

Problemi di Fisica

cambiamenti di stato

PROBLEMA

Una massa di 2 kg di un solido non noto assorbe una quantità di calore pari a $418,6 \cdot 10^3$ J. Sapendo che il solido aveva raggiunto la temperatura di fusione e che a causa dell'energia assorbita liquefa totalmente, calcola il suo calore latente di fusione.

SOLUZIONE

La fusione totale del solido avviene a temperatura costante, e poiché è nota la quantità di calore che produce la fusione della massa di 2 kg, il calore latente di fusione viene calcolato nel seguente modo:

$$C_f = \frac{Q}{m} = \frac{418,6 \cdot 10^3}{2} = 209,3 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

Il valore ottenuto è il calore latente di fusione del rame.

PROBLEMA

Un blocco di ghiaccio di 3 kg alla temperatura di 0 °C fonde completamente. Quanto calore ha assorbito?

SOLUZIONE

Il passaggio di stato del ghiaccio dalla fase solida a quella liquida avviene a temperatura costante, e la quantità di calore necessaria che deve assorbire affinché ciò avvenga è data da:

$$Q = m \cdot C_f = 3 \cdot 332,4 \cdot 10^3 = 997,2 \cdot 10^3 \text{ J}$$

dove $C_f = 332,4 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$ è il calore latente di fusione del ghiaccio il cui valore è nella tabella del calore latente.

PROBLEMA

Una massa $m = 1,5$ kg di acqua a 100 °C passa allo stato di vapore assorbendo una quantità di calore $Q = 3384 \cdot 10^3$ J. Verifica che il valore del calore latente di vaporizzazione dell'acqua coincide con quello in tabella.

SOLUZIONE

La vaporizzazione, ossia il passaggio dallo stato liquido a quello aeriforme, avviene a temperatura costante, e ciò è possibile se l'acqua assorbe una certa quantità di calore. Nota questa quantità di calore, il calore latente di vaporizzazione si calcola nel seguente modo:

$$C_v = \frac{Q}{m} = \frac{3384 \cdot 10^3}{1,5} = 2256 \cdot 10^3 \text{ J} = 2256 \text{ kJ}$$

Il valore ottenuto coincide proprio con il calore latente di vaporizzazione dell'acqua contenuto nella tabella.

PROBLEMA

Una massa di acqua pari a 5 kg si trova alla temperatura di 20 °C. Calcola la quantità di calore necessaria per portare l'acqua a completa vaporizzazione.

SOLUZIONE

Per prima cosa dobbiamo somministrare all'acqua una quantità di calore tale da portarla alla temperatura di vaporizzazione, ossia a 100 °C:

$$Q_1 = mc\Delta t = 5 \cdot 4186 \cdot 80 = 1674400 \text{ J} = 1,7 \cdot 10^6 \text{ J}$$

dove $c = 4186 \text{ J/kg}\cdot^\circ\text{C}$ è il calore specifico dell'acqua.

In secondo luogo, dobbiamo somministrare altro calore per vaporizzare l'acqua:

$$Q_2 = m \cdot C_v = 5 \cdot 2256 \cdot 10^3 = 11,3 \cdot 10^6 \text{ J}$$

dove $C_v = 2256 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$ è il calore latente di vaporizzazione dell'acqua

In definitiva, la quantità di calore necessaria per portare l'acqua a completa vaporizzazione è:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 1,7 \cdot 10^6 + 11,3 \cdot 10^6 = 13 \cdot 10^6 \text{ J}$$

PROBLEMA

150 g di mercurio si trovano alla temperatura di -122,3 °C e vengono riscaldati, in modo tale che assorbono complessivamente 3500 J. Stabilisci se, dopo avere raggiunto la temperatura di fusione, la massa di mercurio passa totalmente allo stato liquido.

SOLUZIONE

Calcoliamo dapprima la quantità di calore necessaria per portare il mercurio fino alla temperatura di fusione:

$$Q_1 = mc\Delta t = 0,150 \cdot 138 \cdot (122,3 - 38,3) = 1739 \text{ J}$$

dove $c = 138 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ è il calore specifico del mercurio e $t = -38,3 \text{ }^\circ\text{C}$ è la temperatura di fusione del mercurio.

In secondo luogo calcoliamo la quantità di calore necessaria per portare il mercurio allo stato liquido (essendo nella fase di fusione, il passaggio di stato avviene a temperatura costante):

$$Q_2 = m \cdot C_f = 0,150 \cdot 11,7 \cdot 10^3 = 1755 \text{ J}$$

In definitiva, la massa di mercurio passa totalmente allo stato liquido perché la quantità di calore necessaria:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 1739 + 1755 = 3494 \text{ J}$$

per portare completamente allo stato liquido la massa di mercurio è inferiore a quella assorbita (3500 J).

PROBLEMA

A una massa di acqua pari a 175 g, appena giunta a ebollizione, vengono ulteriormente trasmessi 450 kJ di energia termica. Assumendo per il vapore d'acqua un calore specifico (a pressione costante) pari a 1988 J/kg·K, trova la temperatura finale del vapore

SOLUZIONE

Calcoliamo la quantità di energia termica necessaria per vaporizzare la massa d'acqua:

$$Q_V = m \cdot C_V = 0,175 \cdot 2256 \cdot 10^3 = 394800 \text{ J}$$

dove $C_V = 2256 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$ è il calore latente di vaporizzazione dell'acqua.

