

Esercizi

Crisi della
fisica classica

Esercizio

Se un elettrone viene colpito da un fotone, può assorbirlo senza emetterne un altro?

Soluzione

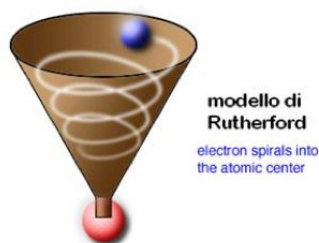
Nell'urto, l'elettrone cambia velocità, quindi ha un'accelerazione. Le equazioni di Maxwell ci dicono che una carica elettrica accelerata emette onde elettromagnetiche, cioè fotoni. Quindi la risposta è no.

Esercizio

Secondo la fisica classica, come dovrebbe essere fatto lo spettro di emissione di un elemento chimico?

Soluzione

La fisica classica non prevede grandezze quantizzate, ma solo grandezze (tipo l'energia o la quantità di moto) che variano con continuità, per cui lo spettro di emissione dovrebbe contenere radiazione elettromagnetica di tutte le frequenze,



eventualmente con intensità diverse. Per esempio, se prendiamo l'atomo d'idrogeno, l'elettrone che ruota è una carica accelerata per cui, secondo le equazioni di Maxwell, emette onde elettromagnetiche, cioè fotoni, e quindi dovrebbe "cadere sul nucleo", spiraleggiando, in un tempo di 10^{-6} s. Pertanto, lo spettro di emissione sarà uno spettro continuo che si estende al di là del visibile.

Esercizio

Nel calcolare l'energia dell'elettrone dell'atomo di idrogeno, non si dovrebbe tenere conto anche dell'energia potenziale gravitazionale dell'elettrone in presenza del nucleo?

Soluzione

In linea di principio sì, ma questo contributo è inferiore, di molti ordini di grandezza, a quello dato dall'energia potenziale elettrostatica e può quindi essere trascurato. Infatti, l'atomo d'idrogeno è composto da un protone e da un elettrone, per cui, note

le loro masse, le cariche e la distanza, l'intensità delle due forze, gravitazionale ed elettrostatica, sono:

$$F_g = G \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{-31}}{(1,20 \cdot 10^{-12})^2} \approx 7,0 \cdot 10^{-48} N$$

$$F_e = K \frac{e^2}{d^2} = 8,98 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{(1,20 \cdot 10^{-12})^2} \approx 1,6 \cdot 10^{-8} N$$

La forza elettrica è di 40 ordini di grandezza più intensa di quella gravitazionale, motivo per cui si trascura l'energia potenziale gravitazionale.

Esercizio

L'esperimento di Rutherford darebbe gli stessi risultati se si bombardasse la lamina d'oro con elettroni anziché con particelle alfa (nuclei di ^4He)?

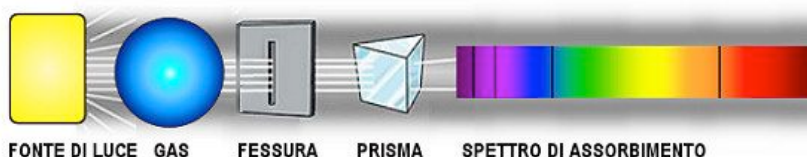
Soluzione

Gli elettroni hanno carica elettrica negativa e massa molto più leggera delle particelle alfa, per cui interagirebbero maggiormente con gli elettroni degli atomi della lamina e soprattutto non verrebbero respinti indietro dal nucleo (carico positivamente), che eserciterebbe su di essi, se riuscissero ad avvicinarsi, una forza attrattiva anziché repulsiva. La risposta, quindi, è no.

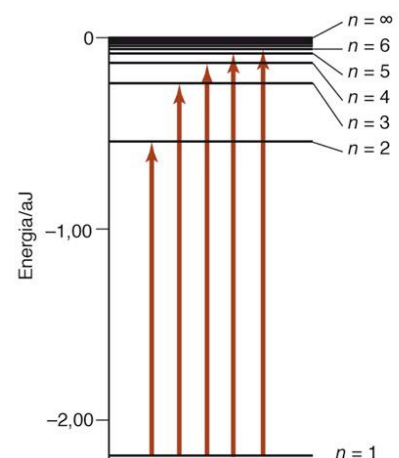
Esercizio

Lo spettro di assorbimento di una sostanza si ottiene inviando su di essa un fascio di luce di tutte le frequenze e osservando, dalla parte opposta, la luce che la attraversa. Come ti aspetti che sia lo spettro di assorbimento dell'idrogeno?

Soluzione



La luce di frequenza diversa da quella delle transizioni da un livello a un altro passa indisturbata, mentre quella con frequenza pari a una transizione può essere assorbita dall'atomo, quindi nello spettro di assorbimento queste frequenze, che sono uguali a quelle di emissione, saranno assenti o fortemente indebolite.



Esercizio

La distribuzione spettrale della luce emessa dal Sole, trattato come un corpo nero, presenta un massimo per la lunghezza d'onda $\lambda=500$ nm. Calcola la temperatura del Sole.

Soluzione

Nelle ipotesi di corpo nero, per ogni temperatura il massimo della curva di distribuzione spettrale si ha in corrispondenza di una particolare lunghezza d'onda, che risulta inversamente proporzionale alla temperatura stessa.

