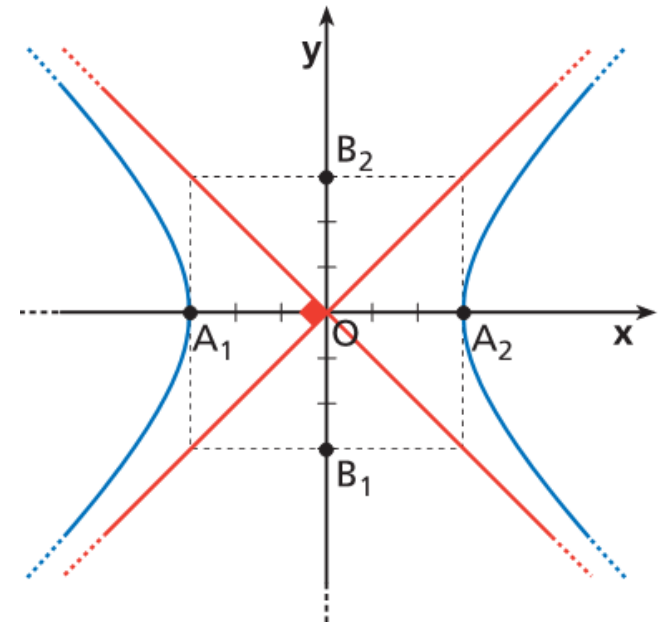
$$A_1 = (-3; 0) \quad A_2 = (3; 0) \quad B_1 = (0; -3) \quad B_2 = (0; 3)$$

✓ Fuochi:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \xrightarrow{a=b} c = a\sqrt{2}$$

$$F_1 = (-3\sqrt{2}; 0) \quad F_2 = (3\sqrt{2}; 0)$$

✓ Eccentricità: $a = b \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$



✓ Asintoti:

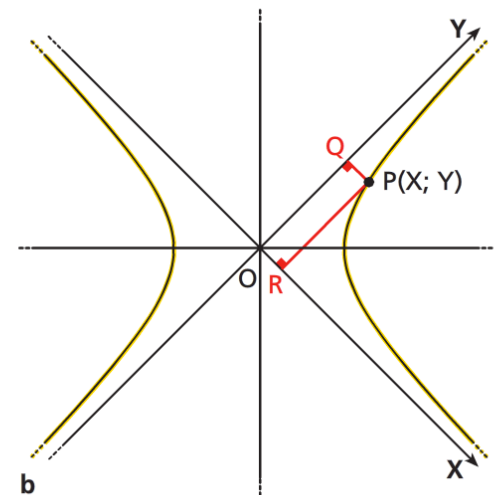
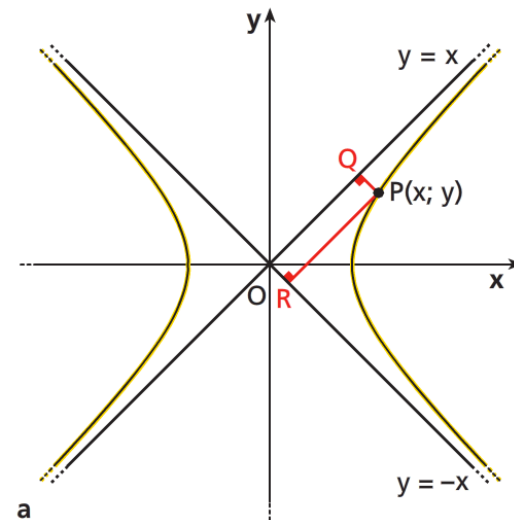
$$a = b \Rightarrow y = x \quad y = -x$$