Poiché all'acqua, una volta raggiunta l'ebollizione (100 °C), è stata somministrata una quantità di energia termica pari a 450 J, una parte di questa energia ($Q_V = 394800 \text{ J}$) è stata utilizzata per il cambiamento di stato (liquido-vapore), mentre l'energia rimanente ($Q = 450000 - 394800 = 55200 \text{ J}$) farà aumentare la temperatura del vapore fino ad un valore finale dato da:

$$\Delta t = \frac{Q}{m \cdot c} = \frac{55200}{0,175 \cdot 1988} = 159^\circ\text{C} \Rightarrow t_{\text{fin}} = 100 + 159 = 259^\circ\text{C}$$

PROBLEMA

Un blocco di 12 kg di ghiaccio si trova alla temperatura di -15 °C. Quanto calore dobbiamo fornirgli per farlo evaporare completamente? (calore specifico del ghiaccio = 2090 J/kg·K; calore specifico dell'acqua = 4186 J/kg·K)

SOLUZIONE

Il ghiaccio per evaporare completamente, deve passare attraverso le seguenti fasi:

1. Dalla temperatura di - 15 °C alla temperatura di fusione di 0 °C
2. Cambiamento di stato solido-liquido a temperatura costante di 0 °C
3. L'acqua, ottenuta dalla fusione del ghiaccio, dalla temperatura di 0 °C alla temperatura di ebollizione di 100 °C
4. Cambiamento di stato liquido-vapore a temperatura costante di 100 °C

Durante ciascuna delle fasi descritte ci sarà una quantità di calore assorbita che calcoleremo nel seguente modo:

$$Q_1 = m \cdot c \cdot \Delta t = 12 \cdot 2090 \cdot 15 = 37 \cdot 10^4 \text{ J}$$

$$Q_2 = m \cdot C_f = 12 \cdot 332,4 \cdot 10^3 = 399 \cdot 10^4 \text{ J}$$

$$Q_3 = m \cdot c \cdot \Delta t = 12 \cdot 4186 \cdot 100 = 502 \cdot 10^4 \text{ J}$$

$$Q_4 = m \cdot C_V = 12 \cdot 2256 \cdot 10^3 = 2707 \cdot 10^4 \text{ J}$$

In definitiva, il ghiaccio per evaporare completamente dovrà assorbire una quantità di calore pari alla somma delle quantità di calore assorbite durante le quattro fasi descritte:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = (37 + 399 + 502 + 2707) \cdot 10^4 = 3645 \cdot 10^4 \text{ J}$$

PROBLEMA

Una sostanza con massa di 3 kg si trova alla temperatura di fusione. Cedendole $7,17 \cdot 10^4$ J fonde completamente. 1) Di quale sostanza si tratta? 2) Completato il processo di fusione, se vengono forniti altri 3456 J quale temperatura raggiunge la sostanza?

SOLUZIONE

Per capire di quale sostanza si tratta, basta calcolare il calore latente di fusione:

$$C_f = \frac{Q_f}{m} = \frac{7,17 \cdot 10^4}{3} = 23,9 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

Il valore trovato corrisponde al calore latente di fusione del piombo.

La sostanza, dopo aver completato il processo di fusione, poiché assorbe altra energia termica, raggiungerà la seguente temperatura finale:

$$\Delta t = \frac{Q}{m \cdot c} = \frac{3456}{3 \cdot 128} = 9 \Rightarrow t_{\text{fin}} = t_f + \Delta t = 327,3 + 9 = 336,3^\circ\text{C}$$

dove $c = 128 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ è il calore specifico del piombo e $t_f = 327,3^\circ\text{C}$ è la temperatura di fusione del piombo.

PROBLEMA

Calcolare la quantità di calore che si sviluppa quando 10,0 g di vapore a 100°C vengono raffreddati fino alla temperatura di $15,0^\circ\text{C}$. (Calore latente di condensazione del vapore acqueo: 537 kcal/kg ; calore specifico dell'acqua: $c = 1,00 \text{ kcal/kg}\cdot^\circ\text{C}$)

SOLUZIONE

La quantità di calore Q sviluppata dal raffreddamento del vapore, è la somma della quantità di calore Q_1 necessaria a condensare il vapore e la quantità di calore Q_2 necessaria a portare il vapore condensato da 100°C a $15,0^\circ\text{C}$.

Cioè:

$$Q = Q_1 + Q_2 = mL_v + mc(t_v - t) = 0,010 \cdot 537 + 0,010 \cdot 1,00 \cdot (100 - 15,0) = 6,22 \text{ kcal}$$

PROBLEMA

Una vasca di superficie pari a $10,0 \text{ m}^2$ è ricoperta di ghiaccio. Calcolare la quantità di ghiaccio che si scioglie ogni ora, sapendo che per ogni cm^3 di superficie assorbe ogni minuto $0,300 \text{ cal}$ di calore irraggiato dal Sole. (Calore latente di fusione del ghiaccio: $79,7 \text{ kcal/kg}$; calore specifico dell'acqua: $c = 1,00 \text{ kcal/kg}\cdot^\circ\text{C}$)