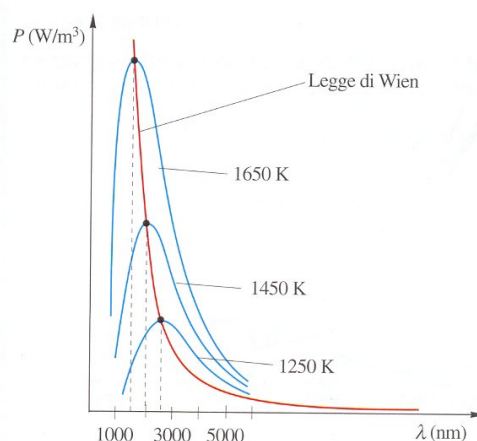
Il massimo della curva è dato dalla legge di Wien:

$$\lambda T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

da cui è possibile ricavare la temperatura superficiale del Sole è:

$$T = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{\lambda} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{500 \cdot 10^{-9}} = 5796 \text{ K}$$

dove a λ abbiamo sostituito il valore per il quale si ha il massimo di emissione.



Esercizio

La temperatura superficiale di Betelgeuse (una stella della costellazione di Orione) è $T=3,4 \times 10^3$ K. Di quale colore ci appare la stella?

Soluzione

Considerando la stella come un corpo nero, dalla legge di Wien si ricava la lunghezza d'onda corrispondente alla massima emissione:

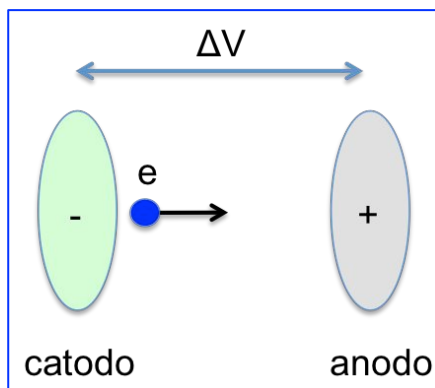
$$\lambda T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ mK} \Rightarrow \lambda = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{3,4 \cdot 10^3} = 8,2 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 820 \text{ nm}$$

La radiazione cade nello spettro non visibile ai nostri occhi, ossia nell'infrarosso. Ciò significa che le uniche radiazioni che siamo in grado di vedere sono quelle adiacenti alla zona del massimo, che corrispondono al rosso. Perciò la stella Betelgeuse deve apparire rossa, come si vede nella foto.



A seconda dell'intensità dello spettro luminoso le stelle si possono suddividere in tipi spettrali. Per esempio il Sole appartiene alla classe spettrale G, stelle con temperature superficiali comprese tra 4000 K e 6000 K, caratterizzate da righe spettrali che evidenziano la presenza di metalli e calcio. Betelgeuse fa parte della classe spettrale M (2000 K < T < 3700 K). La Stella Polare è di classe F, con temperature comprese tra 6000 K e 8000 K.

Esercizio



Un elettrone, emesso dal filamento di un diodo, viene accelerato con una tensione di 20,0 V. Determinare la velocità sull'anodo sapendo che la velocità sul catodo è nulla.

Soluzione

L'energia minima ΔE necessaria per estrarre un elettrone da un metallo è data da:

$$\Delta E = U_e - E_i$$

dove: E_i = energia totale posseduta dall'elettrone all'interno del metallo; U_e = energia potenziale dell'elettrone subito fuori dalla superficie del metallo

Questa energia ΔE , chiamata energia di estrazione o lavoro di estrazione, è legata al potenziale di estrazione ΔV dalla relazione:

$$\Delta V = \frac{\Delta E}{e} \quad \text{per cui:} \quad \Delta E = e \cdot \Delta V = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 20,0 = 32 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Dal teorema dell'energia cinetica, ΔE è uguale alla variazione di energia cinetica:

$$\Delta E = \Delta E_c$$

e poiché la velocità dell'elettrone sul catodo è nulla, otteniamo:

$$\Delta E = \frac{1}{2} mv^2$$

da cui ricaviamo il valore della velocità posseduta dall'elettrone quando raggiunge l'anodo:

$$\Delta E = E_c = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 32 \cdot 10^{-19}}{9,11 \cdot 10^{-31}}} = 2,65 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Esercizio

I potenziali di estrazione dello zinco e del rame sono, rispettivamente, 3,4 V e 4,4 V. Calcolare la velocità minima che deve possedere un elettrone ($e=1,6 \cdot 10^{-19}$ C; $m=9,108 \cdot 10^{-31}$ kg) perché possa uscire dai metalli.

