

# ElettroMagnetismo

## L'INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

***Pappalardo Vincenzo***

*docente di*  
**Matematica e Fisica**



Dopo che, nel 1821, Oersted ebbe dimostrato che un filo percorso da corrente genera un campo magnetico, si moltiplicarono le ricerche per ottenere correnti elettriche mediante campi magnetici.

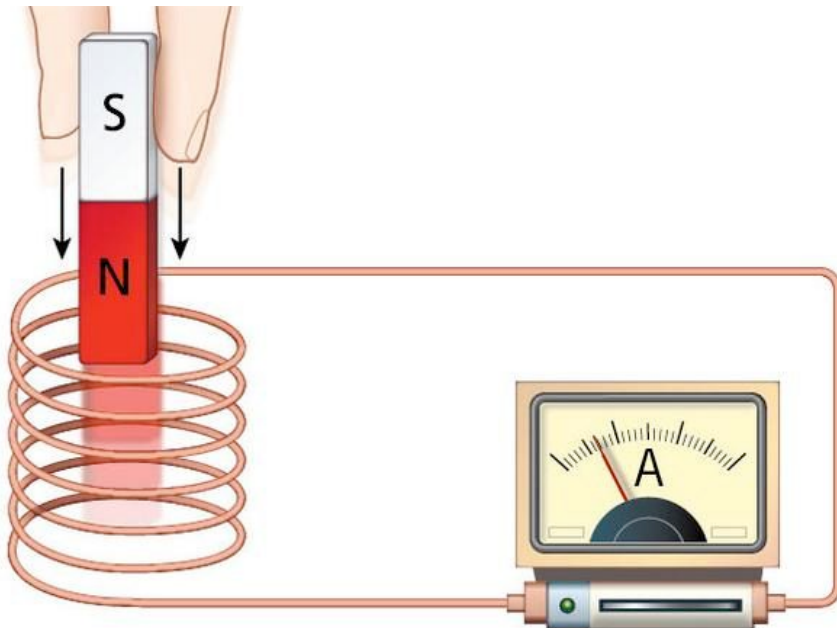
I fisici che intrapresero questo lavoro si appellavano, a un principio di simmetria.

In definitiva:

Se una corrente elettrica genera un campo magnetico, può un campo magnetico generare una corrente elettrica?

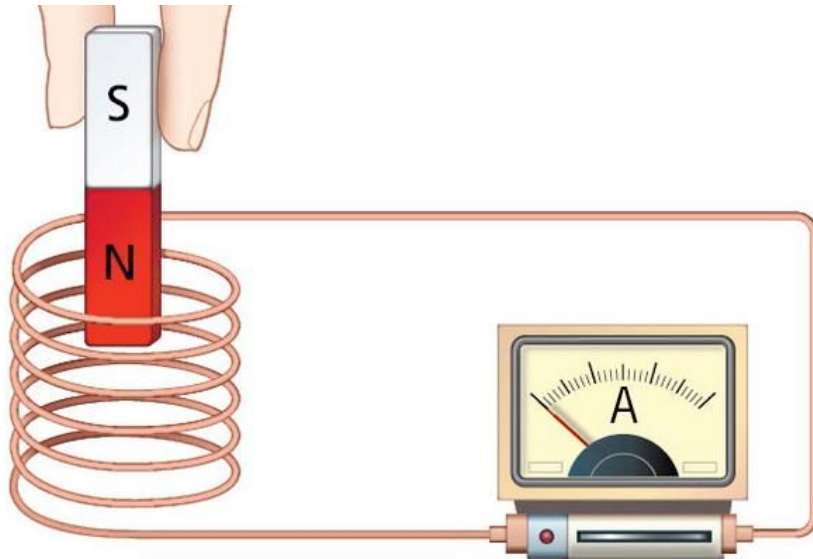
Nel 1831, fu **Faraday** a scoprire che in particolari condizioni un campo magnetico può produrre in effetti una corrente elettrica.

### CONDUTTORI FERMI E CAMPI MAGNETICI VARIABILI



L'amperometro segna il passaggio di una corrente elettrica quando la calamita è in movimento (campo magnetico variabile).

## LA CORRENTE INDOTTA

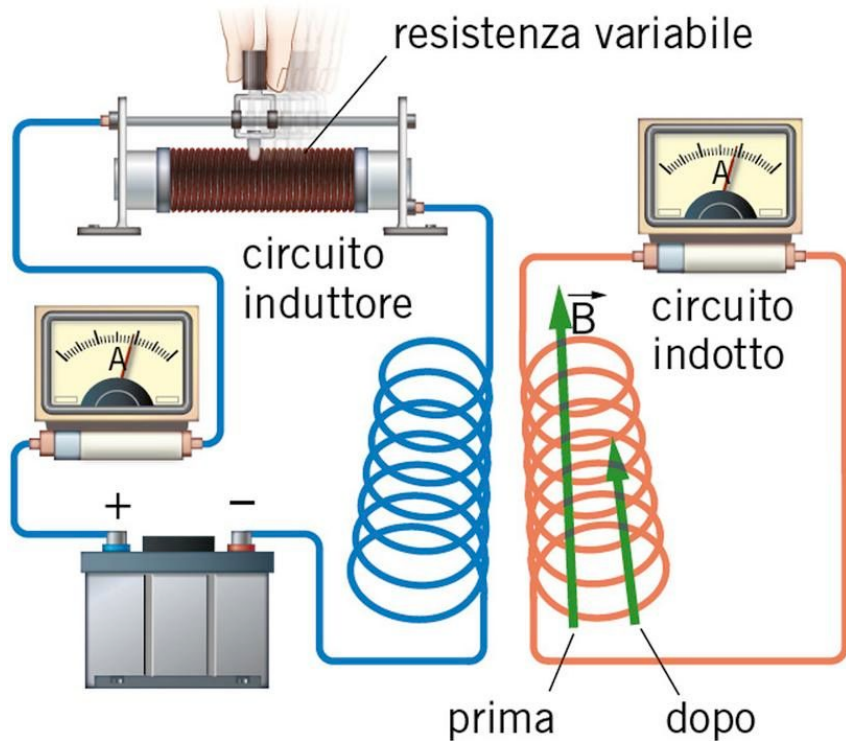


L'amperometro non segna passaggio di corrente elettrica quando la calamita è ferma (campo magnetico costante).

La corrente non è creata da una batteria, che non è presente nel circuito, ma dal movimento della calamita (campo magnetico variabile).

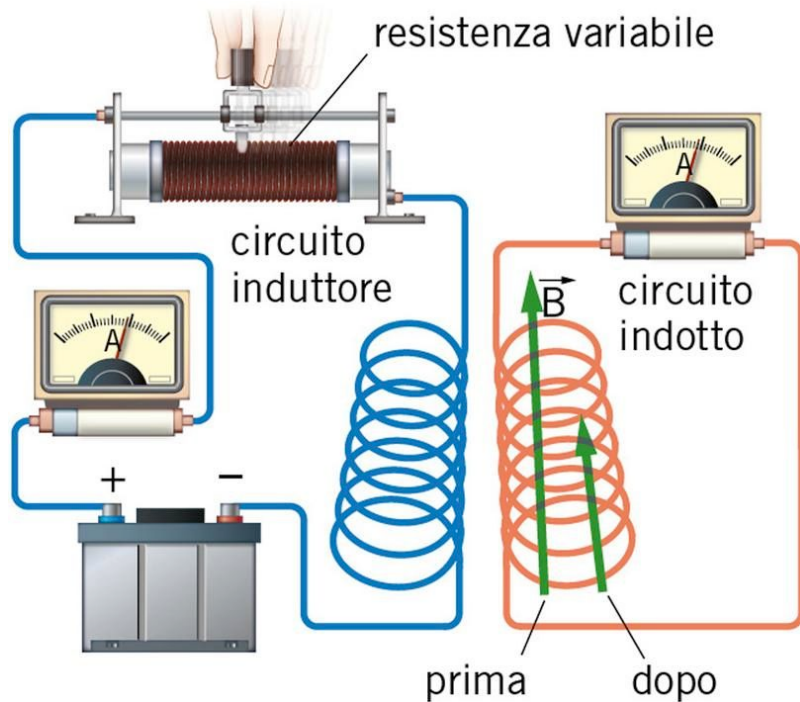
**Un campo magnetico variabile genera una corrente indotta.**

Si può fare variare il campo magnetico all'interno di un circuito anche in altri modi.



Per esempio, mettiamo vicino al circuito senza batteria (circuitto indotto) un secondo circuito (circuitto induttore), nel quale facciamo variare la corrente diminuendo o aumentando il valore di una resistenza variabile.

## LA CORRENTE INDOTTA



La variazione della corrente (campo magnetico variabile) nel circuito induttore genera una corrente indotta nel circuito senza batteria.

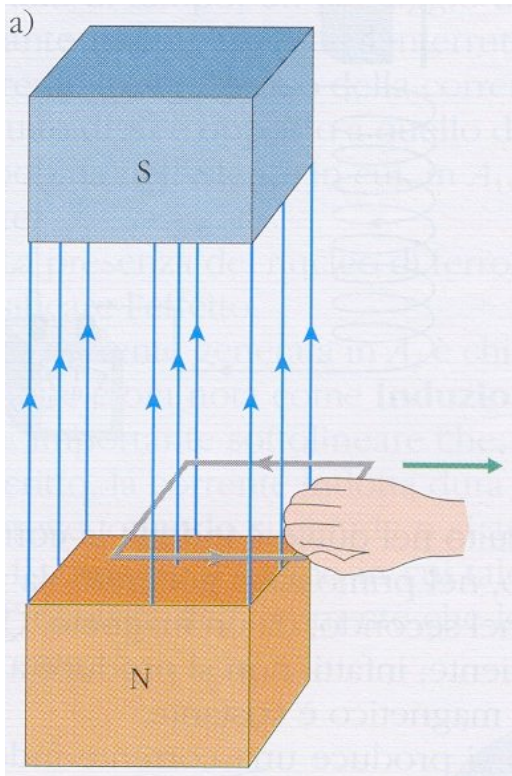
Se la corrente nel circuito induttore resta costante (campo magnetico uniforme), nell'altro circuito non circola una corrente indotta.

Ancora una volta:

Un campo magnetico variabile genera una corrente indotta.

Il fenomeno fisico che produce correnti indotte si chiama **induzione elettromagnetica**.

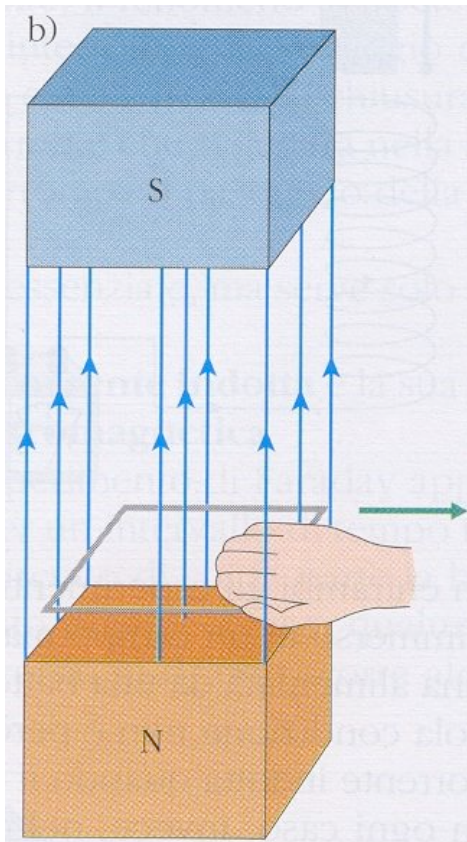
## CONDUTTORE IN MOVIMENTO



Si origina una corrente indotta quando la spira viene estratta con una certa velocità dal campo magnetico uniforme.

Il flusso del campo magnetico attraverso la spira è variabile.

## LA CORRENTE INDOTTA



Non si origina nessuna corrente indotta se la spira, pur mantenuta in movimento con la stessa velocità, è completamente immersa nel campo magnetico.

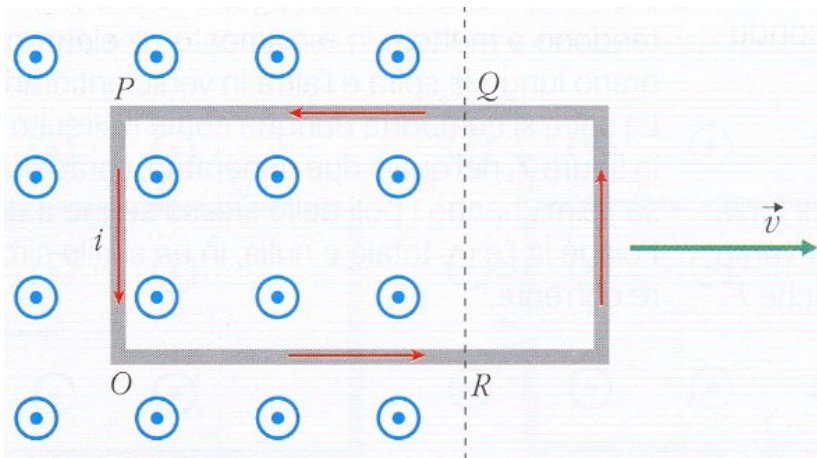
Il flusso del campo magnetico attraverso la spira è costante.

## LA CORRENTE INDOTTA

Parlando di corrente indotta, è naturale definire una **fem indotta**, uguale alla fem del generatore che dovremmo inserire nel circuito per produrre, in assenza di induzione elettromagnetica, una corrente di intensità uguale a quella della corrente indotta.

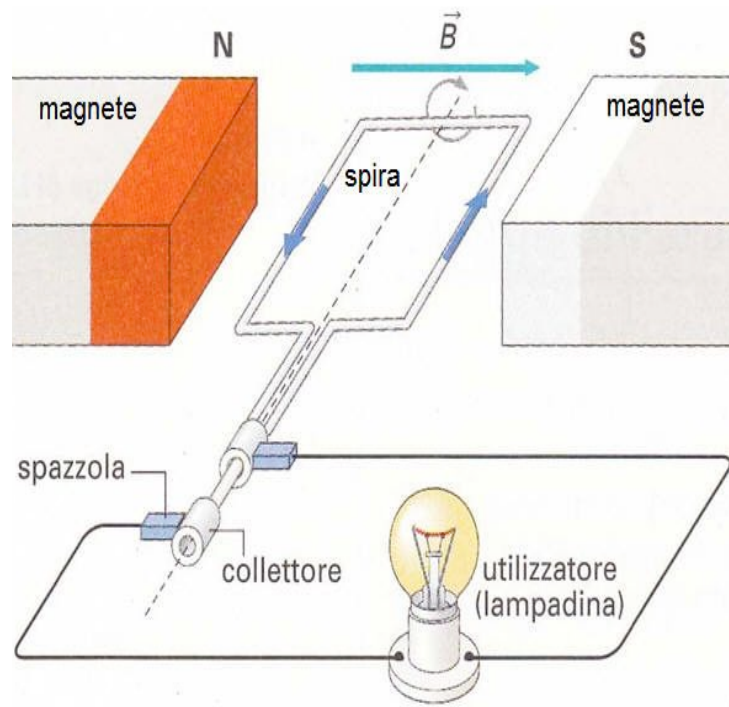
Si dimostra che la fem indotta è:

$$f = vBL$$



$v$ =velocità costante con cui la spira viene estratta;  $B$ =intensità del campo magnetico uniforme;  $L$ =lunghezza del lato  $OP$  della spira interamente immerso nel campo magnetico

## SPIRA IN ROTAZIONE IN UN CAMPO MAGNETICO UNIFORME



La spira è interamente immersa nel campo magnetico, uniforme nello spazio e costante nel tempo.

Si origina una corrente indotta quando la spira ruota nel campo magnetico...perché?

Il flusso del campo magnetico attraverso la spira che ruota è variabile.

Gli esperimenti esaminati hanno mostrato che la corrente indotta dipende da tre grandezze: la rapidità di variazione del campo magnetico esterno, l'area del circuito indotto e la sua orientazione.

La variazione del flusso  $\Phi_s(\mathbf{B})$  nel tempo dipende proprio dalle tre grandezze elencate sopra.

Quindi:

si ha una corrente indotta quando varia il flusso di campo magnetico attraverso la superficie che ha per contorno il circuito indotto.

Il fenomeno dell'induzione elettromagnetica è descritto dalla seguente legge:

LEGGE DI FARADAY-NEUMANN

La fem indotta  $f_{em}$  che si genera, in media, in un circuito conduttore è data dal rapporto tra la variazione del flusso  $\Delta\Phi$  del campo magnetico concatenato con il circuito che si verifica nell'intervallo di tempo considerato  $\Delta t$ :

$$f_{em} = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Il segno “meno” rappresenta la legge di Lenz, che discuteremo dopo.

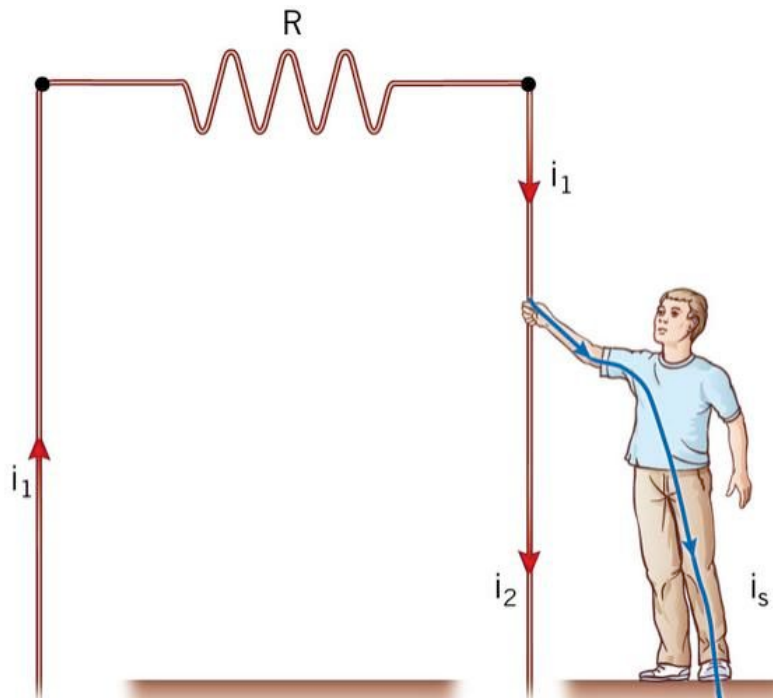
Utilizzando il calcolo differenziale (derivata di una funzione), possiamo ottenere il valore istantaneo della fem indotta. Pertanto la legge di Faraday-Neumann assume la seguente forma:

### LEGGE DI FARADAY-NEUMANN in forma differenziale

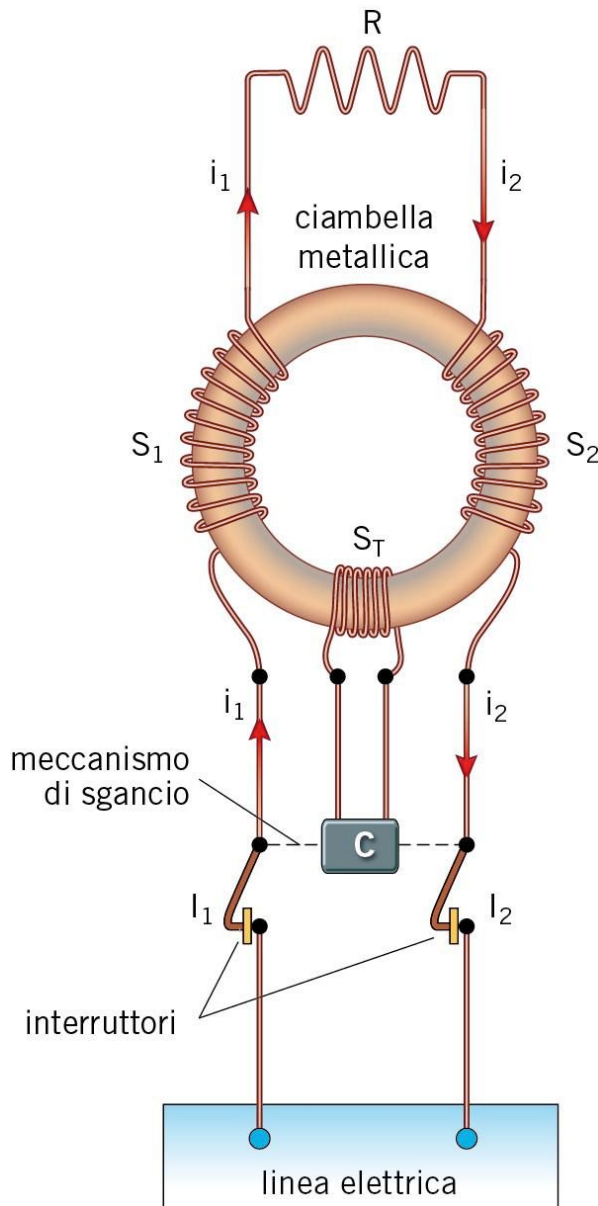
La fem indotta  $f_{em}$  è uguale alla derivata temporale, cambiata di segno, del flusso magnetico  $\Phi(\vec{B})$  attraverso la superficie considerata:

$$f_{em} = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

## Interruttore differenziale

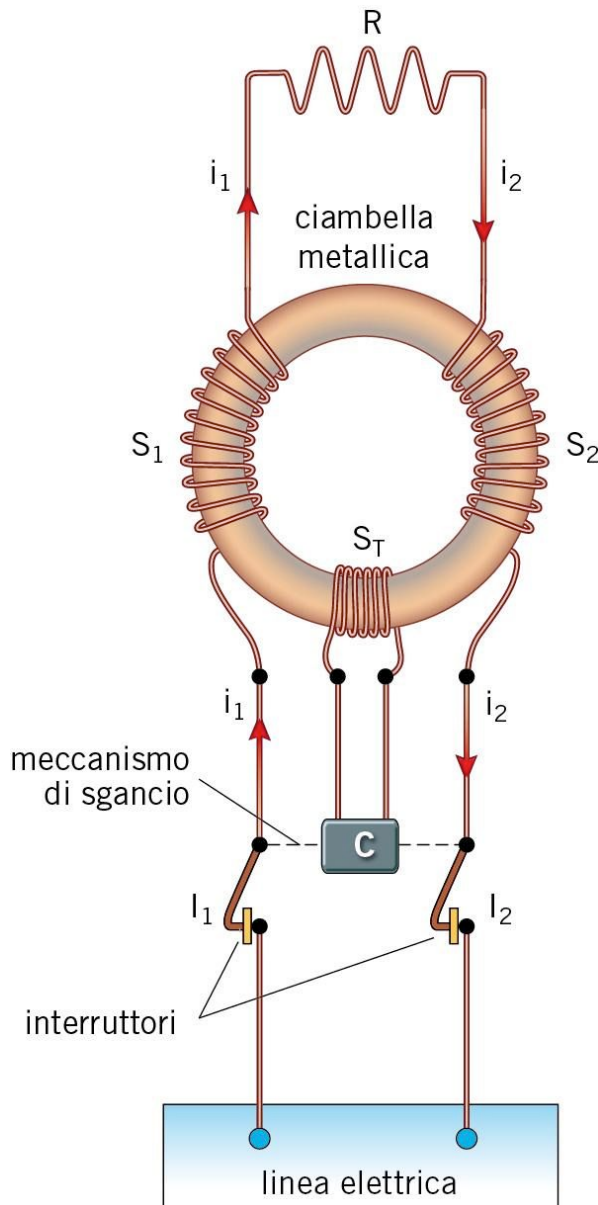


L'interruttore differenziale (salvavita), sfrutta il fenomeno dell'induzione elettromagnetica per proteggere dal pericolo di folgorazione quando un apparecchio elettrico  $R$  ha una "perdita" di corrente.



In condizioni normali i due solenoidi  $S_1$  e  $S_2$  sono percorsi da correnti uguali. Poiché sono avvolti in versi opposti, il flusso magnetico totale nella zona in cui si trova il solenoide  $S_T$  è nullo.

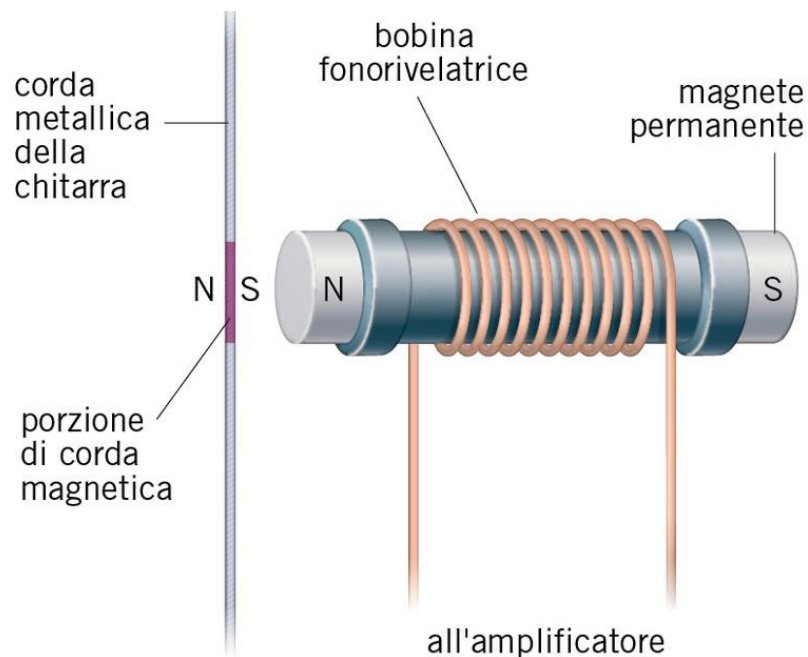
Se in  $R$  si sviluppa un contatto che determina una dispersione di corrente, il campo magnetico prodotto da  $S_1$  rimane inalterato, ma quello generato da  $S_2$  diminuisce.



In questa condizione il flusso attraverso  $S_T$  varia e si origina una corrente indotta.

Questo segnale (la corrente indotta) aziona la centralina  $C$ , che, azionando gli interruttori  $I_1$  e  $I_2$ , mette in sicurezza l'impianto elettrico domestico in qualche millesimo di secondo.

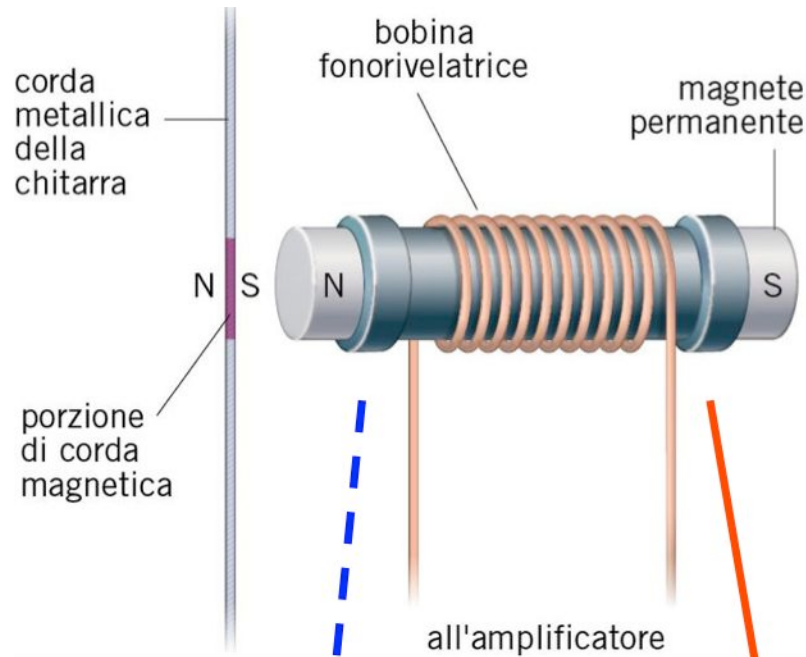
## Chitarra elettrica



Le corde della chitarra sono costruite con un materiale adatto alla magnetizzazione.