SOLUZIONE

La quantità di calore assorbita dalla superficie di $10,0 \text{ m}^2$ ricoperta di ghiaccio ogni minuto è pari a:

$$Q = 0,300 \cdot 10,0 \cdot 10^4 = 30000 \text{ cal}$$

pertanto in un'ora assorbirà:

$$Q = 30000 \cdot 60 = 1,8 \cdot 10^6 \text{ cal}$$

La massa di ghiaccio che si scioglie ogni ora si ottiene come:

$$m = \frac{Q}{L_f} = \frac{1,8 \cdot 10^6}{79,7 \cdot 10^3} = 22,6 \text{ kg}$$

PROBLEMA

Un pezzo di ghiaccio a $t_1 = 0 \text{ °C}$ viene immerso in $m_2 = 5,0 \text{ kg}$ di acqua a $t_2 = 40 \text{ °C}$. Calcolare la massa di ghiaccio fuso, nell'ipotesi che, in assenza di dispersioni, la temperatura di equilibrio del sistema sia pari a $t_e = 20 \text{ °C}$. (Calore latente di fusione del ghiaccio: $79,7 \text{ kcal/kg}$; calore specifico dell'acqua: $c = 1,00 \text{ kcal/kg} \cdot \text{°C}$)

SOLUZIONE

Poiché il sistema ghiaccio fuso + acqua raggiunge la temperatura di equilibrio di 20 °C , ciò significa che il ghiaccio dovrà assorbire dall'acqua una quantità di calore $Q_1 = m_1 L_f$ necessaria per fonderlo ed una quantità di calore $Q_2 = m_2 c \Delta t$ necessaria per portare il ghiaccio fuso alla temperatura di equilibrio, ossia:

$$Q_{\text{assorbito}} = Q_{\text{ceduto}} \Rightarrow Q_1 + Q_2 = Q$$

$$m_1 L_f + m_1 c \Delta t_1 = m_2 c \Delta t_2$$

L'equazione ottenuta contiene l'incognita m_1 massa di ghiaccio fuso, per cui risolta otteniamo:

$$m_1 = \frac{m_2 c \Delta t_2}{L_f + c \Delta t_1} = \frac{5,0 \cdot 1,00 \cdot 20}{79,7 + 1,00 \cdot 20} = 1 \text{ kg}$$

dove:

$\Delta t = (t_2 - t_e) = 40 - 20 = 20 \text{ °C}$ variazione di temperatura dell'acqua

$\Delta t_1 = (t_e - t_1) = 20 - 0 = 20 \text{ °C}$ variazione di temperatura del ghiaccio fuso

PROBLEMA

In un contenitore si trovano 500 g di una bibita (calore specifico = 4000 J/kg·K) alla temperatura di 18 °C. Si mettono 4 cubetti di ghiaccio a 0 °C da 20 g ciascuno che si sciolgono raffreddando la bibita. 1) Alla fine del processo di fusione, qual è la temperatura della bibita? 2) Qual è la temperatura finale d'equilibrio?

SOLUZIONE

1. Nell'ipotesi che il contenitore non assorba calore, gli scambi energetici avverranno solo tra la bibita e il ghiaccio, tenendo presente, però, che il ghiaccio assorbirà una quantità di calore necessaria a fonderlo, per cui:

$$Q_{\text{ceduto}} = Q_{\text{assorbito}}$$

$$m_1 \cdot c_1 \cdot (t_1 - t_{\text{fin}}) = m_2 \cdot C_f$$

L'equazione ottenuta contiene l'incognita temperatura della bibita (t_{fin}) alla fine del processo di fusione del ghiaccio, che calcoliamo come:

$$\begin{aligned} 0,5 \cdot 4000 \cdot (18 - x) &= 0,08 \cdot 332,4 \cdot 10^3 \\ 36000 - 2000x &= 26592 \Rightarrow 2000x = 9408 \\ x &= \frac{9408}{2000} = 4,7^\circ\text{C} \end{aligned}$$

2. Per calcolare la temperatura di equilibrio finale del sistema, dobbiamo tener conto anche dell'energia termica assorbita dall'acqua ottenuta dalla fusione del ghiaccio, per cui:

$$Q_{\text{ceduto}} = Q_{\text{assorbito}}$$

$$m_1 \cdot c_1 \cdot (t_i - t_e) = m_2 \cdot C_f + m_2 \cdot c_a \cdot (t_{\text{eq}} - t_i)$$

L'equazione ottenuta contiene l'incognita temperatura finale di equilibrio t_{eq} :

$$\begin{aligned} 0,5 \cdot 4000 \cdot (18 - x) &= 0,08 \cdot 332,4 \cdot 10^3 + 0,080 \cdot 4186 \cdot (x - 0) \\ 36000 - 2000x &= 26592 + 335x \Rightarrow 2335x = 9408 \\ x &= \frac{9408}{2335} = 4^\circ\text{C} \end{aligned}$$

PROBLEMA

Un recipiente perfettamente isolato e di capacità termica trascurabile contiene $m_1 = 5,00$ kg di acqua ($c_a = 1,00$ kcal/kg·°C) alla temperatura di 20,0 °C. Se si introducono $m_2 = 400$ g di ghiaccio ($c_g = 0,487$ kcal/kg·°C; $L_f = 79,7$ kcal/kg) a 0 °C e altri $m_3 = 500$ g a - 18,0 °C qual è la temperatura finale della miscela?