Soluzione

Dalla definizione del potenziale di estrazione ricaviamo l'energia minima (energia di estrazione o lavoro di estrazione) che è necessario fornire ai metalli in questione perché si abbia emissione di un elettrone:

$$\Delta V = \frac{\Delta E}{e} \Rightarrow \begin{cases} \Delta E_{\text{Cu}} = e \cdot \Delta V_{\text{Cu}} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 4,4 = 7,04 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\ \Delta E_{\text{Zn}} = e \cdot \Delta V_{\text{Zn}} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3,4 = 5,44 \cdot 10^{-19} \text{ J} \end{cases}$$

Le energie ΔE_{Cu} e ΔE_{Zn} acquisite dagli elettroni non sono altro che le energie cinetiche con le quali gli elettroni vengono emessi dai due metalli, per cui dalla definizione dell'energia cinetica ricaviamo la velocità minima che deve possedere un elettrone perché possa uscire dal metallo:

$$\Delta E = E_c = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta E}{m}} \Rightarrow \begin{cases} v = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta E_{\text{Cu}}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7,04 \cdot 10^{-19}}{9,108 \cdot 10^{-31}}} = 1,24 \cdot 10^6 \text{ m/s} \\ v = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta E_{\text{Zn}}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5,44 \cdot 10^{-19}}{9,108 \cdot 10^{-31}}} = 1,09 \cdot 10^6 \text{ m/s} \end{cases}$$

Esercizio

Per effetto fotoelettrico gli elettroni sono estratti da una superficie solo se la luce incidente ha $\lambda \leq 546$ nm. a) Calcola la frequenza minima per l'estrazione; b) Stabilisci cosa succede se la superficie viene investita da un intenso fascio di luce gialla; c) Stabilisci cosa succede se la superficie viene investita da un debole fascio di luce violetta.

Soluzione

a) La frequenza minima affinché si abbia l'estrazione di elettroni dal metallo vale:

$$c = \lambda f \Rightarrow f_{\min} = \frac{c}{\lambda_{\max}} = \frac{3 \cdot 10^8}{546 \cdot 10^{-9}} = 5,49 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

b) Per la luce gialla ($\lambda_{\text{giallo}}=0,6 \mu\text{m}$) si ha:

$$f_{\text{giallo}} = \frac{c}{\lambda_{\text{giallo}}} = \frac{3 \cdot 10^8}{0,6 \cdot 10^{-6}} = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Poiché $f_{\text{giallo}} < f_{\text{min}}$ la luce gialla non produce l'effetto fotoelettrico.

c) Per la luce viola ($\lambda_{\text{viola}}=0,4 \mu\text{m}$) si ha:

$$f_{\text{viola}} = \frac{c}{\lambda_{\text{viola}}} = \frac{3 \cdot 10^8}{0,4 \cdot 10^{-6}} = 7,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Poiché $f_{\text{viola}} > f_{\text{min}}$ la luce viola produce l'effetto fotoelettrico.

Esercizio

Per effetto fotoelettrico gli elettroni sono estratti da una superficie solo se la luce incidente ha una lunghezza d'onda $\lambda \leq 546 \text{ nm}$. Calcola: a) l'energia minima dei fotoni per estrarre un elettrone; b) la quantità di moto dei fotoni con energia minima; c) il lavoro di estrazione per gli elettroni.

Soluzione

a) L'energia minima che devono possedere i fotoni per produrre l'effetto fotoelettrico, ossia estrarre un fotone, deve valere:

$$E_{\text{min}} = hf_{\text{min}} = h \cdot \frac{c}{\lambda_{\text{max}}} = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{546 \cdot 10^{-9}} = 364 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

b) La quantità di moto dei fotoni con energia minima è data da:

$$p = \frac{E_{\text{min}}}{c} = \frac{364 \cdot 10^{-21}}{3 \cdot 10^8} = 1,21 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s}$$

c) L'elettrone può uscire dal metallo soltanto se l'energia E del fotone è almeno uguale al lavoro di estrazione W_e , per cui

$$W_e = E_{\text{min}} = hf_{\text{min}} = 364 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

Esercizio

Una lampada con una potenza nominale di 60 W emette luce violetta ($\lambda=410$ nm) con un rendimento pari a 0,15. Quanti fotoni sono emessi dalla lampada in 1,0 s?

Soluzione

Poiché la lampada ha un rendimento del 15%, la potenza emessa è:

$$P_e = \eta P = 0,15 \cdot 60 = 9 \text{ W}$$

a cui corrisponde un'energia:

$$E_{tot} = P_e \cdot \Delta t = 9 \cdot 1 = 9 \text{ J}$$

L'energia di un fotone di luce violetta vale:

$$E = hf = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{410 \cdot 10^{-9}} = 4,85 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

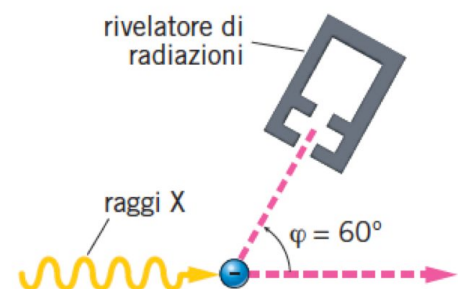
In definitiva, in 1 s la lampadina emette il seguente numero di fotoni:

$$N = \frac{E_{tot}}{E} = \frac{9}{4,85 \cdot 10^{-19}} = 1,9 \cdot 10^{19} \text{ fotoni}$$

Esercizio

In una ripetizione dell'esperimento di Compton, un fascio di raggi X viene diretto verso un bersaglio di grafite e si osserva la radiazione diffusa a un angolo di 60° rispetto alla direzione iniziale. Calcola la variazione di lunghezza d'onda osservata.