L'oscillazione della corda crea un campo magnetico variabile nella bobina che, a sua volta, genera una corrente indotta che riproduce il movimento della corda.

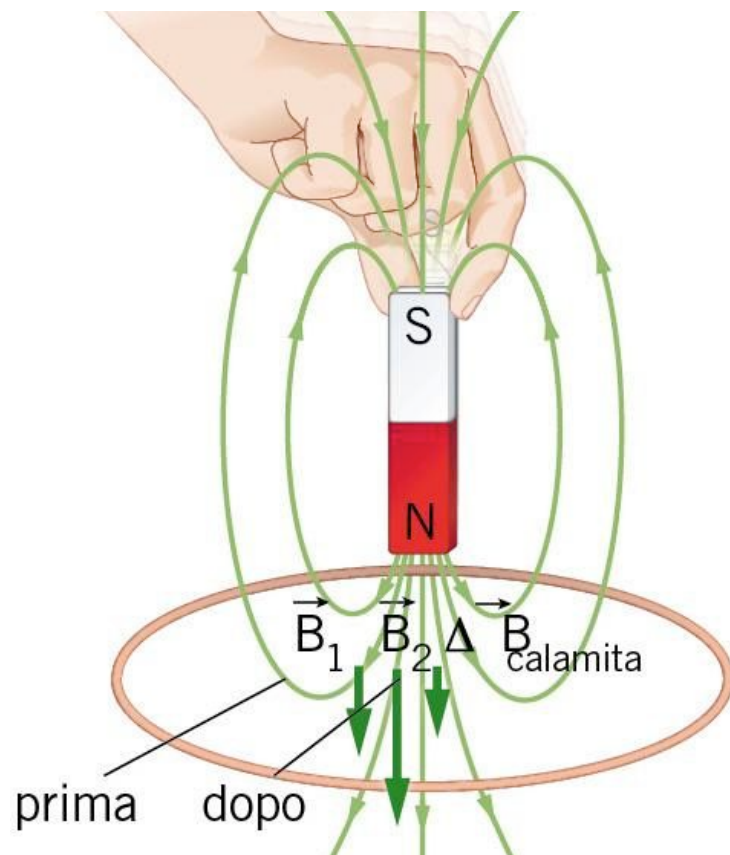
## APPLICAZIONI



Questo il segnale  
(corrente indotta) viene  
inviato all'amplificatore e  
genera il caratteristico  
suono della chitarra  
elettrica.



## LEGGE DI LENZ



Avvicinando un magnete alla spira, il campo magnetico della calamita aumenta nella zona di spazio dove si trova il circuito (un numero sempre maggiore delle linee di forza del campo attraversa la spira).

Il flusso concatenato con la spira aumenta, e la variazione di flusso produce una corrente indotta che genera un proprio campo magnetico.

Qual è il verso della corrente indotta? Ce lo dice la legge di **Lenz** del 1834.

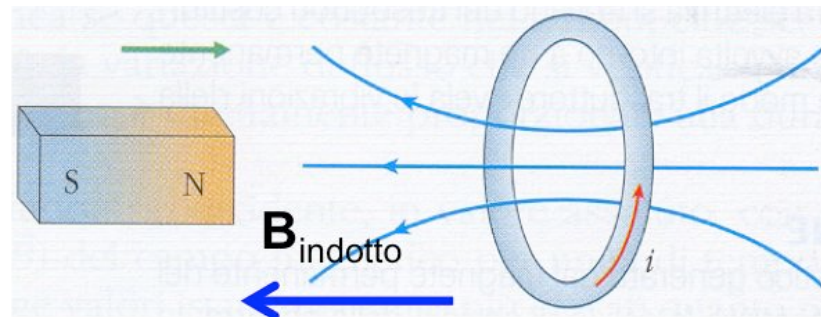
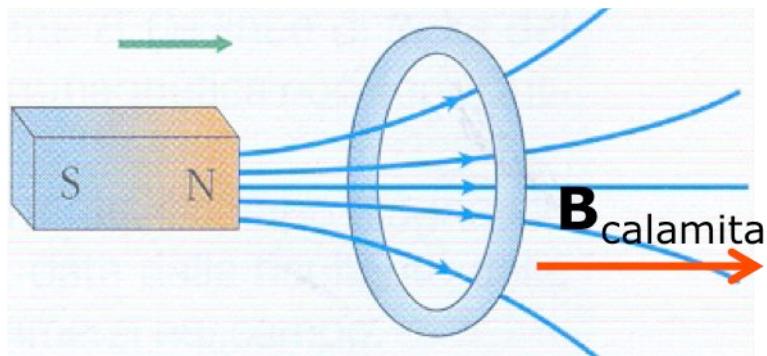
### LEGGE DI LENZ

Il verso della corrente indotta che scorre nella spira è tale da opporsi, tramite il flusso del campo magnetico da essa generato, alla variazione di flusso che ha dato origine alla corrente.

Vediamo come funziona la legge di Lenz.

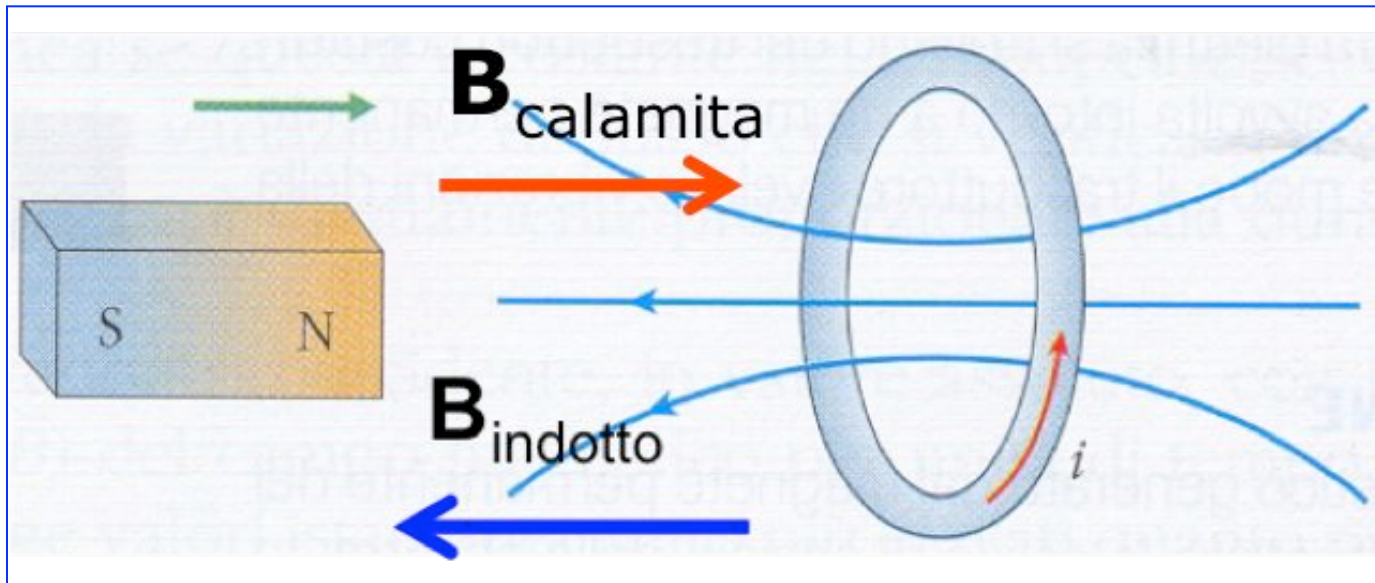
Vi sono due campi magnetici:

- il campo magnetico della calamita  $\mathbf{B}_{\text{calamita}}$ , che crea la variazione di flusso;
- il campo magnetico  $\mathbf{B}_{\text{indotto}}$  della corrente indotta.



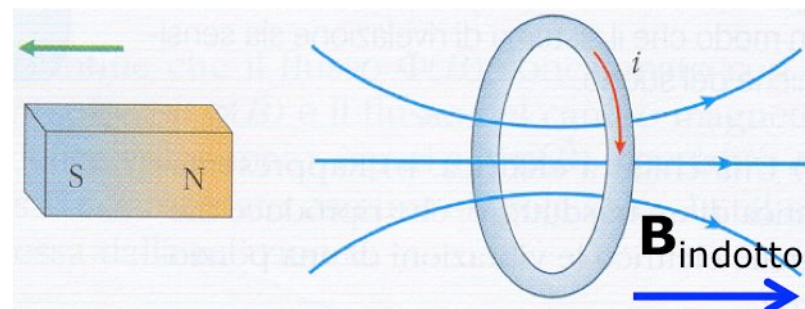
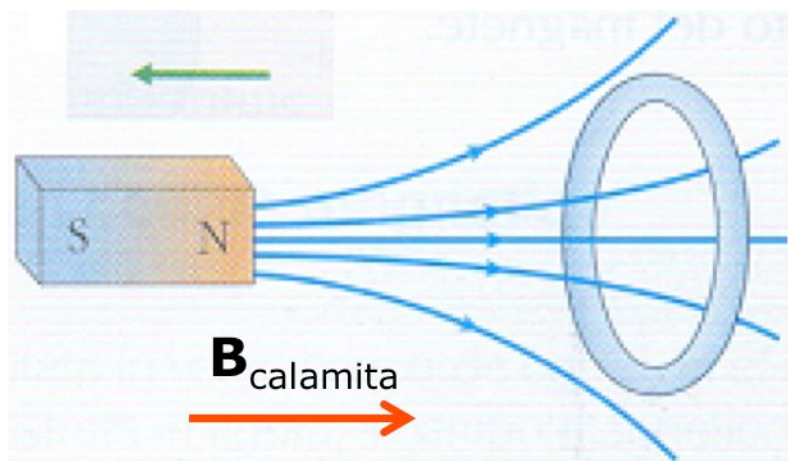
La corrente indotta dall'aumento del flusso concatenato (calamita in avvicinamento) produce un campo magnetico tale da opporsi all'aumento del flusso concatenato (legge di Lenz).

## LEGGE DI LENZ



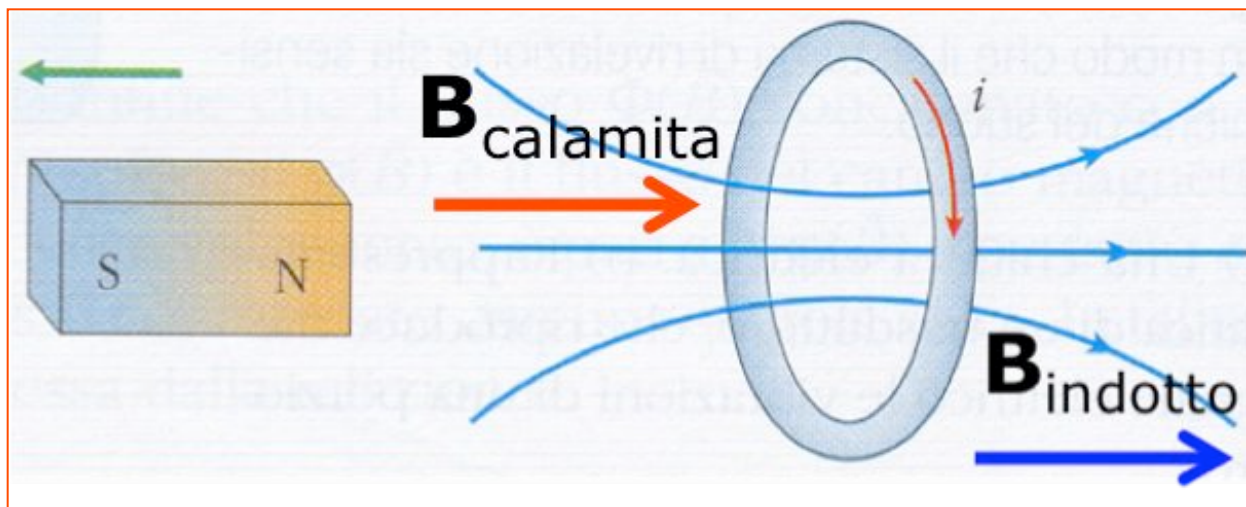
Il verso della corrente deve essere quello che dà luogo a un campo  $B_{\text{indotto}}$  di verso opposto rispetto al campo applicato  $B_{\text{calamita}}$  (regola mano destra).

## LEGGE DI LENZ



La corrente indotta dalla diminuzione del flusso concatenato (calamita in allontanamento) produce un campo magnetico tale da opporsi alla diminuzione del flusso concatenato (legge di Lenz).

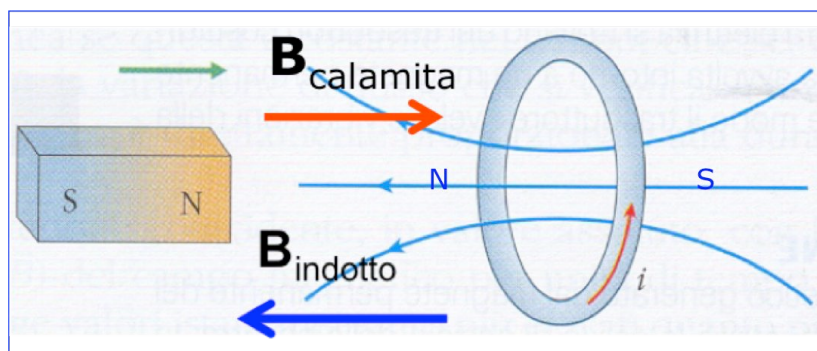
## LEGGE DI LENZ



Il verso della corrente deve essere quello che dà luogo a un campo  $B_{\text{indotto}}$  dello stesso verso del campo applicato  $B_{\text{calamita}}$  (regola mano destra).

La legge di Lenz è una conseguenza del principio di conservazione dell'energia.

Vediamo perché.



Quando la calamita si avvicina alla spira, quest'ultima si comporta come un magnete avente il polo *Nord* rivolto verso il polo omonimo in avvicinamento.

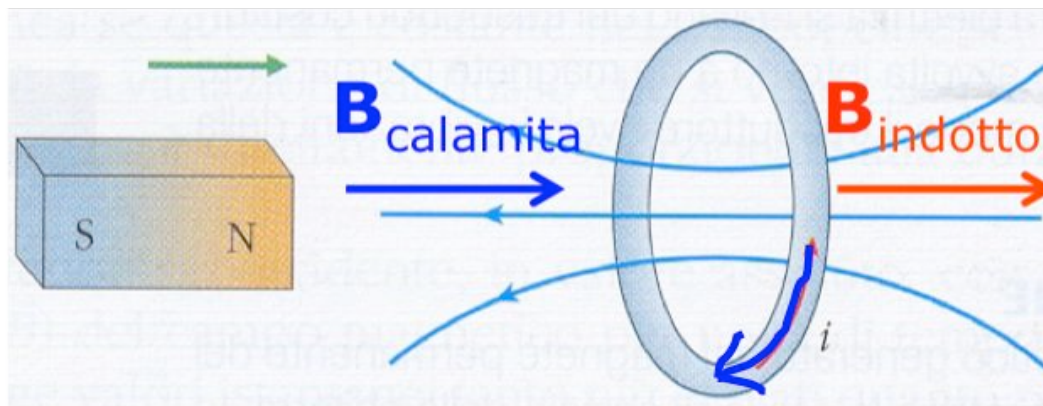
Pertanto, il campo magnetico generato dalla corrente indotta tende a respingere la calamita.

Per produrre la corrente indotta dobbiamo compiere un lavoro, e quindi consumare energia, contro la forza di repulsione esercitata dalla spira sulla calamita.

Se così non fosse, si otterrebbe energia elettrica gratis, in contrasto con il principio di conservazione dell'energia.

Vediamo perché.

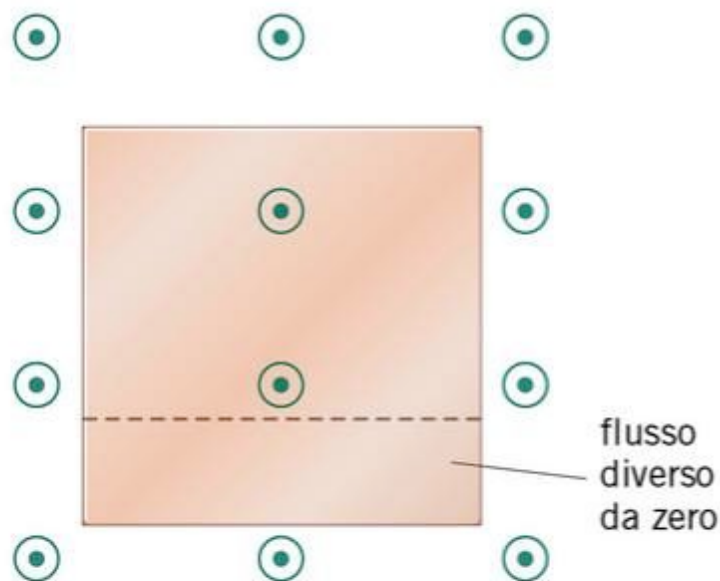
## LEGGE DI LENZ



In questa situazione, il campo indotto accentuerebbe l'aumento del flusso totale, il quale, a sua volta, creerebbe una corrente indotta più intensa e quindi un nuovo campo magnetico indotto, innescando un processo senza fine.

Poiché questo non è possibile, la corrente indotta deve circolare in senso antiorario, in modo da contrastare l'aumento del campo della calamita.

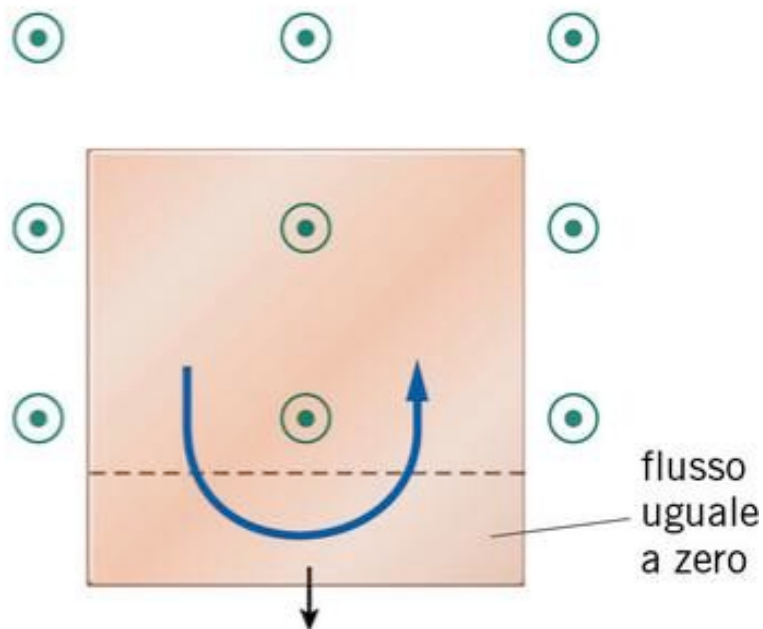
## Le correnti parassite



Se si estrae rapidamente una lamina di rame (materiale diamagnetico) da un campo magnetico piuttosto intenso, si avverte una forte resistenza.

Estraendo il conduttore da un campo magnetico si ottiene una variazione di flusso magnetico che origina correnti indotte, chiamate **correnti parassite o di Foucault**.

## LEGGE DI LENZ



Queste correnti  
scorrono nel volume del  
metallo e hanno un  
andamento simile a  
quello di un vortice.

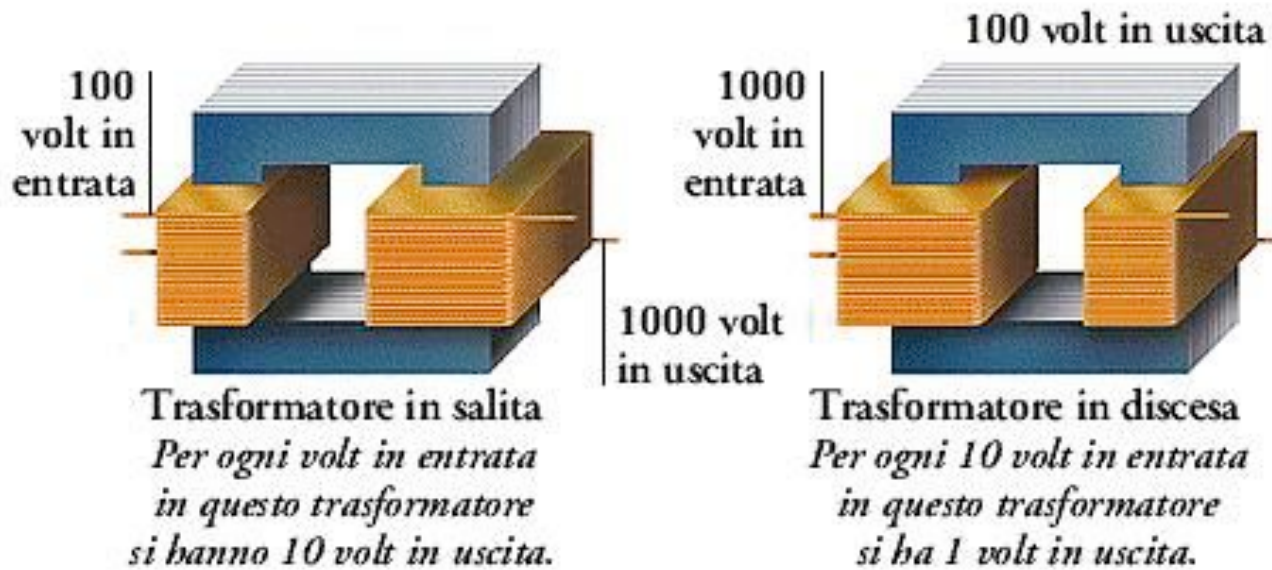
Per la legge di Lenz, le correnti di Foucault sono tali da opporsi alla variazione di flusso che le ha generate e, proprio per questa ragione, la forza magnetica che agisce su di esse è rivolta nel verso opposto a quello del moto che si vuole imprimere alla lamina estraendola dal magnete.

Un fenomeno legato alle correnti parassite è il riscaldamento per effetto Joule di parti in metallo, in presenza di campi magnetici variabili.

Il problema si pone, per esempio, nei nuclei metallici presenti nei motori elettrici a corrente alternata o nei trasformatori (che studieremo seguito).

Questo meccanismo è in grado di dissipare grandi quantità di energia e, per evitarlo, i nuclei stessi non sono costruiti come blocchi compatti, ma assemblando un grande numero di lamierini o di fili, separati da sottili strati isolanti.

## trasformatore



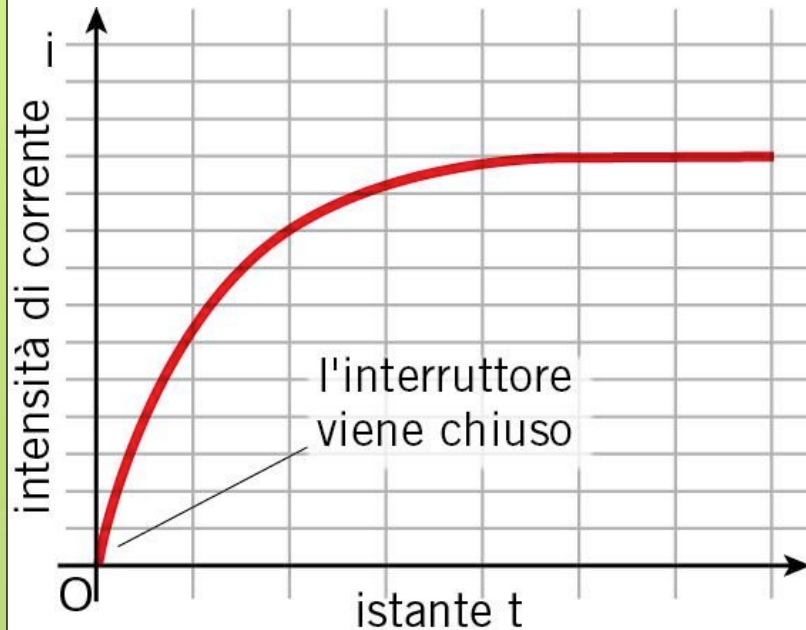
In questo modo la resistenza elettrica del nucleo metallico è elevata e, di conseguenza, le correnti parassite risultano poco intense.

Per avere l'induzione elettromagnetica non è necessaria la presenza di un campo magnetico esterno. Infatti:

la variazione della corrente in un circuito elettrico genera una forza elettromotrice indotta nel circuito stesso.

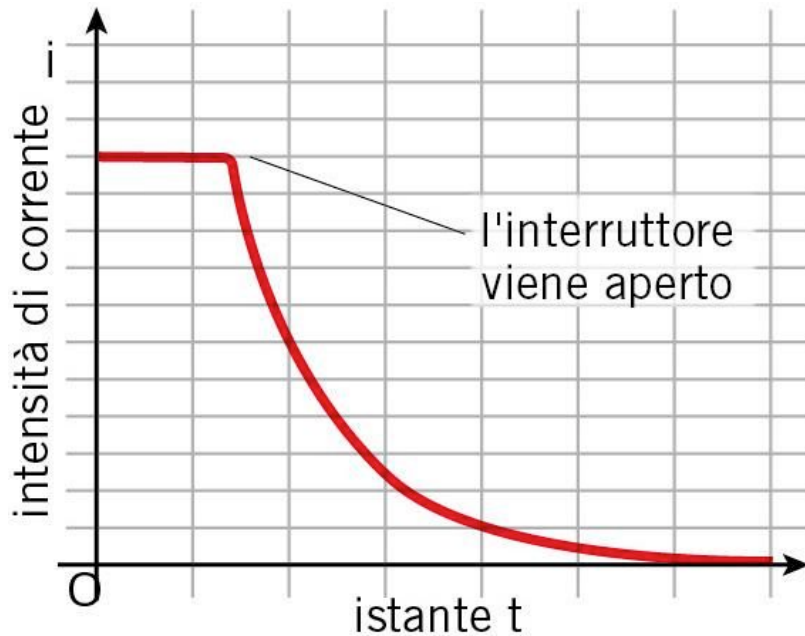
Questo fenomeno, che si chiama **autoinduzione**, accade, per esempio, quando si chiude l'interruttore di un circuito elettrico.