bisettrici dei quadranti

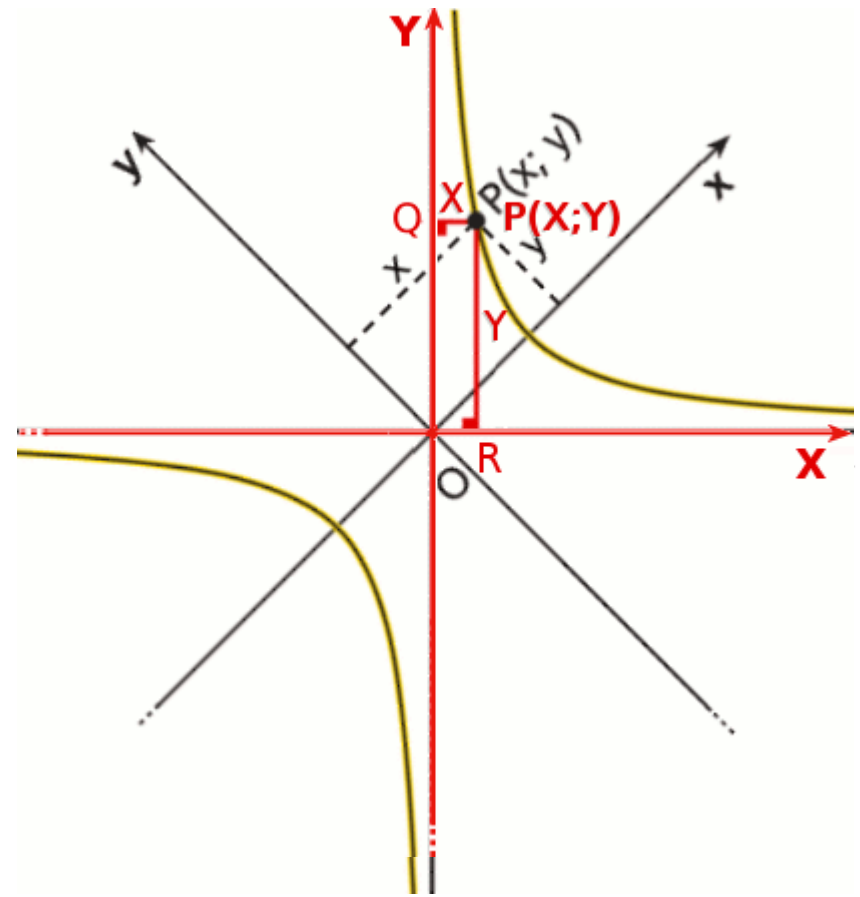
9. L'IPERBOLE EQUILATERA riferita agli assi asintoti

Gli asintoti dell'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = a^2$, che coincidono con le bisettrici dei quadranti, sono perpendicolari tra loro.

Consideriamo questi asintoti come assi di un nuovo sistema di riferimento per l'iperbole. Sia $P=(x;y)$ un punto dell'iperbole nel primo sistema e $P=(X;Y)$ nel secondo sistema.



Ruotando (applichiamo una rotazione che è una trasformazione geometrica) il grafico dell'iperbole portiamo gli asintoti (sistema XOY) nella posizione occupata dal primo sistema di assi (xOy).



Equazione dell'iperbole nel nuovo sistema è:

$$xy = k$$

$$k = \pm \frac{a^2}{2}$$

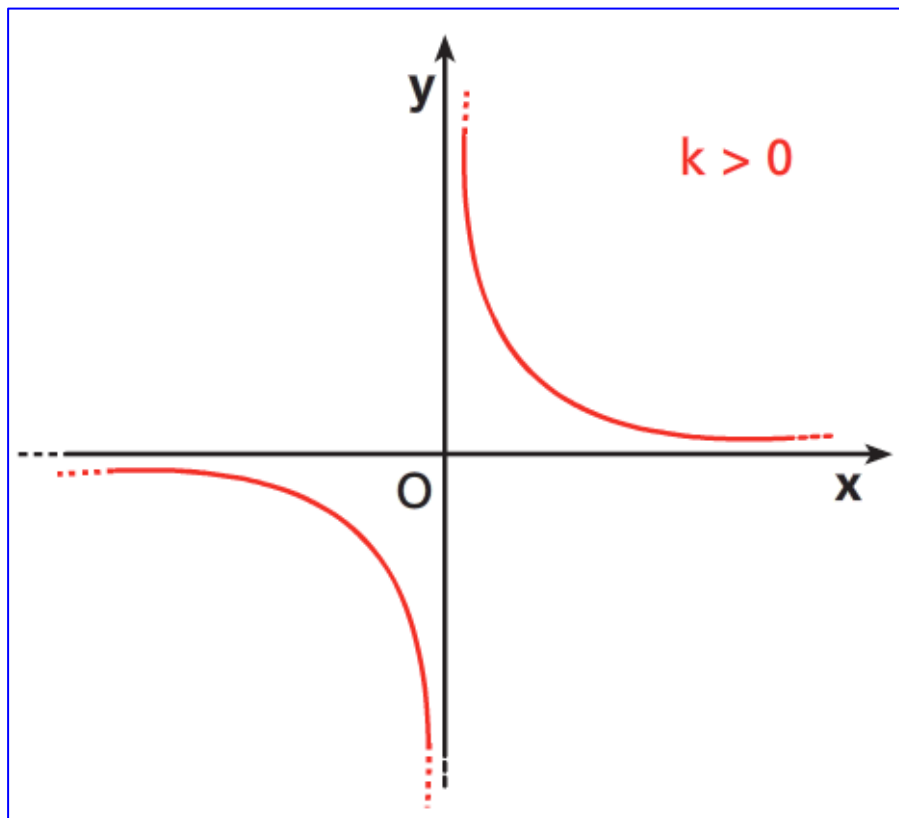
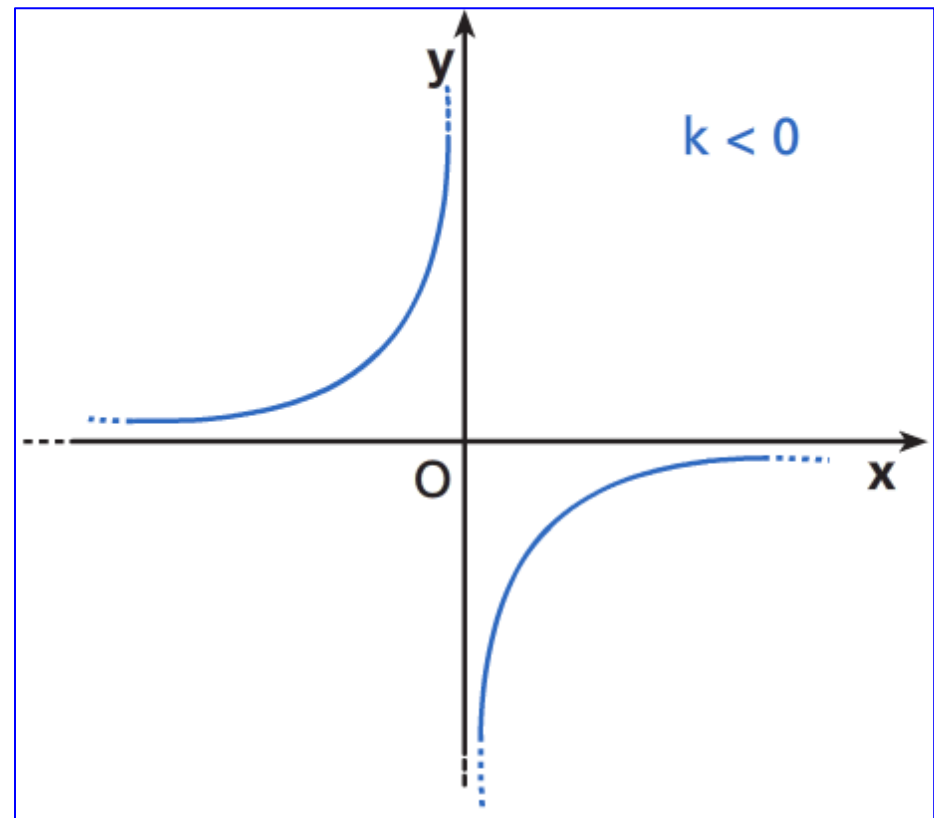
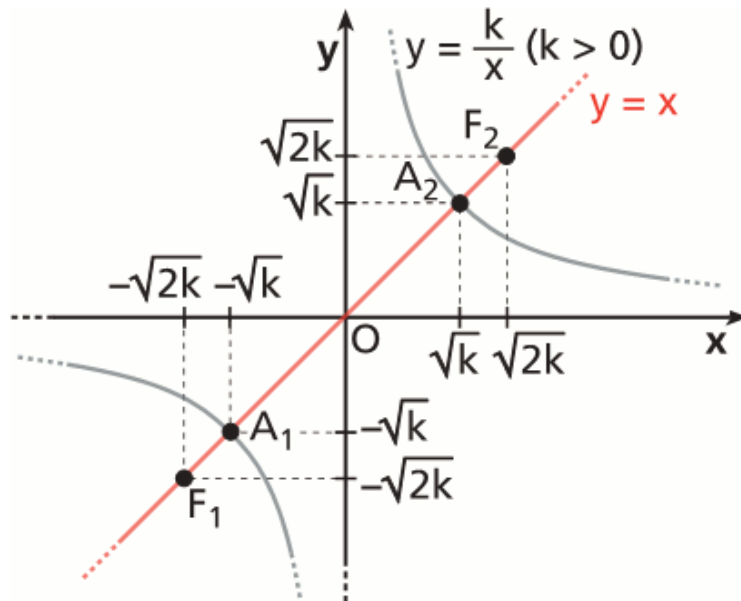