SOLUZIONE

Come primo passo dobbiamo controllare se lo stato finale sarà tutto ghiaccio, una miscela di acqua e ghiaccio alla temperatura di 0 °C, o tutta acqua. Per fondere la massa $m_2 = 0,400$ kg di ghiaccio alla temperatura di 0 °C è necessaria una quantità di calore Q_2 pari a:

$$Q_2 = m_2 L_f = 0,400 \cdot 79,7 = 31,9 \text{ kcal}$$

La massa $m_3 = 0,500$ kg di ghiaccio, invece, prima che possa cominciare a sciogliersi, la sua temperatura deve salire da - 18,0 °C a 0 °C, e per tale scopo ha bisogno della seguente quantità di calore Q_3 :

$$Q_3 = m_3 c_g \Delta t_2 = 0,500 \cdot 0,487 \cdot 18 = 4,38 \text{ kCal}$$

Mentre, per fondersi, la massa m_3 di ghiaccio deve assorbire, durante la fase di fusione, la seguente quantità di calore:

$$Q_4 = m_3 L_f = 0,500 \cdot 79,7 = 39,9 \text{ kcal}$$

Dunque, la quantità totale di calore che il ghiaccio deve assorbire per trasformarsi tutto in acqua è:

$$Q = Q_2 + Q_3 + Q_4 = 31,9 + 4,38 + 39,9 = 76,2$$

Invece, la massa $m_1 = 5,00$ kg di acqua può cedere, al massimo, passando dalla temperatura di 20,0 °C alla temperatura di 0 °C, una certa quantità Q_1 di calore data da:

$$Q_1 = m_1 c_a \Delta t_1 = 5,00 \cdot 1,00 \cdot 20 = 100 \text{ kCal}$$

Ebbene, poiché l'acqua, raffreddandosi, può cedere una quantità di calore $Q_1 > Q$, il ghiaccio fonderà completamente e la miscela finale sarà tutta acqua a una temperatura t_e intermedia fra 0 °C e 20,0 °C. Tale temperatura di equilibrio si ottiene dal bilancio dell'energia:

$$Q_{\text{ceduto}} = Q_{\text{assorbito}}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{calore ceduto dalla massa } m_1 \\ \text{di acqua per diminuire la sua} \\ \text{temperatura da } t_1 = 20^\circ\text{C alla} \\ \text{temperatura di equilibrio } t_e \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{calore assorbito dal} \\ \text{ghiaccio per trasformarsi} \\ \text{in una massa } m_2 + m_3 \\ \text{di acqua a } 0^\circ\text{C} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{calore assorbito dalla} \\ \text{massa } m_1 + m_2 \text{ di acqua} \\ \text{per aumentare la sua} \\ \text{temperatura da } 0^\circ\text{C a } t_e \end{array} \right)$$

cioè:

$$m_1 c_a (t_1 - t_e) = Q + (m_2 + m_3) c_a (t_e - 0)$$

da cui segue:

$$t_e = \frac{m_1 c_a t_1 - Q}{(m_1 + m_2 + m_3) c_a} = \frac{5,00 \cdot 1,00 \cdot 20,0 - 76,2}{(5,00 + 0,400 + 0,500) \cdot 1,00} = 4,03^\circ\text{C}$$

PROBLEMA

Calcolare la temperatura di equilibrio di una massa d'acqua $m_1 = 500$ g che, inizialmente a 300 K, riesce a fondere completamente una massa $m_2 = 100$ g di ghiaccio.

SOLUZIONE

Nell'ipotesi che la quantità di calore ceduta dall'acqua più calda sia interamente assorbita dal ghiaccio per fondere e successivamente dall'acqua derivante dal ghiaccio fuso (acqua calda + ghiaccio + ghiaccio fuso = sistema isolato), si deve avere

$$Q_{\text{ceduto}} = Q_{\text{assorbito}}$$

Sostituiamo alle quantità di calore scambiate le loro espressioni matematiche (le variazioni di temperatura Δt vanno prese positive) e dall'equazione ottenuta ricaviamo la temperatura di equilibrio:

$$m_1 c_1 (T_{1i} - T_{\text{eq}}) = m_2 L_f + m_2 c_2 (T_{\text{eq}} - T_{2i})$$

$$627900 - 2093T_{\text{eq}} = 33520 + 418,6T_{\text{eq}} - 114278$$

$$2512T_{\text{eq}} = 708658 \Rightarrow T_{\text{eq}} = \frac{708658}{2512} = 282 \text{ K}$$

PROBLEMA

Un oggetto di alluminio a 25 °C è immerso in una miscela di 50 cl di acqua e 50 g di ghiaccio e provoca la fusione completa del ghiaccio e l'innalzamento della temperatura di tutta la massa d'acqua di 1°C. Calcolare la capacità termica dell'oggetto e la sua massa.

SOLUZIONE

Nell'ipotesi che la quantità di calore dall'oggetto di alluminio sia interamente assorbita dalla miscela di acqua e ghiaccio (oggetto + miscela = sistema isolato), si deve avere:

$$Q_{\text{ceduto}} = Q_{\text{assorbito}}$$

Sostituiamo alle quantità di calore scambiate le loro espressioni matematiche e dall'equazione ottenuta ricaviamo la capacità termica dell'oggetto:

$$C \Delta T_1 = m_2 c_2 \Delta T_2 + m_3 L_f \Rightarrow C = \frac{0,55 \cdot 4186 \cdot 1 + 0,05 \cdot 335,2 \cdot 10^3}{24} = 794 \text{ J/K}$$

La massa dell'oggetto la ricaviamo dalla definizione della capacità termica:

$$C = mc \Rightarrow m = \frac{C}{c} = \frac{794}{900} = 0,883 \text{ kg}$$

PROBLEMA

Una massa di 250 g di ghiaccio è posta in un recipiente contenente 300 g d'acqua a 300 K di temperatura. Supponendo che il contenitore sia perfettamente isolante, riuscirà il ghiaccio a sciogliersi completamente?