- 1) La corrente, all'inizio nulla, cresce rapidamente creando un campo magnetico sempre più intenso attraverso la superficie del circuito stesso;
- 2) Il flusso di campo magnetico attraverso il circuito aumenta e si genera una corrente indotta che, per la legge di Lenz, tende a opporsi alla variazione di flusso che l'ha generata;
- 3) L'effetto complessivo di queste due correnti, che circolano contemporaneamente in versi opposti, è quello di rallentare la crescita della corrente nel circuito.



**Effetto complessivo:**  
grafico dell'intensità di  
corrente in funzione del  
tempo alla chiusura del  
circuito elettrico.

Quando si apre il circuito la corrente non si annulla istantaneamente, ma lo fa con un certo ritardo: l'apertura del circuito provoca una diminuzione del flusso magnetico e, di conseguenza, per la legge di Lenza, la corrente indotta circola nello stesso verso di quella che era prima presente.



**Effetto complessivo:**  
grafico dell'intensità di  
corrente in funzione del  
tempo all'apertura del  
circuito elettrico.

Un circuito percorso da corrente genera un campo magnetico le cui linee di forza passano tutte intorno al filo conduttore. Il flusso magnetico attraverso la superficie delimitata dal circuito, si chiama **flusso autoconcatenato**.

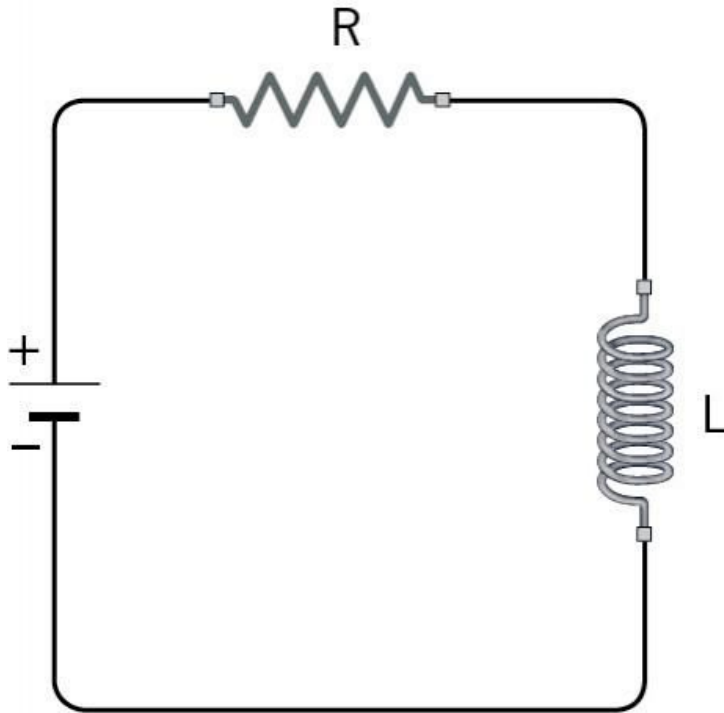
Il flusso autoconcatenato con un circuito qualsiasi è direttamente proporzionale all'intensità della corrente che percorre il circuito:

$$\Phi(\vec{B}) = Li$$

La costante di proporzionalità **L** (**coefficiente di autoinduzione o induttanza**, unità di misura **henry [H]** ) è la grandezza fisica che descrive quanto è intenso l'effetto dell'autoinduzione.

La costante L dipende dalla geometria del circuito e dal materiale in cui è immerso.

## Circuito RL



Simbolo circuitale  
dell'induttanza

Pertanto, per descrivere tutte le proprietà di un circuito elettrico, deve essere ridisegnato.

Scriviamo la legge di Faraday-Neumann in una forma adatta allo studio di questo circuito RL.

Una variazione dell'intensità di corrente in un circuito produce la seguente variazione del flusso autoconcatenato:

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = Li_2 - Li_1 = L(i_2 - i_1) = L\Delta i$$

Se  $\Delta t$  è l'intervallo di tempo in cui avviene la variazione  $\Delta i$ , nel circuito si genera, per la legge di Faraday-Neumann, una fem autoindotta:

$f_{em}$  autoindotta media

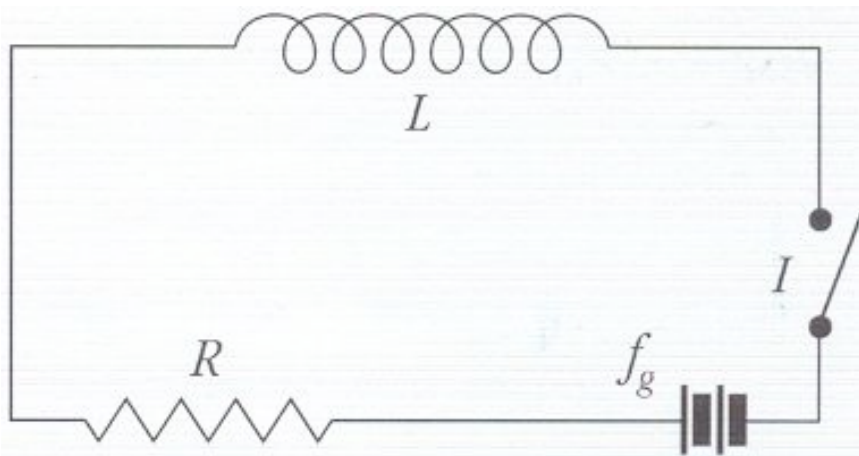
$$f_{em} = - \frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} = -L \frac{\Delta i}{\Delta t}$$

$f_{em}$  autoindotta istantanea

$$f_{em} = -L \frac{di}{dt}$$

Per stabilire in che modo la presenza di un'induttanza modifica l'intensità di corrente consideriamo separatamente i due casi: chiusura e apertura del circuito.

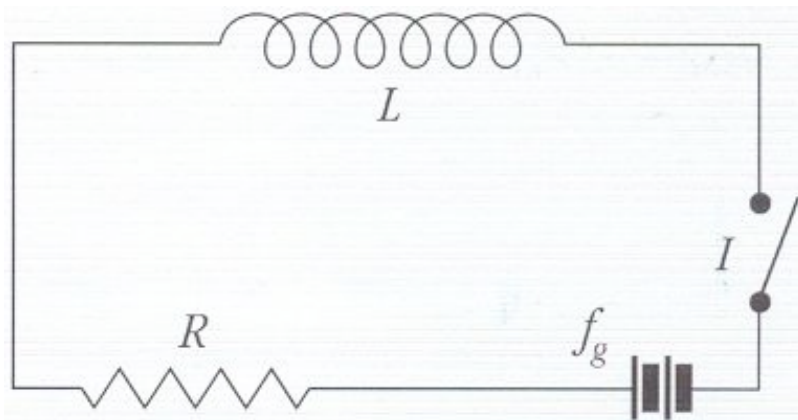
## EXTRACORRENTE DI CHIUSURA DI UN CIRCUITO



Chiudendo l'interruttore, la corrente non si porta istantaneamente sul valore di regime  $I_R = f_g / R$  (legge di Ohm).

Infatti, nel brevissimo intervallo di tempo della chiusura del circuito, la variazione di corrente produce una  $f_{em}$  autoindotta che, per la legge di Lenz, ostacola il raggiungimento del valore di regime  $I_R = f_g / R$ .

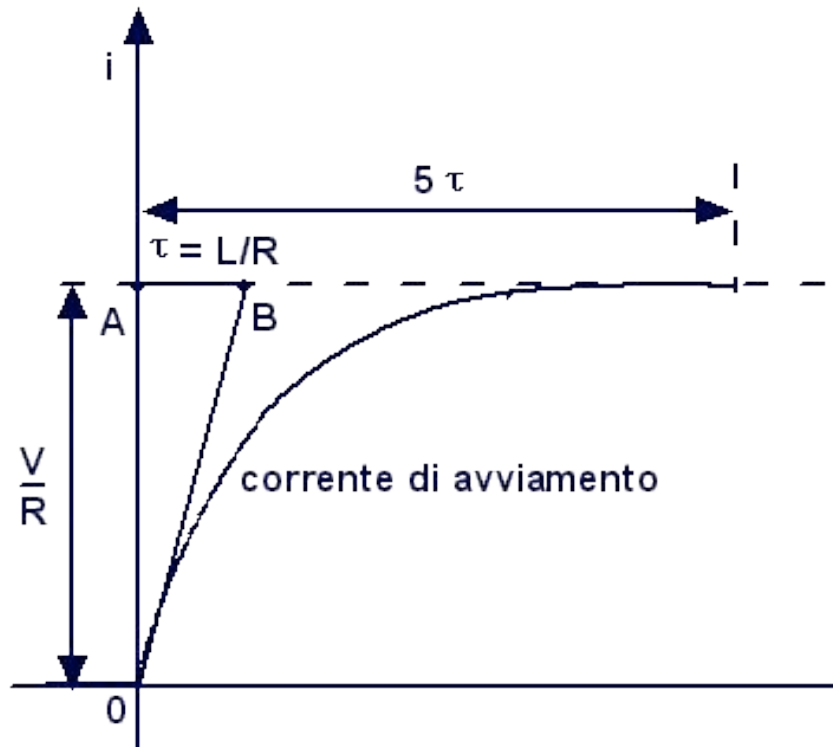
Pertanto, alla fem costante  $f_g$  fornita dal generatore si somma algebricamente quella autoindotta  $f_{em}$ . Per la legge di Ohm si ha che:



equazione differenziale

$$f_g - L \frac{di}{dt} = Ri$$

Questa equazione differenziale ammette come soluzione la corrente istantanea  $i(t)$ , che è una funzione del tempo:

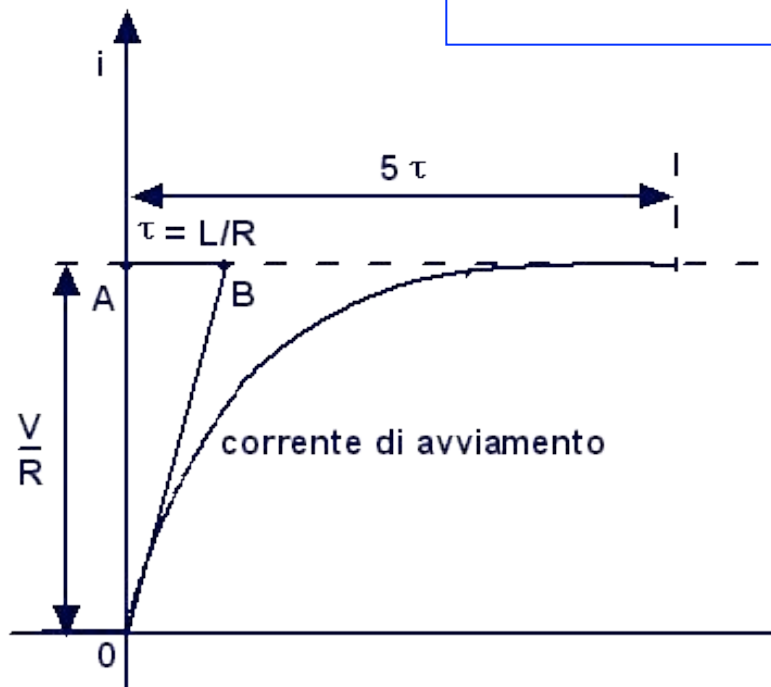


$$i(t) = \frac{f_g}{R} \left( 1 - e^{-t/\tau} \right)$$

$\tau = L/R$   
costante di tempo del  
c circuito

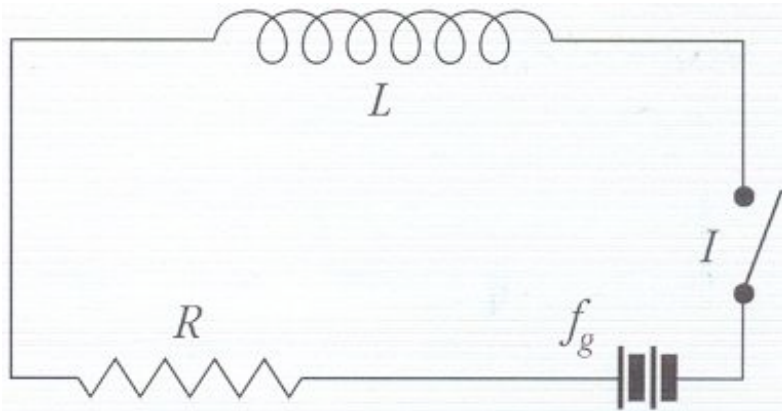
La corrente  $i$  è la differenza fra l'intensità di corrente a regime  $I_R$  e quella prodotta dalla fem autoindotta, chiamata **extracorrente di chiusura**  $i_c$ :

$$i = I_R - i_c = \frac{f_g}{R} - \frac{f_g}{R} e^{-t/\tau}$$



$i_c$  diminuisce esponenzialmente con  $t$  e la corrente totale  $i$  tende al valore di *regime*  $f_g/R$ , che viene raggiunto dopo un tempo  $t=5\tau$ .

## EXTRACORRENTE DI APERTURA DI UN CIRCUITO



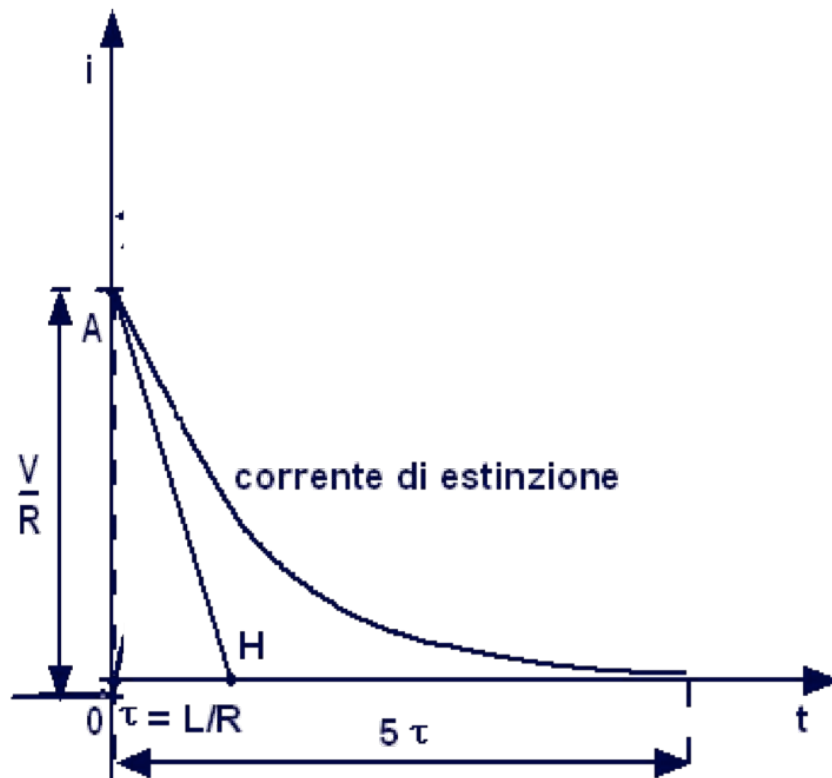
In modo analogo, all'apertura del circuito si origina una fem autoindotta che ostacola la diminuzione di corrente dal valore di regime a zero.

Per la legge di Ohm (circuito aperto,  $f_g=0$ ) si ha che:

equazione differenziale

$$-L \frac{di}{dt} = Ri$$

La soluzione dell'equazione differenziale è la corrente istantanea  $i(t)$ :

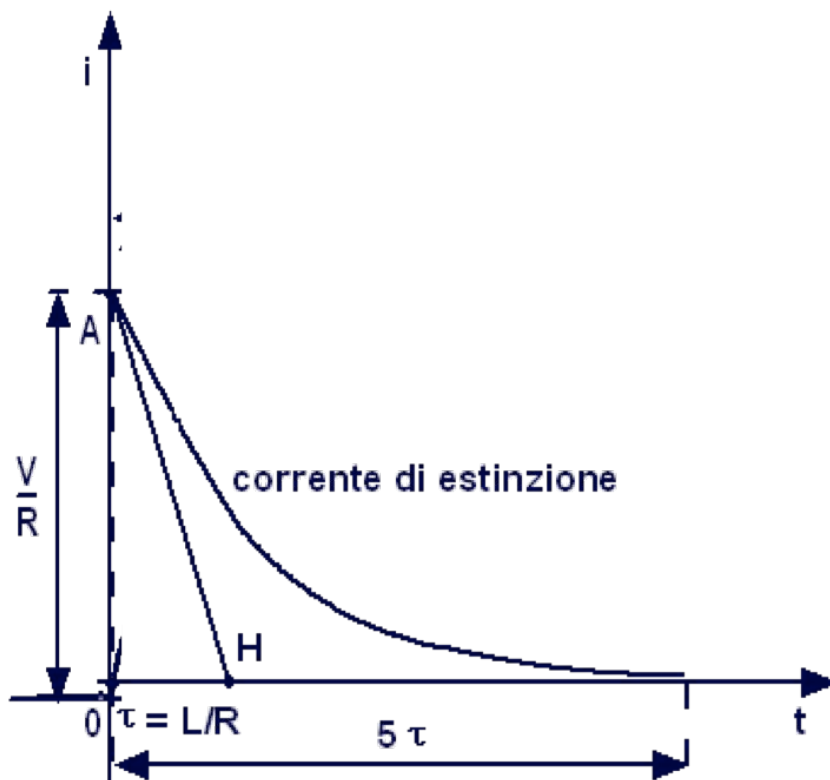


$$i = \frac{f_g}{R} e^{-t/\tau}$$

$\tau = L/R$   
costante di tempo  
del circuito

La corrente  $i$  che attraversa il circuito questa volta coincide con l'**extracorrente di apertura**  $i_a$ :

$$i = i_a = \frac{f_g}{R} e^{-t/\tau}$$



$i_a$  diminuisce esponenzialmente con  $t$  e si annulla dopo un tempo  $t=5\tau$ .

I fenomeni delle extracorrenti sono transitori, limitati cioè a piccoli intervalli di tempo alla chiusura e all'apertura del circuito, in quanto solo allora il circuito è percorso da una corrente di intensità variabile.

Pertanto, se il resistore  $R$  del circuito fosse una lampadina, all'apertura dell'interruttore la lampadina si spegnerebbe con un certo ritardo, così come, alla chiusura, impiegherebbe un certo tempo per raggiungere la sua massima luminosità.

Le extracorrenti raggiungono intensità apprezzabili solo nei circuiti contenenti bobine, che hanno induttanza elevata:

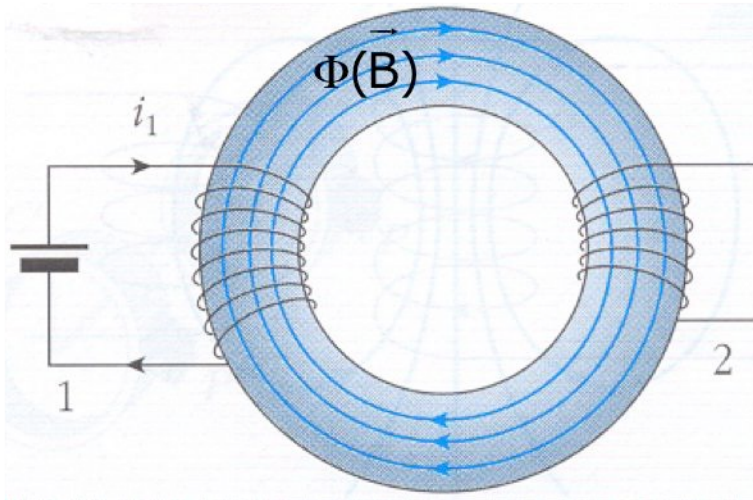


$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{\ell}$$

$N$ =numero spire;  $S$ =superficie spire;  $\ell$ =lunghezza solenoide;  
 $\mu_0$ =permeabilità magnetica del vuoto

Per questo motivo, nei circuiti ohmici finora considerati, l'intensità di corrente è stata assunta costantemente uguale a quella di regime, ossia abbiamo trascurato il fenomeno delle extracorrenti.

## MUTUA INDUZIONE



Consideriamo due circuiti distinti, costituiti da due bobine avvolte su un nucleo ferromagnetico che funge da circuito magnetico.

Le linee di forza del campo magnetico generato dalla bobina 1 attraversano la bobina 2.

Una variazione della corrente  $i_1$  che fluisce nel primo circuito provoca una variazione del flusso magnetico  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  relativo al secondo circuito e genera in esso, per la legge dell'induzione elettromagnetica, una corrente di intensità  $i_2$ .

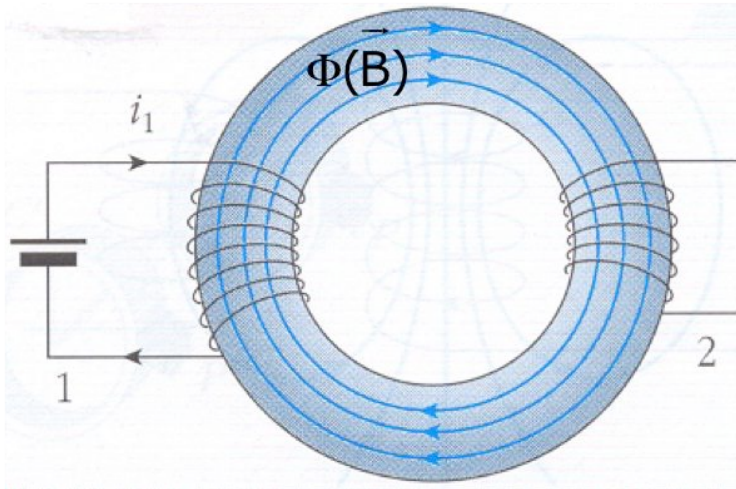
Anche in questo caso il flusso  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  è direttamente proporzionale all'intensità della corrente  $i_1$  che genera il flusso stesso:

Flusso del campo magnetico della bobina 1  
concatenato con la bobina 2

$$\Phi_{1 \rightarrow 2}(\vec{B}) = M i_1$$

**M (coefficiente di mutua induzione dei due circuiti)** è una costante caratteristica della forma dei due circuiti, della loro posizione relativa e della sostanza in cui sono immersi.

## MUTUA INDUZIONE



Allo stesso modo, il flusso  $\Phi_{2 \rightarrow 1}$  concatenato con la bobina 1 e dovuto al campo magnetico generato dalla corrente  $i_2$  che scorre nella bobina 2, è espresso dalla relazione simmetrica:

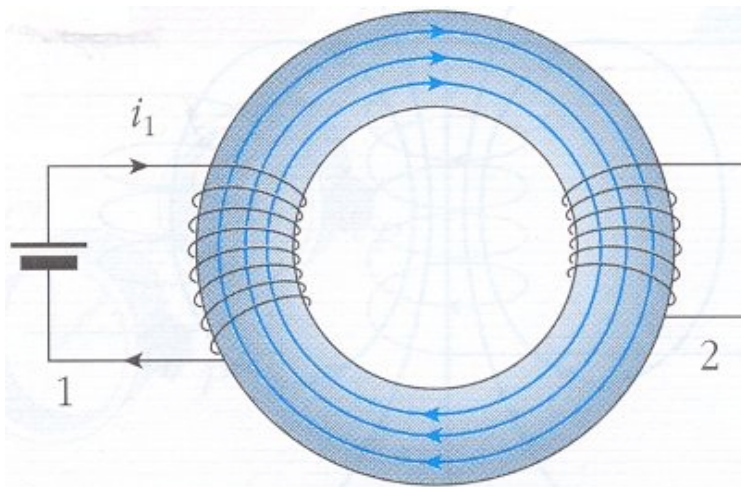
Flusso del campo magnetico della bobina 2  
concatenato con la bobina 1

$$\Phi_{2 \rightarrow 1}(\vec{B}) = M i_2$$

## MUTUA INDUZIONE

Le due relazioni trovate sono valide per qualsiasi coppia di circuiti.

Il valore della mutua induttanza  $M$ , però, cambia a seconda del tipo di coppia di circuiti, ma è sempre unico per entrambe le equazioni.



$$M = \mu_0 \mu_r \frac{N_1 N_2 S}{L}$$

$N_1, N_2$  = numero spire  
 $S$  = superficie spire  
 $L$  = lunghezza solenoide

Unità di misura di  $M$   
henry (H)

## MUTUA INDUZIONE

In modo analogo al caso dell'autoinduzione è possibile ricavare, dalla conoscenza di  $M$ , la  $f_{em}$  indotta nei due circuiti.

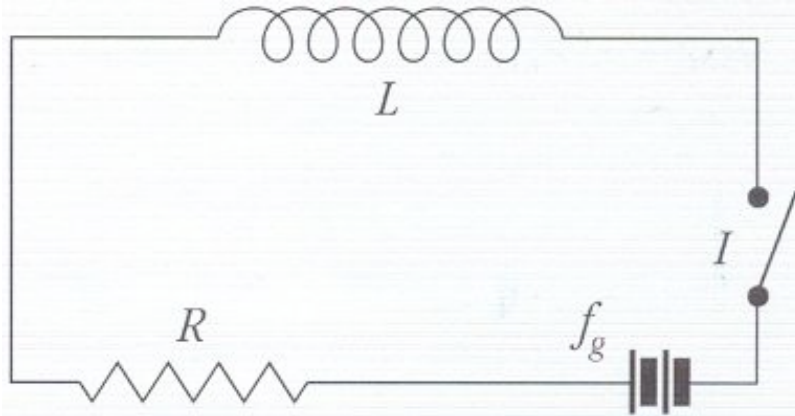
fem autoindotta nel secondo circuito a causa della variazione della corrente  $i_1$  nel primo circuito:

$$f_{em}^{1 \rightarrow 2} = -M \frac{\Delta i_1}{\Delta t} \xrightarrow{\text{forma differenziale}} f_{em}^{1 \rightarrow 2} = -M \frac{di_1}{dt}$$

fem autoindotta nel primo circuito a causa della variazione della corrente  $i_2$  nel secondo circuito:

$$f_{em}^{2 \rightarrow 1} = -M \frac{\Delta i_2}{\Delta t} \xrightarrow{\text{forma differenziale}} f_{em}^{2 \rightarrow 1} = -M \frac{di_2}{dt}$$

## ENERGIA DEL CAMPO MAGNETICO



Esaminiamo il circuito RL da un punto di vista energetico.

Alla chiusura dell'interruttore, nel circuito si genera una fem indotta che si oppone al fluire della corrente elettrica. Per portare la corrente al suo valore di regime, il generatore deve compiere un lavoro contro tale effetto ritardante, dato dalla formula:

$$W_L = \frac{1}{2} Li^2$$

Per la conservazione dell'energia, finché il circuito è chiuso, nel campo magnetico, presente nella zona di spazio dove si trova l'induttanza  $L$ , resta immagazzinata un'energia  $U$  pari al lavoro  $W_L$ :

$$U = W_L = \frac{1}{2} Li^2$$

Quando il circuito viene aperto, la corrente continua a fluire per un certo tempo e così facendo restituisce, mediante l'effetto Joule in  $R$ , l'energia che era stata immagazzinata.

Come il lavoro speso per caricare un condensatore può essere identificato con l'energia immagazzinata dal campo elettrico presente fra le armature, così, in un circuito  $RL$ , il lavoro speso per incrementare l'intensità di corrente da zero al valore di regime può essere pensato come energia immagazzinata nel campo magnetico prodotto dalla corrente.