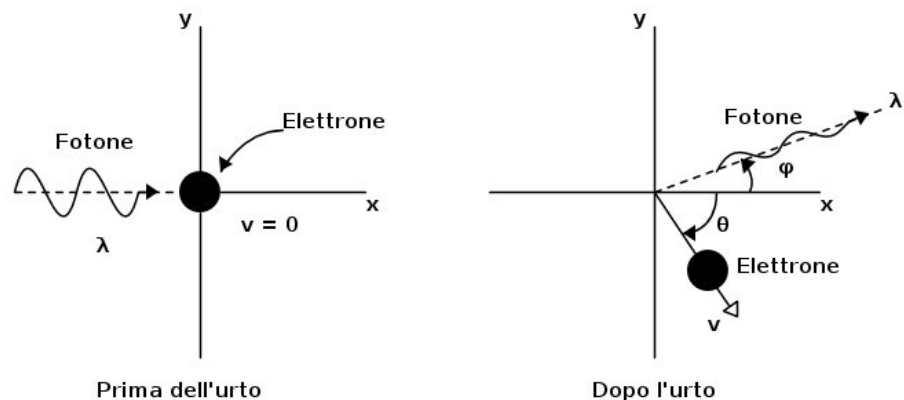
Soluzione



La variazione di lunghezza d'onda osservata (spostamento Compton della lunghezza d'onda), è data dalla seguente formula:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\varphi) = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} (1 - \cos 60^\circ) = 1,2 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Ossia, il fotone diffuso presenta una lunghezza d'onda maggiore del fotone incidente:



Esercizio

Un fotone con energia iniziale di 45 keV subisce una diffusione per effetto Compton e viene osservato a un angolo di 90° rispetto alla direzione iniziale della radiazione elettromagnetica. Calcola: a) la lunghezza d'onda iniziale del fotone e la sua energia dopo la diffusione; b) l'energia dell'elettrone dopo l'urto.

Soluzione

- a) Dalla relazione dell'energia del fotone ricaviamo la sua lunghezza d'onda iniziale:

$$E = hf = h \cdot \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{45 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 28 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 28 \text{ pm}$$

Mentre la sua lunghezza d'onda dopo diffusione a 90° vale:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\varphi) \Rightarrow \lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} = 28 \cdot 10^{-12} + \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} = 30,4 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 30,4 \text{ pm}$$

Quindi, l'energia del fotone diffuso è:

$$E' = hf' = h \cdot \frac{c}{\lambda'} = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{30,4 \cdot 10^{-12}} = 0,65 \cdot 10^{-14} \text{ J} = \frac{0,65 \cdot 10^{-14}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 41 \text{ keV}$$

- b) La variazione di energia del fotone, nel rispetto del principio di conservazione, è proprio l'energia acquistata dall'elettrone dopo l'urto:

$$K_e = \Delta E_{\text{fotone}} = E - E' = 45 - 41 = 4 \text{ keV}$$

Esercizio

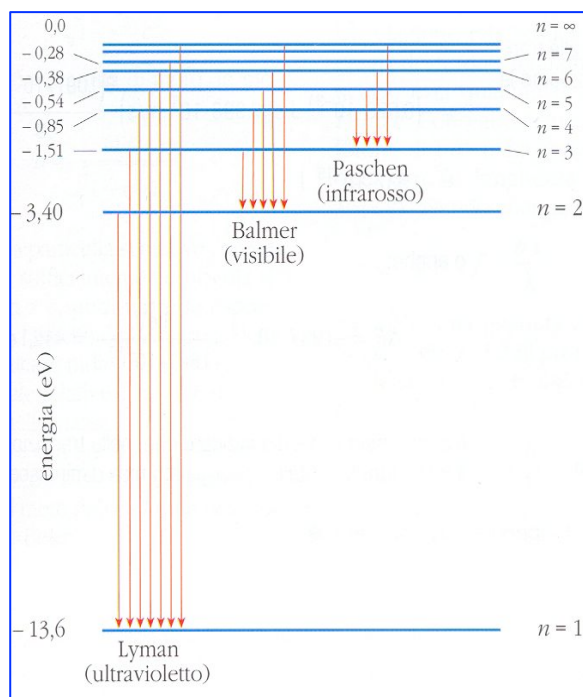
- a) Considera la serie spettrale di Balmer dell'atomo di idrogeno. Calcola i valori delle lunghezze d'onda delle righe dello spettro per $n=4$ e per $n=5$;
- b) Considera lo spettro dell'atomo di idrogeno nella serie di Lyman. Calcola il valore massimo e il valore minimo delle lunghezze d'onda delle righe di questo spettro;
- c) Considera la serie spettrale di Paschen. Calcola il valore della minima frequenza della serie. A quale lunghezza d'onda corrisponde? Qual è la minima lunghezza d'onda della serie di Paschen?