■ MODELLO FISICO

Nell'ipotesi che il contenitore sia isolato dall'esterno, gli scambi di calore avvengono esclusivamente tra il ghiaccio alla temperatura di 273 K e l'acqua a 300 K. Per il principio zero della termodinamica, il corpo a temperatura più alta cede calore al corpo a temperatura più bassa, fino a raggiungere l'equilibrio termico, ossia la stessa temperatura. Il ghiaccio e l'acqua si trovano in stati di aggregazione differenti; parte del calore ceduto dall'acqua è utilizzato per sciogliere parzialmente o totalmente la massa di ghiaccio, mantenendo costante la temperatura. Solo dopo la fusione di tutta la massa di ghiaccio, l'eventuale calore residuo è disponibile per elevare la temperatura dell'acqua ottenuta dalla fusione del ghiaccio.

■ LEGGI ED EQUAZIONI

L'equazione degli scambi di calore prevede che il calore ceduto da un corpo sia uguale al calore assorbito dall'altro corpo. Indicando con Q_c il calore ceduto dall'acqua a 300 K, Q_f il calore latente di fusione del ghiaccio e Q_a il calore assorbito dall'acqua ottenuta dalla fusione completa del ghiaccio, si può scrivere:

$$Q_c = Q_f + Q_a$$

dove:

$$Q_c = m_a c_a (300 - T^*) \quad Q_f = m_g L_f \quad Q_a = m_g c_a (T^* - 273)$$

con m_g massa del ghiaccio, m_a massa dell'acqua, c_a calore specifico dell'acqua, L_f calore latente di fusione e T^* temperatura finale di equilibrio. Inoltre, è bene ricordare che la massa dell'acqua è esprimibile come prodotto della densità per il volume: $m_a = \rho_a V$.

■ SOLUZIONE ALGEBRICA

Sostituendo le rispettive espressioni del calore ceduto e assorbito si ottiene:

$$m_a c_a (300 - T^*) = m_g L_f + m_g c_a (T^* - 273)$$

Risolviamo l'equazione rispetto alla temperatura finale T^* :

$$T^* = \frac{m_a c_a \cdot 300 + m_g c_a \cdot 273 - m_g L_f}{(m_a + m_g) c_a}$$

■ SOLUZIONE NUMERICA

Tenendo conto che 1 litro d'acqua è equivalente alla massa di 1 kg, possiamo calcolare la temperatura finale:

$$T^* = \frac{0,30 \text{ kg} \cdot 4186 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} \cdot 300 \text{ K} + 0,25 \text{ kg} \cdot 4186 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} \cdot 273 \text{ K} - 0,25 \text{ kg} \cdot 3,34 \cdot 10^5 \text{ J/kg}}{(0,25 + 0,30) \text{ kg} \cdot 4186 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}} \cong 251,5 \text{ K}$$

La temperatura trovata è numericamente inferiore a quella del ghiaccio e quindi inaccettabile; fisicamente ciò significa che il calore ceduto dall'acqua non è sufficiente a fondere completamente il ghiaccio.

Si può quindi solo calcolare la massa d'acqua ottenuta dalla fusione parziale del ghiaccio con un cambiamento di fase che avviene alla temperatura costante di 273 K. La massa d'acqua m_a cede quindi calore diminuendo la propria temperatura da 300 a 273 K, fondendo la massa incognita m_x di ghiaccio; m_x si può calcolare facilmente impostando la seguente equazione:

$$m_a c_a (300 - 273) = m_x L_f$$

$$m_x = \frac{m_a c_a \cdot 27}{L_f} = \frac{0,3 \text{ kg} \cdot 4186 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} \cdot 27 \text{ K}}{3,34 \cdot 10^5 \text{ J/kg}} = 0,101 \text{ kg}$$

PROBLEMA

Determinare la temperatura finale t della miscela, quando una massa $m_1 = 100$ g di ghiaccio (calore di fusione $c_f = 80$ cal/g) a temperatura $t_1 = 0$ °C è mescolata con una massa $m_2 = 500$ g di acqua a temperatura $t_2 = 50$ °C, supponendo nulle le dispersioni di calore con l'esterno.

SOLUZIONE

Occorre innanzitutto far fondere il ghiaccio, per cui la quantità di calore necessaria è data da:

$$Q_f = m_1 c_f = 100 \cdot 80 = 8000 \text{ cal}$$

La quantità m_1 di acqua appena formata deve poi essere portata alla temperatura t fornendole una quantità di calore

$$Q_1 = m_1 c (t - t_1) \quad \text{dove } c = 1 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C} \text{ è il calore specifico dell'acqua}$$

La massa m_2 di acqua cede una quantità di calore

$$Q_2 = m_2 c (t_2 - t)$$

Ma Q_2 è la quantità di calore ceduta al ghiaccio per farlo sciogliere e all'acqua formata per portarla alla temperatura t :

$$Q_2 = Q_1 + Q_f$$

Per cui:

$$m_2 c (t_2 - t) = m_1 c (t - t_1) + m_1 c_f$$

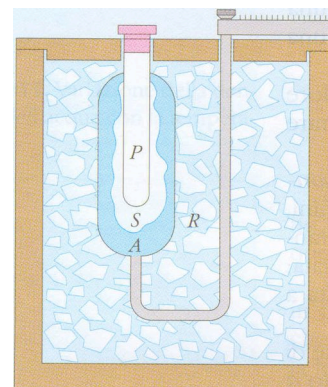
L'espressione ottenuta è un'equazione nell'incognita t , che risolta ci dà la temperatura finale della miscela:

$$t = \frac{c(m_2 t_2 + m_1 t_1) - m_1 c_f}{c(m_1 + m_2)} = \frac{1 \cdot (500 \cdot 50 + 100 \cdot 0) - 100 \cdot 80}{1 \cdot (100 + 500)} = 28,33^\circ\text{C}$$

PROBLEMA

Nella provetta di un calorimetro di Bunsen si introducono 5,00 g di mercurio allo stato solido, alla temperatura di fusione ($-39,0$ °C). A causa della sua bassa temperatura, il mercurio assorbe calore trasformando in ghiaccio una parte dell'acqua che circonda la provetta.