Grafico dell'iperbole equilatera
riferita ai propri asintoti



Vertici e fuochi

$k > 0$



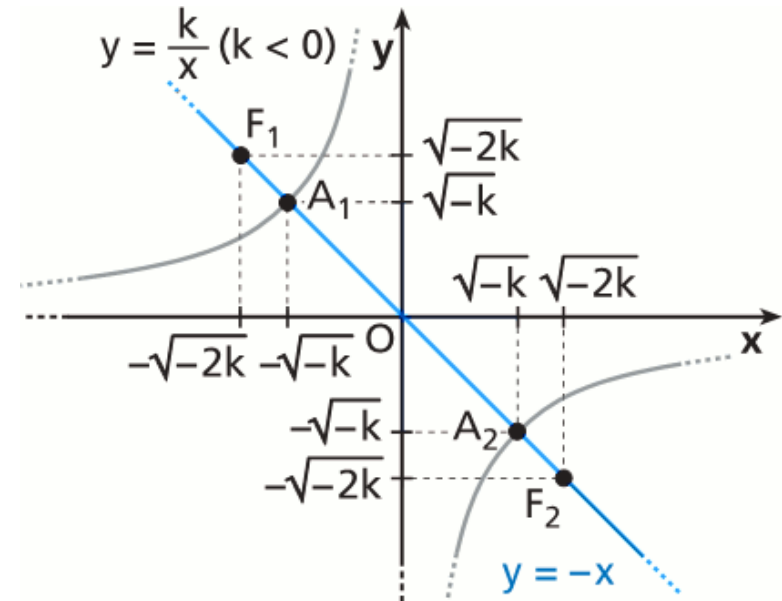
Vertici

$$A_1 = (-\sqrt{k}; -\sqrt{k}), A_2 = (\sqrt{k}; \sqrt{k}).$$

Fuochi

$$F_1 = (-\sqrt{2k}; -\sqrt{2k}), F_2 = (\sqrt{2k}; \sqrt{2k}).$$

$k < 0$



Vertici

$$A_1 = (-\sqrt{-k}; \sqrt{-k}), A_2 = (\sqrt{-k}; -\sqrt{-k}).$$

Fuochi

$$F_1 = (-\sqrt{-2k}; \sqrt{-2k}), F_2 = (\sqrt{-2k}; -\sqrt{-2k}).$$

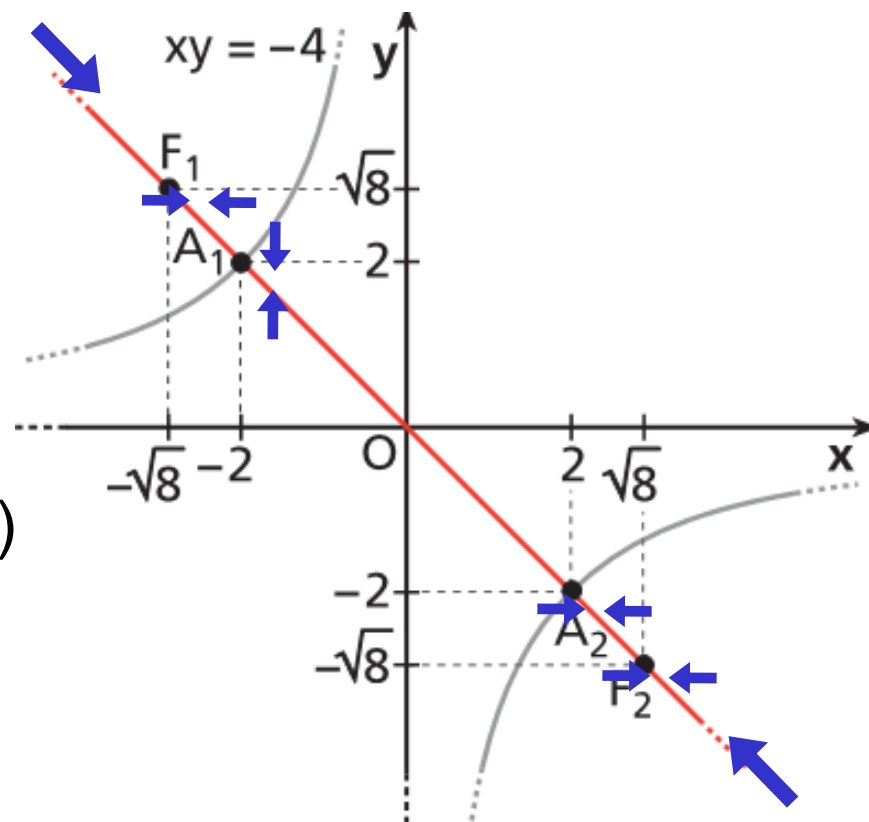
Studiamo il grafico e le proprietà dell'iperbole equilatera di equazione:

$$xy = -4$$

Asse trasverso: $y = -x$

Vertici: $A_1(-2; 2)$ $A_2(2; -2)$

Fuochi: $F_1(-\sqrt{8}; \sqrt{8})$ $F_2(\sqrt{8}; -\sqrt{8})$



ESERCIZIO GUIDA

Data l'iperbole equilatera di equazione $xy = 16$, determiniamo le coordinate dei vertici e rappresentiamo la curva graficamente.

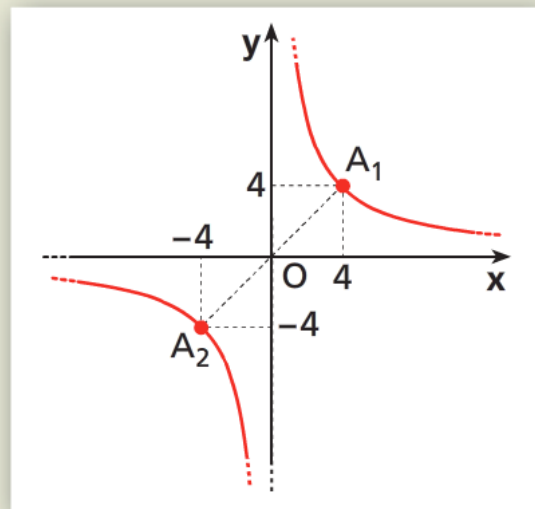
Poiché $k = 16 > 0$, il grafico della curva si trova nel primo e terzo quadrante e l'asse trasverso della curva è la bisettrice dei precedenti quadranti, ossia $y = x$.

Per determinare le coordinate dei vertici risolviamo il sistema costituito dalle equazioni dell'iperbole e della bisettrice. Otteniamo:

$$A_1(\sqrt{k}; \sqrt{k}), A_2(-\sqrt{k}; -\sqrt{k}) \rightarrow A_1(4; 4), A_2(-4; -4).$$

Per disegnare l'iperbole troviamo qualche punto della curva assegnando valori a x , purché diversi da 0, e calcolando i corrispondenti valori di y . Per esempio, per $x = 2$ abbiamo $y = 8$.

Infine, congiungendo i punti ottenuti, rappresentiamo la curva richiesta, ricordando che gli assi cartesiani sono gli asintoti.