Soluzione

In tutti questi casi le frequenze (lunghezze d'onda) delle diverse onde elettromagnetiche emesse dall'atomo d'idrogeno sono calcolabili mediante la formula:

$$f = cR_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad R_H = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

con: m e n numeri interi, con $n > m$.



a) Per la serie di Balmer ($m=2$) si ha:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$n = 4 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 1,097 \cdot 10^7 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) = 0,205 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{1}{0,205 \cdot 10^7} = 4,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

$$n = 5 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 1,097 \cdot 10^7 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{25} \right) = 0,230 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{1}{0,230 \cdot 10^7} = 4,3 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

b) Per la serie di Lyman ($m=1$) il valore massimo della lunghezza d'onda corrisponde a $n=2$ (valore minimo)

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 0,823 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{1}{0,823 \cdot 10^7} = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Il valore minimo della lunghezza d'onda, invece, corrisponde a $n=\infty$ (valore massimo):

$$\frac{1}{\lambda_{\min}} = R_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty} \right) = 1,097 \cdot 10^{-7} m^{-1} \Rightarrow \lambda_{\min} = \frac{1}{1,097 \cdot 10^7} = 0,91 \cdot 10^{-7} m$$

c) Per la serie di Paschen ($m=3$) la frequenza minima si ottiene per $n=4$:

$$f_{\min} = cR_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right) = 1,6 \cdot 10^{14} Hz$$

a cui corrisponde il massimo della lunghezza d'onda per questa serie:

$$\lambda_{\max} = \frac{c}{f_{\min}} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,6 \cdot 10^{14}} = 1,9 \cdot 10^{-6} m$$

Il valore minimo della lunghezza d'onda, invece, corrisponde a $n=\infty$ (valore massimo):

$$\frac{1}{\lambda_{\min}} = R_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{\infty} \right) = 0,122 \cdot 10^{-7} m^{-1} \Rightarrow \lambda_{\min} = \frac{1}{0,122 \cdot 10^7} = 8,2 \cdot 10^{-7} m$$

Esercizio

In un esperimento si ottiene una serie spettrale la cui minima lunghezza d'onda è $\lambda_{\min}=2,28 \times 10^{-6} m$. Di quale serie si tratta? Qual è la minima frequenza della serie?

Soluzione

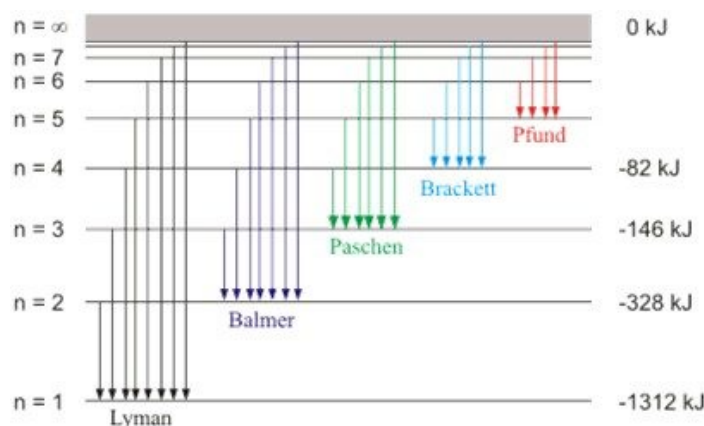
Le frequenze (lunghezze d'onda) della serie spettrale sono calcolabili mediante la seguente formula:

$$f = cR_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

con: m e n numeri interi, con $n > m$.

La minima lunghezza d'onda corrisponde a $n=\infty$ (valore massimo):

$$\frac{1}{\lambda_{\min}} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{\infty} \right) \Rightarrow \lambda_{\min} = \frac{m^2}{R_H} \Rightarrow m = \sqrt{\lambda_{\min} R_H} = \sqrt{2,28 \cdot 10^{-6} \cdot 1,097 \cdot 10^7} = 5$$



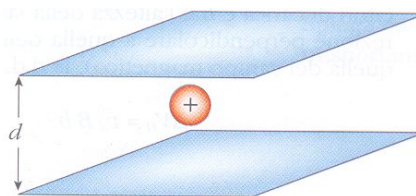
Si tratta della serie di Pfund, la cui frequenza minima è:

$$f_{\min} = cR_H \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} \right) = 4,0 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$$

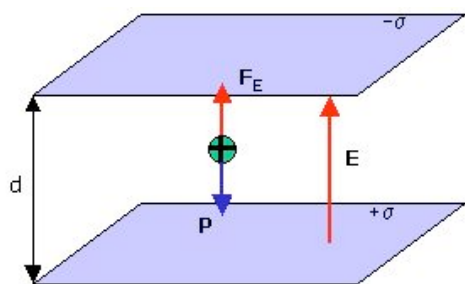
Siamo nella regione spettrale dell'infrarosso.

Esercizio

Una gocciolina d'olio di densità $\rho = 0,822 \text{ g/cm}^3$, con carica $q = 6,40 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ e raggio $r = 3,00 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$, viene posta fra due placche distanti fra loro $d = 5,00 \text{ mm}$. Calcolare la differenza di potenziale da applicare fra le placche affinché la goccia rimanga in equilibrio.