In analogia alla densità volumica di energia elettrica  $w_E$  definiamo la densità volumica di energia magnetica attraverso la seguente relazione:

## ENERGIA DEL CAMPO MAGNETICO

### DENSITÀ DI ENERGIA DEL CAMPO MAGNETICO

$$w_{\vec{B}} = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

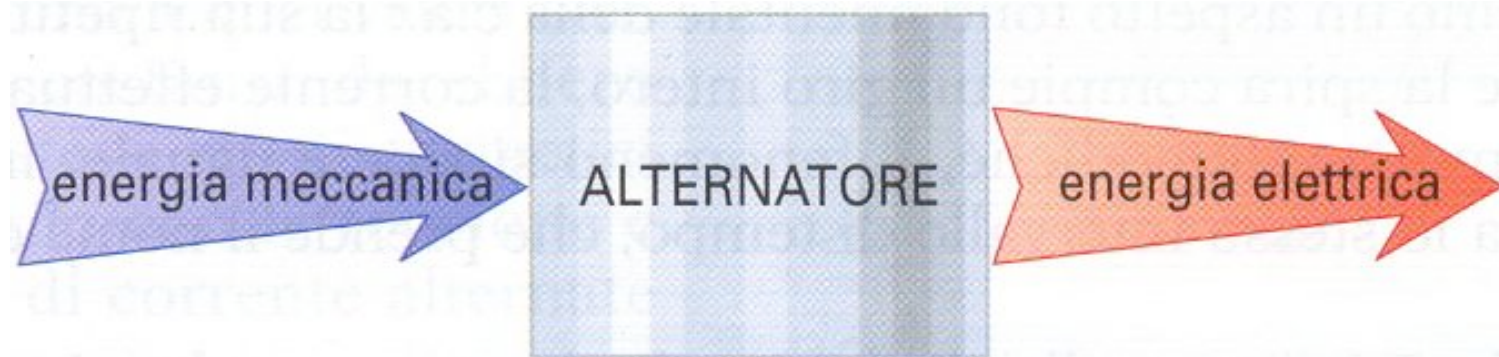
Questo risultato esprime la densità di energia di un qualsiasi campo magnetico di modulo  $B$  in un punto dello spazio.

In generale  $w_{\vec{B}}$  varia da punto a punto; in un campo magnetico uniforme è invece costante.

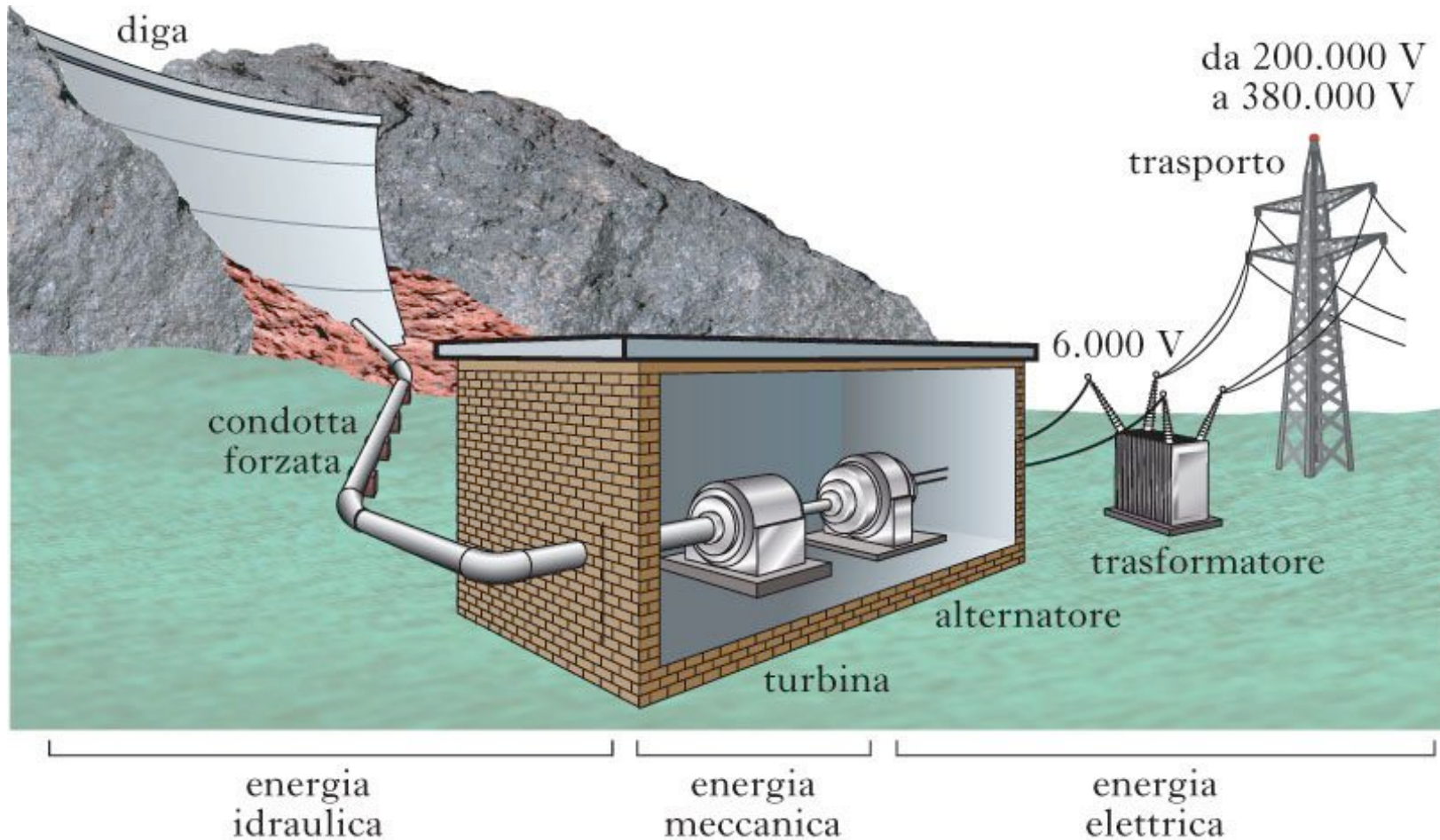
## ALTERNATORE

La produzione di energia elettrica per l'illuminazione delle città, o per altri usi, avviene nelle centrali elettriche grazie agli alternatori.

**L' alternatore**, il cui funzionamento si basa sul fenomeno dell'induzione elettromagnetica, è una macchina elettrica che trasforma energia meccanica in energia elettrica.

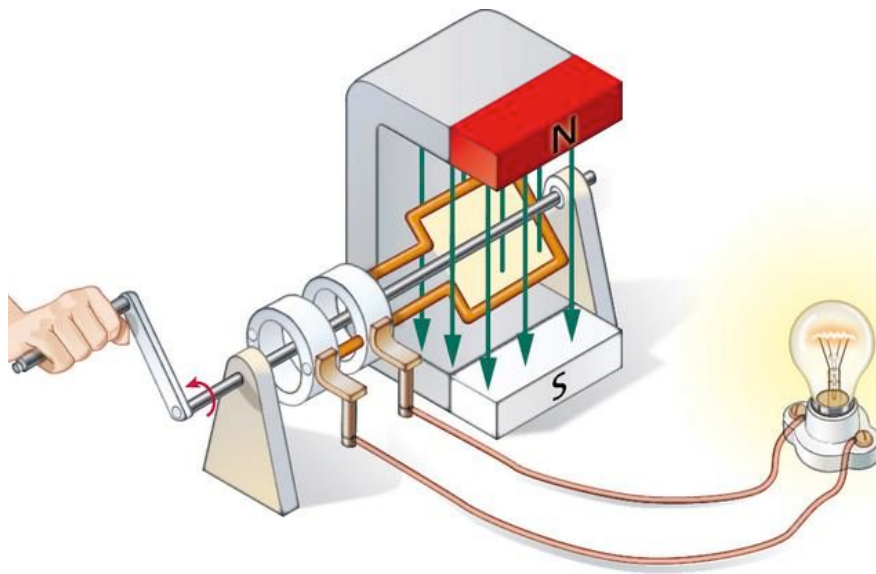


## Centrale idroelettrica



## ALTERNATORE

Per comprendere il principio di funzionamento dell'alternatore consideriamo una spira che ruoti con velocità angolare  $\omega$  costante, all'interno di un campo magnetico uniforme  $\mathbf{B}$ .



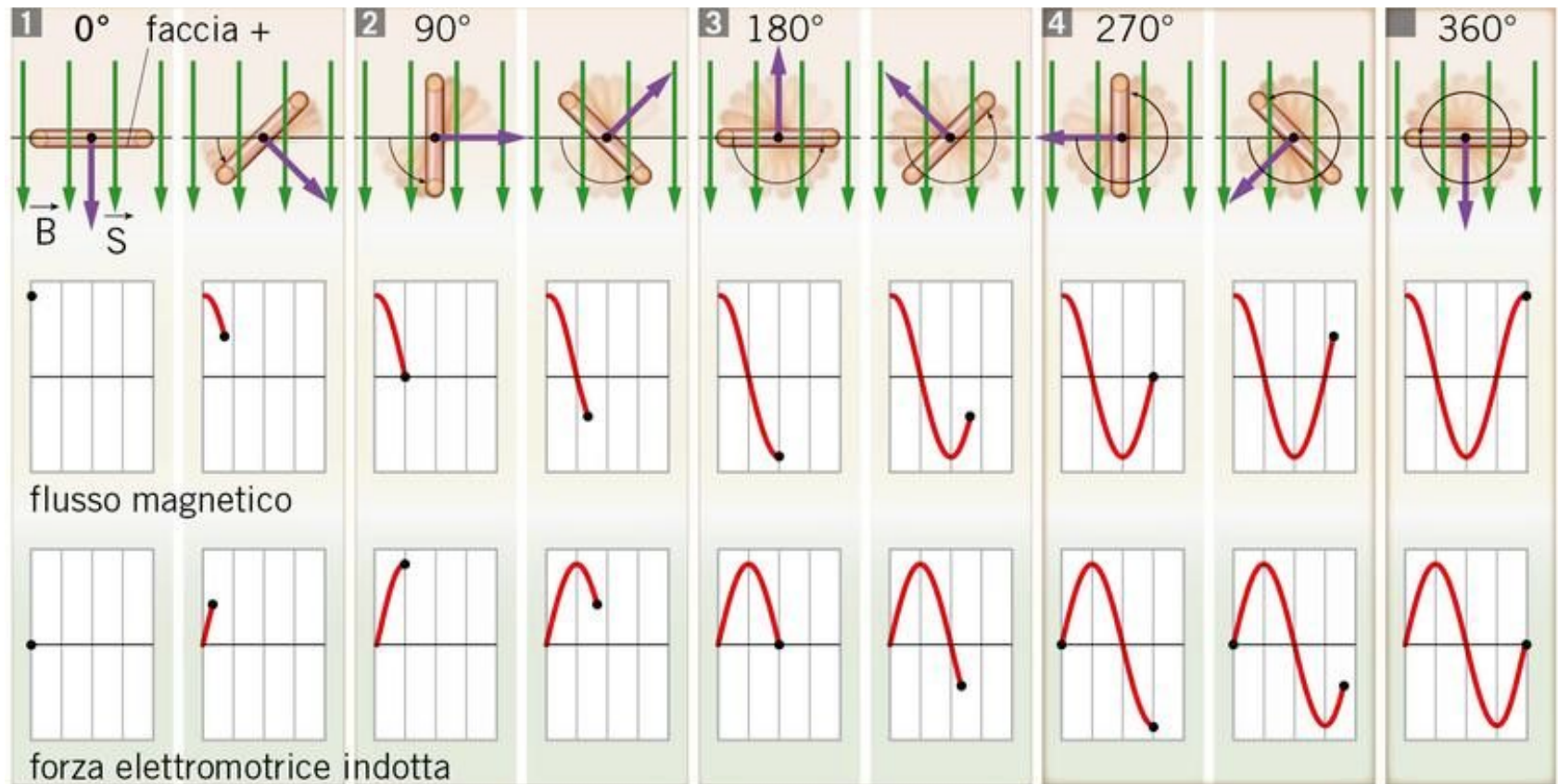
La diversa orientazione della spira rispetto alle linee del campo  $\mathbf{B}$  fa sì che il flusso magnetico vari continuamente, generando, per la legge di Faraday-Neumann, una corrente indotta.

# ALTERNATORE

Seguendo il movimento della spira, il flusso  $\Phi = BS \cos \alpha$  è:

1. è massimo all'inizio

2. zero a  $90^\circ$

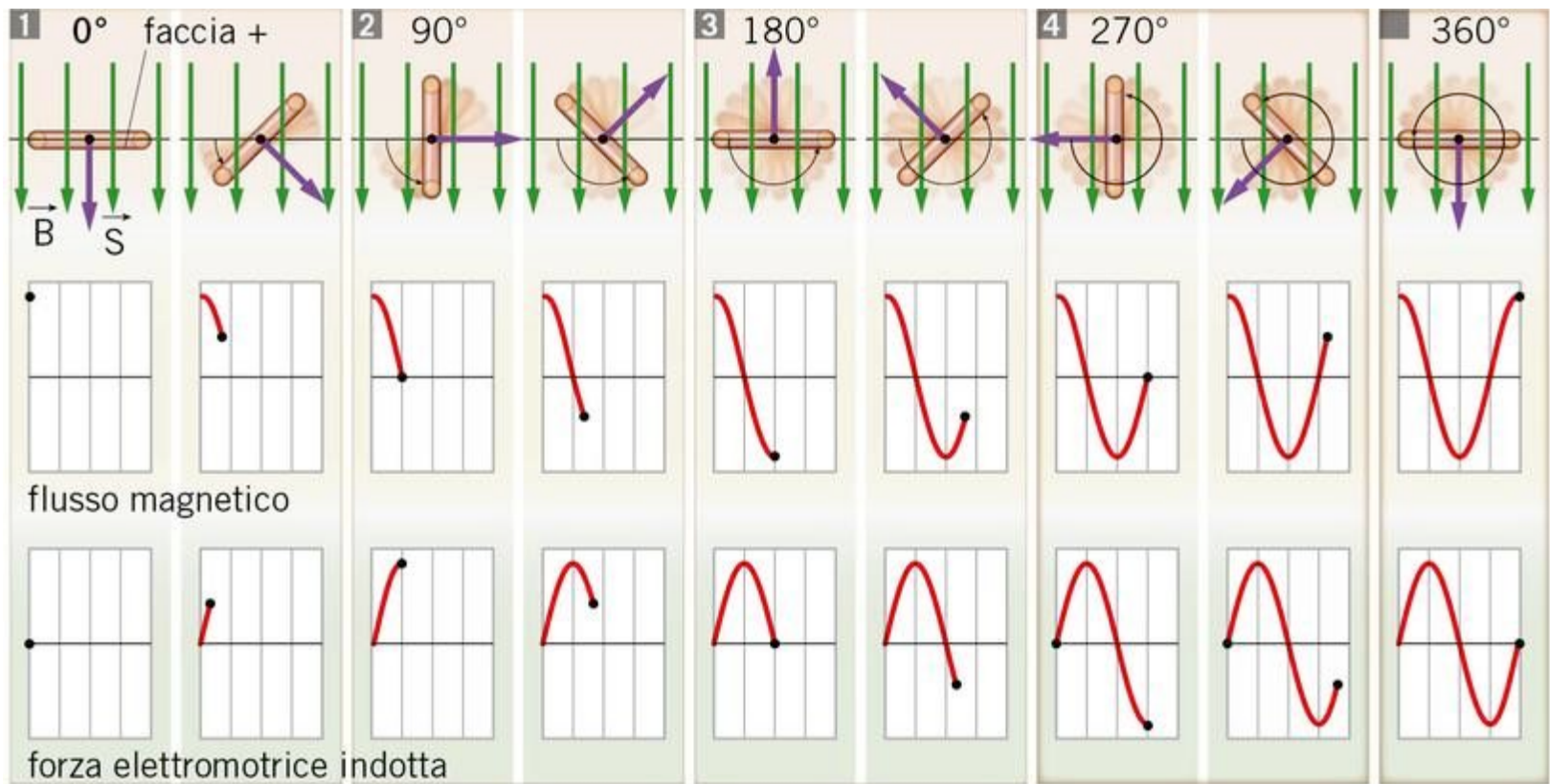


# ALTERNATORE

3. minimo a  $180^\circ$

4. zero a  $270^\circ$

5. torna massimo a  $360^\circ$  nella posizione di partenza, dopo un giro completo



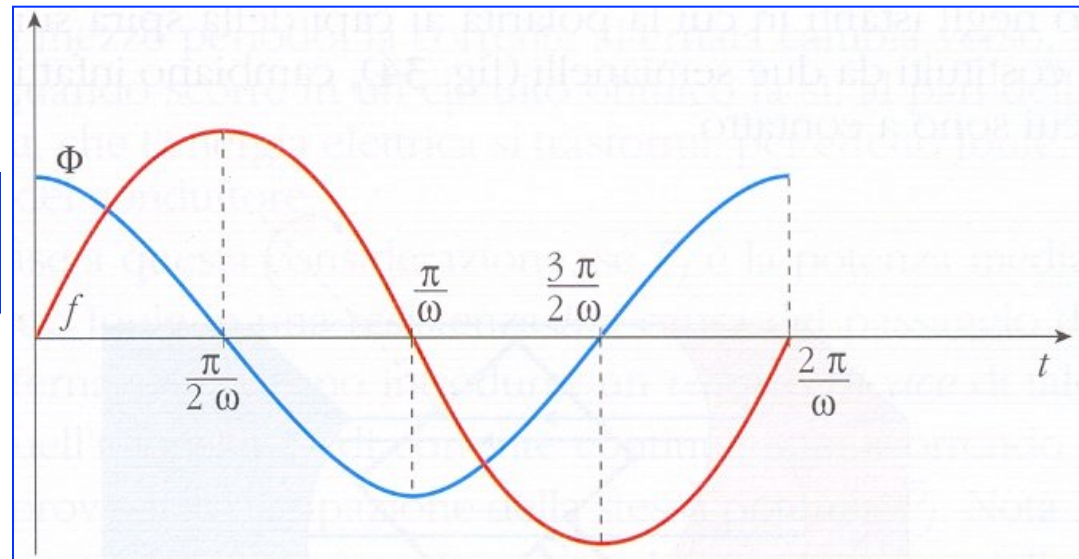
# ALTERNATORE

L'alternatore genera una tensione alternata, che cambia continuamente valore, ma si ripete sempre uguale dopo un periodo  $T=2\pi$ , che è il tempo impiegato dalla spira a fare un giro completo.

La forma matematica che assume la  $f_{em}$  non può essere che una funzione sinusoidale:

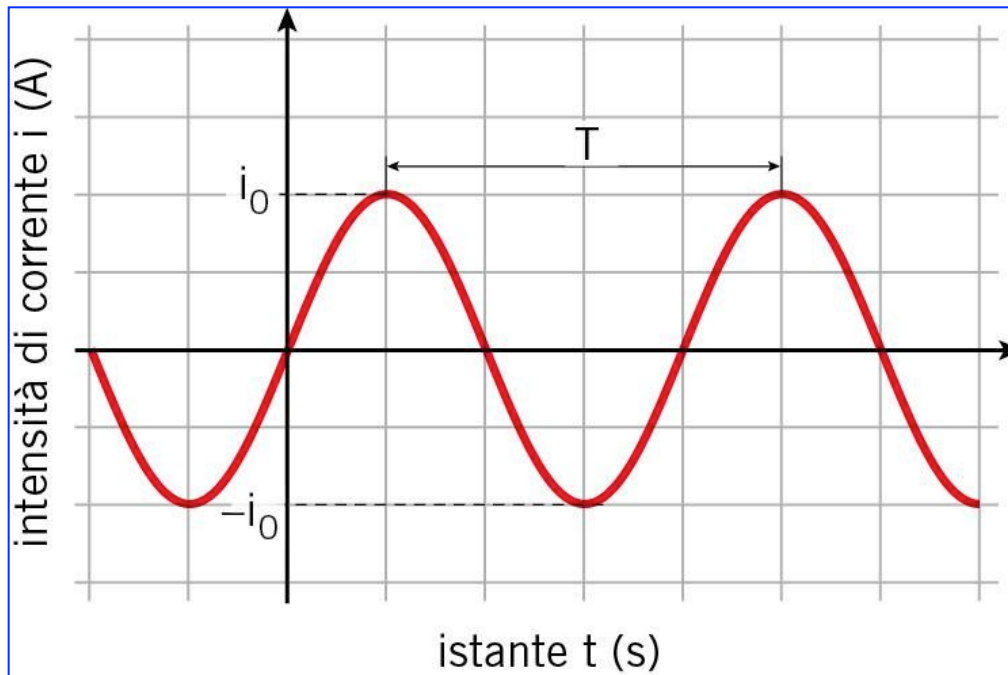
$$f_{em}(t) = f_0 \sin(\omega t)$$

$$\alpha = \omega t$$



## ALTERNATORE

Questa tensione alternata produce una corrente alternata che scorre con intensità variabile, per metà periodo in un senso e per l'altra metà periodo nel senso opposto.



$$i(t) = i_0 \sin(\omega t)$$

Sia per la  $f_{em}(t)$  che per la  $i(t)$ , il periodo  $T$  e la frequenza  $f$  di oscillazione si deducono dalla pulsazione  $\omega$  grazie alle formule:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

La corrente alternata che fluisce nei fili dei nostri impianti domestici ha una frequenza  $f=50$  Hz (periodo  $T=0,020$  s). Negli Stati Uniti la  $f=60$  Hz.

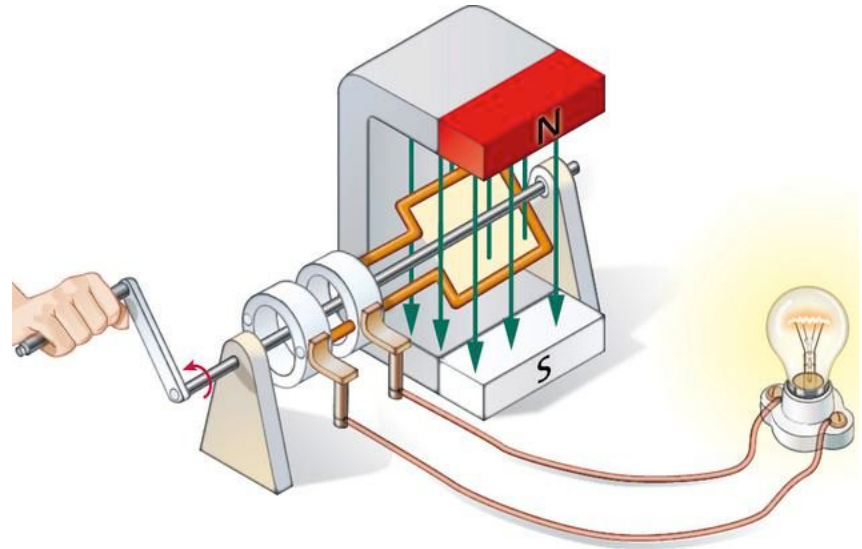
## Calcolo della $f_{em}$ alternata

Facendo ruotare la spira con velocità angolare  $\omega$  costante, l'angolo  $\alpha$  tra il campo magnetico  $\mathbf{B}$  e il vettore superficie  $\mathbf{S}$ , varia con la legge:

$$\alpha = \omega t$$

Se  $\mathbf{B}$  è costante, il flusso di  $\mathbf{B}$  è dato dall'espressione:

$$\Phi(\mathbf{B}) = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{S}} = BS \cos \alpha = BS \cos(\omega t)$$



## ALTERNATORE

La legge di Faraday-Neumann permette di calcolare la  $f_{em}$  indotta all'interno della spira:

$$f_{em} = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = - \frac{d}{dt} [BS \cos(\omega t)] = \xrightarrow{\text{derivata funzione}} = \omega BS \sin(\omega t)$$

$$f_{em}(t) = f_0 \sin(\omega t)$$

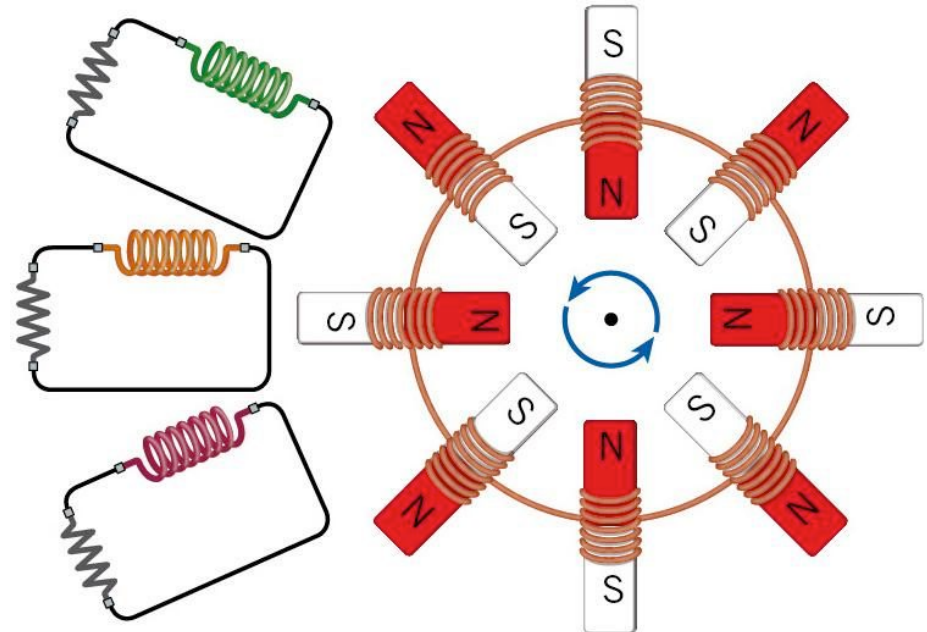
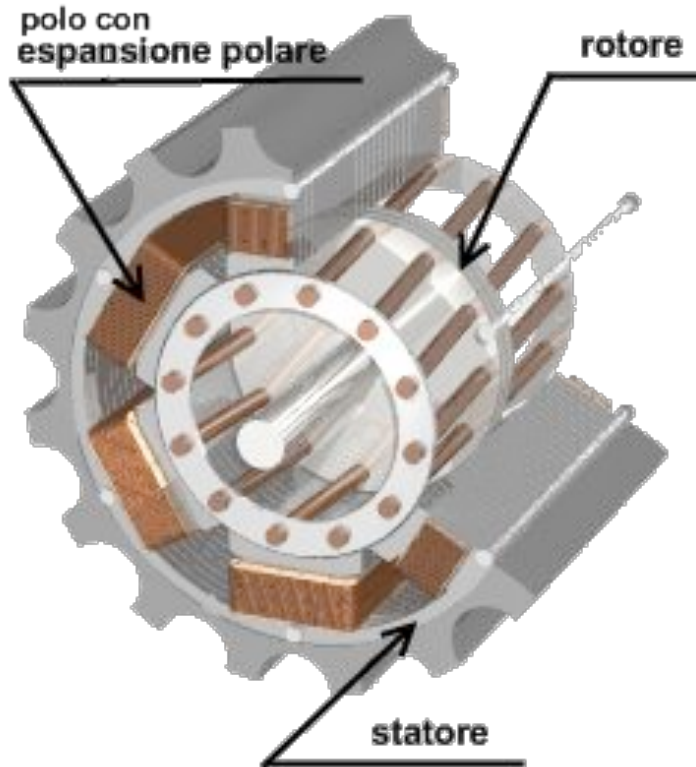
$$\text{dove : } f_0 = \omega BS$$

In un circuito che contiene una resistenza  $R$  tale  $f_{em}$  genera una corrente variabile nel tempo:

$$i(t) = i_0 \sin(\omega t)$$

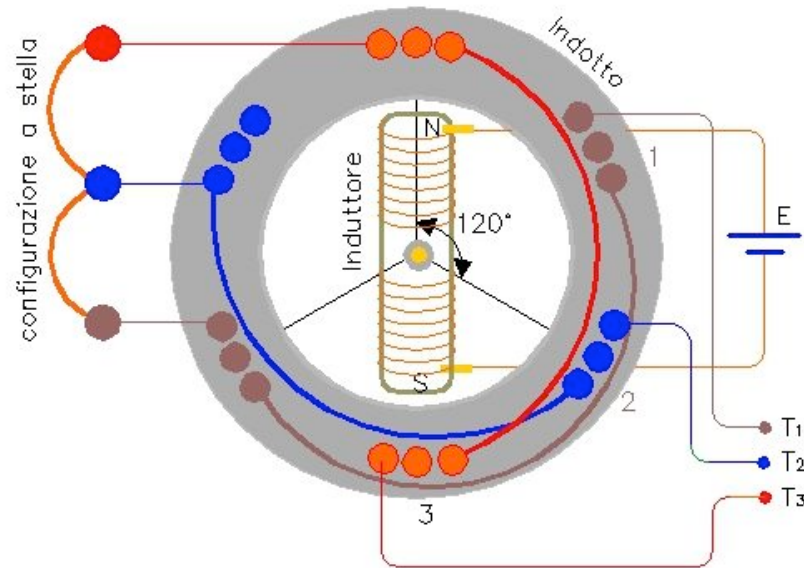
$$\text{dove : } i_0 = \frac{f_0}{R}$$

# ALTERNATORE



Gli alternatori nelle centrali elettriche sono costituiti da un rotore a cui sono fissati gli elettromagneti, e da uno statore, che consiste in tre bobine fisse nelle quali sono prodotte le correnti indotte.