- Calcolare, a equilibrio termico raggiunto, la massa e il volume del ghiaccio che si forma. (calore specifico del mercurio: $c_{\text{Hg}} = 0,0332$ cal/g·°C; calore latente di fusione del mercurio: $L_{\text{Hg}} = 2,80$ cal/g; densità del ghiaccio a 0°C: $\rho = 0,917$ g/cm³; calore latente di solidificazione dell'acqua: $L_f = 79,7$ cal/g)



SOLUZIONE

La massa di mercurio, rimanendo costantemente alla temperatura di fusione di $-39,0\text{ }^{\circ}\text{C}$, si fonde assorbendo, dall'acqua che circonda la provetta, la seguente quantità di calore:

$$Q_1 = m_{\text{Hg}} \cdot L_{\text{Hg}} = 5,00 \cdot 2,80 = 14,0 \text{ cal}$$

Solo una parte dell'acqua contenuta nel calorimetro si congela, per cui l'equilibrio termico del sistema si stabilisce alla temperatura di $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Pertanto, il calore assorbito dal mercurio per aumentare la sua temperatura da $-39,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ è:

$$Q_2 = m_{\text{Hg}} \cdot c_{\text{Hg}} \cdot \Delta t = 5,00 \cdot 0,0332 \cdot 39,0 = 6,47 \text{ cal}$$

Alla fine, il calore totale assorbito dal mercurio, e quindi sottratto all'acqua, è:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 14,0 + 6,47 = 20,5 \text{ cal}$$

e quindi la massa di ghiaccio che si forma è:

$$m = \frac{Q}{L_f} = \frac{20,5}{79,7} = 0,257 \text{ g}$$

mentre il volume corrispondente è:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{0,257}{0,917} = 0,280 \text{ cm}^3$$

PROBLEMA

Un recipiente a tenuta contiene $0,400\text{ kg}$ di acqua e $0,100\text{ kg}$ di ghiaccio alla temperatura di equilibrio di $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Se introduciamo in esso $0,150\text{ kg}$ di vapore acqueo a $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, quale sarà la temperatura finale del sistema e la composizione, in termini di masse, delle tre fasi di aggregazione? (calore latente di fusione del ghiaccio: $L_f = 79,7\text{ kcal/kg}$; calore latente di condensazione del vapore acqueo: $L_v = 537\text{ kcal/kg}$; calore specifico dell'acqua: $c = 1,00\text{ kcal/kg}\cdot^{\circ}\text{C}$)

SOLUZIONE

Il calore che la massa $m_1 = 0,100\text{ kg}$ di ghiaccio assorbe per trasformarsi in acqua a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ è:

$$Q_1 = m_1 L_f = 0,100 \cdot 79,7 = 7,97 \text{ kcal}$$

Invece, il calore che la massa $m_2 = 0,150\text{ kg}$ di vapore acqueo cede per trasformarsi in acqua a $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ è:

$$Q_2 = m_2 L_v = 0,150 \cdot 537 = 80,6 \text{ kcal}$$

Dunque il calore Q_2 essendo maggiore di Q_1 è sufficiente a sciogliere tutto il ghiaccio. Si può concludere pertanto che nello stato finale non ci sarà ghiaccio e quindi il sistema, all'equilibrio, si troverà a una temperatura maggiore di $0\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Per stabilire se nello stato finale tutto il vapore sarà condensato, vediamo quanto calore Q_3 occorre per portare a $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ la massa totale $m_3 = 0,400 + 0,100 = 0,500\text{ kg}$ che, dopo lo scioglimento del ghiaccio, si trova alla temperatura di $0\text{ }^{\circ}\text{C}$:

$$Q_3 = m_3 c \Delta t = 0,500 \cdot 1,00 \cdot 100 = 50,0\text{ kcal}$$

Poiché il calore Q_2 che il vapore può cedere nel processo di condensazione è maggiore del calore totale $Q = Q_1 + Q_3 = 7,97 + 50,0 = 58,0\text{ kcal}$ che occorre per sciogliere il ghiaccio e per portare la massa d'acqua risultante alla temperatura di $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, nello stato finale il vapore non sarà completamente condensato.

Il sistema sarà costituito dunque da una miscela di acqua e vapore in equilibrio alla temperatura di $100\text{ }^{\circ}\text{C}$.

La massa m di vapore che passa allo stato liquido è data da:

$$m = \frac{Q}{L_v} = \frac{58,0}{537} = 0,108\text{ kg}$$

Alla fine si avranno, pertanto, una massa di vapore pari a:

$$M_{\text{vapore}} = m_2 - m = 0,150 - 0,108 = 0,0420\text{ kg} = 42,0\text{ g}$$

e una massa di acqua pari a:

$$M_{\text{acqua}} = m_3 + m = 0,500 + 0,108 = 0,608\text{ kg} = 608\text{ g}$$

PROBLEMA

Un recipiente, perfettamente isolato e di capacità termica trascurabile, è diviso in due parti da un setto conduttore di calore. Da una parte si mette una massa $m_1 = 0,100\text{ kg}$ di ghiaccio alla temperatura $t_1 = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ e dall'altra una massa $m_2 = 0,400\text{ kg}$ di olio alla temperatura $t_2 = 70,0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Calcolare:

1. la temperatura dell'olio appena il ghiaccio si è trasformato completamente in acqua;
2. la temperatura di equilibrio del sistema acqua-olio.