Soluzione



La goccia rimane in equilibrio se la forza peso **P**, diretta verso il basso, viene equilibrata dalla forza elettrica **F_E**, diretta verso l'alto. Affinché ciò avvenga, le placche devono essere caricate come in figura e quindi il campo elettrico **E** diretto dalla placca positiva a quella negativa. Dalla condizione di equilibrio calcoliamo il modulo del campo elettrico:

$$F_E = P \Rightarrow qE = mg \Rightarrow E = \frac{mg}{q} = \frac{93 \cdot 10^{-18} \cdot 9,81}{6,40 \cdot 10^{-19}} = 1430 \text{ V/m} = 1,43 \text{ kV/m}$$

$$\text{dove: } V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (3,00 \cdot 10^{-5})^3 = 113 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^3 = 113 \cdot 10^{-24} \text{ m}^3$$

$$m = \rho \cdot V = 0,822 \cdot 113 \cdot 10^{-15} = 93 \cdot 10^{-15} \text{ g} = 93 \cdot 10^{-18} \text{ kg}$$

Noto il campo elettrico, la differenza di potenziale da applicare fra le placche affinché la goccia rimanga in equilibrio è dato da:

$$V = Ed = 1,43 \cdot 10^3 \cdot 5,00 \cdot 10^{-3} = 7,15 \text{ V}$$

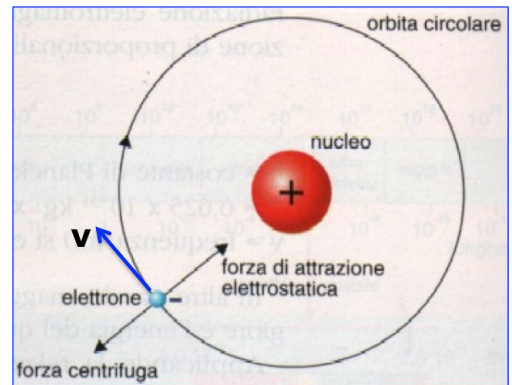
Esercizio

L'elettrone di un atomo d'idrogeno si trova a una distanza $r=8,5 \times 10^{-10}$ m dal nucleo. Calcola la sua velocità e l'energia totale:

Soluzione

Risolviamo il problema applicando al modello planetario dell'atomo d'idrogeno le leggi della meccanica e dell'elettromagnetismo. Secondo tale modello, l'atomo di idrogeno è composto da un elettrone di massa m_e e carica $-e$ che percorre (con una velocità di modulo v) una circonferenza di raggio r attorno a un nucleo di carica $+e$.

Un moto circolare uniforme richiede la presenza di una forza centripeta che mantenga il punto materiale m_e sulla circonferenza:



$$F_c = m_e a_c = m_e \frac{v^2}{r}$$

Nel caso dell'elettrone, tale forza è rappresentata dall'attrazione di Coulomb:

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

Quindi:

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

da cui è possibile ricavare la velocità:

$$v = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e r}} = \sqrt{9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 8,5 \cdot 10^{-10}}} = 5,5 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

Sempre dalla formula precedente è possibile ricavare il quadrato della velocità e quindi l'energia cinetica:

$$v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{e^2}{r} \quad K = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

L'energia potenziale, invece, è data da:

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

L'energia totale del sistema elettrone-nucleo è:

$$E_{tot} = K + U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = -4,5 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{8,5 \cdot 10^{-10}} = 1,36 \cdot 10^{-19} J$$

L'energia totale è negativa in quanto il sistema è legato.

Ovviamente questo modello non è realistico in quanto l'atomo con l'elettrone stazionario disposto intorno al nucleo positivo sarebbe instabile, perché l'elettrone con la sua carica negativa sarebbe attratto verso il nucleo. Inoltre, l'elettrone, con il suo moto circolare, subisce un'accelerazione per cui, in base alle leggi di Maxwell, emette continuamente energia sotto forma di radiazione elettromagnetica, per cui, in un tempo di 10^{-6} s, seguendo una traiettoria a spirale, "cadrebbe sul nucleo".

Esercizio

Nel modello di Bohr dell'atomo d'idrogeno, calcolare il raggio dell'orbita dell'elettrone quando si trova nello stato fondamentale e la sua corrispondente energia. Se l'elettrone salta sull'orbita caratterizzata dal numero quantico principale $n=2$, quanto vale il suo raggio e l'energia corrispondente.

Soluzione

I valori dell'energia (livelli energetici) e dei raggi per gli stati stazionari permessi per l'elettrone nell'atomo di idrogeno, ossia le orbite sulle quali l'elettrone è libero di muoversi senza irradiare energia, sono dati da:

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \quad r_n = (5,29 \cdot 10^{-11}) n^2$$

- Il raggio dell'orbita dell'elettrone (raggio di Bohr), e la sua corrispondente energia, quando si trova nello stato fondamentale ($n=1$), valgono:

$$E_1 = -13,6 \text{ eV} \quad r_1 = 5,29 \cdot 10^{-11} m$$

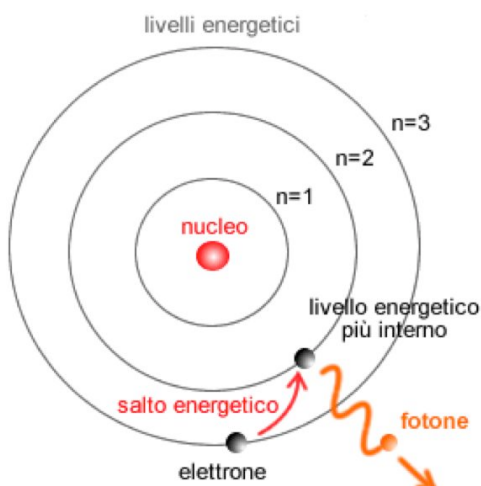
- Il raggio dell'orbita dell'elettrone e la sua corrispondente energia, quando si trova nello stato eccitato ($n=2$), valgono:

$$E_2 = -\frac{13,6}{2^2} = 3,4 \text{ eV} \quad r_2 = (5,29 \cdot 10^{-11}) \cdot 2^2 = 21,2 \cdot 10^{-11} m$$

Esercizio

I modelli che descrivono la struttura atomica spiegano la forma e le caratteristiche degli spettri atomici, nei quali ciascuna riga corrisponde alla transizione di un elettrone da un'orbita all'altra. Calcola la frequenza corrispondente alla transizione dell'elettrone dalla terza orbita allo stato fondamentale nell'atomo di idrogeno. Si tratta di radiazione visibile?