## ALTERNATORE



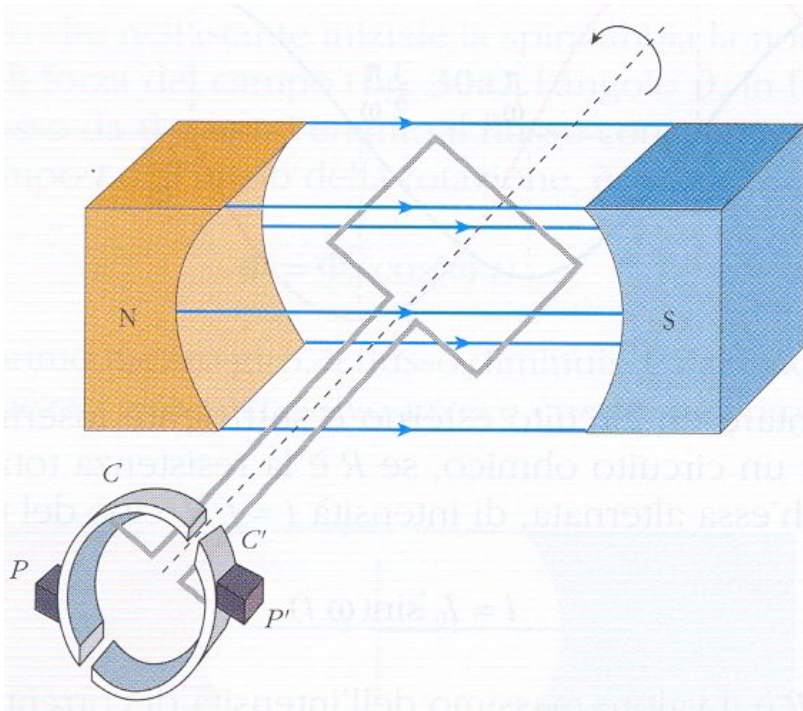
In questo modo si ottengono, in uscita dall'alternatore, tre tensioni indipendenti, con la stessa ampiezza e la stessa frequenza e che sono progettate in modo da essere sfasate di  $120^\circ$ .

L'insieme delle tre correnti si chiama **corrente trifase**, mentre ciascuna di esse prende il nome di fase.

Il sistema trifase è un sistema combinato di 3 circuiti a corrente alternata (di produzione, distribuzione e utilizzazione dell'energia elettrica) aventi la stessa frequenza e tre tensioni alternate uguali sfasate tra loro di  $120^\circ$ .

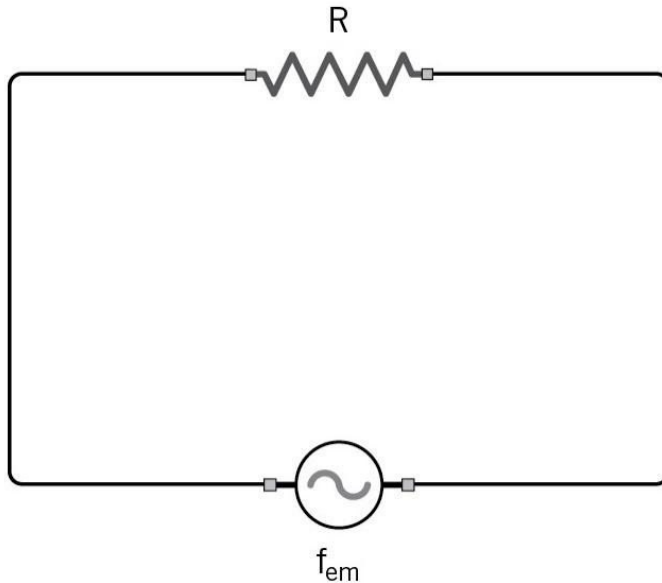
Rispetto ad un sistema a corrente alternata monofase, per il sistema trifase, a parità di potenza elettrica, il costo del materiale e dei cavi elettrici viene dimezzato.

Grazie al fenomeno dell'induzione elettromagnetica, è anche possibile realizzare generatori di corrente continua, le **dinamo**.



Nell'alternatore i collettori C e C' cambiano polarità ogni volta che la spira è perpendicolare al campo magnetico, nella dinamo le spazzole mantengono sempre la stessa polarità.

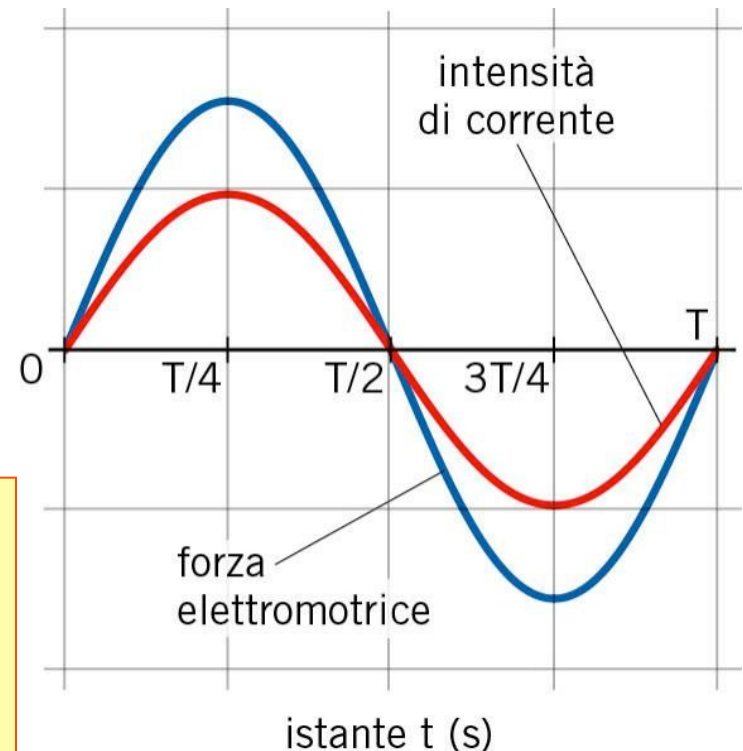
## CIRCUITO OHMICO



La  $f_{em}(t) = f_0 \sin(\omega t) = Ri(t)$  alternata genera una corrente alternata  $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$ :

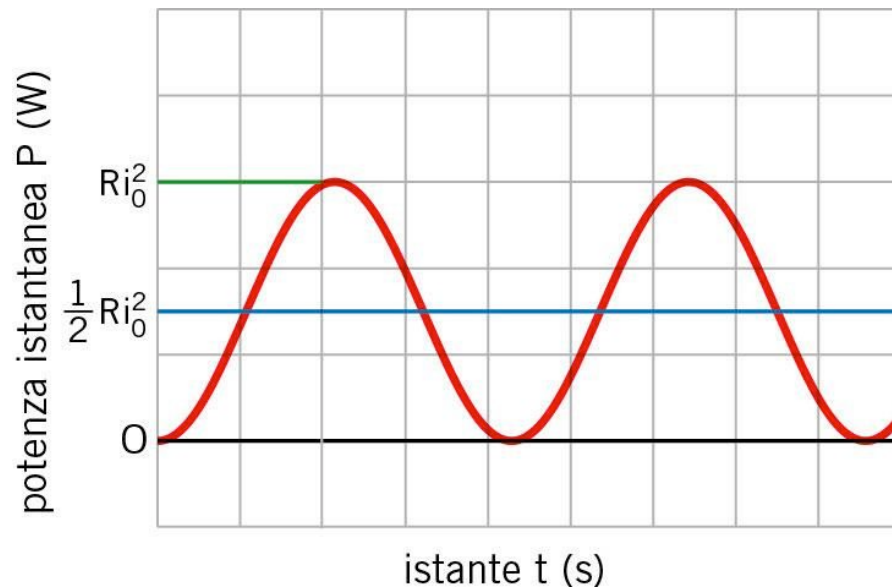
La  $f_{em}(t)$  e la  $i(t)$  sono funzioni seno dello stesso argomento:

In un circuito ohmico alimentato da una tensione alternata, la  $f_{em}(t)$  e la  $i(t)$  sono sempre in fase.



In un circuito ohmico attraversato da una corrente alternata  $i(t)$  ci sarà una potenza dissipata istantanea  $P(t)$  (linea rossa) per effetto Joule:

$$P(t) = R [i(t)]^2$$



La potenza media (linea blu) dissipata per effetto Joule è:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} Ri_0^2$$

La stessa potenza media dissipata per effetto Joule è provocata dalla seguente corrente continua di intensità  $i_{\text{eff}}$ :

### **Valore efficace di una corrente**

Il *valore efficace* di una corrente è quell'intensità  $i_{\text{eff}}$  di corrente continua che, scorrendo nella resistenza  $R$ , provoca la dissipazione della stessa potenza media:

$$i_{\text{eff}} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$$

Infatti:

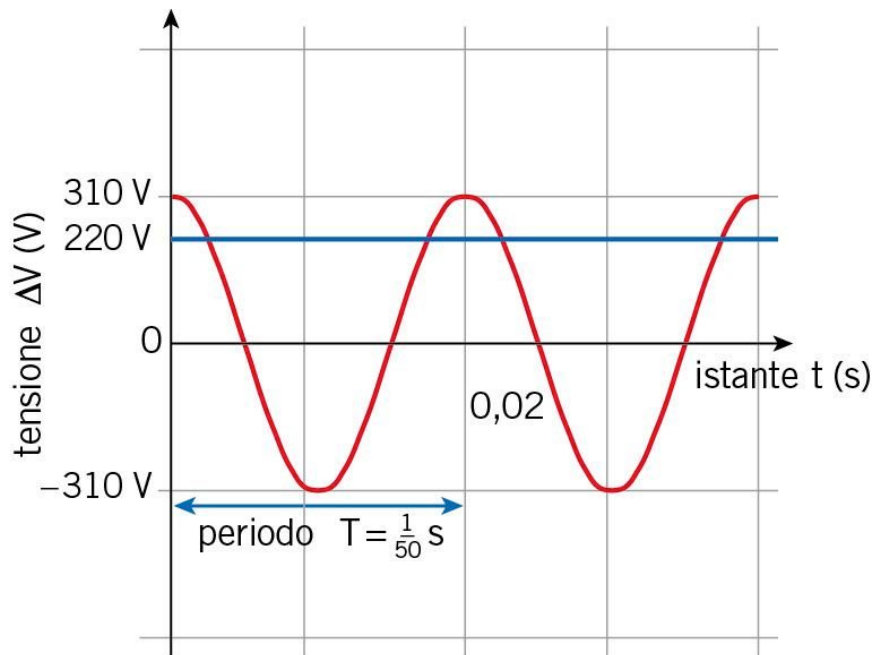
$$P = R i_{\text{eff}}^2 = R \left( \frac{i_0}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} R i_0^2 = \bar{P}$$

In modo analogo, si definisce il **valore efficace**  $f_{\text{eff}}$  di una fem alternata:

$$f_{\text{eff}} = \frac{f_0}{\sqrt{2}}$$

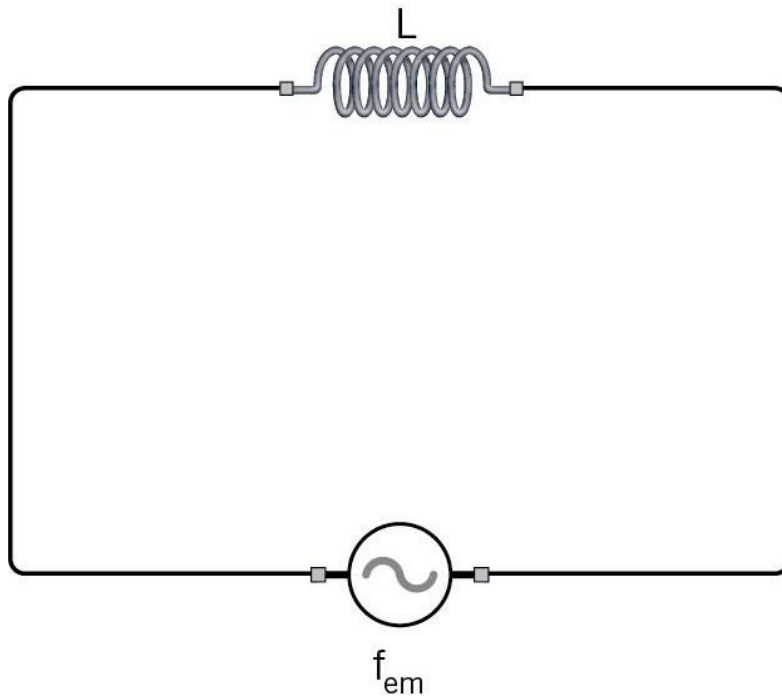
In ambito tecnico e professionale i valori efficaci della  $i(t)$  e della  $f_{em}(t)$  sono molto più usati delle corrispondenti ampiezze  $i_0$  e  $f_0$ .

Negli impianti elettrici domestici la forza elettromotrice è di 220 V, quindi si intende dire che  $f_{eff} = 220$  V.



A circuito aperto la tensione alternata oscilla tra il valore massimo  $f_0 = \sqrt{2}f_{eff} = 310$  V e il valore minimo  $-310$  V.

## CIRCUITO INDUTTIVO

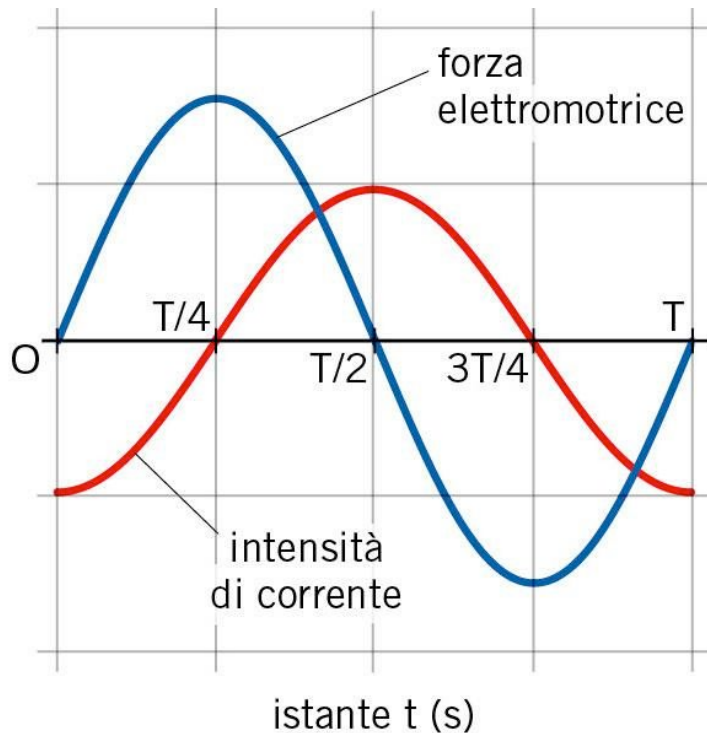


Nel circuito è presente, oltre alla  $f_{em}(t)$  del generatore, anche una  $f_{em}(t)$  autoindotta nella bobina, per cui il secondo principio di Kirchhoff ci permette di scrivere la seguente equazione differenziale:

$$f_{em}(t) - f_{indotta}(t) = 0 \Rightarrow f_0 \sin(\omega t) - L \frac{di}{dt} = 0$$

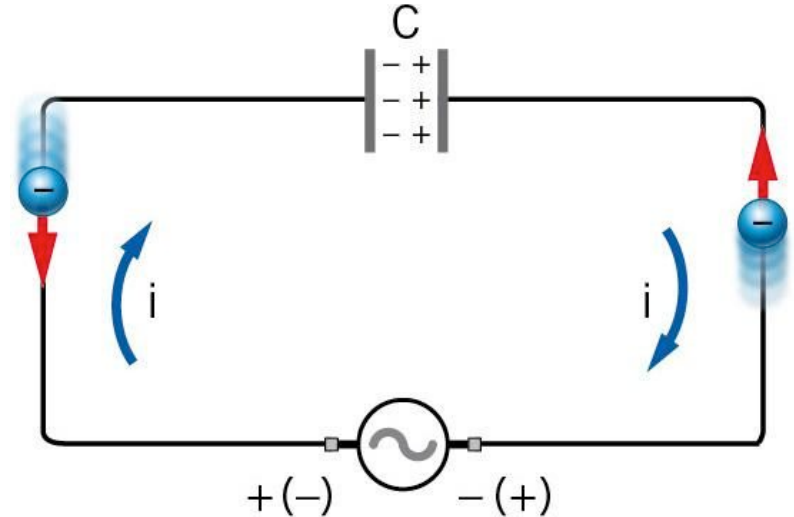
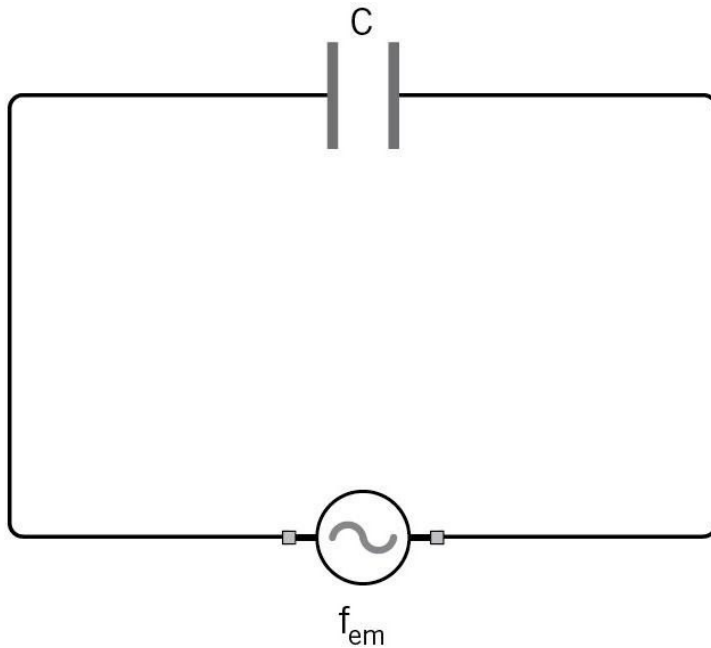
che ammette come soluzione la corrente istantanea  $i(t)$  nel circuito induttivo:

$$i(t) = \frac{f_0}{\omega L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{f_0}{\omega L} \cos(\omega t)$$



La corrente in un circuito induttivo è alternata come la tensione, ha lo stesso periodo, ma è sfasata rispetto a essa, ossia ha un ritardo di fase, pari a  $\pi/2$ .

## CIRCUITO CAPACITIVO



Quando il generatore inverte polarità le armature del condensatore iniziano a scaricarsi, per poi caricarsi del segno opposto.

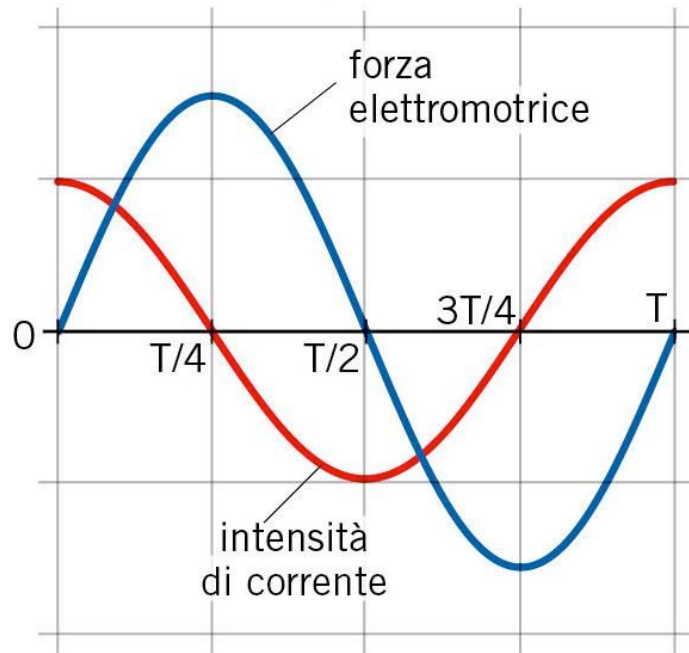
Applicando il secondo principio di Kirchhoff al circuito capacitivo, si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$f_{\text{em}}(t) - f_{\text{condensatore}} = 0 \Rightarrow f_0 \sin(\omega t) - \frac{Q}{C} = 0$$

che ammette come soluzione la corrente istantanea  $i(t)$  nel circuito capacitivo:

$$i(t) = \omega C f_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \omega C f_0 \cos(\omega t)$$

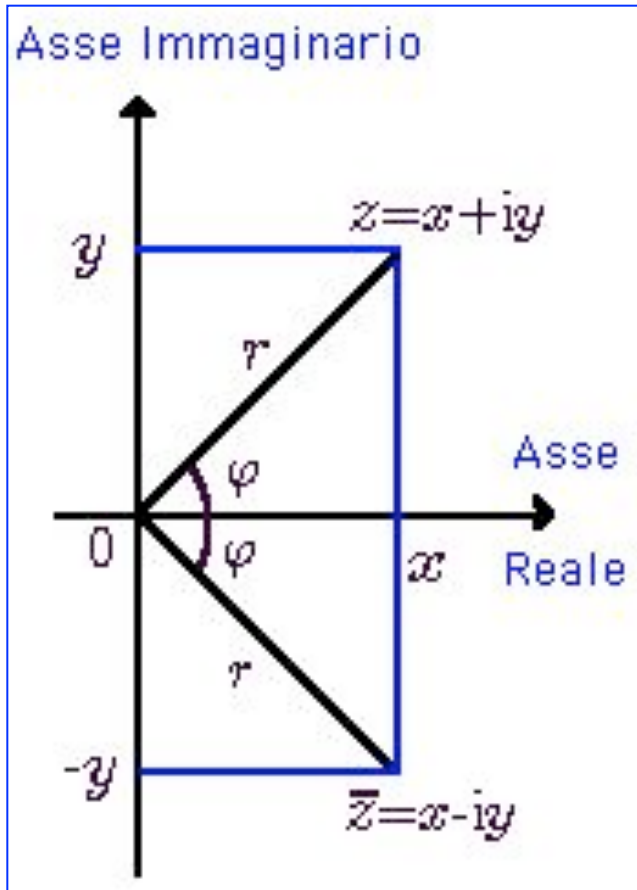
## CIRCUITI IN CORRENTE ALTERNATA CA



La corrente in un circuito capacitivo è alternata come la tensione, ha lo stesso periodo, ma è sfasata rispetto a essa, ossia ha un anticipo di fase, pari a  $\pi/2$ .

## LEGGE DI OHM PER CIRCUITI CA

Utilizziamo i numeri complessi per scrivere e applicare la legge di Ohm ai circuiti in CA.