(Calore specifico dell'olio: $c = 0,433\text{ kcal/kg} \cdot ^{\circ}\text{C}$; calore latente di fusione del ghiaccio: $L_f = 79,7\text{ kcal/kg}$; calore specifico dell'acqua: $c = 1,00\text{ kcal/kg} \cdot ^{\circ}\text{C}$)

SOLUZIONE

1. Il ghiaccio, inizialmente a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, per trasformarsi integralmente in acqua assorbe, attraverso il setto conduttore, la quantità di calore:

$$Q_1 = m_1 \cdot L_f = 0,100 \cdot 79,7 = 7,97\text{ kcal}$$

che è uguale al calore Q_2 ceduto dall'olio che, dalla temperatura $t_2 = 70,0 \text{ }^\circ\text{C}$, si porta alla temperatura t da calcolare:

$$Q_2 = m_2 c(t_2 - t)$$

Si ha così la seguente equazione nell'incognita t , che rappresenta la temperatura raggiunta dall'olio appena il ghiaccio si è completamente fuso:

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow Q_1 = m_2 c(t_2 - t)$$

$$t = t_2 - \frac{Q_1}{m_2 c} = 70,0 - \frac{7,79}{0,400 \cdot 0,433} = 25,0 \text{ }^\circ\text{C}$$

2. La temperatura t_e di equilibrio del sistema sarà intermedia fra la temperatura $t_1 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ della massa m_1 che da ghiaccio si è trasformata in acqua e la temperatura $t = 25,0 \text{ }^\circ\text{C}$ alla quale l'olio si trova al termine di tale trasformazione.
Il calore assorbito dall'acqua per portarsi alla temperatura t_e è:

$$Q_{\text{assorbito}} = m_1 c_a(t_e - t_1)$$

mentre quello ceduto dall'olio per portarsi alla stessa temperatura è:

$$Q_{\text{ceduto}} = m_2 c(t - t_e)$$

Poiché il sistema è isolato, abbiamo:

$$Q_{\text{assorbito}} = Q_{\text{ceduto}}$$

$$m_1 c_a(t_e - t_1) = m_2 c(t - t_e) \Rightarrow m_1 c_a t_e - m_1 c_a t_1 = m_2 c t - m_2 c t_e$$

da cui:

$$t_e = \frac{m_1 c_a t_1 + m_2 c t}{m_1 c_a + m_2 c} = \frac{0,100 \cdot 1,00 \cdot 0 + 0,400 \cdot 0,433 \cdot 25,0}{0,100 \cdot 1,00 + 0,400 \cdot 0,433} = 15,8 \text{ }^\circ\text{C}$$

PROBLEMA

Da quale altezza h deve cadere un corpo di piombo affinché, giungendo a terra, possa passare dallo stato solido allo stato aeriforme, supponendo che il corpo si trovi inizialmente alla temperatura $t = 27 \text{ }^\circ\text{C}$ e che tutta l'energia meccanica si trasformi in calore completamente assorbito dal corpo? (Dati relativi al piombo: calore specifico allo stato solido: $c_1 = 0,031 \text{ kcal/kg}\cdot^\circ\text{C}$; calore specifico allo stato fuso: $c_2 = 0,034 \text{ kcal/kg}\cdot^\circ\text{C}$; temperatura di fusione: $t_f = 327^\circ\text{C}$; calore latente di fusione: $L_f = 6,0 \text{ kcal/kg}$; temperatura di ebollizione: $t_v = 1750 \text{ }^\circ\text{C}$; calore latente di vaporizzazione: $L_v = 208 \text{ kcal/kg}$)

SOLUZIONE

Calcoliamo il calore che occorre al corpo di massa m (non nota) per compiere tutte le trasformazioni che lo portano dalla fase solida alla temperatura di fusione t_f , alla fase di vapore, alla temperatura di vaporizzazione t_v . Tali trasformazioni sono:

- il riscaldamento del corpo allo stato solido dalla temperatura t alla temperatura t_f richiede una quantità di calore pari a:

$$Q_1 = mc_1(t_f - t)$$

- per la fusione serve la seguente quantità di calore:

$$Q_2 = mL_f$$

- il riscaldamento del corpo allo stato liquido dalla temperatura t_f alla temperatura t_v , richiede una quantità di calore pari a:

$$Q_3 = mc_2(t_v - t_f)$$

- la vaporizzazione, con calore assorbito dato da:

$$Q_4 = mL_v$$

Pertanto:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$$

Il corpo, una volta giunto a terra, trasforma tutta la sua energia meccanica in calore, per cui, per il principio di conservazione dell'energia totale:

$$E = Q \Rightarrow mgh \Rightarrow m[c_1(t_f - t) + L_f + c_2(t_v - t_f) + L_v]$$

che rappresenta un'equazione nella sola incognita h , in quanto, essendo il calore totale Q , necessario per vaporizzare il corpo, proporzionale alla sua massa, così come l'energia meccanica del corpo, h non dipende dalla massa.