Soluzione



Un fotone è emesso da un atomo quando un suo elettrone passa da un'orbita permessa di energia maggiore (nel nostro caso E_3) a un'altra orbita permessa di energia minore (nel nostro caso lo stato fondamentale E_1).

La differenza di energia (salto energetico):

$$\Delta E = E_3 - E_1$$

è liberata sotto forma di un fotone di frequenza:

$$\Delta E = hf \Rightarrow f = \frac{\Delta E}{h}$$

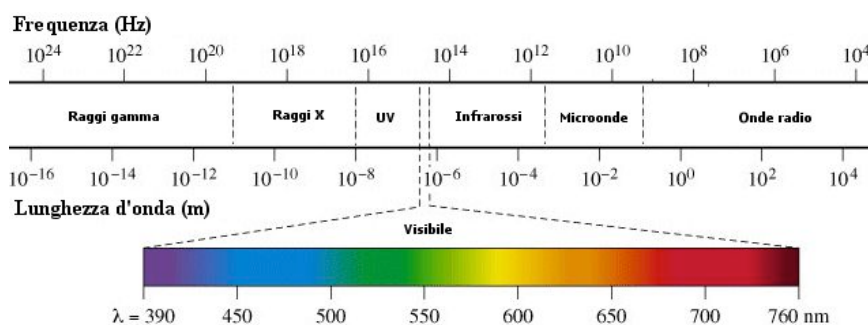
Passiamo ai calcoli. La terza orbita è caratterizzata dal numero quantico $n=3$, per cui il valore dell'energia (livello energetico) corrispondente è:

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} \Rightarrow E_3 = \frac{1}{9} E_1$$

quindi, la differenza di energia vale:

$$\Delta E = \frac{1}{9} E_1 - E_1 = -\frac{8}{9} E_1 = -\frac{8}{9} \cdot 13,6 = -12,1 \text{ eV} = 19,3 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

e viene liberata sotto forma di un fotone di frequenza:



$$f = \frac{19,3 \cdot 10^{-19}}{6,626 \cdot 10^{-34}} \approx 3 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

Osservando lo spettro elettromagnetico, non si tratta di luce visibile, ma di radiazione ultravioletta.

Esercizio

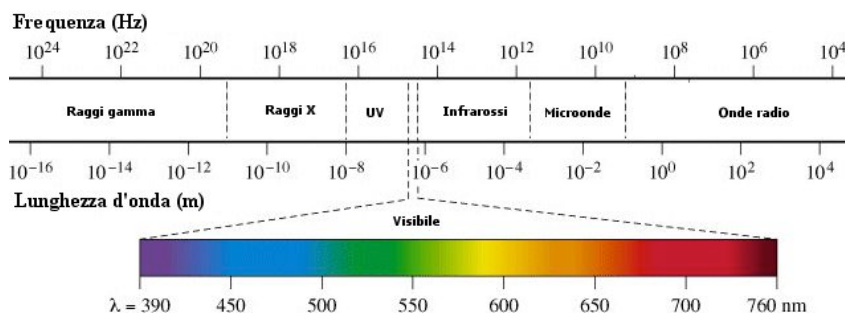
Un elettrone salta dall'orbita con numero quantico $n=2$ all'orbita con numero quantico $n=1$, ed emette un fotone che appartiene alla serie di Lyman. Calcola la frequenza e la lunghezza d'onda del fotone. Indica la banda dello spettro elettromagnetico a cui appartiene la radiazione emessa.

Soluzione

La frequenza del fotone emesso dall'atomo quando un suo elettrone passa da un'orbita permessa di energia maggiore (E_2) a un'altra orbita permessa di energia minore (lo stato fondamentale E_1), è data da:

$$f = cR_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) = 3 \cdot 10^8 \cdot 1,097 \cdot 10^7 \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 2,47 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

che corrisponde a una lunghezza d'onda:



$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{2,47 \cdot 10^{15}} = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Osservando lo spettro elettromagnetico, si tratta di radiazione ultravioletta.

Esercizio

Un atomo di idrogeno, inizialmente fermo, salta dall'orbita con $n=3$ a quella con $n=1$. Calcola: la lunghezza d'onda del fotone emesso. La velocità di rinculo dell'atomo.