Modulo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Argomento

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \varphi$$

Componenti

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

Forma algebrica

$$z = x + iy$$

Forma trigonometrica

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

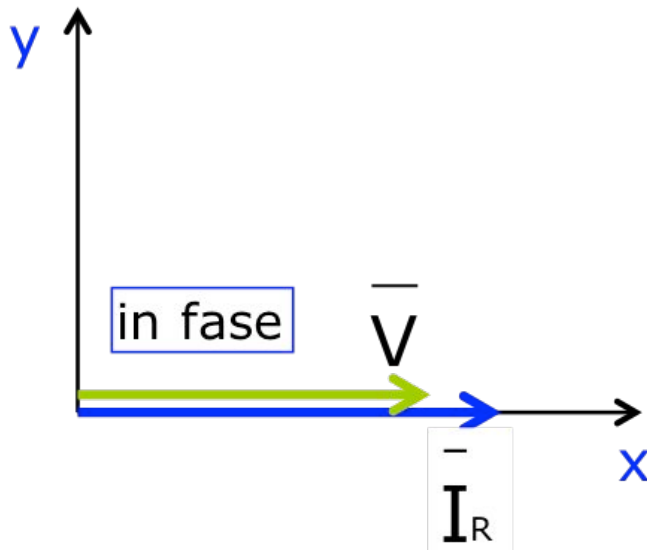
Forma esponenziale

$$z = re^{i\varphi}$$

## CIRCUITO OHMICO

La corrente e la tensione in un circuito ohmico sono in fase.

$$i(t) = \frac{f_0}{R} \text{sen}(\omega t) = i_0 \text{sen}(\omega t)$$



Legge di Ohm

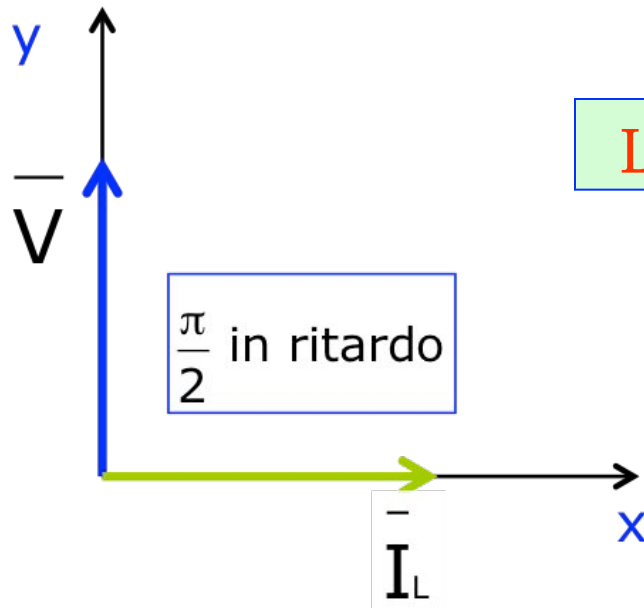
$$\bar{V} = R \bar{I}_R$$

$R$  = resistenza

## CIRCUITO INDUTTIVO

La corrente in un circuito induttivo ha un ritardo di fase rispetto alla tensione, pari a  $\pi/2$ .

$$i(t) = \frac{f_0}{\omega L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{f_0}{X_L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = i_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$



Legge di Ohm

$$\overline{V} = iX_L \overline{I}_L$$

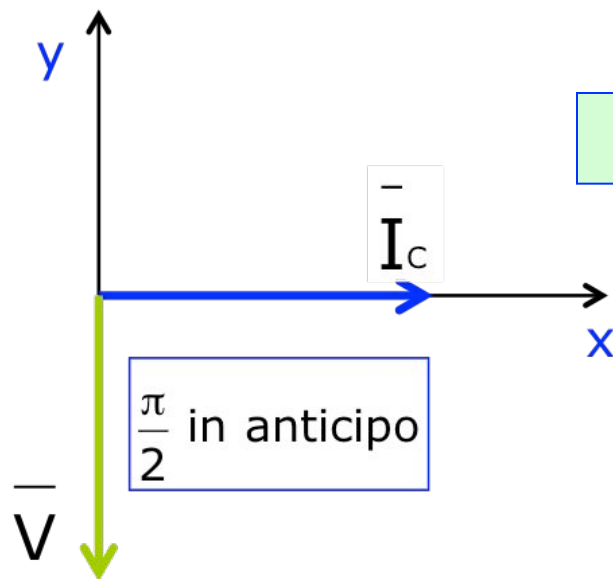
Reattanza induttiva

$$X_L = \omega L$$

## CIRCUITO CAPACITIVO

La corrente in un circuito capacitivo ha un anticipo di fase rispetto alla tensione, pari a  $\pi/2$ .

$$i(t) = \omega C f_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{f_0}{X_c} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = i_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$



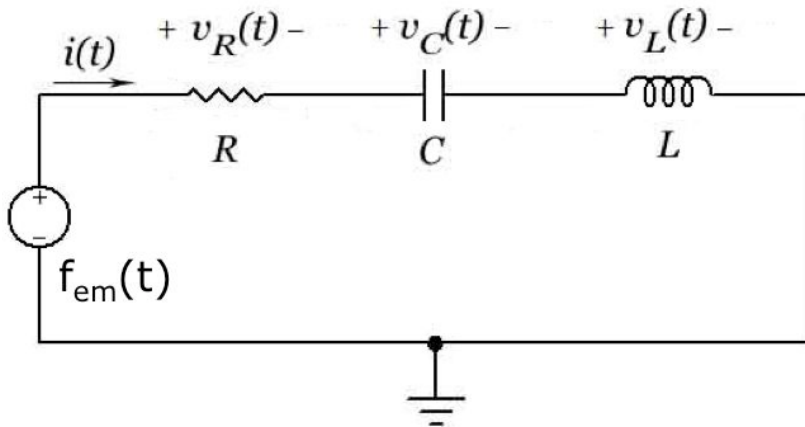
Legge di Ohm

$$\bar{V} = -iX_c \bar{I}_c$$

$$X_c = \frac{1}{\omega C}$$

Reattanza capacitiva

## CIRCUITO RLC



Con la presenza di  $R$ ,  $L$  e  $C$ , il circuito è attraversato da una corrente  $i(t)$  di tipo sinusoidale, avente la stessa frequenza della  $f_{em}(t)$ , ma sfasata rispetto ad essa di un certo angolo  $\varphi$  (da determinare):

$$f_{em}(t) = f_0 \sin(\omega t)$$

$$i(t) = i_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

Applichiamo il principio di Kirchhoff in forma complessa:

$$\bar{V} = \bar{V}_R + \bar{V}_L + \bar{V}_C = R\bar{I} + iX_L\bar{I} - iX_C\bar{I} = \bar{I}\left[R + i(X_L - X_C)\right]$$

Se indichiamo con:

$$\bar{Z} = R + i(X_L - X_C)$$

l'**impedenza** del circuito, ossia la resistenza complessiva che tiene conto sia degli effetti ohmici che reattivi, otteniamo:

Legge di Ohm

$$\bar{V} = \bar{Z} \cdot \bar{I}$$

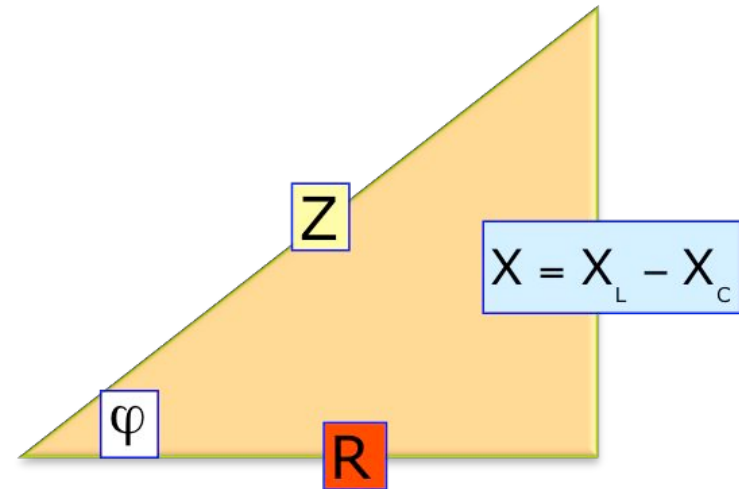
Utilizzando i numeri complessi, si ha:

Modulo impedenza

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

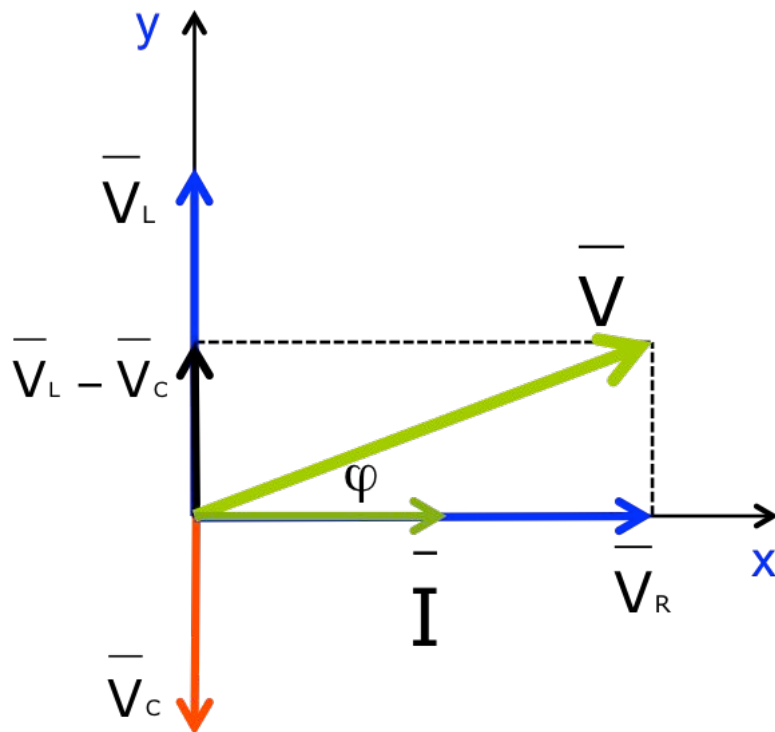
Argomento impedenza

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{X}{R}$$

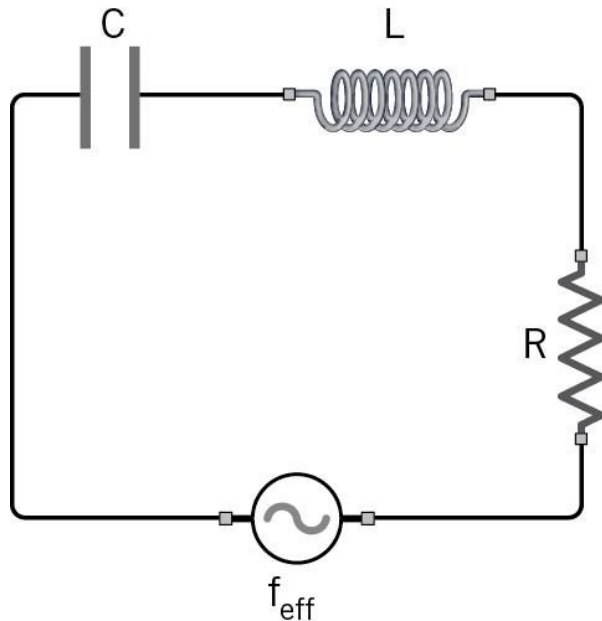


## LEGGE DI OHM PER CIRCUITI CA

L'argomento dell'impedenza coincide con l'angolo di sfasamento tra la tensione e la corrente nel circuito RLC:



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{X}{R}$$



Abbiamo visto che gli effetti reattivi sono rappresentati dalla reattanza induttiva e capacitiva:

$$X_L = \omega L \qquad X_C = \frac{1}{\omega C}$$

- L'effetto della bobina è direttamente proporzionale a  $\omega$ : è tanto maggiore quanto maggiore è la frequenza.
- L'effetto del condensatore è inversamente proporzionale a  $\omega$ : è alto a basse frequenze ed è trascurabile ad alte frequenze.

È interessante notare che esiste un valore  $\omega_0$  della pulsazione per cui il circuito, nonostante comprenda anche un condensatore e un induttore, si comporta come un circuito puramente resistivo ( $Z=R$ ;  $\varphi=0$ ).

Poiché:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

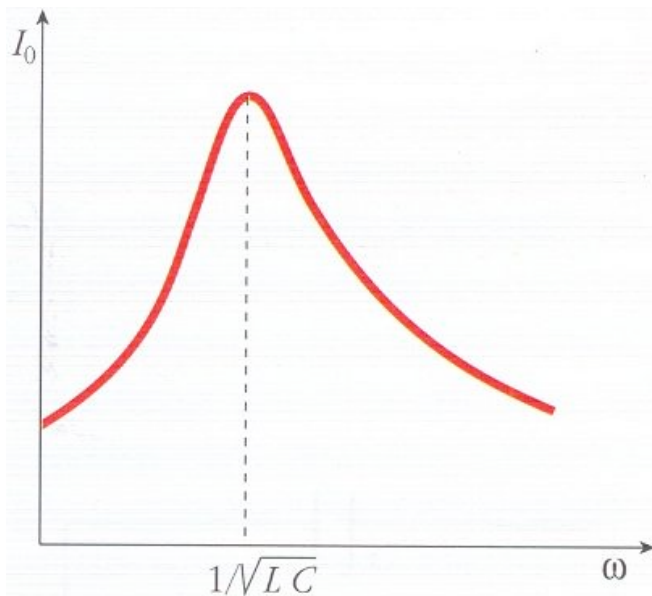
allora la condizione affinché sia  $Z=R$  e  $\varphi=0$  è:

condizione di risonanza

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$

Dalla condizione di risonanza si ricava il valore della pulsazione  $\omega_0$  in corrispondenza del quale il circuito si comporta in modo puramente resistivo:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$



Quando è soddisfatta la condizione di risonanza la corrente è in fase con la tensione e la sua ampiezza assume il massimo valore possibile  $I_0 = f_0/R$ .

In un circuito a CA, la potenza assorbita dal circuito  $P(t)=f(t) \cdot i(t)$  varia istante per istante. Nelle applicazioni pratiche, però, è più utile conoscere la potenza media, cioè la rapidità media con cui l'energia elettrica viene trasformata in altre forme:

Potenza media assorbita

$$\bar{P} = f_{\text{eff}} i_{\text{eff}} \cos \varphi$$

Potenza media assorbita  
(forma usata)

$$P = V \cdot I \cdot \cos \varphi$$

Fattore di potenza

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{R}{Z}$$

**ricordare**

V e I sono i valori efficaci

- Se il carico è resistivo (tensione e corrente in fase  $\varphi=0$ ), la potenza, chiamata **potenza attiva o reale**, è massima e assume sempre valori positivi:

$$\bar{P} = V \cdot I$$

- Se il carico è induttivo o capacitivo (tensione e corrente sfasate  $\varphi=\pm\pi/2$ ), la potenza attiva è nulla:

$$\bar{P} = 0$$

Questo significa che un carico capacitivo o induttivo non dissipa potenza, ossia non produce mediamente alcuna effettiva trasformazione di energia.

I carichi reattivi accumulano energia nel campo elettrico (capacità) o nel campo magnetico (induttanza), in alcune frazioni del periodo, e la restituiscono completamente nelle altre fasi dello stesso periodo.

Risulta evidente che la potenza in gioco in un carico reattivo è una potenza scambiata tra generatore e utilizzatore. Viene chiamata **potenza reattiva** in quanto non si tratta di una potenza in senso proprio (poiché non viene dissipata):

Potenza reattiva

$$Q = V \cdot I \cdot \sin\varphi$$

(unità di misura: VAR voltampere reattivi)

E' utile, nello studio dei circuiti in CA, introdurre una terza potenza, chiamata **potenza apparente**:

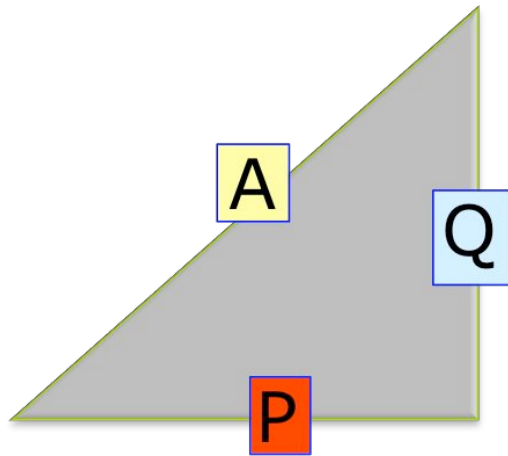
Potenza apparente

$$A = V \cdot I$$

(unità di misura: VA voltampere)

Anche in questo caso non si può parlare di potenza in senso proprio, in quanto la potenza apparente  $A$  tiene conto sia di quella scambiata tra generatore e carico (potenza reattiva  $Q$ ) che di quella dissipata nel carico (potenza reale  $P$ ).

La potenza apparente si può rappresentare tramite un numero complesso:



$$\overline{A} = P + iQ$$

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$P = RI^2 \text{ parte Re}$$

$$Q = XI^2 \text{ parte Im}$$

## Teorema di Boucherot

La potenza apparente totale è la somma delle potenze apparenti relative a ciascuna impedenza:

$$\overline{A} = \sum_{k=1}^n \overline{A}_k = \sum_{k=1}^n P_k + i \sum_{k=1}^n Q_k$$

Utilizzatori in CA come lampade a filamento, scaldacqua, forni elettrici, ecc. essendo carichi resistivi, assorbono tutta la potenza erogata dal generatore che li alimenta.

Altri utilizzatori come motori, saldatrici, trasformatori, ecc. impegnano, oltre alla potenza attiva  $P$  anche potenza reattiva  $Q$  per il loro funzionamento (per esempio per eccitare i circuiti magnetici).

L'energia reattiva non viene misurata dai contatori di energia, ma va presa in considerazione nel dimensionamento dell'impianto elettrico in quanto produce perdite per effetto Joule.

Poiché l'utente paga solo l'energia attiva consumata, ne consegue che l'ente fornitore di energia, e non l'utente, deve sopportare il costo, in termini di perdite di energia dovute all'energia reattiva. Cosa fa l'ente per minimizzare il costo?

La quantità che determina la frazione di potenza dissipata dal carico è il **fattore di potenza**:

**Fattore di potenza**

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{R}{Z}$$

Se il carico fosse puramente resistivo ( $\cos\varphi=1$ ), consumerebbe solo potenza attiva, e l'utente pagherebbe tale energia.

Poiché il carico non è puramente resistivo, per la presenza di componenti reattivi, allora  $\cos\varphi<1$ .

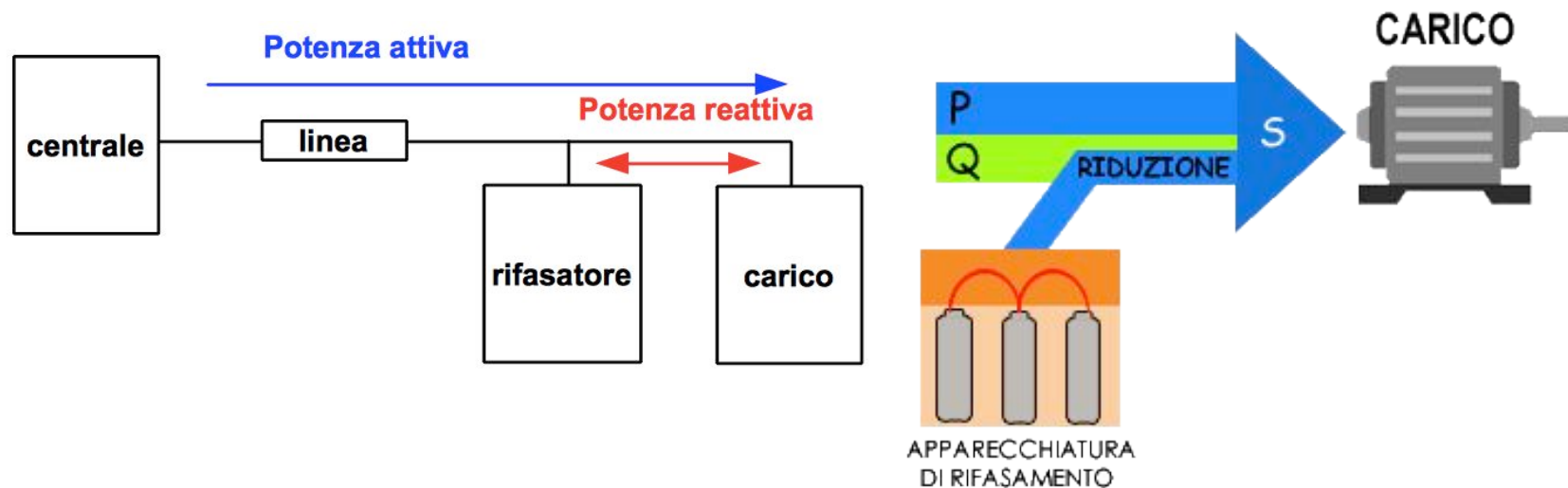
Pertanto, l'azienda erogatrice dell'energia impone un limite al minimo valore del fattore di potenza, e cioè  $\cos\varphi=0,9$ .

Per l'utenza domestica non bisogna fare nessun intervento all'impianto elettrico per ottenere questo valore.

Per grandi utenze (industrie, grandi centri commerciali, ecc.) bisogna intervenire sull'impianto elettrico attraverso il cosiddetto **rifasamento**.

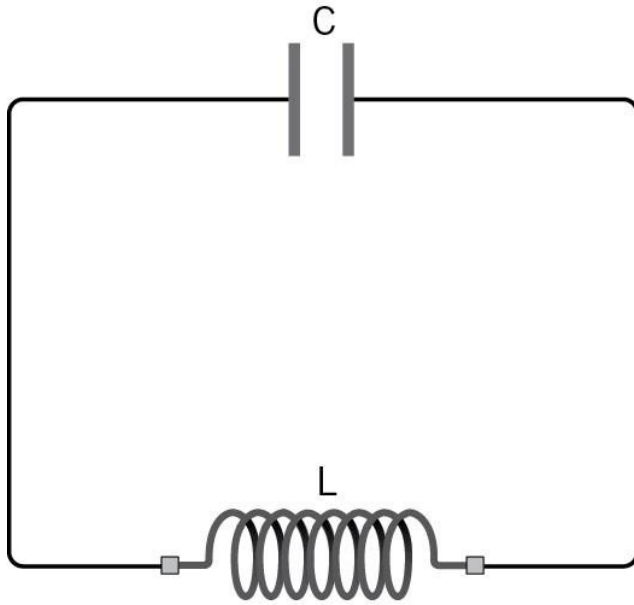
Si definisce **rifasamento** qualsiasi provvedimento inteso ad aumentare il **fattore di potenza** ( $\cos\varphi$ ), allo scopo di ridurre, a pari potenza attiva assorbita, la potenza reattiva, e quindi il valore della corrente che circola nell'impianto.

Come si effettua il rifasamento? Si pone in parallelo al carico, tipicamente induttivo, un condensatore:



Tenendo presente che l'energia reattiva induttiva è di segno opposto a quella reattiva capacitiva, l'inserimento del condensatore riduce la potenza reattiva  $Q$  e aumenta il fattore di potenza.

## CIRCUITO LC



Si dimostra che la corrente presente in questo circuito ha la forma:

$$i(t) = i_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \varphi_0 = \text{fase iniziale}$$

Mentre la ddp ai capi di C è data da:

$$\Delta V_c(t) = i_0 \sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Le formule ricavate sono analoghe a quelle che descrivono le oscillazioni del moto armonico.

Infatti, questo comportamento è ottenuto dal sistema in modo spontaneo, senza l'effetto di una  $f_{em}(t)$  alternata (nel circuito non è presente nessun generatore).

È per questa analogia con il moto armonico che il circuito LC è spesso chiamato **circuito oscillante**.

Analizziamo la situazione da un punto di vista energetico.

Si dimostra che la somma dell'energia  $W_C(t)$  nel campo elettrico del condensatore e quella  $W_L(t)$  nel campo magnetico dell'induttanza, è data da:

$$W_C(t) + W_L(t) = \frac{1}{2} L i_0^2$$

Mentre i contributi energetici  $W_C(t)$  e  $W_L(t)$  variano nel tempo, l'energia totale del sistema rimane costante.

In conclusione:

Al trascorrere del tempo l'energia si trasferisce dal condensatore all'induttanza, e viceversa, mantenendo invariato il proprio valore complessivo:

$$W_C(t) + W_L(t) = \frac{1}{2} Li_0^2$$

## Analogia con il sistema massa-molla

Tenendo presente le seguenti corrispondenze:

carica  $Q$  condensatore



spostamento  $x$  massa

corrente  $i$  nell'induttanza



velocità istantanea massa

allora si hanno le seguenti:

energia  $W_C$  nel  
condensatore



energia potenziale  
elastica  $U$

energia  $W_L$  nell'induttanza



Energia cinetica massa

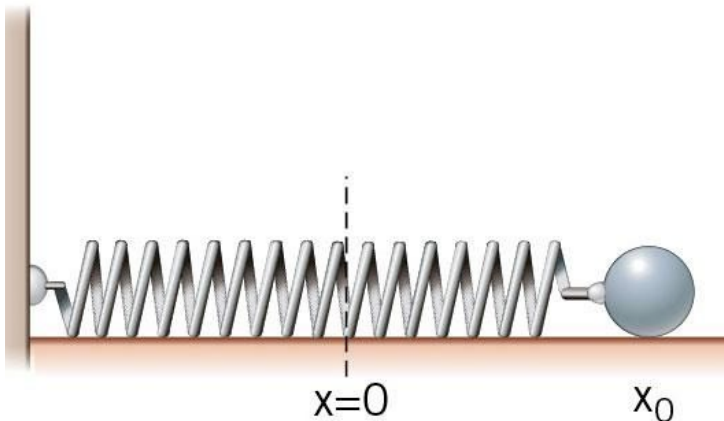
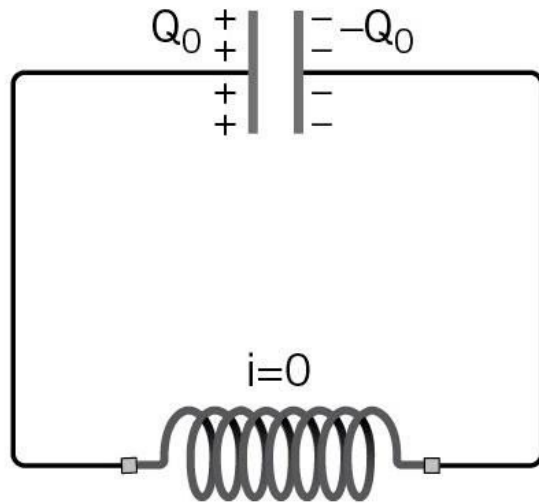
Visto che nel sistema massa-molla, in presenza di sole forze conservative (non agiscono forze dissipative come l'attrito) l'energia meccanica si conserva:

$$E_M = K + U = \text{costante}$$

allora, anche nel circuito LC l'energia totale si conserva, in assenza di elementi dissipativi di energia come la resistenza R:

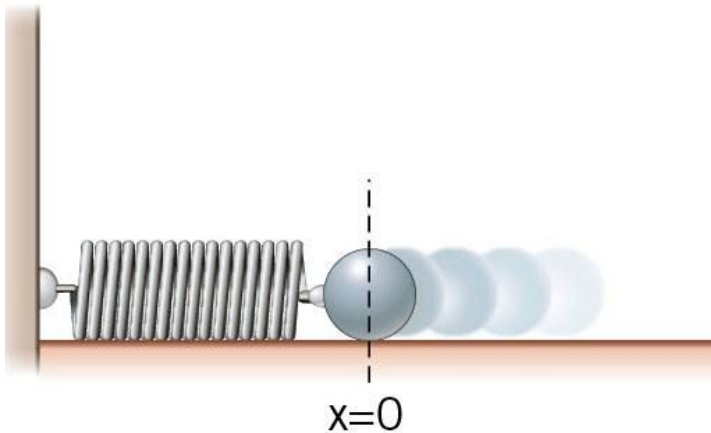
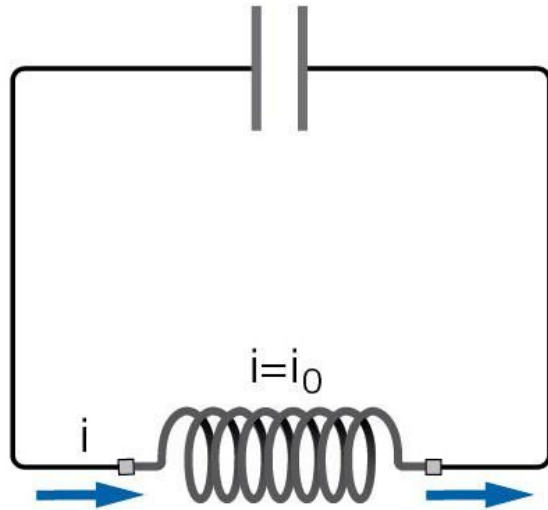
$$W_C + W_L = \text{costante}$$

## CIRCUITO LC



La condizione in cui il condensatore ha la massima carica ( $W_C = \max$ ) e, contemporaneamente la corrente istantanea è nulla ( $W_L = 0$ ) corrisponde a quella in cui la massa attaccata alla molla si trova, ferma, nella condizione di massima energia potenziale ( $U = \max$  e  $K = 0$ ).