Risolvendo la (1) rispetto ad h otteniamo:

$$h = \frac{c_1(t_f - t) + L_f + c_2(t_v - t_f) + L_v}{g}$$

e sostituendo i dati si ha:

$$h = \frac{0,031 \cdot 10^3 \cdot (327 - 27) + 6,0 \cdot 10^3 + 0,034 \cdot 10^3 \cdot (1750 - 327) + 208 \cdot 10^3}{9,81} = 27694 \text{ m}$$

PROBLEMA

Un laser, che emette una potenza $P=1,0 \cdot 10^9 \text{ W}$, spara $N=10$ impulsi, ognuno della durata $\tau=1,0 \cdot 10^{-8} \text{ s}$, contro una certa quantità di acqua che si trova a $t = 30 \text{ }^\circ\text{C}$. Sapendo che i dieci impulsi del laser sono proprio quelli necessari a far evaporare completamente l'acqua, determinare la sua massa. (Dati relativi all'acqua: calore latente di vaporizzazione: $L_v = 537 \text{ kcal/kg}$; calore specifico dell'acqua: $c = 1,00 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C}$)

SOLUZIONE

L'acqua per evaporare completamente deve prima assorbire una quantità di energia $Q_1 = mc\Delta t$ necessaria per portarla all'ebollizione e poi una quantità di energia $Q_2 = mL_v$ necessaria per il cambiamento di fase. Naturalmente, tutta l'energia necessaria per far evaporare completamente l'acqua sarà quella ceduta dai dieci impulsi del laser che colpiscono la massa d'acqua.

In formula:

$$Q_{ceduta} = Q_{assorbita} \quad (1)$$

Per definizione l'energia è il prodotto della potenza per il tempo, per cui nel nostro caso, poiché il laser emette dieci impulsi, si ha:

$$Q_{ceduta} = N \cdot P \cdot \tau$$

Pertanto la (1) diventa:

$$N \cdot P \cdot \tau = mc\Delta t + mL_v$$

da cui è possibile ricavare la massa di acqua che evapora completamente:

$$m = \frac{N \cdot P \cdot \tau}{c\Delta t + L_v} = \frac{10 \cdot 1,0 \cdot 10^9 \cdot 10^{-8}}{1,00 \cdot 10^3 \cdot 4,186 \cdot 70 + 537 \cdot 10^3 \cdot 4,186} = 39 \cdot 10^{-6} \text{ kg} = 39 \cdot 10^{-3} \text{ g} = 39 \text{ mg}$$

ATTENZIONE ALL'USO DELLE UNITA' DI MISURA

Poiché la potenza è espressa in watt (W), allora la quantità di calore deve essere espressa in joule (J), in quanto stiamo utilizzando il Sistema Internazionale di misura (S.I.).

Tenendo presente che:

$$1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J}$$

allora:

$$1,00 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C} = 1,00 \cdot 10^3 \text{ cal/kg} \cdot ^\circ\text{C} = 1,00 \cdot 10^3 \cdot 4,186 \text{ J}$$

$$537 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C} = 537 \cdot 10^3 \text{ cal/kg} \cdot ^\circ\text{C} = 537 \cdot 10^3 \cdot 4,186 \text{ J}$$

PROBLEMA

Per raffreddare 500 cm^3 di acqua inizialmente a 28°C si utilizzano $m_1 = 60,0 \text{ g}$ di ghiaccio a $t_1 = -18,0^\circ\text{C}$ direttamente immersi nell'acqua. Trascurando ogni forma di dispersione, calcolare la temperatura dell'acqua a equilibrio raggiunto. (calore latente di fusione del ghiaccio: $L_f = 79,7 \text{ cal/g}$; calore specifico del ghiaccio: $0,466 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$; calore specifico dell'acqua: $c = 1,00 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$; densità dell'acqua: 1 g/cm^3)

SOLUZIONE

Innanzitutto calcoliamo, dalla definizione di densità, la massa d'acqua che deve essere raffreddata:

$$m = \rho \cdot V = 1 \cdot 500 = 500 \text{ g}$$

Verifichiamo, adesso, se il calore ceduto dall'acqua è sufficiente a fondere il ghiaccio. La quantità di calore necessaria a portare il ghiaccio da $-18,0 \text{ }^{\circ}\text{C}$ a $0 \text{ }^{\circ}\text{C}$ è:

$$Q_1 = m_1 c_1 \Delta t_1 = 60,0 \cdot 0,466 \cdot 18 = 503 \text{ cal}$$

La quantità di calore necessaria a fondere il ghiaccio è pari a:

$$Q_2 = m_1 \cdot L_f = 60,0 \cdot 79,7 = 4782 \text{ cal}$$

La quantità di calore che l'acqua può cedere passando da $28 \text{ }^{\circ}\text{C}$ a $0 \text{ }^{\circ}\text{C}$ si calcola come:

$$Q = mc\Delta t = 500 \cdot 1,00 \cdot 28 = 14000 \text{ cal}$$

Poiché:

$$Q > Q_1 + Q_2$$

possiamo affermare che il ghiaccio si scioglie completamente.

A questo punto possiamo calcolare la temperatura dell'acqua ad equilibrio raggiunto:

$$Q_{\text{ceduto}} = Q_{\text{assorbito}}$$

$$mc(t_1 - t_e) = Q_1 + Q_2 + m_1 c_1 (t_e - 0)$$

$$mct_1 - mct_e = Q_1 + Q_2 + m_1 c_1 t_e$$

$$t_e = \frac{mct_1 - Q_1 - Q_2}{mc + m_1 c_1} = \frac{500 \cdot 1,00 \cdot 28 - 503 - 4782}{500 \cdot 1,00 + 60,0 \cdot 0,466} = 16,5 \text{ }^{\circ}\text{C}$$