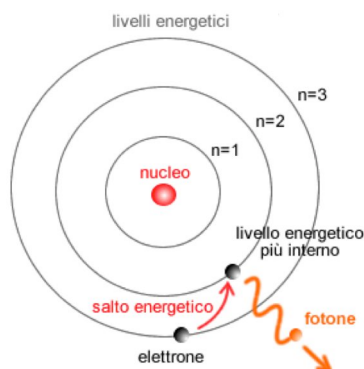
Soluzione

La frequenza, e quindi la lunghezza d'onda, del fotone emesso dall'atomo quando l'elettrone passa dall'orbita con $n=3$ allo stato fondamentale con $n=1$, vale:

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{19,3 \cdot 10^{-19}}{6,63 \cdot 10^{-34}} = 2,92 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \quad \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{2,92 \cdot 10^{15}} = 1,03 \cdot 10^{-7} \text{ (ultravioletto)}$$

dove il salto energetico ΔE è stato così calcolato:

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} \Rightarrow E_3 = \frac{1}{9} E_1 \quad \Delta E = E_3 - E_1 = \frac{1}{9} E_1 - E_1 = -\frac{8}{9} E_1 = \frac{8}{9} \cdot 13,6 = 12,1 \text{ eV} = 19,3 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$



Per il principio di conservazione della quantità di moto si ha:

$$|p_{\text{fotone}}| = |p_{\text{atomo}}|$$

Poiché:

$$p_{\text{fotone}} = \frac{h}{\lambda}$$

la velocità di rinculo dell'atomo è data da:

$$p_{\text{atomo}} = p_{\text{fotone}} = m_{\text{atomo}} v_{\text{atomo}} \Rightarrow v_{\text{atomo}} = \frac{p_{\text{fotone}}}{m_{\text{atomo}}}$$

Passando ai calcoli:

$$v_{\text{atomo}} = \frac{h}{\lambda \cdot m_{\text{atomo}}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{1,03 \cdot 10^{-7} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}} = 3,9 \text{ m/s}$$

Esercizio

Una piccola lastra di rame, di massa $m=20,0 \text{ g}$ e calore specifico $c=0,092 \text{ kcal/(kg}^\circ\text{C)}$, aumenta la sua temperatura di $2,0 \text{ }^\circ\text{C}$ quando è investita dalla radiazione infrarossa proveniente da una stufa. La frequenza della radiazione incidente è di $3,0 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$. Calcola il numero di fotoni che hanno interagito con il rame provocandone il riscaldamento.

Soluzione

Per la legge fondamentale della termologia, l'energia assorbita dalla lastra di rame è:

$$Q = mc\Delta T = 20,0 \cdot 10^{-3} \cdot 0,092 \cdot 2 = 3,68 \text{ cal} = 3,68 \cdot 4,184 = 15,4 \text{ J}$$

L'energia di un fotone vale:

$$E = hf = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3,0 \cdot 10^{13} \approx 2 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

Quindi, il numero di fotoni che hanno interagito con gli atomi della lastra di rame sono:

$$N = \frac{Q}{E} = \frac{15,4}{2 \cdot 10^{-20}} = 7,7 \cdot 10^{20} \text{ fotoni}$$

Esercizio

Un fotone che possiede un'energia di 0,8 MeV, perde un terzo della sua energia iniziale per effetto Compton e viene diffuso. Calcola l'angolo di diffusione.

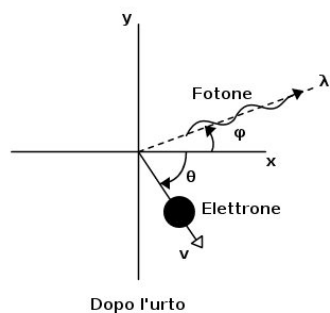
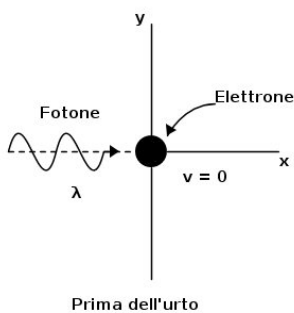
Soluzione

Indichiamo con E_1 l'energia iniziale del fotone:

$$E_1 = 0,8 \text{ MeV} = 0,8 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 1,28 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

Se per effetto Compton perde $1/3$ della sua energia, il fotone diffuso avrà un'energia E_2 pari a:

$$E_2 = E_1 - \frac{1}{3}E_1 = \frac{2}{3}E_1 = \frac{2}{3} \cdot 1,28 \cdot 10^{-13} = 0,85 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$



L'angolo di diffusione del fotone si ricava dalla formula dello spostamento Compton della lunghezza d'onda:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\varphi) \Rightarrow \cos\varphi = 1 - \frac{m_e c \Delta\lambda}{h}$$

Però ci servono le lunghezze d'onda del fotone incidente e quello diffuso, che sono associate alle energie E_1 ed E_2 dalle relazioni:

$$E_1 = hf_1 = h \frac{c}{\lambda_1} \quad E_2 = hf_2 = h \frac{c}{\lambda_2}$$

Passando ai calcoli:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{hc}{E_1} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,28 \cdot 10^{-13}} = 1,55 \cdot 10^{-12} \text{ m} \\ \lambda' = \frac{hc}{E_2} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0,85 \cdot 10^{-13}} = 2,33 \cdot 10^{-12} \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 0,78 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{m_e c \Delta\lambda}{h} = 1 - \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 0,78 \cdot 10^{-12}}{6,63 \cdot 10^{-34}} = 0,68 \Rightarrow \varphi = \arccos(0,68) = 47^\circ$$