## CIRCUITO LC



La condizione in cui il condensatore è istantaneamente scarico ( $W_C=0$ ) e la corrente  $i$  è massima ( $W_L=\max$ ) corrisponde a quella in cui la massa, che passa per il punto di equilibrio del sistema, ha il massimo valore dell'energia cinetica ( $K=\max$ ) mentre l'energia potenziale è nulla ( $U=0$ ).

Le due condizioni descritte sono separate da un quarto di periodo; dopo un ulteriore quarto di periodo il condensatore è ancora completamente carico, ma con il segno invertito rispetto al caso precedente (e la massa è di nuovo alla sua massima elongazione, ma dalla parte opposta rispetto).

Poi il condensatore inizia a scaricarsi e la massa ritorna a muoversi, per tornare dopo un altro mezzo periodo alla condizione di partenza e, quindi, ricominciare da capo con una nuova oscillazione.

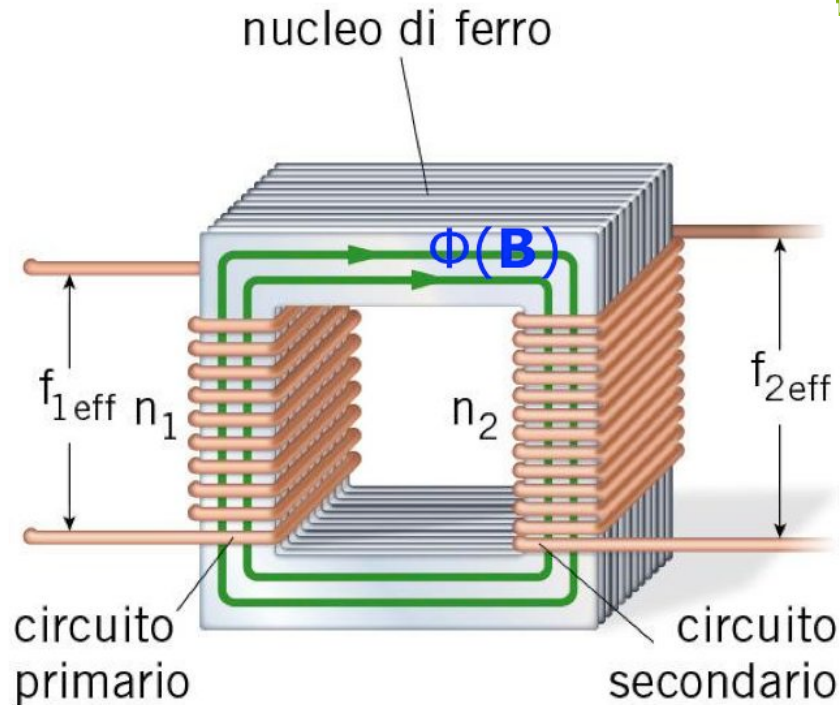
**Il trasformatore è un dispositivo capace di modificare il valore della tensione e della corrente alternata.**

I trasformatori servono per innalzare e abbassare la tensione dalla rete di distribuzione dell'energia elettrica.

Sono anche utilizzati per alimentare dispositivi elettronici, come i telefoni cellulari, che si ricaricano con una tensione molto minore dei 220 V della rete elettrica.



# TRASFORMATORE



Un trasformatore è costituito da un nucleo di ferro a elevata permeabilità magnetica, intorno al quale sono avvolte due bobine con diverso numero di spire.

- Il circuito primario, alimentato da una tensione alternata, genera un flusso di campo magnetico, variabile periodicamente nel tempo con la stessa frequenza della corrente che lo ha generato;

- Nel circuito secondario si genera, per induzione elettromagnetica, una  $f_{em}(t)$  alternata (e quindi una corrente indotta) della stessa frequenza di quella con cui è alimentato il primario.

Si dimostra che il valore della tensione efficace in uscita è dato da:

The diagram illustrates the transformer voltage ratio formula,  $f_{2eff} = f_{1eff} \frac{n_2}{n_1}$ , which is highlighted in a yellow box. Four labels with leader lines point to the variables in the formula:

- tensione efficace in uscita (V)** points to  $f_{2eff}$ .
- tensione efficace in ingresso (V)** points to  $f_{1eff}$ .
- numero di spire del secondario** points to  $n_2$ .
- numero di spire del primario** points to  $n_1$ .

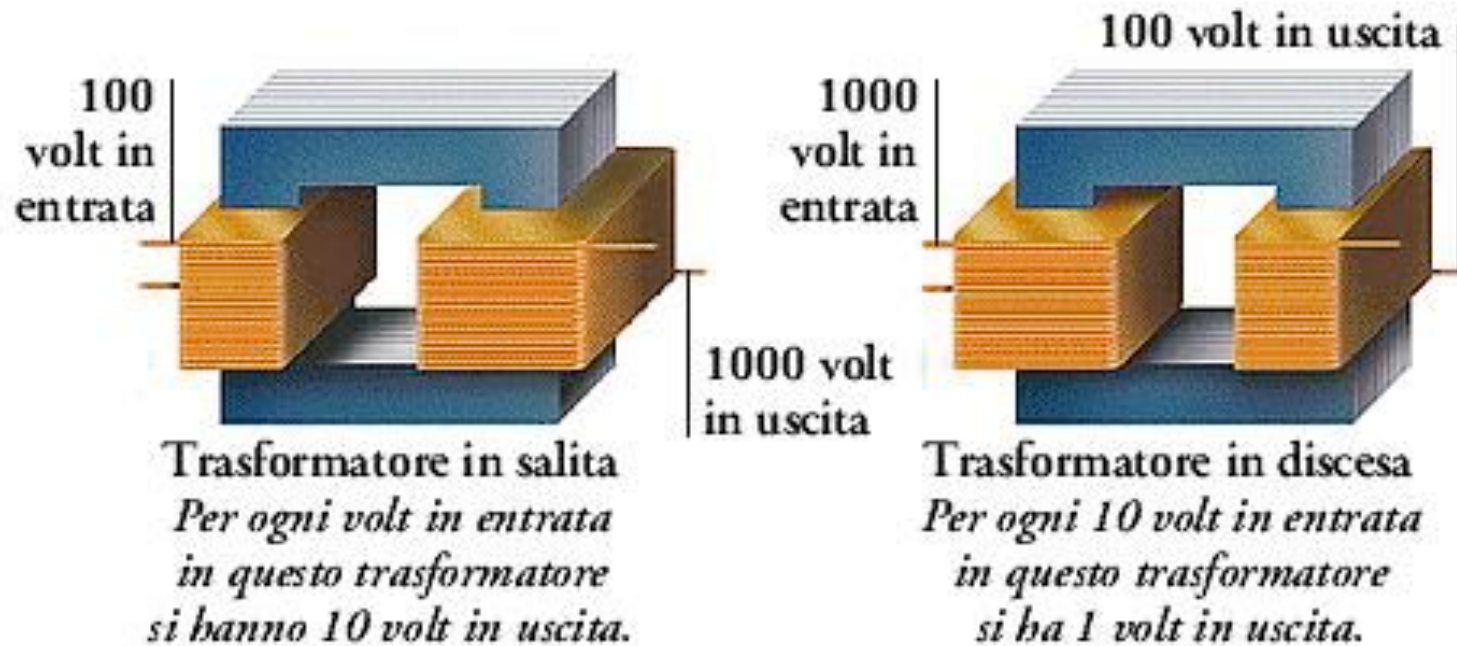
Quindi, costruendo il trasformatore con un numero opportuno di spire nei due circuiti, è possibile modificare il valore della tensione alternata nel modo che si desidera, operando sul **rapporto di trasformazione K**:

$$K = \frac{n_2}{n_1}$$

Un trasformatore non può funzionare in corrente continua: una tensione costante applicata al primario genera un flusso costante, e non ci sarebbe nessuna  $f_{em}$  indotta nel secondario.

$K > 1 \Rightarrow n_2 > n_1 \Rightarrow f_{2\text{eff}} > f_{1\text{eff}} \Rightarrow$  trasformatore elevatore

$K < 1 \Rightarrow n_2 < n_1 \Rightarrow f_{2\text{eff}} < f_{1\text{eff}} \Rightarrow$  trasformatore abbassatore



Per il principio di conservazione dell'energia (assenza di dispersione), la potenza in entrata nel primario è uguale a quella in uscita nel secondario:

$$P_{\text{ingresso}} = P_{\text{uscita}} \Rightarrow f_{1\text{eff}} i_{1\text{eff}} = f_{2\text{eff}} i_{2\text{eff}}$$

Quindi:

**i valori efficaci delle correnti sono inversamente proporzionali a quelli delle tensioni:**

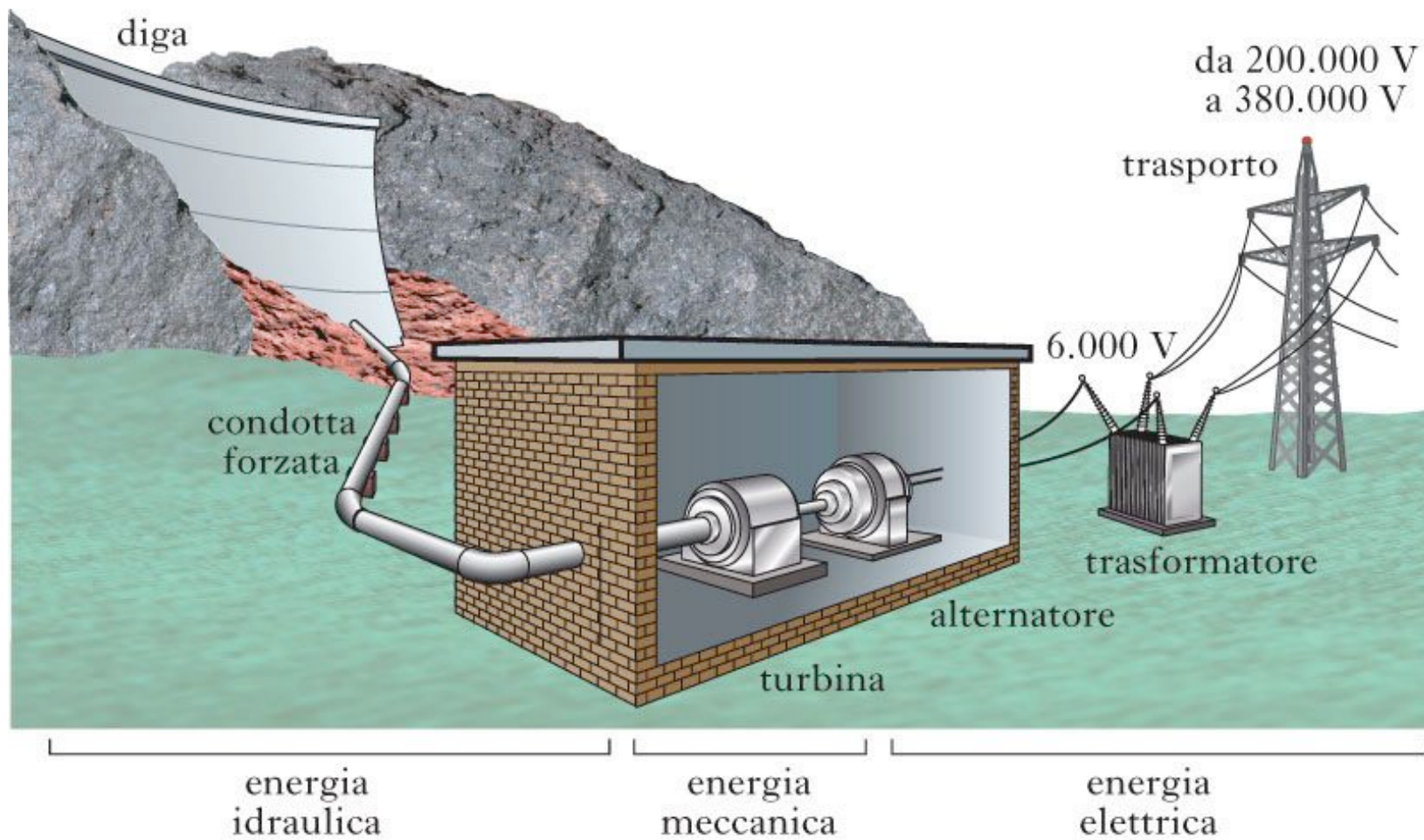
$$\frac{i_{2\text{eff}}}{i_{1\text{eff}}} = \frac{f_{1\text{eff}}}{f_{2\text{eff}}}$$

Questo risultato è importante nella distribuzione dell'energia elettrica su lunghe distanze.

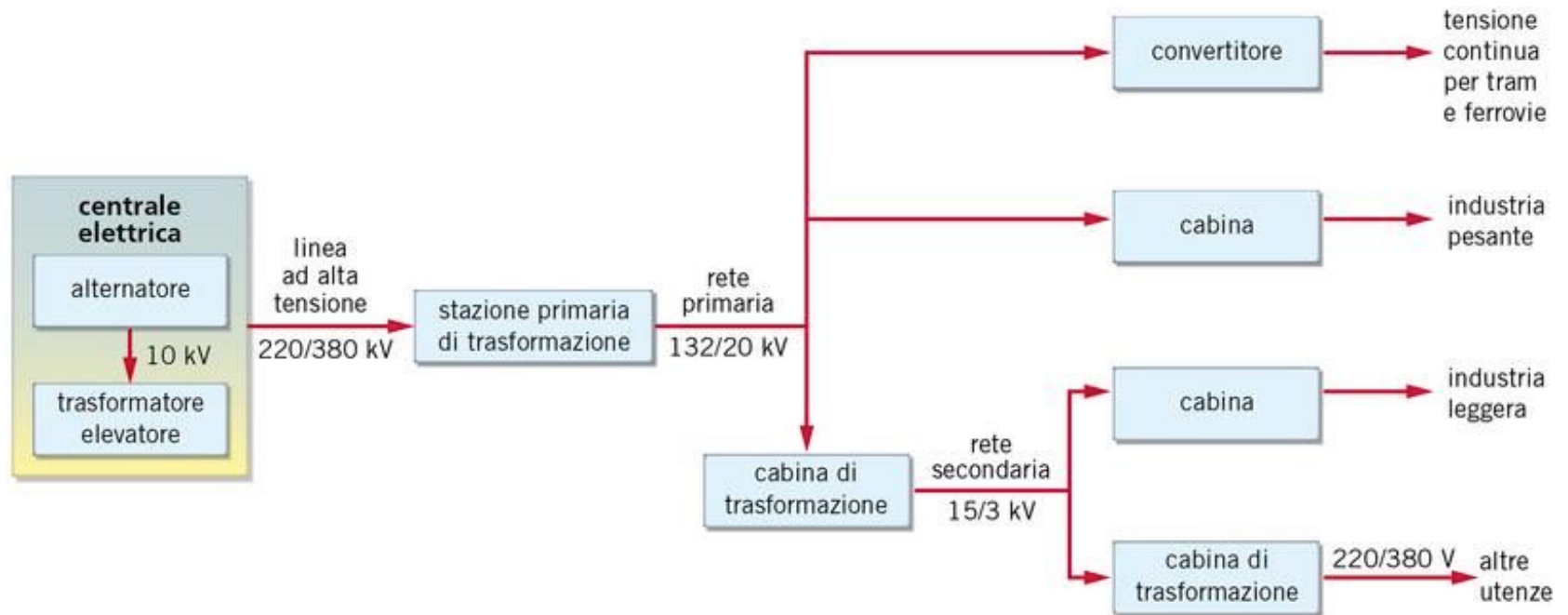
Infatti, l'energia prodotta nelle centrali elettriche deve essere trasportata su grandi distanze, e, a parità di potenza ( $P=VI$ ), è conveniente usare alta tensione (trasformatore elevatore) e bassa corrente, in modo da rendere minima la perdita di energia per effetto Joule nelle linee di trasmissione ( $P_j = Ri^2$ ).

Una volta giunta in prossimità del luogo di utilizzazione, il valore della forza elettromotrice viene abbassato (trasformatore abbassatore).

# TRASFORMATORE



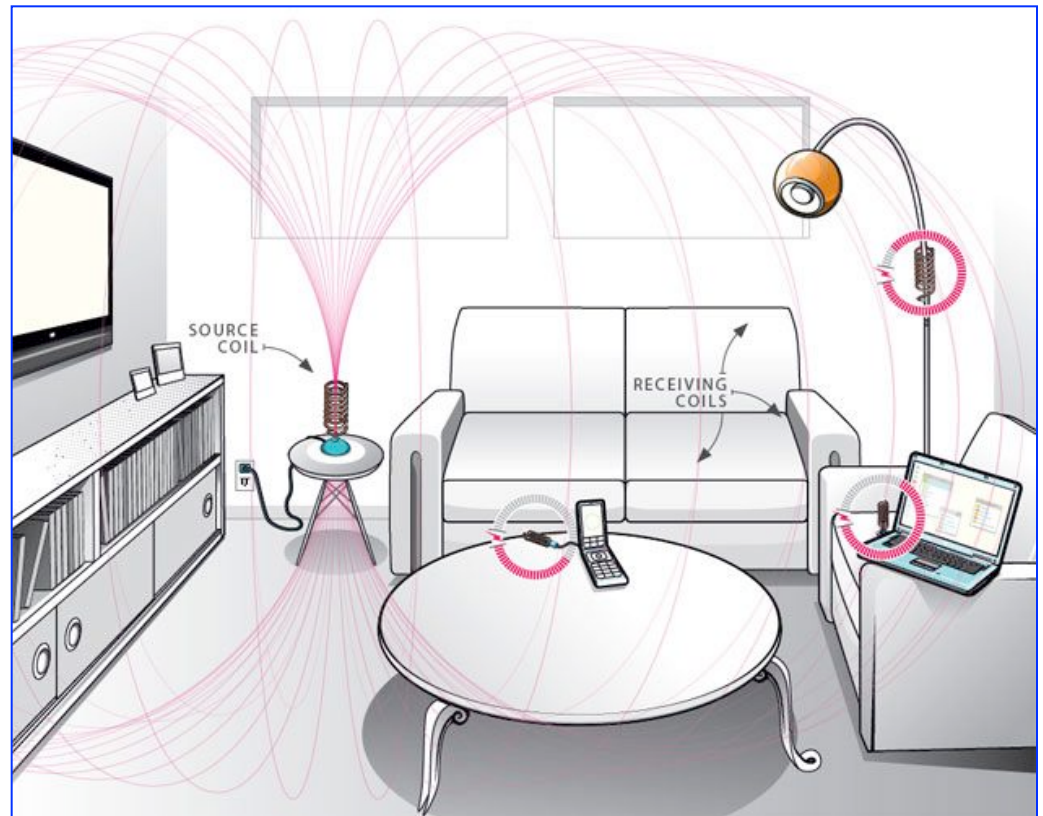
# TRASFORMATORE



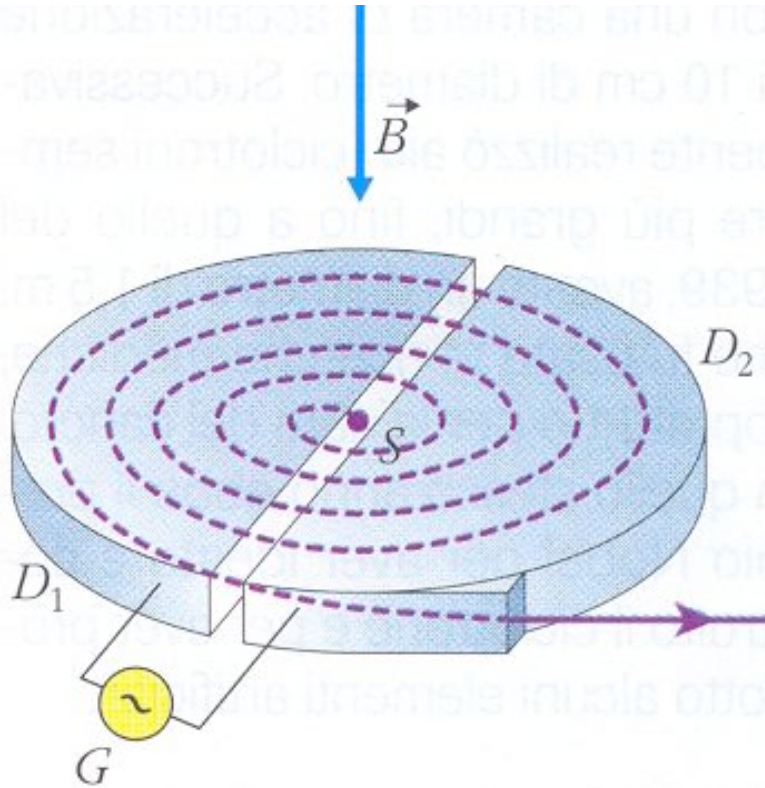
# TRASFORMATORE

Il metodo di trasmissione dell'energia senza fili sfrutta lo stesso fenomeno dell'induzione elettromagnetica che avviene in un trasformatore.

Nel prossimo futuro ricaricheremo il cellulare o il computer, o faremo funzionare altri dispositivi elettronici, senza connetterli alla presa elettrica.



# CICLOTRONE



L'acceleratore di particelle, chiamato **ciclotrone**, fu sviluppato nel 1930 dal fisico statunitense **Lawrence**.

Quando si trovano nell'intercapedine fra i due semidischi (elettrodi  $D_1$  e  $D_2$ ), le particelle cariche vengono accelerate da un campo elettrico.

Il campo magnetico ortogonale agli elettrodi ha la funzione di mantenere le particelle su un percorso circolare, in modo che possano essere sottoposte a successive accelerazioni, una ogni mezzo giro.

La ddp fra i due elettrodi deve essere alternata: quando delle particelle positive attraversano l'intercapedine da sinistra a destra bisogna che il campo elettrico sia diretto verso destra, mentre quando, dopo mezzo giro, la attraversano da destra a sinistra, il campo, e quindi anche la differenza di potenziale, deve essere invertito.

La frequenza di oscillazione della tensione applicata deve coincidere dunque con la frequenza di rotazione delle particelle.

Sotto tali condizioni, entro ciascuno dei due elettrodi le particelle cariche descrivono, con velocità sempre maggiore per effetto dell'accelerazione subita a ogni passaggio attraverso l'intercapedine, una successione di semicirconferenze di raggio crescente:

$$r = \frac{mv}{qB}$$

Arrivate alla periferia del sistema, le particelle vengono infine espulse per essere utilizzate.

La frequenza di rotazione:

$$f = \frac{qB}{2\pi m}$$

essendo indipendente dalla velocità e dal raggio della traiettoria, rimane costante durante l'intera permanenza delle particelle nel ciclotrone. Perciò la frequenza e la fase della tensione alternata, fissate all'inizio del processo di accelerazione, non necessitano di successivi aggiustamenti.

Tutto questo è vero finché la velocità  $v$  delle particelle si mantiene ben al di sotto della velocità della luce.

Al crescere di  $v$ , infatti, la massa di ciascuna particella aumenta secondo la relazione relativistica:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$m_0$  = massa a riposo  
della particella

L'incremento relativistico della massa, del tutto trascurabile a basse velocità, diventa tanto più sensibile quanto più  $v$  si avvicina a  $c$ .

Ma, con l'aumentare della massa diminuisce la frequenza  $f = qB/2\pi m$  del moto circolare. In questo modo non vi è più sincronismo fra il moto delle particelle e la tensione acceleratrice alternata, per cui, dopo un certo percorso, le particelle, anziché essere accelerate dal campo elettrico, vengono ostacolate durante il moto.

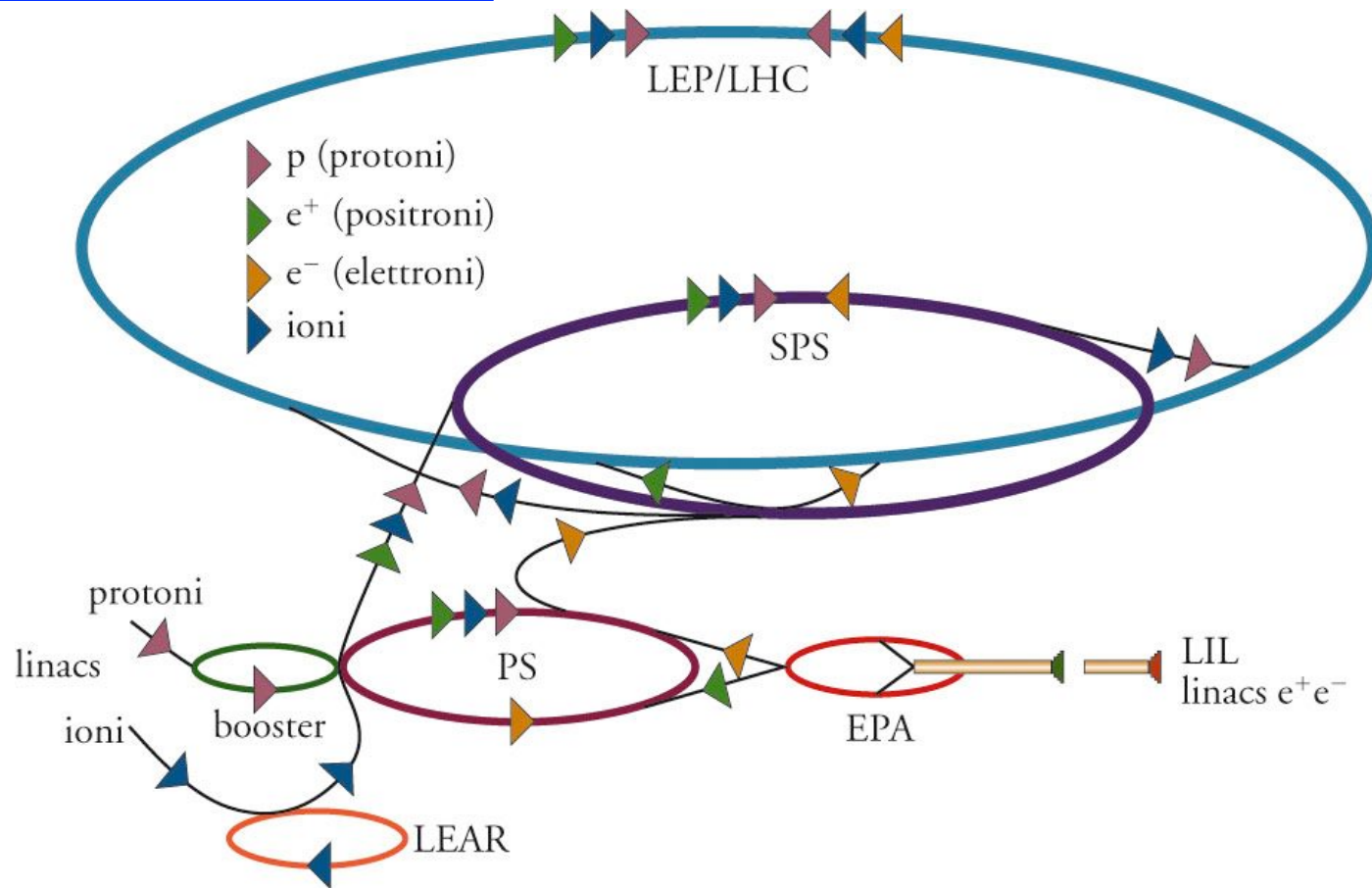
L'inconveniente viene eliminato attraverso un sistema elettronico che fa diminuire nel tempo la frequenza della tensione alternata, di pari passo con la frequenza di rotazione delle particelle. I ciclotroni così modificati prendono il nome di **sincrociclotroni**.