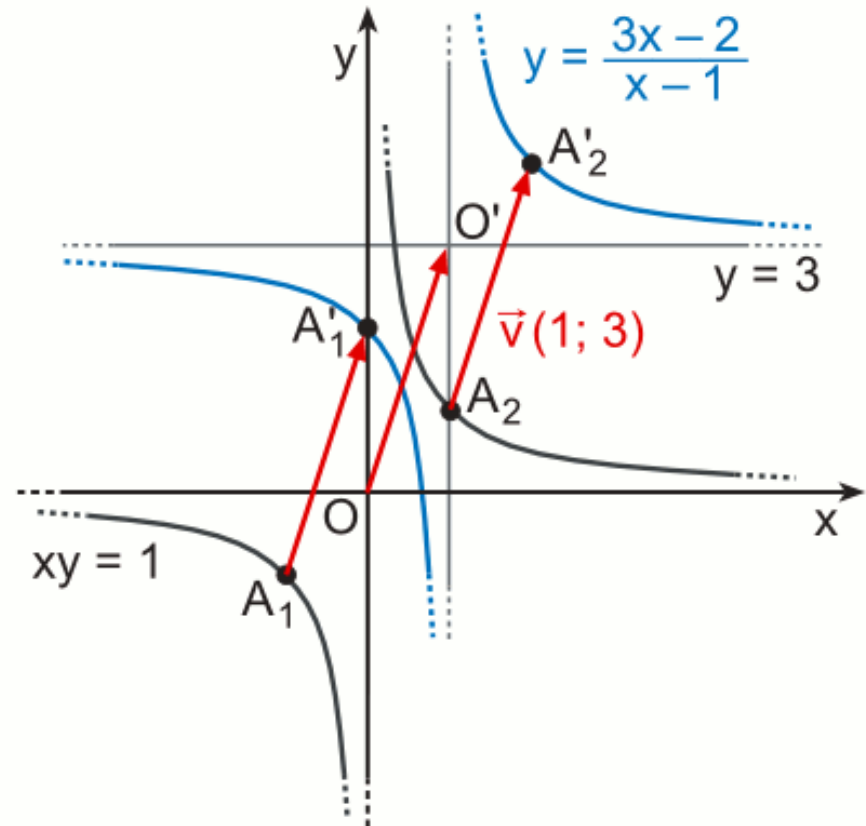


ESEMPIO

Determiniamo l'equazione della curva ottenuta applicando all'iperbole di equazione $xy=1$ la traslazione di vettore $\mathbf{v}=(1; 3)$.

Equazioni della traslazione:

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' - 3 \end{cases}$$



Sostituendo x e y nell'equazione dell'iperbole, otteniamo:

$$(x' - 1)(y' - 3) = 1$$

Ribattezzando x e y le variabili della nuova equazione e ricavando la y :

$$y = \frac{3x - 2}{x - 1}$$

In generale, ogni iperbole equilatera con gli asintoti paralleli agli assi ha un'equazione del tipo:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

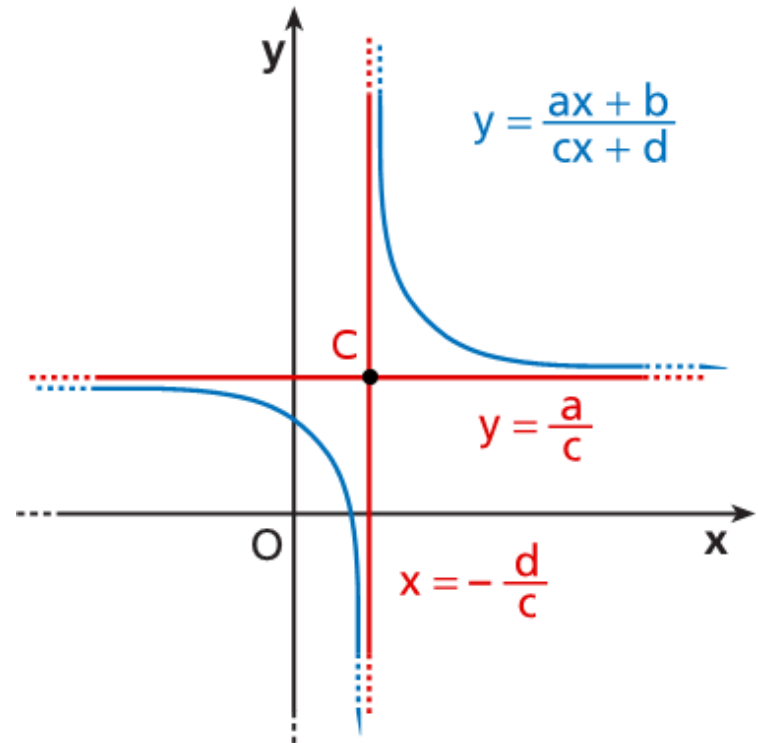
che definisce una funzione detta **funzione omografica**.