Un altro modo per ripristinare il sincronismo consiste nel ricorrere a un campo magnetico via via più grande, per compensare l'aumento della massa.

Gli acceleratori di questo tipo sono i **sincrotroni**, nei quali le particelle descrivono una traiettoria circolare di raggio costante.

Il protosincrotrone del CERN (Ginevra) ha un raggio di 1,1 km, e quello del *Fermilab* (vicino Chicago), ha un raggio di 1 km.

## CERN (Ginevra)



LIL iniettore linac del LEP  
 EPA accumulatore elettroni-positroni  
 PS sincrotrone a protoni  
 SPS supersincrotrone a protoni

LEP large electron-positron collider  
 LHC large hadron collider  
 LEAR anello di accumulazione di antiprotoni a bassa energia

# Esercizi

Determinare il numero complesso corrispondente alla tensione sinusoidale  $v(t)=10\text{sen}(1000t+30^\circ)$ .

La forma generale di un segnale sinusoidale è:

$$v(t) = V_0 \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

Il valore efficace del segnale sinusoidale rappresenta il modulo del numero complesso, mentre il suo argomento è  $\varphi$ :

$$V_{\text{eff}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 10 \text{ V} \quad \varphi = 30^\circ$$

La parte reale e immaginaria del numero complesso sono:

$$x = z \cos \varphi = V \cos \varphi = 7 \cos 30^\circ = 6 \text{ V}$$

$$x = z \sin \varphi = V \sin \varphi = 7 \sin 30^\circ = 3,5 \text{ V}$$

Il numero complesso corrispondente alla tensione sinusoidale è:

$$\overline{V} = x + iy = 6 + i3,5$$

Determinare l'espressione analitica di un segnale sinusoidale di frequenza 100 Hz e rappresentato da un numero complesso in coordinate polari (10; -45°).

Il valore massimo  $V_0$  del segnale è dato da:

$$V_{\text{eff}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_0 = \sqrt{2} V_{\text{eff}} = \sqrt{2} \cdot 10 = 14,1 \text{ V}$$

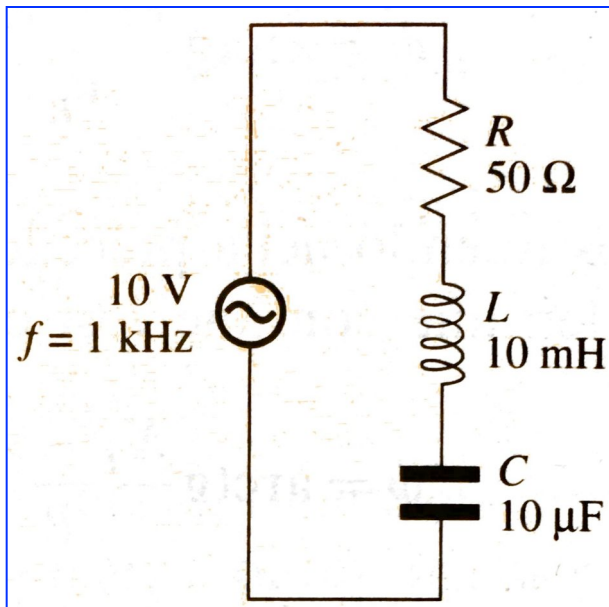
La pulsazione  $\omega$  vale:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 100 = 628 \text{ rad / s}$$

L'espressione analitica del segnale sinusoidale è:

$$v(t) = V_0 \text{sen}(\omega t + \varphi) = 14,1 \cdot \text{sen}(628t - 45^\circ)$$

Il circuito è alimentato da una tensione sinusoidale di valore efficace 10 V, frequenza 1 kHz e fase  $\varphi=0$ . Calcolare: 1) l'impedenza; 2) la corrente; 3) lo sfasamento tra tensione e corrente; 4) la caduta di tensione della rete; 5) il grafico vettoriale che mostra le tensioni e la corrente nel circuito.



1) Il modulo dell'impedenza è:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{50^2 + (62,8 - 15,9)^2} = 68,5 \, \Omega$$

$$X_L = \omega L = 2\pi \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 62,8 \, \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 15,9 \, \Omega$$

La fase (argomento) dell'impedenza è:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{62,8 - 15,9}{50} = 0,938 \Rightarrow \varphi = 43^\circ$$

L'espressione complessa dell'impedenza è:

$$\bar{Z} = (68,5; 43^\circ) \text{ coord. polari}$$

2) Il valore (efficace) della corrente è:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{10}{68,5} = 0,146 \text{ A} = 146 \text{ mA}$$

In forma complessa:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{V_0 e^{i\varphi_1}}{Z_0 e^{i\varphi_2}} = \frac{V_0}{Z_0} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{10}{68,5} e^{i(0 - 43^\circ)} = 0,146 e^{-i43^\circ} \Rightarrow \bar{I} = (0,146; -43^\circ)$$

3) Lo sfasamento tra tensione e corrente coincide con la fase dell'impedenza:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{62,8 - 15,9}{50} = 0,938 \Rightarrow \varphi = 43^\circ$$

La tensione anticipa di  $43^\circ$  la corrente (oppure la corrente è di  $43^\circ$  in ritardo sulla tensione)

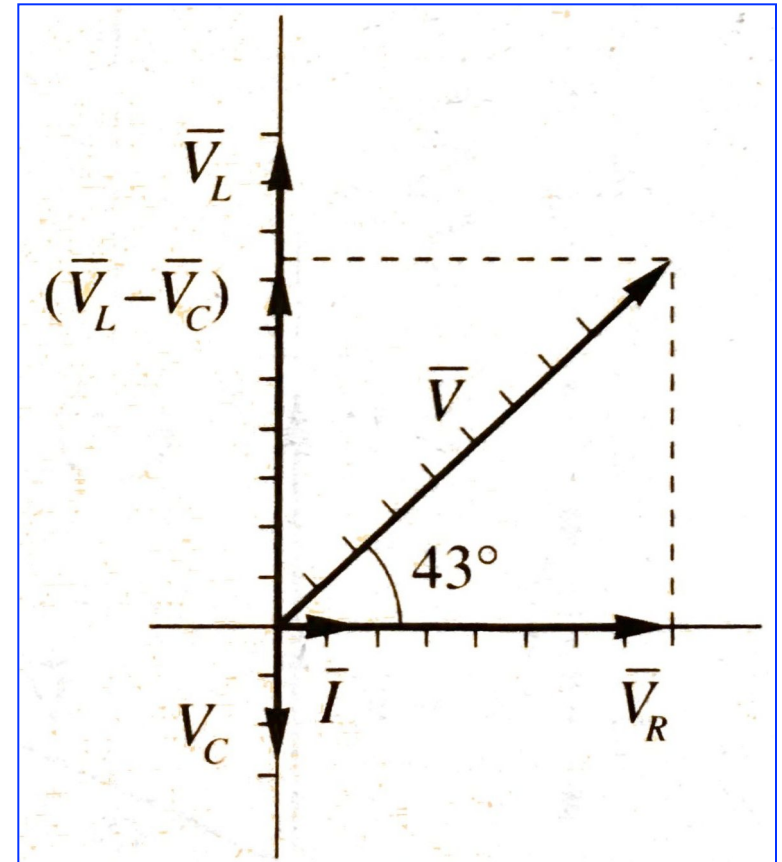
4) Il valore efficace della tensione su ogni elemento della rete è:

$$V_R = R \cdot I = 50 \cdot 0,146 = 7,3 \text{ V}$$

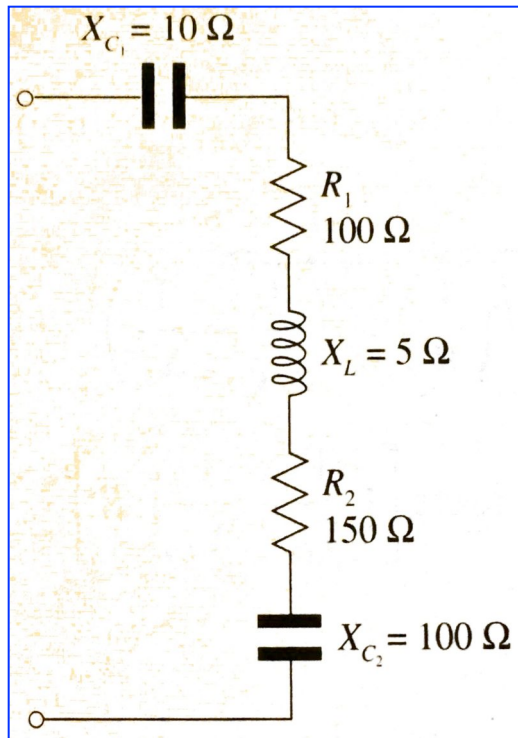
$$V_L = X_L \cdot I = 62,8 \cdot 0,146 = 9,16 \text{ V}$$

$$V_C = X_C \cdot I = 15,9 \cdot 0,146 = 2,3 \text{ V}$$

5) Diagramma  
vettoriale delle tensioni  
e della corrente:



Calcolare l'impedenza totale del circuito.



Poiché tutti gli elementi sono in serie, si applica la stessa regola dei circuiti in CC.

Si calcola la resistenza totale e la reattanza totale:

$$R_T = R_1 + R_2 = 100 + 150 = 250 \Omega$$

$$X_T = X_L - (X_{C1} + X_{C2}) = 5 - (10 + 100) = -105 \Omega$$

L'impedenza totale (modulo e argomento) vale:

$$Z = \sqrt{R_T^2 + X_T^2} = \sqrt{250^2 + 105^2} = 271 \, \Omega$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_T}{R_T} = \frac{-105}{250} = -0,42 \Rightarrow \varphi = -23^\circ$$

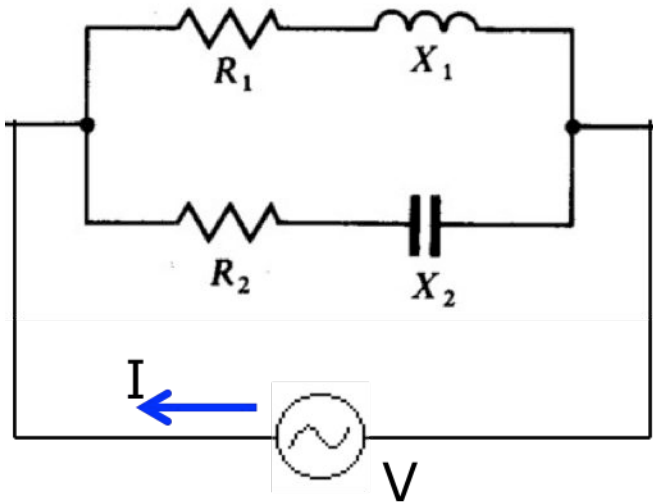
In forma complessa:

$$\underline{\underline{Z}} = R_T + iX_T = 250 - i105 \quad \text{forma algebrica}$$

$$\underline{\underline{Z}} = Z e^{i\varphi} = 271 e^{-i23^\circ} \quad \text{forma esponenziale}$$

$$\underline{\underline{Z}} = Z(\cos \varphi + i \sin \varphi) = 271 [\cos(-23^\circ) + i \sin(-23^\circ)]$$

Calcolare la corrente (valore efficace) totale.



$$\begin{aligned} R_1 &= 3 \, \Omega & R_2 &= 10 \, \Omega \\ C &= 0,6 \, \mu\text{F} & L &= 10 \, \text{mH} \\ V &= 125 \, \text{V} & f &= 50 \, \text{Hz} \end{aligned}$$

Poiché gli elementi sono in parallelo, si applica la stessa regola (con le impedenze espresse in forma complessa) dei circuiti in CC.

L'impedenza totale, in forma complessa è:

$$\bar{Z}_T = \frac{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = \frac{(R_1 + iX_1) \cdot (R_2 - iX_2)}{(R_1 + iX_1) + (R_2 - iX_2)} = 3,004 + i3$$

$$Z_T = \sqrt{3,004^2 + 3^2} = 4,24 \, \Omega$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{3,004} \cong 1 \Rightarrow \varphi \cong 45^\circ$$

$$X_1 = \omega L = 2\pi \cdot 50 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 3,14 \, \Omega$$

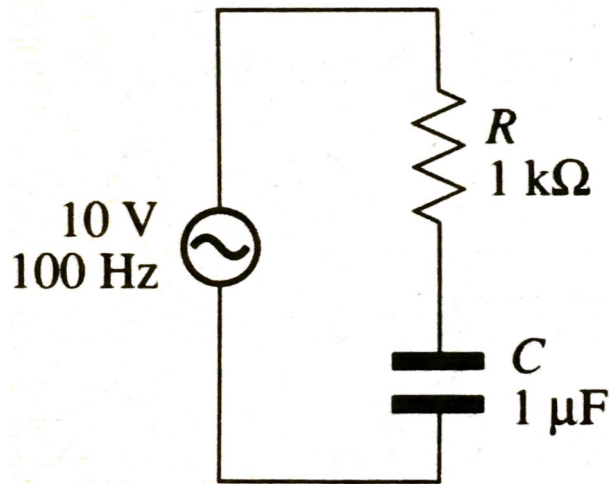
$$X_2 = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}} = 5308 \, \Omega$$

A questo punto, grazie alla legge di Ohm generalizzata ai circuiti in CA, calcoliamo la corrente erogata (valore efficace) dal generatore:

$$I = \frac{V}{Z_T} = \frac{125}{4,24} = 29,5 \text{ A}$$

L'angolo di sfasamento tra corrente e tensione coincide con la fase  $\varphi=45^\circ$  dell'impedenza totale.

Calcolare la potenza attiva, reattiva e apparente.



Determiniamo l'impedenza della rete:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_c^2} = \sqrt{1^2 + 1,5^2} = 1,8 \text{ k}\Omega$$

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 1,5 \text{ k}\Omega$$

La corrente erogata (valore efficace) vale:

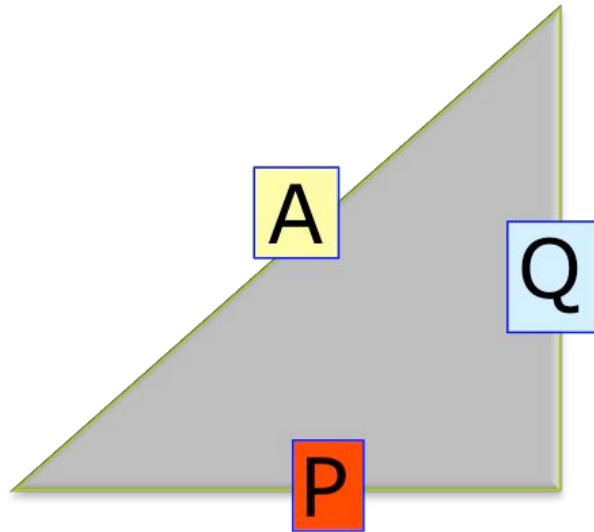
$$I = \frac{V}{Z_T} = \frac{10}{1,8} = 5,5 \text{ mA}$$

Abbiamo tutti gli elementi per calcolare le potenze:

$$P = RI^2 = 10^3 \cdot (5,5 \cdot 10^{-3})^2 = 30,2 \cdot 10^{-3} \text{ W} = 30,2 \text{ mW}$$

$$Q = X_c I^2 = 1,5 \cdot 10^3 \cdot (5,5 \cdot 10^{-3})^2 = 45,3 \cdot 10^{-3} \text{ VAR} = 45,3 \text{ mVAR}$$

$$A = VI = 10 \cdot 5,5 \cdot 10^{-3} = 55 \cdot 10^{-3} \text{ VA} = 55 \text{ mVA}$$

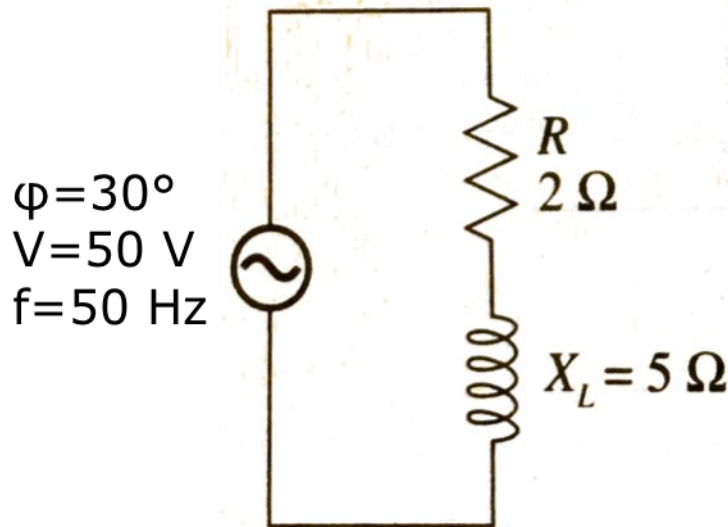


Forma complessa:

$$\bar{A} = P + iQ = 30,2 + i45,3$$

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Calcolare la potenza attiva, reattiva e apparente.



Determiniamo l'impedenza:

$$\bar{Z} = R + iX_L = 2 + i5$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = 5,4 \Omega$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L}{R} = \frac{5}{2} = 2,5 \Rightarrow \varphi = 68^\circ$$

La corrente erogata (valore efficace) vale:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{50}{5,4} = 9,3 \text{ A}$$

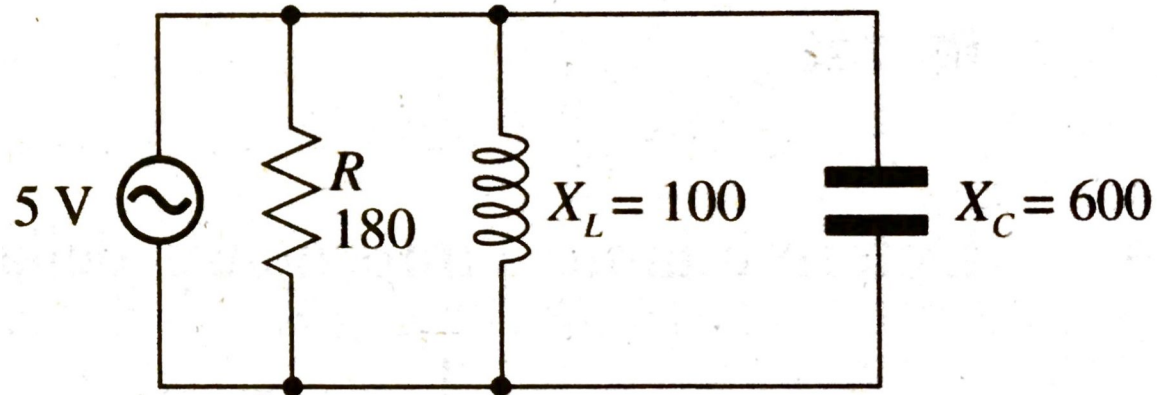
Abbiamo tutti gli elementi per calcolare le potenze. Si ricordi che l'angolo di sfasamento tra tensione e corrente coincide con quello dell'impedenza ( $\varphi=68^\circ$ ):

$$P = VI \cos \varphi = 50 \cdot 9,3 \cdot \cos 68^\circ = 174 \text{ W}$$

$$Q = VI \sin \varphi = 50 \cdot 9,3 \cdot \sin 68^\circ = 431 \text{ VAR}$$

$$A = VI = 50 \cdot 9,3 = 465 \text{ VA}$$

Calcolare la potenza attiva, reattiva e apparente.



Per il teorema di Boucherot, la potenza apparente totale è data dalla somma delle potenze apparenti nelle tre impedenze (nei tre rami del circuito):

$$\overline{A} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3$$

Calcoliamo le singole potenze apparenti.

Tenendo presente la forma complessa della potenza apparente, si ottiene:

$$\overline{A} = P + iQ$$

$$\overline{A}_1 = P_1 + i0 = \frac{V^2}{R}$$

$$\overline{A}_2 = 0 + iQ_L = i\frac{V^2}{X_L}$$

$$\overline{A}_3 = 0 - iQ_C = -i\frac{V^2}{X_C}$$

In conclusione:

$$\overline{A} = \sum_{k=1}^n \overline{A}_k = \sum_{k=1}^n P_k + i \sum_{k=1}^n Q_k = \frac{V^2}{R} + i \left( \frac{V^2}{X_L} - \frac{V^2}{X_C} \right)$$

Facendo i calcoli si ottiene:

$$\bar{A} = P + iQ = 0,138 + i0,209$$

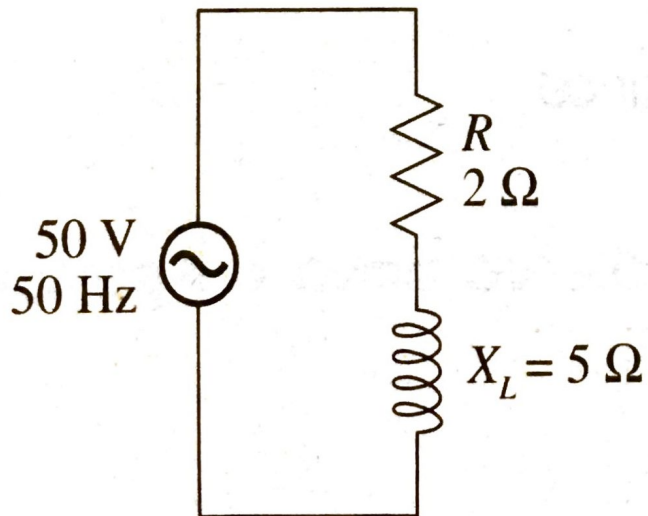
Quindi:

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{0,130^2 + 0,209^2} = 0,247 \text{ VA} = 247 \text{ mVA}$$

$$P = 0,138 \text{ W} = 138 \text{ mW}$$

$$Q = 0,209 \text{ VAR} = 209 \text{ mVAR}$$

Rifasare il circuito in modo da ottenere un fattore di potenza pari a 0,7.



Calcoliamo le potenze e il fattore di potenza del circuito:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = 5,4 \, \Omega$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{50}{5,4} = 9,3 \, A$$

## Esercizi

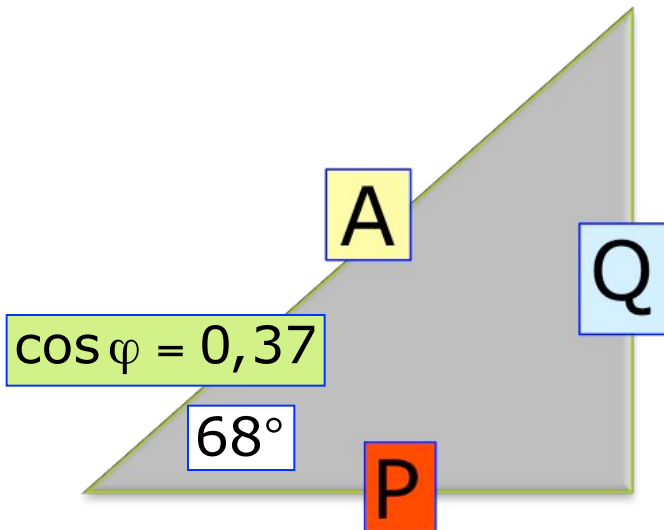
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L}{R} = \frac{5}{2} = 2,5 \Rightarrow \varphi = 68^\circ$$

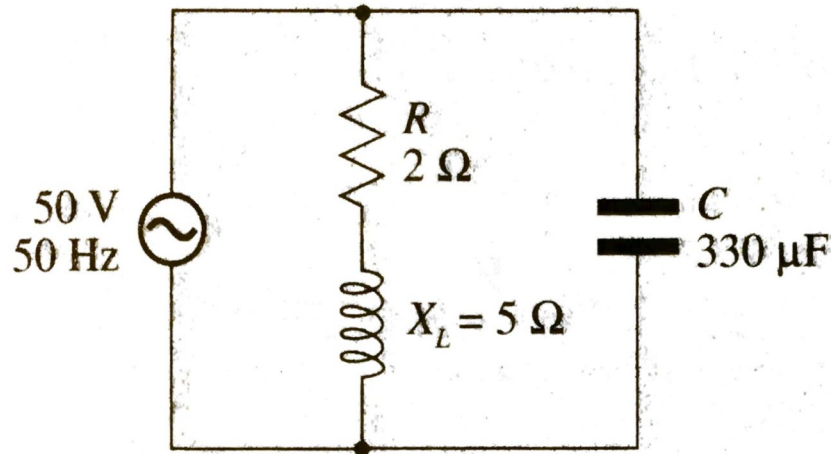
$$\cos \varphi = \cos 68^\circ = 0,37$$

$$A = VI = 50 \cdot 9,3 = 465 \text{ VA}$$

$$P = VI \cos \varphi = A \cos \varphi = 465 \cdot \cos 68^\circ = 172 \text{ W}$$

$$Q = VI \sin \varphi = A \sin \varphi = 465 \cdot \sin 68^\circ = 431 \text{ VAR}$$



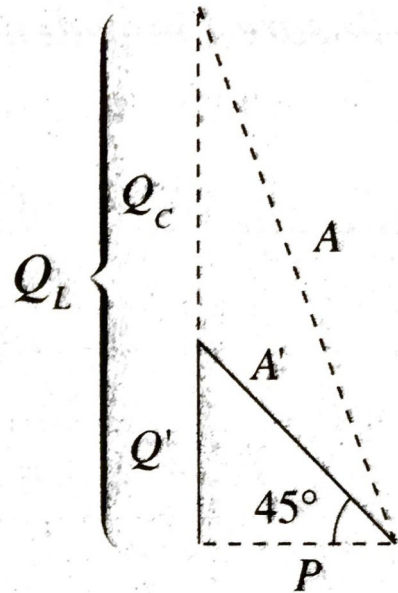


Rifasiamo il circuito inserendo la capacità opportuna, affinché il fattore di potenza assuma il valore di 0,7.

Poiché deve essere  $\cos\varphi' = 0,7$  ( $\varphi' = 45,5^\circ$ ), i nuovi valori della potenza apparente e reattiva (quella attiva non dipende da  $\cos\varphi'$ ) sono:

$$P = A' \cos \varphi' \Rightarrow A' = \frac{P}{\cos \varphi'} = \frac{172}{0,7} = 246 \text{ VA}$$

$$Q' = A \sin \varphi' = 246 \cdot \sin 45,5^\circ = 175 \text{ VAR}$$



La variazione di potenza reattiva conseguente al rifasamento coincide con la potenza reattiva del condensatore:

$$Q_c = Q_L - Q' = 431 - 175 = 256 \text{ VAR}$$

Quindi, il valore del condensatore da inserire per il rifasamento deve essere:

$$Q_c = \frac{V^2}{X_c} \Rightarrow X_c = \frac{V^2}{Q_c} = \frac{50^2}{256} = 9,8 \text{ } \Omega$$

$$X_c = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega X_c} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 9,8} \approx 330 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 330 \text{ } \mu\text{F}$$