Equazioni degli asintoti:

$$x = -\frac{d}{c} \quad y = \frac{a}{c}$$

Coordinate del centro:

$$C = \left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c} \right)$$



Studiamo il grafico della funzione:

$$y = \frac{x-3}{x-2}$$

Asintoti:

$$x = -\frac{d}{c} = -\frac{-2}{1} = 2 \quad y = \frac{a}{c} = \frac{1}{1} = 1$$

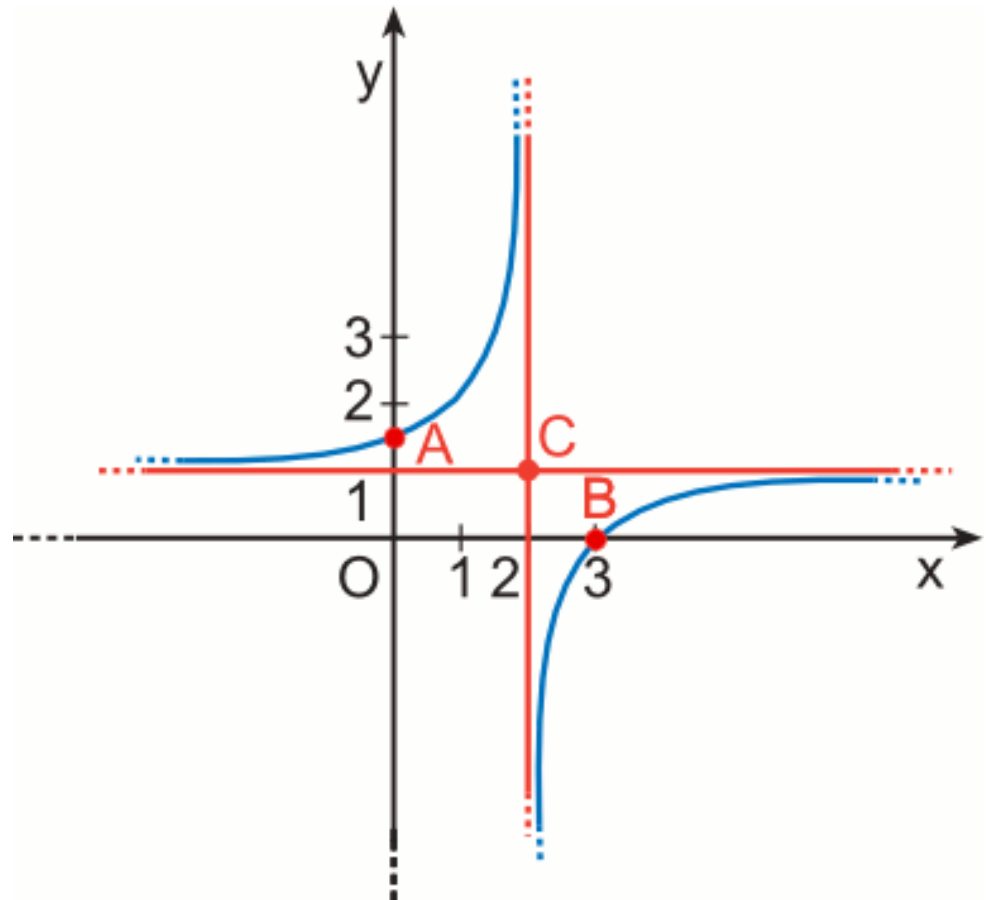
Centro di simmetria:

$$C = \left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right) = (2; 1)$$

Intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x-3}{x-2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow A = \left(0; \frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{x-3}{x-2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow B = (3; 0)$$



ESERCIZIO GUIDA

Disegniamo il grafico dell'iperbole equilatera di equazione $y = \frac{6x + 1}{2x - 4}$.

L'equazione $y = \frac{6x + 1}{2x - 4}$ è quella della funzione omografica $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, che rappresenta un'iperbole equilatera avente gli asintoti $x = -\frac{d}{c}$ e $y = \frac{a}{c}$ e le coordinate del centro di simmetria $C\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$.

In questo caso abbiamo: $a = 6$, $b = 1$, $c = 2$, $d = -4$.

Il centro è $C\left(-\frac{-4}{2}; \frac{6}{2}\right)$, ossia $C(2; 3)$.

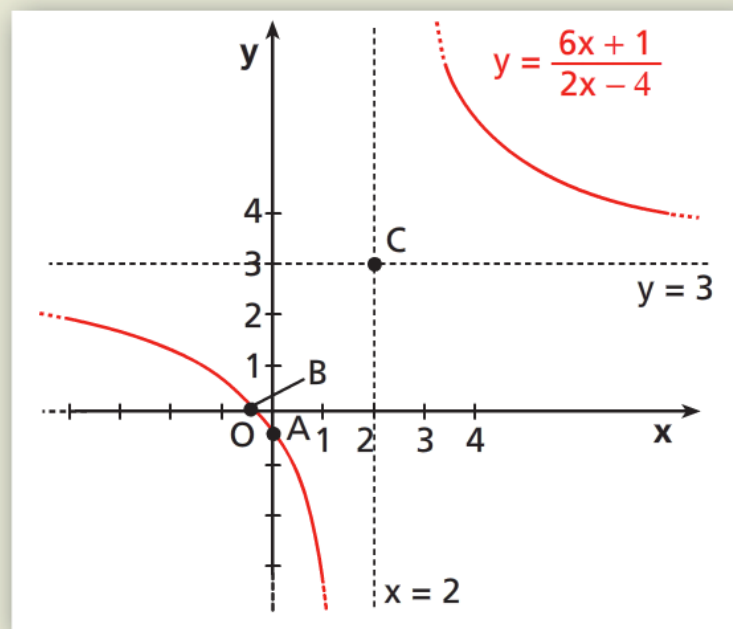
Le equazioni degli asintoti sono $x = 2$ e $y = 3$.

Per disegnare il grafico dell'iperbole determiniamo alcuni suoi punti, per esempio le intersezioni con gli assi:

$$\text{asse } y) \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{6x + 1}{2x - 4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow A\left(0; -\frac{1}{4}\right);$$

$$\text{asse } x) \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{6x + 1}{2x - 4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -\frac{1}{6} \end{cases} \rightarrow B\left(-\frac{1}{6}; 0\right).$$

Tracciamo il grafico dell'iperbole assegnata.



ESERCIZIO GUIDA

Studiamo il fascio di funzioni omografiche di equazione $y = \frac{(k-1)x+2}{kx-4}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ e troviamo il luogo dei centri di simmetria.

L'equazione $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ rappresenta una funzione omografica se $c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$.

- $c = 0$ per $k = 0$. L'equazione diventa:

$$y = \frac{-x+2}{-4} \rightarrow y = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}, \text{ che è l'equazione di una retta.}$$

- $ad - bc = 0$ se $-4(k-1) = 2k \rightarrow k = \frac{2}{3}$.

L'equazione diventa:

$$y = \frac{-\frac{1}{3}x+2}{\frac{2}{3}x-4} = \frac{-\frac{1}{3}x+2}{-2\left(-\frac{1}{3}x+2\right)} = -\frac{1}{2} \text{ (con } x \neq 6),$$

ossia l'equazione della retta $y = -\frac{1}{2}$ privata del punto $\left(6; -\frac{1}{2}\right)$.

- Per $k \neq 0 \wedge k \neq \frac{2}{3}$, abbiamo un fascio di funzioni omografiche.

Cerchiamo i **punti base** del fascio, scrivendo la sua equazione nella forma implicita ed evidenziando k :

$$(kx - 4)y = (k - 1)x + 2 \rightarrow ykx - 4y - kx + x - 2 = 0 \rightarrow k(yx - x) - 4y + x - 2 = 0.$$

Per ottenere le coordinate dei punti base, risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} yx - x = 0 \\ -4y + x - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(y - 1) = 0 \\ -4y + x - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \vee y = 1 \\ -4y + x - 2 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo nella seconda equazione:

per $x = 0$, $-4y - 2 = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{2}$, $A(0; -\frac{1}{2})$ è un punto base;

per $y = 1$, $-4 + x - 2 = 0 \rightarrow x = 6$, $B(6; 1)$ è un punto base.

- Il **centro di simmetria** delle funzioni omografiche è $C(\frac{4}{k}; \frac{k-1}{k})$ con $k \neq 0$ e $k \neq \frac{2}{3}$.
- Cerchiamo il **luogo dei centri di simmetria**, determinando k in funzione dell'ascissa e sostituendo nell'ordinata:

$$x = \frac{4}{k} \rightarrow k = \frac{4}{x}; y = \frac{k-1}{k} \rightarrow y = \frac{\frac{4}{x} - 1}{\frac{4}{x}} = \frac{\cancel{4} - x}{\frac{4}{\cancel{x}}} = 1 - \frac{x}{4} \text{ (con } x \neq 0\text{)}.$$

Il luogo cercato è la retta di equazione $y = 1 - \frac{x}{4}$, privata del punto $(0; 1)$ e privata inoltre del punto $(6; -\frac{1}{2})$ relativo a $k = \frac{2}{3}$, valore per cui non si ha un'iperbole ma una retta.